IREM de REIMS
Moulin de la Housse
BP 347
51062 REIMS CEDEX
Tel : 26 05 32 08

SUR LES QUATERNIONS

J.P. CORTIER

SUR LES QUATERNIONS

J.P. CORTIER
Animateur IREM
Professeur Lycée M. de Champagne - Troyes

Aujourd'hui les quaternions interviennent de deux façons : la première en tant que fournissant un corps non commutatif, extension de $\mathbb{R}$, de degré 4 ; ce n'est probablement pas la plus importante. Le rôle des quaternions à cet égard est clarifié par un théorème de FROBENIUS (1849 - 1917) qui est l'objet de cet exposé. Une démonstration plus savante se trouve dans BOURBAKI [1].

La deuxième voie par laquelle les quaternions entrent dans l'activité scientifique est liée au fait qu'il existe sur S^3 (la sphère unité de $\mathbb{R}^4$) une structure de groupe, lequel se rattache à la définition par la considération du groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 : ce groupe est "presque" isomorphe au groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ en un sens qui sera précisé par la suite (pourcela voir II).

Enfin, les quaternions ont une importance considérable en mécanique quantique.

On se propose de développer quatre points :

I - Historique des quaternions

II - Quaternions et rotations

III - Quaternions et mécanique quantique

IV - Démonstration du théorème de FROBENIUS.

.../...

I - HISTORIQUE

Le créateur des quaternions, Sir HAMILTON William Rowan né à Dublin (1805 - 1865) s'est penché (outre ses travaux sur les irrationnels) sur l'algèbre des couples.

HAMILTON, dans son livre "Algebra as the Science of Pure Time", développe les nombres complexes en terme de couples de nombres réels, d'une manière identique à celle utilisée aujourd'hui : il introduit les opérations suivantes sur les couples de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \\ (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', a'b + ab') \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2, +, \times)$ ainsi créé donne le corps des nombres complexes $(\mathbb{C}, +, \times)$ avec (a, b) équivalent à la notation connue $a + ib$.

Il est à noter qu'il n'existe pas de structure de corps sur $\mathbb{R}^3$ (l'addition provenant de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$). Pour cela, on pourra consulter (2). HAMILTON porte ses efforts sur la recherche d'un corps qui soit un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, l'addition étant commune aux deux structures. C'est ainsi qu'il découvre et construit le corps H des quaternions (Lectures on Quaternions, 1853).

Si $(1, i, j, k)$ est une base de l'espace vectoriel H sur $\mathbb{R}$, il associe à l'élément (t, x, y, z) de $\mathbb{R}^4$ le quaternion $q = t + xi + yj + zk$; $\mathbb{R}$ se trouve alors identifié au sous-espace de H engendré par 1 et les opérations sont définies par :

$$\begin{cases} (t, x, y, z) + (t', x', y', z') = (t + t', x + x', y+y', z+z') \\ \text{et} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ ; \ ij = k = -ji \ ; \ jk = -kj = i \\ \quad ki = j = -ik \end{cases}$$

.../...

Alors H est un corps non commutatif dont le centre (le centre d'un anneau (A, +, x) est l'ensemble des éléments de A qui commutent au sens de la multiplication avec tous les éléments de A) est $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est donc un sous-corps de H dont la dimension en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est 4 ; on dit que H est une extension de $\mathbb{R}$ de degré 4.
Remarquons que H contient une infinité de sous-corps isomorphes à $\mathbb{C}$: par exemple les sous-corps $\mathbb{R}[i]$, $\mathbb{R}[j]$, et $\mathbb{R}[k]$ où, si $a \in H$, $\mathbb{R}[a]$ désigne le sous-corps engendré par 1 et a. ($\mathbb{R}[a]$ est encore le plus petit sous-corps de H, au sens de l'inclusion, contenant 1 et a).

