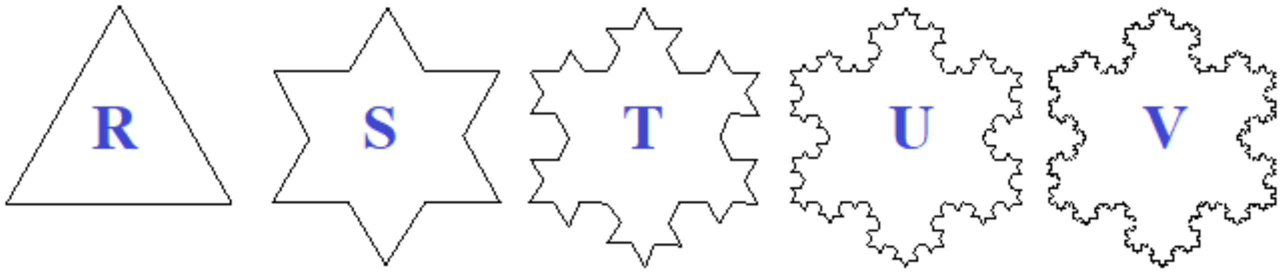
Matériel : une photocopie de ces feuilles, une feuille A4, un morceau de papier calque, un crayon mine, quelques crayons de couleur, une gomme, une règle, une équerre et un compas par élève

CM1-CM2 - Une fractale : le flocon de von Koch

Lis la partie culturelle sur les fractales. Tu verras comment elles sont construites et quelques exemples que l'on trouve dans la nature ou que l'homme a fabriquées.

A) Nous allons nous interroger sur la mesure de l'aire de chaque fractale R, S, T, U et V :



Voici le cercle $\mathcal{C}_1$ **.**

1) Reproduis-le en positionnant du papier calque dessus et place-le ensuite sur chacune des figures R, S, T, U,V**. Surligne la réponse qui te semble exacte.**

- Aucune des figures R, S, T, U ou V n'est contenue dans le cercle $\mathcal{C}_1$
- Toutes les figures R, S, T, U et V sont contenues dans le cercle $\mathcal{C}_1$.
- Seulement quelques-unes des figues R, S, T, U et V sont contenues dans le cercle $\mathcal{C}_1$.

2) Que peux-tu en déduire sur la mesure de l'aire de chaque figure R, S, T, U ou V par rapport à l'aire du disque délimité par le cercle $\mathcal{C}_1$ **? Surligne la réponse qui te semble exacte. Le disque** $\mathcal{D}$ **est celui qui est délimité par** $\mathcal{C}_1$.

- Toutes les figures R, S, T, U et V ont une mesure d'aire supérieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
- Quelques figures R, S, T, U ou V ont une mesure de l'aire inférieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
- Toutes les figures R, S, T, U et V ont une mesure d'aire inférieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$.

3) Imagine la figure fractale « W » qui suivrait la fractale « V ». Surligne la réponse qui te semble exacte à chacune des questions suivantes :

A ton avis, est-ce que cette figure « W » serait contenue dans le cercle $\mathcal{C}_1$? oui non

A ton avis, est-ce que la mesure de l'aire de la figure « W » serait :

- Inférieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$?
- Supérieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$?
- Égale à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$?

4) **Nous allons essayer de vérifier nos hypothèses en traçant des fractales. Construis au crayon mine et au compas sur du papier blanc de format A4, un triangle équilatéral de 18 cm de côté. Ce sera ta fractale F1 que tu transformeras par la suite.**

- Trace un segment [AB] de 18 cm de côté.
- Règle l'écartement du compas à 18 cm, mets sa pointe sur l'extrémité A du segment et trace un arc de cercle. Recommence à l'extrémité B du segment pour trouver le point d'intersection « I » entre les deux arcs de cercle.
- Relie au crayon mine les points A, B et I pour former le triangle de base. On le nommera F1 comme « Fractale 1 ».
- Avec ton équerre et ta règle, trace les hauteurs de ce triangle. On appellera « J » leur point d'intersection.
- Mets la pointe du compas sur le point « J » et trace le cercle $\mathscr{C}_2$ passant par les sommets du triangle F1. Puis transforme chaque côté du triangle pour faire apparaitre dans la fractale F1, la fractale F2, puis F3 et enfin F4. Utilise un crayon de couleur différent par fractale.

