UNIVERSITE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

-:-:-:-:-:-:-:-

I. R. E. M.

Tél. 26 05 32 08

GEOMETRIE CLASSE DE 4EME

Introduction au document

Groupe CHARLEVILLE-MEZIERES (08)

de l'IREM de REIMS

1984

GÉOMÉTRIE 4ème

. Matériel : - Une bande de papier par élève
- une feuille blanche sans lignes.

- Rappels : - Milieu d'un segment.
- Notion de projection.
- Projection du milieu d'un segment.

- Objectif :

Axiome : La projection du milieu d'un segment, sur une droite est le milieu du segment image.

Nota : Le plan (Axiomes d'incidence) a été étudié avant.

	. Réactions des élèves . mises au point.
) 1°) ~~Donner~~ prendre deux points distincts A et B sur la bande.	- Les points sont souvent pris sur la bande "horizontalement" et parallèlement à un bord.
. Question : Connaissez vous un point qui occupe une position particulière par rapport aux points A et B ?	- Beaucoup pensent au milieu du segment [AB]
. Construction du milieu de [AB] - pliage.	- Les points A, B et I milieu de [AB] sont alignés - que se passe-t-il si A et B sont confondus ? - Confusion entre milieu et origine - Certains utilisent la construction de la médiatrice du segment avec le compas, pour trouver le milieu de [AB], ils ne savent pas expliquer cette technique. - Mesure du segment avec un double décimètre, ce qui soulève des problèmes d'approximation. - le pliage vient en dernier
. Remarque : Le milieu du segment [AB] est le même que le milieu du segment [BA] . $AI = IB = \frac{AB}{2}$	Notation $0,5.AB$ ou $\frac{AB}{2}$ inconnue.

Remarque : Un point I est le milieu de combien de segments ?

Un point est le milieu d'une infinité de segments

- Si les segments ont même longueur, leurs extrémités sont sur un cercle de centre I

- Si l'on connait A et I distincts construire B.

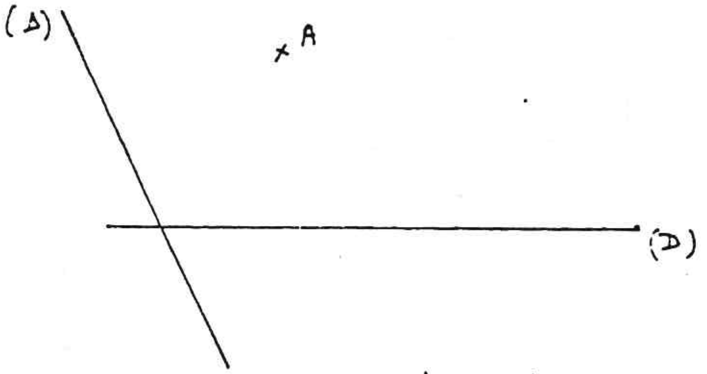
- Découverte d'un ordre dans la construction :
  ① tracer ~~la segm~~ demi-droite (AI)
  ② utilisation du compas pour trouver B.
- pas d'utilisation du pliage.
- règle non graduée : pas d'utilisation

2) Notion de projection :

- Donner une droite et faire tracer des parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre (Notion de direction).

- Remarque faite aux élèves : il est possible de tracer des parallèles à une droite en utilisant (au lieu d'une équerre) toutes polygone, ou un secteur angulaire.

- Donner deux droites n'appartenant pas à la même direction et un point distinct.



- Rappel sur la notion d'application difficulté : image unique.
- Notation fonctionnelle :

$$x \xrightarrow{f} y$$
$$y = f(x)$$

- Si (P) est le plan contenant A, (Δ) et (D) et (L)

$$(P) \xrightarrow{p} (D)$$

on note : $A \xrightarrow{p} A'$

$$A' = p(A)$$

Tracer la ~~ou les~~ droite contenant A et parallèle à (Δ). La nommer (L)
- Démontrer que (L) est unique
- Démontrer que (L) et (D) sont sécantes (en A')

- utilisation de l'Axiome d'Euclide sans problème

- Rappel de l'Axiome : Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre.

vocabulaire :

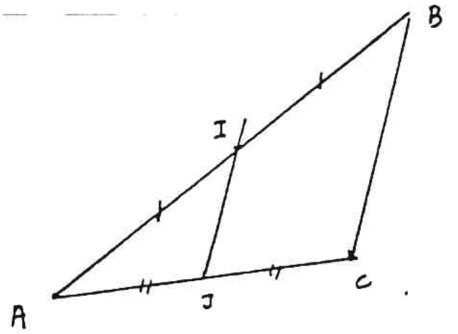
A' est la projection de A sur (D) parallèlement à (Δ).

- Remarque : si $A \in (D)$ alors $p(A) = A$.

•) Projection du milieu d'un segment.

Objectifs : - Découverte de théorèmes utilisant l'axiome de la projection du milieu d'un segment
- Rédaction - de démonstration
- de théorèmes.

1°) En utilisant l'axiome précédent et la construction de la leçon précédente, démontrer que J est le milieu de [AC].