Notons enfin que, de même que l'on présente, dans certains manuels du 2ème cycle, $\mathbb{C}$ comme un sous-ensemble de $(\mathcal{M}(2, \mathbb{R}), +, x)$ avec $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, l'on peut représenter H comme le sous-espace de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ constitué par les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

II - QUATERNIONS ET ROTATIONS

Un des intérêts des quaternions est de représenter paramétriquement le groupe $O^+(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ (de même que $U = S^1 = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$ donne une représentation de $O^+(2)$. En effet, comme l'indique M. BERGER dans [3], les paramétrisations facilitent le calcul de la composée de rotations de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on identifie H à $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} i \oplus \mathbb{R} j \oplus \mathbb{R} k$ et $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R} i \oplus \mathbb{R} j \oplus \mathbb{R} k$.

Si $q = t + xi + yj + zk$ est un élément de H, on note $\bar{q} = t - xi - yj - zk$, et $q \longmapsto \|q\| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q\,\bar{q}}$ est une norme sur H dérivant du produit scalaire $q.r = \frac{1}{2}\left[\bar{q}r + \bar{r}q\right]$ qui munit H d'une structure d'espace vectoriel euclidien.
$S^3 = \{ q \in H, \|q\| = 1 \}$ est un sous-groupe du groupe multi-

plicatif $H^* = H / \{ o \}$ ce qui permet d'affirmer que S^3, la sphère unité de $\mathbb{R}^4$, peut être munie d'une structure de groupe et on a le théorème :

THEOREME : Soit $s \in S^3$ et φ_s l'endomorphisme de H défini par

$$\varphi_s (q) = sqs^{-1}$$

. Alors φ_s laisse $\mathbb{R}^3$ stable et $\rho_s = \varphi_s/_{R^3}$ est un élément de $O^+(3)$

. L'application $\left| \begin{array}{l} S^3 \longrightarrow O^+(3) \\ s \longmapsto \rho_s \end{array} \right.$ est un homomorphisme surjectif de groupe de noyau $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \simeq \{- 1, 1\}$

. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in R^3 - \{ o \}$ et $s = \alpha + u$ avec $s \in S^3$.

L'axe de la rotation ρ_s est la droite de $\mathbb{R}u$ et la mesure de l'angle θ de ρ_s

est donnée par $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\| u \|}{|\alpha|}$ si $\alpha \neq 0$,

et $\theta = \pi$ si $\alpha = 0$.

$\theta \in [0, \pi]$

Pour la démonstration, on pourra consulter (3).

Par exemple : si $s = k$ on obtient la rotation de π autour de l'axe des z,

et si $s' = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + k)$, $\rho_{s'}$ est la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des z.

Réciproquement, si r désigne la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe la droite $\mathbb{R}$ u avec $u = i + j + k$, et de mesure $\frac{\pi}{3}$, on peut écrire $r = \rho_{s_1}$ avec $s_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} (3 + i + j + k)$.

.../...

Par suite, si on note $r' = \rho_{s'}$ avec $s' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)$, on a, en appliquant le théorème :

$$r' \circ r = \rho_{s'} \circ \rho_{s_1} = \rho_{s's_1} \quad \text{avec} \quad s's_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 + j + 2k)$$

$r' \circ r$ est donc la rotation d'axe $\mathbb{R}(j + 2k)$ et d'angle de mesure θ avec $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{5}$.

III - QUATERNIONS ET MECANIQUE QUANTIQUE.

L'homomorphisme $S^3 \longmapsto O^+(3)$ décrit dans le théorème énoncé en (II) a présenté une importance considérable en mécanique quantique (PAULI-DIRAC vers 1927) où elle est indispensable à la description du Spin S d'un électron. Pour plus de précision on peut consulter n'importe quel livre de mécanique quantique.

En particulier, il est souvent commode d'introduire dans cette théorie, l'opérateur σ tel que $S = \frac{h}{2}\sigma$ où h est la constante de PLANCK, dont les composantes sont les matrices de PAULI

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où } i \in \mathbb{C}.$$

Elles vérifient les relations :

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \\ \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i \end{cases}$$

et celles qui s'en déduisent par permutation circulaire et l'application $t + xi + yj + zk \longmapsto \frac{1}{i}\begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix}$ définit un isomorphisme de H sur le corps des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes du type ci-dessus.