<u>Conclusion</u> : Toutes les figures F1, F2, F3, F4 et sont contenues dans le cercle $\mathscr{C}_2$.
Donc il semble que la mesure de l'aire des fractales issues du triangle F1 sera toujours ……………………… à la mesure de l'aire du disque passant par les sommets du triangle F1.

B) Nous allons nous interroger maintenant sur les mesures de périmètre des fractales F1, F2, F3, F4

1) Surligne la réponse qui te semble exacte.

- On peut ranger les mesures de périmètre des figures **F1, F2, F3, F4** dans l'ordre suivant :
  $P_{F1} < P_{F2} < P_{F3} < P_{F4}$
- On peut ranger les mesures de périmètre des figures **F1, F2, F3, F4** dans l'ordre suivant :
  $P_{F1} > P_{F2} > P_{F3} > P_{F4}$
- On ne peut pas ranger facilement les mesures de périmètre des figures **F1, F2, F3, F4** les unes par rapport aux autres.

2) Tu vas vérifier ton impression en calculant les périmètres P_{F1} de la fractale F1, P_{F2} de la fractale F2 et P_{F3} de la fractale F3.

P_{F1} = ……+……+……= 3 x .... = ………....

P_{F2} =……………………………………………………………………………..

P_{F3} =……………………………………………………………………………………………..

Compare les mesures des périmètres que tu as calculés et complète la conclusion suivante.

<u>Conclusion</u> : La mesure du périmètre de la fractale F_{n+1} issue de la transformation de la fractale F_n semble toujours ……………………… à la mesure du périmètre de la fractale F_n.

Une autre fractale : le triangle de Sierpinski

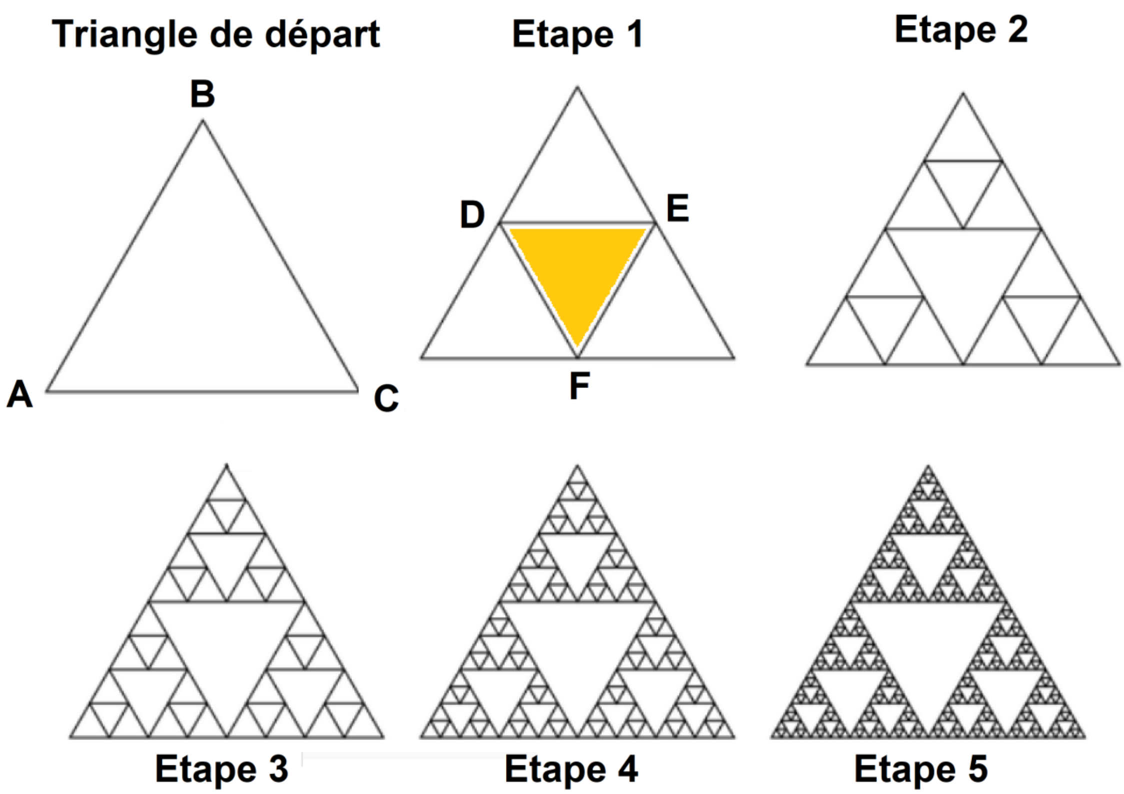
Lis la partie culturelle sur les fractales. Tu verras comment elles sont construites et quelques exemples que l'on trouve dans la nature ou que l'homme a fabriquées.