Rédaction de la démonstration :

- Considérer la projection de la droite (AB) sur la droite (AC) parallèlement à (BC)
- Retour à la notion d'application notation :

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = A \\ P(J) = J \\ P(B) = C \end{array}\right\} \text{par construction.}$$

I milieu de [AB]

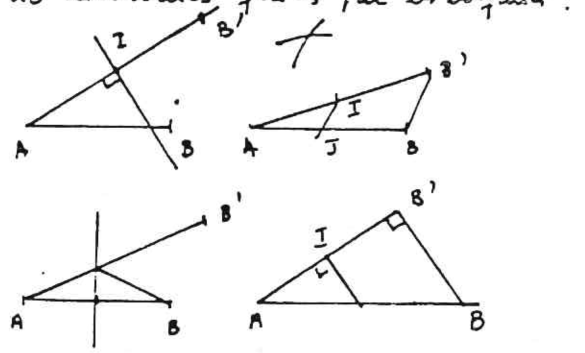
Axiome.

J milieu de [AC]

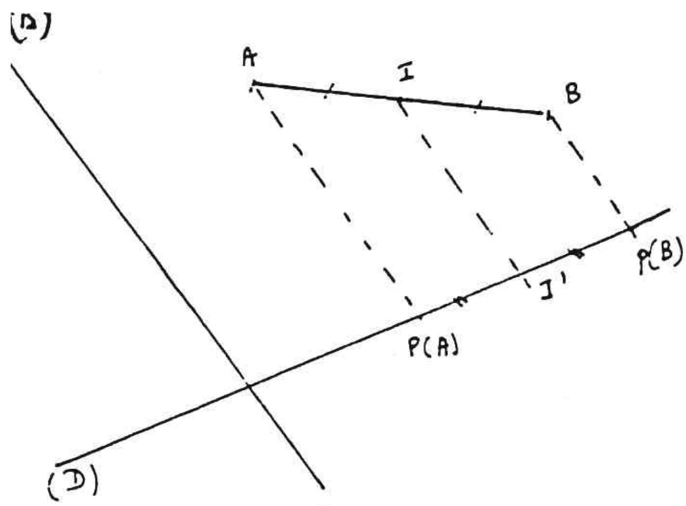
- Résumer le problème par une phrase
- Théorème 1 :

Dans un triangle, la parallèle à l'un des côtés passant par le milieu d'un autre côté, coupe le troisième côté en son milieu.

- Lors de la construction libre de la figure, on remarque toujours certaines difficultés dans la recherche du milieu I de [AB]. Les schémas suivants montrent quelques types de recherches faits par les enfants :



- Pour beaucoup, le fait d'avoir effectué une construction est confondu avec la rédaction d'une démonstration.
- Nécessité d'une rédaction claire de la démonstration. Utilisation des mêmes termes pour toute la classe.
- Il est très utile pour l'élève de ~~figurer~~ indiquer sur la figure les hypothèses avec des signes d'une couleur (ici rouges) et les conclusions (en vert).
- Passage au théorème : Problèmes de mise en forme et de langage.
- Difficulté des enfants à réinvestir un modèle, en l'occurence : le théorème

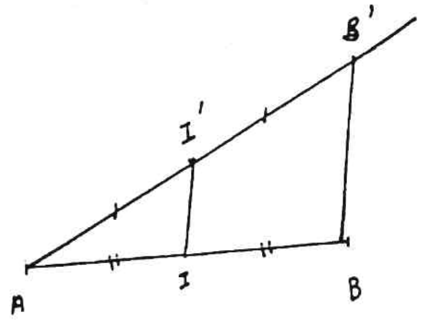


construire les projections de A, I et B sur la droite (D) parallèlement à (Δ).

Constatation, ~~essai de démonstration~~

<u>Axiome</u> : La projection du milieu I d'un segment [AB] sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) est le milieu I' du segment [P(A), P(B)].

④ <u>Application de l'axiome précédent à la construction du milieu d'un segment.</u> (premier problème posé).



⑤ Partage d'un segment en 3, 4, 5 etc ... segments consécutifs isométriques.

- Même méthode que précédemment
On donne A et I trouver le reste de la construction.

- Constatations : faible pourcentage

- prolongement : Partage d'un segment en 3 segments isométriques. etc ...

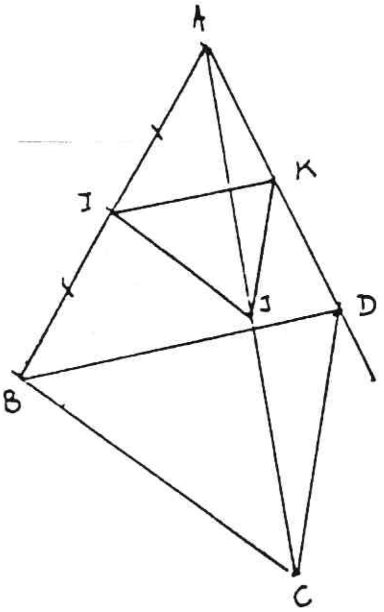
- <u>Remarques</u>: La construction semble difficile aux enfants.
car : ① penser à tracer une demi-droite de A.
② Choix dans la direction du tracé d'une demi-droite issue de A
③ Une discussion s'impose lorsque (AB') est portée par la droite (AB) du côté de B ou de l'autre côté.
④ Il faut penser tracer d'abord BB'.
⑤ revenir en I pour tracer la parallèle à (BB')

- Il aurait été utile de étudier le cas particulier de la projection d'un segment et de son milieu sur une droite contenant l'un de ses points.

objectifs : application du théorème I à plusieurs situations
déduction d'un nouveau théorème.