IV - THEOREME DE FROBENIUS.

Il est proposé ici une démonstration simple, sans doute non originale, du théorème de FROBENIUS.

THEOREME : Soit K un corps non commutatif de centre le corps des nombres réels et de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Alors K est isomorphe au corps des quaternions.

Rappelons tout d'abord :

Si K et L sont deux corps tels que L soit un sous-corps de K, on dit que K est une extension de L. On peut alors considérer K comme un espace vectoriel sur L ; la dimension de cet espace, lorsqu'elle est finie, est notée $[K : L]$, et s'appelle le degré de K sur L. Nous démontrons auparavant un résultat qui sera utilisé dans la démonstration du Théorème.

LEMME : Tout corps commutatif K admettant $\mathbb{R}$ comme sous-corps et de degré fini sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$.

Preuve du LEMME :

Posons $[K : \mathbb{R}] = n$ et soit $x \in K$. $\mathcal{S} = \{1, x, ---, x^n\}$ est un système de n+ 1 vecteurs de K, donc $\mathcal{S}$ est un système lié.

On a déduit l'existence de $(\alpha_0, ---, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tel que $\alpha_0 + \alpha_1 x + --- + \alpha_n x^n = 0$. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ (anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels).

On a $P(x) = 0$. De $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{C}$ corps algébriquement clos on tire $P(X) = a \prod_{j=0}^{n} (X - a_j)$ avec a et a_j éléments de C.

Mais $0 = P(a_j) = \overline{P(a_j)} = \overline{P}(\overline{a_j}) = P(\overline{a_j})$ car $P \in \mathbb{R}[X]$, d'où si a_j est une solution dans $\mathbb{C}$ de $P(X) = 0$, $\overline{a}_j$ l'est aussi, ce qui permet, en regroupant les termes, d'écrire

$P(X) = a \prod_k (X^2 + s_k X + t_k) \prod_\ell (X - \alpha_\ell)$ avec

$(s_k, t_k) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$. Comme $P(x) = 0$, x annule un terme de la forme $X - \alpha_\ell$ ou de la forme $X^2 + s_k X + t_k$:

.../...

dans le premier cas $x = \alpha_\ell \in \mathbb{R}$,

dans le deuxième cas : $x^2 + s_k x + t_k = 0$.

. Si tous les éléments x de K vérifient le premier cas, on a $K = \mathbb{R}$.

. S'il existe un élément x de K, qui n'est pas dans $\mathbb{R}$, il vérifie alors nécessairement le 2ème cas.

Soit x_o un tel élément. On a :

$$x_o^2 + s_k x_o + t_k = 0 = \left(x_o + \frac{s_k}{2}\right)^2 + t_k - \left(\frac{s_k}{2}\right)^2$$

donc x_o vérifie $\left(x_o + \frac{s_k}{2}\right)^2 = \left(\frac{s_k}{2}\right)^2 - t_k = \alpha \in R_-^*$

Puisque $x_o \notin \mathbb{R}$, et par suite il existe un élément

$$c = \frac{x_o + \frac{s_k}{2}}{\sqrt{-\alpha}}$$

dans k tel que $c^2 = 1$.

Il est clair alors que $\mathbb{R}[c] \subset K$ et tout élément de K est dans $\mathbb{R}[c]$.

En effet, si $x \in K$, x est élément de $\mathbb{R}$ sinon il vérifie une équation du type $x^2 + ax + b = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et en reprenant le raisonnement on a :

$(x + \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 - b \in R_-^*$, c'est-à-dire $(x + \frac{a}{2})^2 = -\alpha'$ avec $\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$ et $x = -\frac{a}{2} + \varepsilon c\sqrt{\alpha'} \in \mathbb{R}[c]$ $(\varepsilon = \pm 1)$, ce qui termine la démonstration du lemme.

<u>Preuve du Théorème de FROBENIUS</u> :

Soit K un corps non commutatif répondant aux hypothèses du Théorème.