Le triangle de Sierpinski est obtenu en partant d'un triangle équilatéral. Voici le programme pour construire un triangle équilatéral ABC de 16 cm de côté avec ton compas.

- Sur une feuille de format A4, trace la base AC de 16 cm.
- Poses la pointe du compas en A et trace un arc de cercle de 16 cm de rayon.
- Puis pose la pointe du compas en C et trace un autre arc de cercle de 16 cm de rayon.
- Nomme « B » le point d'intersection de ces deux arcs de cercle.
- Avec ta règle graduée, repère les milieux D, E, F de chacun des cotés AB, BC, CA et relie-les.
- Colorie le triangle équilatéral DEF ainsi obtenu au centre.

On obtient à la fin de cette étape 1 un triangle coloré et trois nouveaux triangles blancs équilatéraux.

- Recommence la construction sur chaque triangle blanc et ainsi de suite jusqu'à l'étape 4.



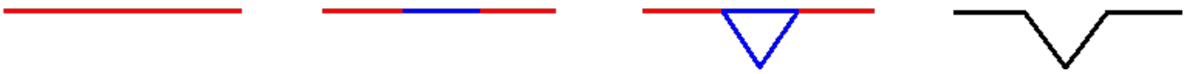
A ton avis, combien compterait-on de triangles colorés à l'étape 5 ?

CYCLE 3 LES FRACTALES

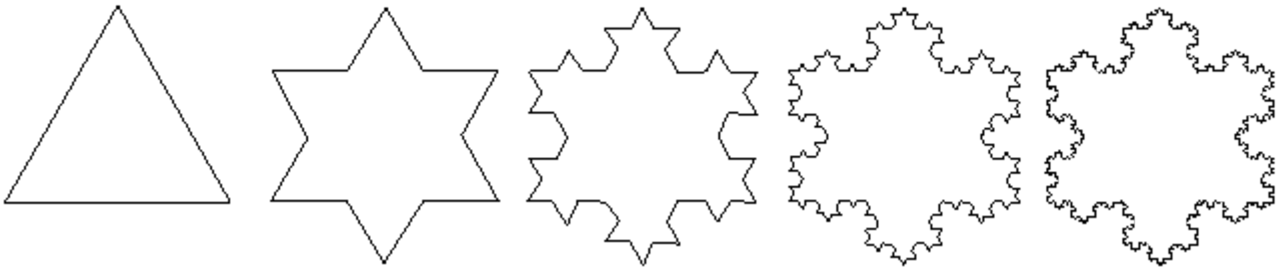
PARTIE CULTURELLE

Le flocon de Koch ou flocon de neige est une figure géométrique particulière. En effet, il se construit selon le schéma (la transformation) suivante :

- partager un segment en trois,
- construire un triangle équilatéral qui repose sur le tiers central,
- effacer sa base.