- Difficultés rencontrées :
  - . précision du langage
  - découverte de la nécessité de l'énoncé d'un théorème que l'on n'est plus obligé de réécrire chaque fois et qui permet de simplifier la rédaction des théorèmes
  - . le numérotage est utile.

ème exercice : donné par la figure :



(H) I milieu de [AB]
(IJ) // (BC)
(JK) // (CD)

Conclusions ?

x Écrire une démonstration en ~~...~~ écriture simplifiée :

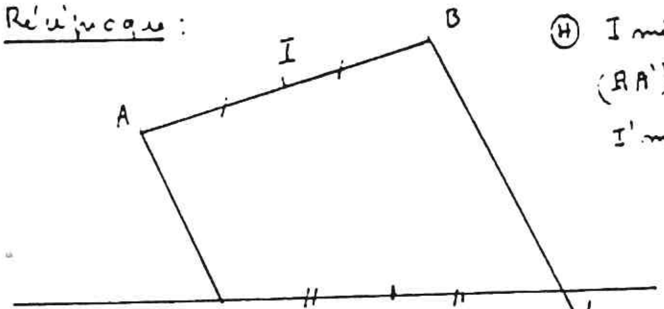
(H) I milieu [AB], (IJ) // (BC) } Théorème (1) : J milieu [AC] (1') ← Numéro de référence

(H) (JK) // (CD), (1') J milieu [AC] } théorème (1) : K milieu [AD] (1'')

Remarque : Il semble que (IK) // (BD)

essais de démonstration ce qui permet d'aborder la réciproque du théorème (1) :

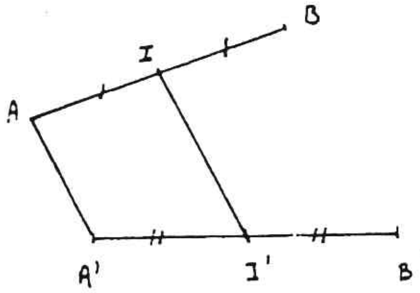
) Réciproque :



(H) I milieu [AB]
(AA') // (BB')
I' milieu [A'B']

conclusion ?

Autre cas :



Démonstration :

Soit $(II'') \parallel AA'$

théorème ①

I'' milieu $[A'B']$

(H) I' milieu $[A'B']$

$I' = I''$

Conclusion. $(II') \parallel (AA')$

$(II') \parallel (BB')$

⑥

Les enfants ne pensent pas à supposer une droite (II'') et ou l'existence d'un autre point I'' cette démonstration est délicate à présenter.

Retour au cas du triangle (cas particulier)

Théorème ② :

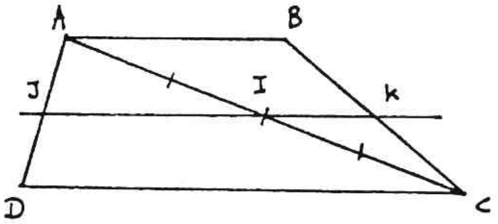
La droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté

- mêmes problèmes pour la rédaction : difficulté de se servir uniquement des hypothèses.

Retour au problème précédent en application.

$(IK) \parallel (BD)$

Exercices en commun : Application du théorème ①

① 

(H) - ABCD trapèze
- (AC) diagonale
- I milieu [AC]
- $(JK) \parallel (AB)$

Conclusion ?

Triangle ACD

(H) ABCD trapèze

$(AB) \parallel (CD)$

(H) $(IJ) \parallel (AB)$

$(IJ) \parallel (CD)$

(H) I milieu [AC]

] théorème ① J milieu [AD]

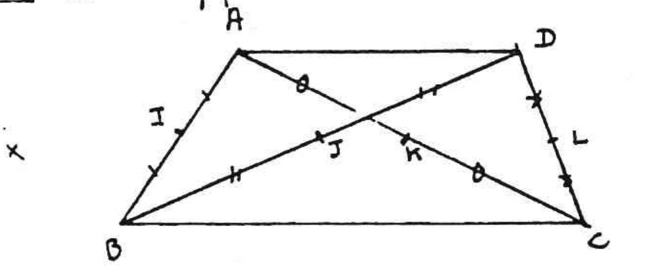
triangle ABC

(H) $\begin{cases} (IK) \parallel (AB) \\ I \text{ milieu } [AC] \end{cases}$] théorème ① K milieu [BC]

existe-t-il un autre segment ayant son milieu sur IJ ?

R : le segment [BD]

Exercice ② Application du théorème ②



(H) ABCD trapèze
I milieu [AB]
J milieu [BD]
K " [AC]
L " [DC]

Démontrer que I, J, K, L sont alignés.