(1) <u>Il existe un élément a de $K \setminus \mathbb{R}$ tel que $a^2 \in \mathbb{R}$</u>

Soit $a' \in K \setminus \mathbb{R}$. On considère $\mathbb{R}[a']$ le plus petit sous-corps de K contenant $\mathbb{R}$ et a'.

$\mathbb{R}[a']$ est une extension commutative de $\mathbb{R}$ d'où, d'après le lemme,

$\left[\mathbb{R}[a'] : \mathbb{R}\right] = 2$

($\mathbb{R}[a']$ est une extension de degré finie de $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[a'] \subset K$, et $a' \notin \mathbb{R}$); a' vérifie une équation du type $a'^2 + ra' + s = 0$ avec $(r, s) \in R^2$; or :
$a'^2 + ra' + s = \left[a' + \frac{r}{2}\right]^2 + s - \frac{r^2}{4}$, d'où, en posant $a = a' + \frac{r}{2}$, $\mathbb{R}[a'] = \mathbb{R}[a]$ avec $a^2 = \frac{r^2}{4} - s \in \mathbb{R}$. Dans ce qui suit, a est un élément fixe de $K \setminus \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 \in \mathbb{R}$.

(2) Soit σ l'automorphisme intérieur de K défini par

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \sigma(x) = axa^{-1} \end{aligned}$$

σ possède les propriétés suivantes : pour tout (x, y) de K^2 :

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y) \\
&(ii) \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\,\sigma(y) \\
&(iii) \quad \sigma/_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}} \\
&(iv) \quad \sigma^2 = id_K
\end{aligned}$$

σ est en particulier un automorphisme d'espaces vectoriels réels.
Seul (iv) nécessite une démonstration :

$$\sigma^2(x) = a\,(ax\,a^{-1})a^{-1} = a^2x\,(a^{-1})^2 ;$$

Or $a^2 \in \mathbb{R}$ qui est le centre de H, d'où $\sigma^2(x) = xa^2(a^{-1})^2 = x$.
σ étant en particulier un automorphisme involutif d'espace vectoriel, on est amené à poser : $K+ = \{x \in K, \sigma(x) = x\}$,
$K- = \{x \in K, \sigma(x) = -x\}$;

d'où $K = K+ \oplus K$:

En effet, $K+ = Ker(\sigma - id_K)$ et $K- = Ker(\sigma + id_K)$ sont deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel K ; d'autre part, $K+ \cap K- = \{0\}$ et de $x = \frac{x + \sigma(x)}{2} + \frac{x - \sigma(x)}{2}$ on déduit $K = K+ \oplus K-$. On remarque que K+ est un sous-corps de K, corps des éléments invariants par σ .

3 - K- est un K+ espace vectoriel de dimension 1 sur K+.

En effet, $K+ \times K- \longrightarrow K-$
$(x, x') \longmapsto xx'$

car $\sigma(xx') = \sigma(x)\ \sigma(x') = x(-x') = -xx'$

Donc, muni de cette multiplication externe K- est un K+ espace vectoriel. K- contient au moins un élément non nul b, sinon $K- = \{0\}$ et $K = K+ \oplus K- = K+$ ce qui donne, pour tout x de K, $\sigma(x) = ax\,a^{-1} = x$, ou encore $xa = ax$; donc a est élément du centre de K, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, ce qui est exclu.

Soit $b \in K- \setminus \{0\}$ et $y \in K-$, alors :
$y\,b^{-1} \in K+$, car $\sigma(y\,b^{-1}) = \sigma(y)\ \sigma(b^{-1})$ avec
$\sigma(b^{-1}) = (\sigma(b))^{-1}$ donc :
$\sigma(y\,b^{-1}) = \sigma(y)\ (\sigma(b))^{-1} = -y\,(-b)^{-1} = y\,b^{-1}$.
Pour tout y de K-, on a : $y\,b^{-1} \in K+$, ce qui assure : $K- = K+\,b$.

4 - $K+ = \mathbb{R}[a]$.

En effet, K+ est un corps qui contient $\mathbb{R}$ et a ($\sigma(a) = a$) donc $\mathbb{R}[a] \subset K+$.