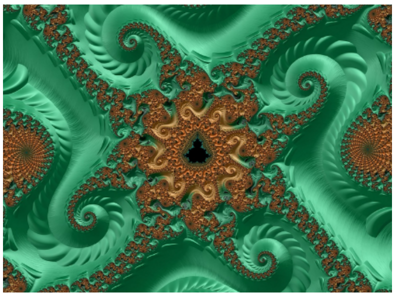
Le flocon de neige s'obtient lorsque la figure initiale est un triangle équilatéral.
On applique la transformation décrite ci-dessus sur chaque côté du triangle. Puis on la répète sur tous les segments de la figure obtenue, puis on recommence et ainsi de suite…

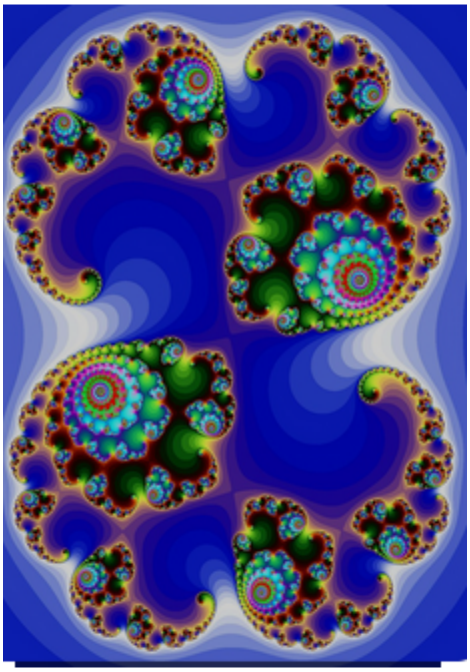


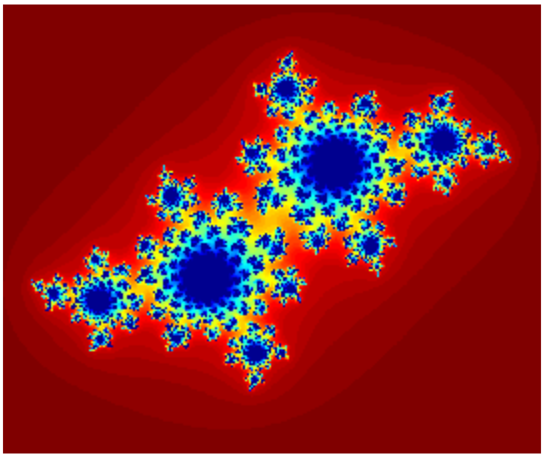
Le périmètre du flocon est « morcelé ». En mathématique, ce type d'objet géométrique est appelé une fractale. Le mot « fractale » vient du latin « *fractus* » qui signifie « brisé ». Si l'on zoome sur une partie d'une figure fractale, on peut retrouver toute la figure, on dit qu'elle est auto-similaire.

Le mathématicien français Benoît Mandelbrot, dans les années 70, met en avant la géométrie fractale qui devient une nouvelle discipline mathématique. Mais les objets fractals existent depuis très longtemps puisqu'on en trouve dans la nature : le flocon de neige mais aussi les nuages, les montagnes, les fougères ou le chou romanesco:

En art, grâce à l'informatique, on peut créer des images fractales impressionnantes :







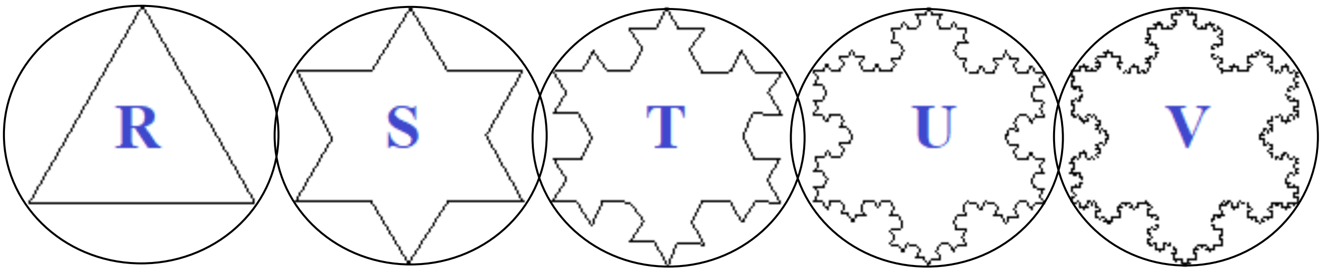
Sources :