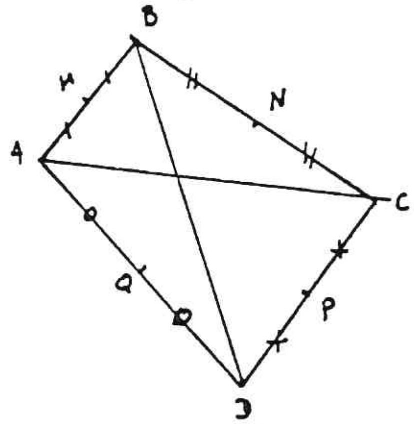
T(ABC) ⇒ IK // BC
T(ADB) ⇒ IJ // AD, AD // BC] ⇒ IJ // BC] ⇒ (Ax Eucl.) I, J, K alignés.

T(BDC) ⇒ JL // BC
T(ADC) ⇒ KL // AD, AD // BC] ⇒ KL // BC] ⇒ J, L, K alignés

Conclusion : [L, I] ∈ ⊂ (JK) ⇒ I, L, J, K alignés.

Exercice ③ :

ⓐ Soit le quadrilatère :

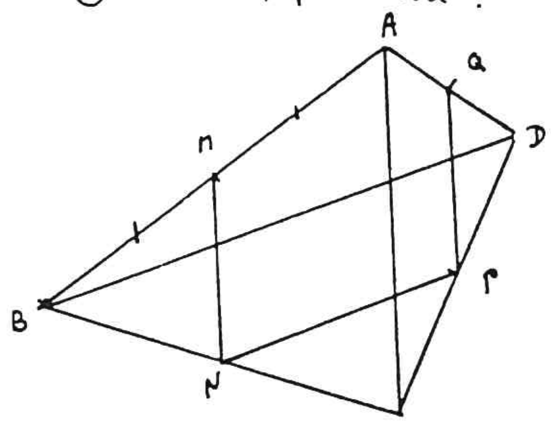


(H) M milieu [AB]
N milieu [BC]
P milieu [CD]
Q milieu [AD]

- conclusions ?

applications du théorème ①

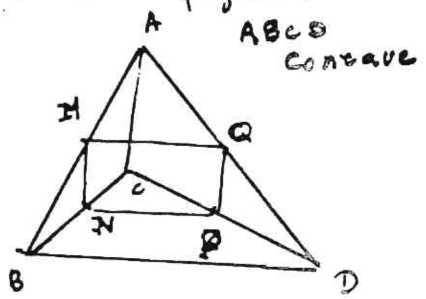
ⓑ autre exploitation :



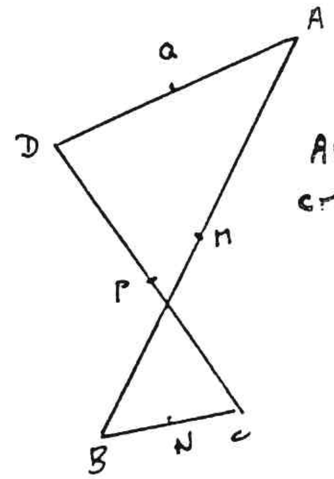
(H) M milieu [AB]
(MN) // (AC)
(NP) // (BD)
(PQ) // (AC)

Les enfants proposent deux autres cas de figures :

ABCD concave



ABCD croisé



- Démonstration : rédaction difficile erreurs de copie du théorème ① qu'ils ont sous les yeux.
- utilisent une notation est peu naturel chez

Démonstration :

Triangle ABC

(H) M milieu [AB]
(MN) // (AC)] th ① N milieu [B C] prop ⓐ

Triangle BDC

ⓐ N milieu [BC]
(H) (NP) // (BD)] th ① P milieu [CD] prop ⓑ

Triangle ACD

ⓑ P milieu [CD]
(H) (QP) // (AC)] th ① Q milieu [AD] prop ⓒ

question : que peut on démontrer encore ?

triangle ABD

(H) M milieu [AB]
ⓒ Q milieu [AD]] th ② (MQ) // (BD)

- Confusion entre les hypothèses premières et les propriétés déduites. ⑧

- La rigueur de l'écriture et de la démonstration a été mise en valeur.

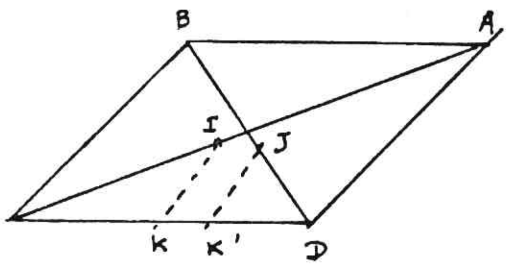
- Réponse que peut on dire de (MQ)
(MQ) // (BD)

I) - Le parallélogramme
- ~~sa~~ propriétés
- exercices.

<u>Définition</u>: Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si ses côtés opposés sont parallèles.

) <u>Propriété</u> :

(H) $\left\{\begin{array}{l}\text{Si ABCD parallélogramme} \\ [AC] \text{ et } [BD] \text{ diagonales.} \\ I \text{ milieu de } AC \\ J \text{ milieu de } BD\end{array}\right.$



(H₁) $\left\{\begin{array}{l}\text{traçons } IK \parallel AD \\ \quad JK' \parallel BC\end{array}\right.$ (K et K' éléments de (CD))

Les élèves n'y pensent pas spontanément.