Soit $c \in K+ \setminus \mathbb{R}[a]$, alors $ac = ca$.

Soit $\mathbb{R}[a, c]$ le plus petit sous-corps de K contenant $\mathbb{R}$, a, et c. $\mathbb{R}[a, c]$ est un corps commutatif, car $ac = ca$, et l'on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[a, c] \subset K$. Donc $\mathbb{R}[a, c]$ est de degré fini sur $\mathbb{R}$. D'après le lemme $[\mathbb{R}[a, c] : \mathbb{R}] = 2$ car $\mathbb{R}[a] \subset \mathbb{R}[a, c]$. D'autre part, comme $[\mathbb{R}[a] : \mathbb{R}] = 2$, on a $\mathbb{R}[a, c] = \mathbb{R}[a]$ d'où $c \in \mathbb{R}[a]$ ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $K+ = \mathbb{R}[a]$, $[K+ : \mathbb{R}] = 2$ et

$K+ = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a$, car K+ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

(5) - CONCLUSION -

On en conclut que :

$K = K_+ \oplus K_- = K_+ \oplus K_+ b = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \mathbb{R}ab$, ce qui implique que K est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont une base est (1, a, b, ab).

On a $\in K \setminus \mathbb{R}$ et $a^2 \in \mathbb{R}$ donc $a^2 = \alpha \in \mathbb{R}_-^*$.

L'élément b de $K_- = K_+ b$ vérifie $ab = -ba$ d'où :

$ab^2 = -bab = -b(-ba) = b^2a$, donc $b^2 \in K_+ = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a$.

D'autre part, $\mathbb{R}[b]$ étant un corps commutatif de degré fini sur $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[b] \subset K$, $\mathbb{R}[b]$ est de degré fini sur $\mathbb{R}$ donc de degré 1 ou 2 d'après le lemme. Comme $b \notin \mathbb{R}$ (car $b \in K_-$) on a $[\mathbb{R}[b] : \mathbb{R}] = 2$ et par suite $\mathbb{R}[b] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}b$; b^2 s'écrit donc :

$b^2 = x + ya = x' + y'b$ avec $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$. Puisque (1, a, b, ab) est une base de K sur H, on obtient :

$x = x'$, $y = y' = 0$ d'où $b^2 = x = x' \in R$ et de même, puisque $b \notin \mathbb{R}$, $b^2 = \beta \in \mathbb{R}_-^*$.

Posons : $i = \dfrac{a}{\sqrt{|\alpha|}}$, $j = \dfrac{b}{\sqrt{|\beta|}}$ et $k = i.j$

Alors : $i^2 = \dfrac{a^2}{|\alpha|} = -1$ $\quad j^2 = \dfrac{b^2}{|\beta|} = -1$

$$ij = \frac{ab}{\sqrt{|\alpha|}\sqrt{|\beta|}} = \frac{-ba}{\sqrt{|\beta|}\sqrt{|\alpha|}} = -ji$$

$$k^2 = i.j\,i\,j = i\,(j\,i)\,j = i\,(-i\,j)\,j = -1$$

$$ik = i\,(ij) = i^2\,j = -j = -ki\ ;$$

$$j\,k = j\,(ij) = -ij\,j = i = -kj$$

ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] BOURBAKI , Algèbre, chapitre 8, Modules et anneaux semi simples

[2] DIEUDONNE J. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, HERMANN,1964

[3] BERGER M. Géométrie, Volume 2, Cedic NATHAN.

TITRE : SUR LES QUATERNIONS

AUTEUR : J.Ph. CORTIER (Troyes) - Animateur IREM de Reims

NIVEAU : pour les Enseignants - pour la Formation Continue

DATE : Mai 1981

MOTS-CLE : spécialité MATHEMATIQUES

autres HISTORIQUE

RESUME :

1) Historique des quaternions
2) Quaternions et rotations
3) Quaternions et mécanique quantique
4) Démonstration (simple) du théorème de Frobénius

ISBN 2-910076-09-1

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	10	20 F HT PORT 11,50 F	Re 6