https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/les-fractales

http://framy.free.fr/fractale.htm

Réponses : 1j 1p

A) Nous allons nous interroger sur la mesure des aires des figures R,S,T,U et V :



Voici le cercle $\mathcal{C}_1$ **.**

Reproduis-le dans du papier calque et positionne-le sur chacune des figures R,S,T,U,V**. Surligne la réponse qui te semble exacte.**

- Aucune des figures R,S,T,U ou V n'est contenue dans le cercle $\mathcal{C}_1$
- Toutes les figures R,S,T,U et V sont contenues dans le cercle $\mathcal{C}_1$.
- Seulement quelques-unes des figures R,S,T,U et V sont contenues dans le cercle $\mathcal{C}_1$.

Que peux-tu en déduire sur la mesure de l'aire de chaque figure R,S,T,U ou V par rapport à l'aire du disque $\mathcal{D}$ délimité par le cercle $\mathcal{C}_1$? Surligne la réponse qui te semble exacte.

- Toutes les figures R,S,T,U et V ont une mesure de l'aire supérieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
- Quelques figures R,S,T,U ou V ont une mesure de l'aire inférieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
- Toutes les figures R,S,T,U et V ont une mesure de l'aire inférieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$.

Imagine la figure fractale « W » qui suivrait la fractale « V ». Surligne la réponse qui te semble exacte à chacune des questions suivantes :

A ton avis, est-ce que cette figure « W » serait contenue dans le cercle $\mathcal{C}_1$? oui non

A ton avis, est-ce que la mesure de l'aire de la figure « W » serait :

- Inférieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$?
- Supérieure à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$?
- Egale à la mesure de l'aire du disque $\mathcal{D}$?

Pour vérifier tes réponses, tu vas construire au crayon mine et au compas sur du papier blanc de format A4, un triangle équilatéral de 18 cm de côté que tu transformeras ensuite.

- Trace un segment [AB] de 18 cm de côté.
- Règle l'écartement du compas à 18 cm, mets sa pointe sur l'extrémité A du segment et trace un arc de cercle.
- Recommence à l'extrémité B du segment pour trouver le point d'intersection « I » entre les deux arcs de cercle.
- Relie toujours au crayon mine les points A,B et I pour former le triangle de base. On le nommera F1 comme «Fractale 1 ».
- Avec ton équerre et ta règle, trace les hauteurs de ce triangle. On appelera « J »leur point d'intersection.
- Mets la pointe du compas sur le point «J » et trace le cercle $\mathscr{C}_2$ passant par les sommets du triangle F1. Puis transforme chaque côté du triangle pour faire apparaitre dans la fractale F1, la fractale F2, puis F3 et enfin F4. Utilise un crayon de couleur différent par fractale.

<u>Conclusion</u> : Toutes les figures F1, F2, F3 et F4 sont contenues dans le cercle $\mathscr{C}_2$.