ⓐ $\left.\begin{array}{l}I \text{ milieu de } [AC] \\ [IK] \parallel [AD]\end{array}\right\}$ triangle ACD th ① : K milieu [CD]

ⓑ $\left.\begin{array}{l}J \text{ milieu } [BD] \\ [JK'] \parallel (BC]\end{array}\right\}$ triangle BDC th ① : K' milieu [CD]

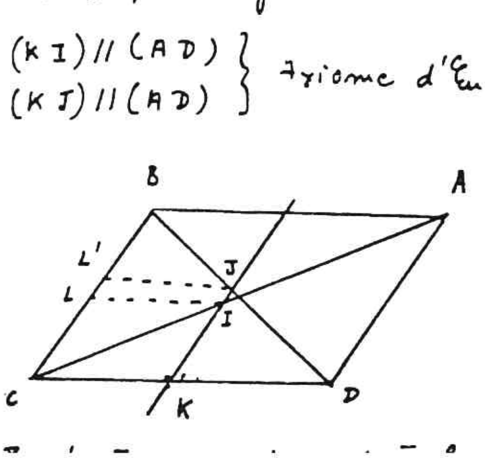
ⓒ [CD] a un seul milieu : $K = K'$

$(KI] \parallel [AD]$

$[KJ] \parallel [BC]$

(H) ABCD parallélogramme : $(BC) \parallel (AD)$

$\left.\begin{array}{l}(KI) \parallel (AD) \\ (KJ) \parallel (AD)\end{array}\right\}$ Axiome d'Euclide $(KI) = (KJ)$



... L et L' éléments de (B C)
(J L') // (C D)

Th (1) : triangles ABC et BCD $L = L'$ = milieu BC

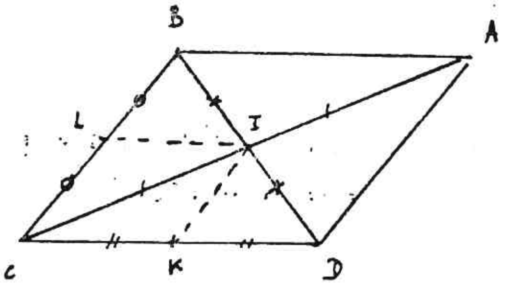
même démonstration :
axiome d'Euclide   I et J éléments de (L I)

Les droites (K I) et (L I) sont concourantes en un seul point donc $I = J$
$I \in (AC)$ $J \in (BD)$ si $I = J$, I est l'intersection des diagonales.

Propriété 1 : Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Réciproque :

(H) $\begin{cases} \text{. ABCD quadrilatères} \\ \text{. diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.} \end{cases}$



(H1) $\begin{cases} \text{Si K milieu de [CD].} \\ \text{Si L milieu de [BC]} \end{cases}$

triangle ACD.
$\begin{cases} \text{I milieu [AC] (H)} \\ \text{K milieu [CD] (H1)} \end{cases}$ th (2) : (I K) // (A D)   (a)

triangle BDC
(H) I milieu [BD]
(H) K milieu [CD]
th (2) : (I K) // (B C)   (b)

(a) et (b) : (A D) // (B C)

triangle ABC
(H) I milieu [AC]
(H1) L milieu [BC]
th (2)   (I L) // (A B)   (c)

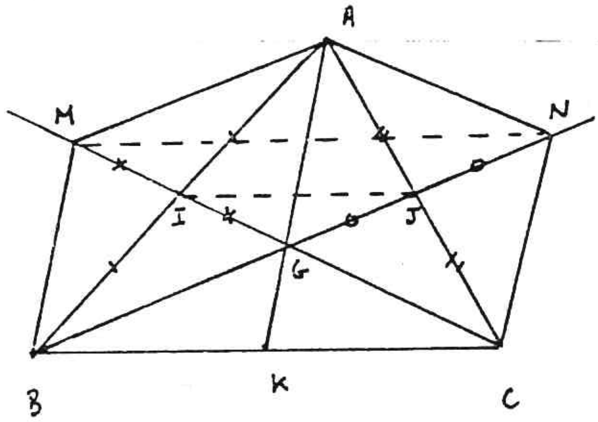
triangle BCD
(H) I milieu [BD]
(H1) L milieu [BC]
th (2)   (I L) // (C D)   (d)

(c) et (d) ... (A B) // (C D)

Propriété ② : Si dans un quadrilatère, les diagonales se coupent en leur milieu, celui-ci est un parallélogramme.

Théorème ③
Propriété fondamentale : Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut et il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu.

Propriétés des médianes d'un triangle.



(H) $\begin{cases} [CI] \text{ médiane de } ABC \\ [BJ] \quad \text{"} \end{cases}$

(H₁) $M \in (CI)$: $IM = IG$
$N \in (BJ)$: $JN = JG$

ⓐ (H₁) I milieu [MG]
(H) I milieu [AB] } th③ : AMBG parallélogramme.

ⓐ et définition du parallélogramme : (BM) // (AK) ⓑ

ⓒ (H₁) J milieu [NG]
(H) J milieu [AC] } th③ : ANCG parallélogramme.

ⓒ et ③' : (AK) // (NC) ⓓ

(H₁) et triangle GMN : th② : (MN) // (IJ) ⓔ

(H) et triangle ABC : th② : (BC) // (IJ) ⓕ

Conclusion : ⓑ et ⓓ : (BM) // (NC)
ⓔ et ⓕ : (MN) // (BC) } ③' : MBCN parallélog.

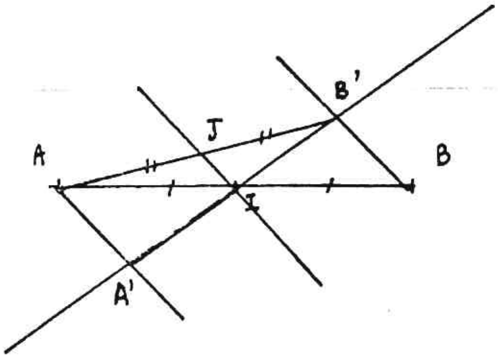
③' et th③ : G milieu de MC et G milieu BN ⓖ

Remarque :
Dans cette démonstration on peut n'utiliser qu'un seul parallélogramme.

Théorème (4)

Propriété fondamentale : Dans un triangle, les médianes sont concourrantes en un même point G appelé centre de gravité du triangle.

xercice " Le noeud papillon " $\longrightarrow$



(H) I milieu [AB]

$(AA') // (BB')$

(C) I milieu [A'B']

. construction : J milieu [AB']

. Triangle ABB'

(H) I milieu [AB], J milieu [AB'] $\}$ th (2) $(IJ) // (BB')$ (a)

. Triangle AA'B'

(a) $(IJ) // (BB')$, (H) $(BB') // (AA')$ $\}$ $(IJ) // (AA')$ (e)

(e) et (H) J milieu [AB'] : th (1) I milieu [A'B']

Remarque : AB'BA' est un parallélogramme.

|| expression employée par un élève.

- . Démonstration trouvée par un élève.
  . La démonstration proposée faisait appel à la projection du milieu d'un segment.

P : $P(A) = A'$
$P(B) = B'$
$P(I) = I$

(H) I milieu de [A'B']

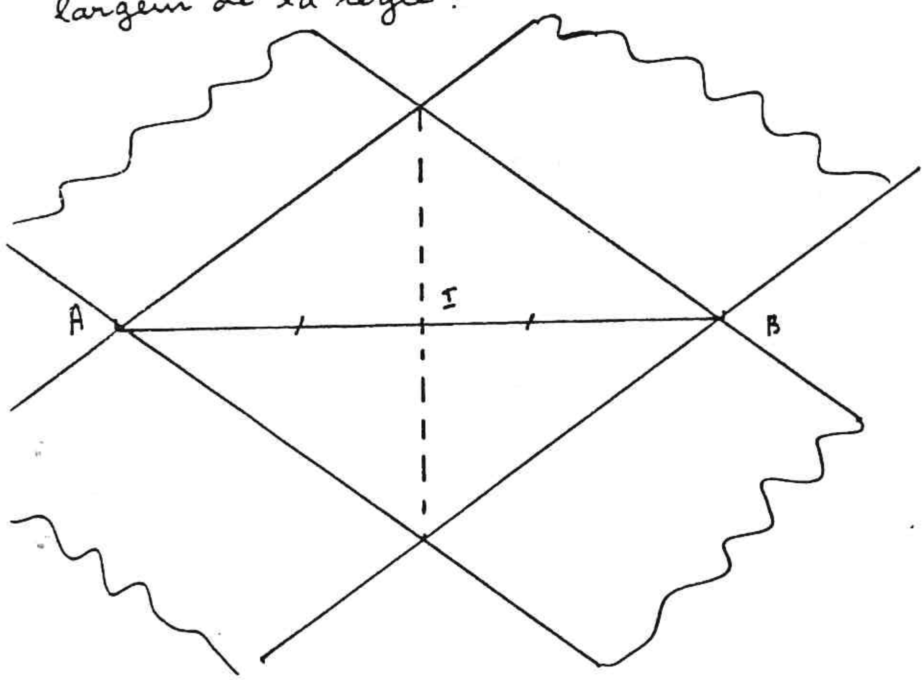
Axiome : de la proj du milieu : I milieu de [A'B']

cette démonstration est délicate en 4ème et celle qui est présentée a l'avantage d'utiliser les théorèmes précédents, elle nécessite cependant une construction supplémentaire elle est beaucoup plus longue.

Travaux pratiques :
- construction géométrique du milieu d'un segment
. utilisation d'une règle plate non graduée.

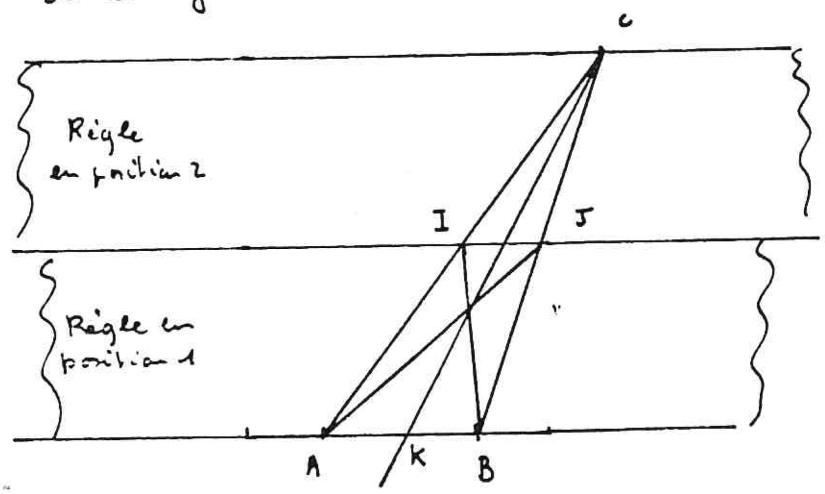
Problème : en utilisant une règle à bords parallèles construire le milieu d'un segment [AB]

a) Si la ~~est~~ longueur AB est supérieure à la largeur de la règle :