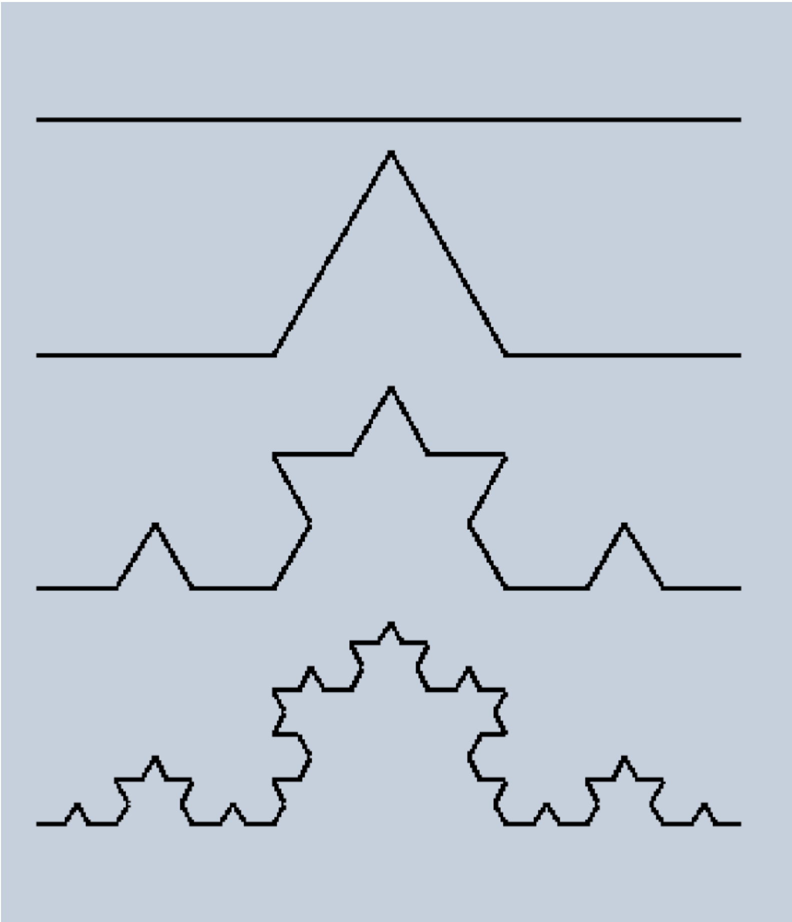
Donc la mesure de l'aire des fractales issues du triangle F1 est toujours inférieure à la mesure de l'aire du disque passant par les sommets du triangle F1.

B) Nous allons nous interroger maintenant sur les mesures de périmètre des fractales F1, F2, F3, F4.

1) Surligne la réponse qui te semble exacte.

- On peut ranger les mesures de périmètre des figures **F1, F2, F3, F4** dans l'ordre suivant : $P_{F1} < P_{F2} < P_{F3} < P_{F4}$
- On peut ranger les mesures de périmètre des figures **F1, F2, F3, F4** dans l'ordre suivant : $P_{F1} > P_{F2} > P_{F3} > P_{F4}$
- On ne peut pas ranger facilement les mesures de périmètre des figures **F1, F2, F3, F4** les unes par rapport aux autres.

2) Tu vas vérifier ton impression en calculant les périmètres P_{F1} de la fractale F1, P_{F2} de la fractale F2 et P_{F3} de la fractale F3.



Chaque côté de la Fractale F1 est transformé de la façon suivante aux étapes

F2

F3

F4

P_{F1} = 18 + 18 + 18 = 3 x 18 = 54 cm

P_{F2} = 3 x [(18 : 3) x 4] = 3 x [6 x 4] = 3 x 24 = 72 cm

P_{F3} = 3 x [(6 : 3) x 4 x 4] = 3 x [2 x 4 x 4] = 3 x 32 = 96 cm

<u>Conclusion</u> : La mesure du périmètre de la fractale F_{n+1} issue de la transformation de la fractale F_n est toujours supérieure à la mesure du périmètre de la fractale F_n.

<u>Pour ceux qui ont fini avant à faire à la calculette en respectant les priorités de calcul :</u>

P_{F4} = 3 x [(2 : 3) x 4 x 4 x 4] = 3 x 2 x 1/3 x 64 = 128 cm

P_{F5} = 3 x [(2/3 : 3) x 4 x 4 x 4 x 4] = 3 x 2/9 x 256 = 2/3 x 256 ≈ 170,67 cm