On a proposé la
- solution et remarqué que le quadrilatère obtenu est un parallélo-gramme particulier appelé losange les élèves ont mesuré les côtés.
- Démonstration avec le théorème ③
- question : si on utilise 2 règles de largeurs différentes qu'obtient on ?

ⓑ Si la longueur AB est inférieure à la largeur de la règle.



Remarques:
- On peut aussi utiliser la méthode ⓐ pour résoudre ⓑ en utilisant un point C auxiliaire.
- I et J peuvent aussi être construits avec la méthode ⓐ
le point C doit être le plus éloigné possible pour avoir plus de précision.

- On ne peut encore démontrer la méthode ⓑ. pourquoi ?

VI) Objectif : relier la notion de milieu et celle de distance physique. dans le but d'aborder la seconde partie de l'activité géométrique utilisant la distance.

Milieu et Distance. (Un peu de logique)

- Réponses des élèves.
- et Remarques.

Rappels :

Question ① : compléter :

Si I milieu du segment [AB] alors ......

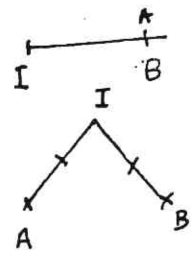
- les segments [IA] et [IB] ont la même longueur
- les distances IA et IB sont égales
- Plusieurs confusions de vocabulaire et de notations.

Question ② : Ecrire la réciproque de la phrase précédente est elle vraie ou fausse ?

Si "IA = IB" alors I milieu de [AB]

- préciser la notion de Réciproque (beaucoup d'élèves ne le savent pas)
- Réciproque fausse.

~~ex~~ de contre exemples donnés :



(prolongements vers la 2ème partie : médiatrice et distances)

Question ③ : compléter la phrase ① pour que sa réciproque soit vraie.

1ère Forme :

Si I milieu de [AB] alors A, I et B sont alignés. et IA = IB.

Beaucoup d'élèves utilisent la notation $\frac{AB}{2}$

2ème Forme :

Si I milieu de [AB] alors AI = IB = 0,5 AB

Ecrire les réciproques.

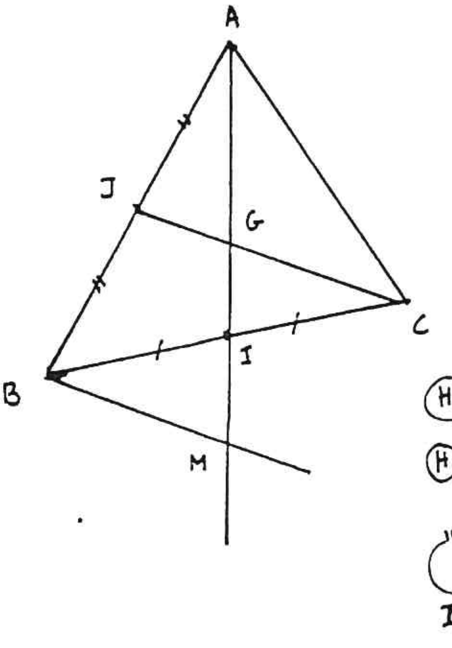
Exercice 1 :

Position du centre de gravité d'un triangle.

① Tracer un triangle sur une feuille blanche et construisez deux médianes remarquez sur leur point G d'intersection ?

Ⅱ

Démonstration :



(H) G centre de gravité de ABC
CJ et AI médianes.

(Hc) (BM) // (JC)
(BM) ∩ (AI) = M

- triangle ABM, J milieu [AB], JC // BM } Th ① G milieu [AM] ⓐ

- ~~triangle~~ Soit [GM]

(Hc) (CG) // (BM)

(H) I milieu BC.

donc voir exercice précédent ("le noeud papillon").

I milieu [GM] ⓑ

ⓐ G milieu [AM] donc GA = GM
ⓑ I milieu [GM] donc GI = IM ou GM = 2IG] GA = 2IG

$$IA = IG + GA$$
$$= IG + 2IG$$
$$\boxed{IA = 3IG}$$

- Les enfants ne pensent pas toujours à utiliser la construction du milieu utilisant la projection et prennent un point par tâtonnement ou en mesurant approximativement.
- On revient donc à une construction précise des milieux des côtés.
- Il faut orienter les élèves sur la mesure des segments limités par une G sur une médiane.

Aucun ne pense à utiliser le compas.
ils constatent : AG = 2IG.
ne comparent pas IG et IA

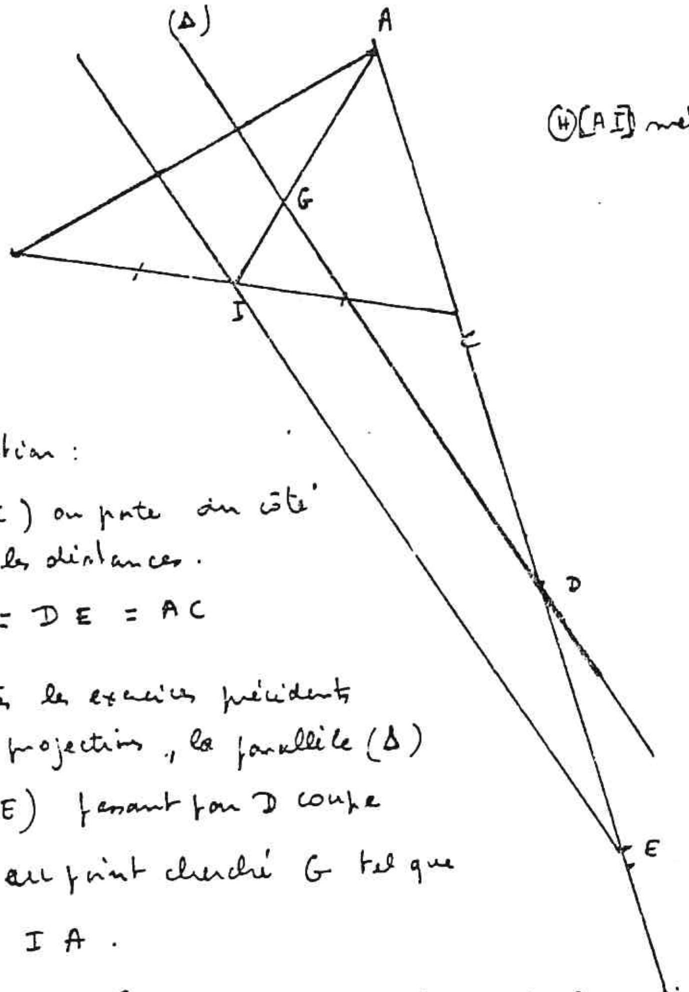
Les exercices précédents et les rappels sur les propriétés métriques du milieu ont été très utiles.

Exercice 2

Construire le centre de gravité d'un triangle suivant les règles :

1°) - Interdiction d'utiliser plus d'une médiane

2°) . Interdiction de mesurer (avec une règle graduée).



(H) [AI] médiane .

construction :

- Sur (AC) on porte du côté de C les distances.

CD = DE = AC

- D'après les exercices précédents sur les projections, la parallèle (Δ) à (IE) passant par D coupe [AI] au point cherché G tel que

3GI = IA .

- Vérifier que (BG) et (CG) contiennent les milieux respectifs de [AC] et [AB] .

. utilisation de la projection du milieu et des prolongements déjà étudiés, bonne révision.

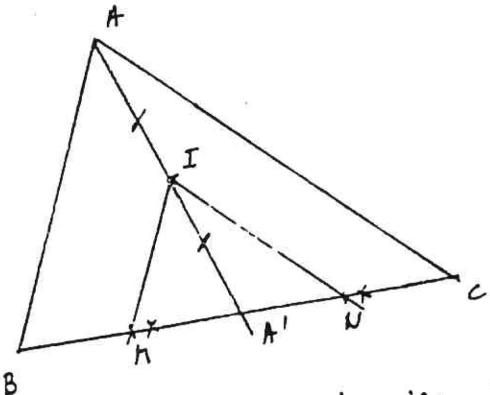
Construction :

- On peut penser utiliser le prolongement du côté partant de A le plus court

- Problème : penser à reporter la distance AC avec un compas .

- 2 parallèles suffisent

Exercice (3) :



(H) A' milieu [BC]
I milieu [AA']
(IM) // (AB)
(IN) // (AC)

le problème était centré surtout sur la distance .

~~Que dire~~ Démontrer que A' milieu [MN] .

(H) et th (1) - M milieu [BA'] (a)
- N milieu [A'C]

(H) A' milieu [BC] et (a) : MA' = BM, A'N = NC } BM + MA' = A'N + NC
2MA' = 2NA'

Exercice ④ : L'énoncé est donné aux élèves pour la séance suivante. Il leur est alors demandé d'en faire une correction complète sans aucune intervention de notre part.

Soient un triangle ABC et la médiane [AM]. La médiane [BP] du triangle ABM est sécante à (AC) en D.
La parallèle à (BD) contenant M est sécante à (AC) en E.
Démontrer que : AD = DE = EC.

(Révision de la propriété du milieu)

Résultats : 8 / 16 (16 présents)

Synthèse par un devoir sur tout le chapitre précédent.

<u>Enoncé</u> :

Tracer un segment [AC] mesurant 6 cm puis les points B, C et D tels que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
Soit E le symétrique de C par rapport à A.
La parallèle à (AB) contenant E est sécante à (BC) en G.
La parallèle à (AD) contenant E est sécante à (DC) en F.

1°) Démontrer que B et D sont les milieux respectifs des segments [CG] et [CF].

2°) Démontrer que A est le milieu du segment [FG].

3°) Démontrer que : (DB) // (FG).

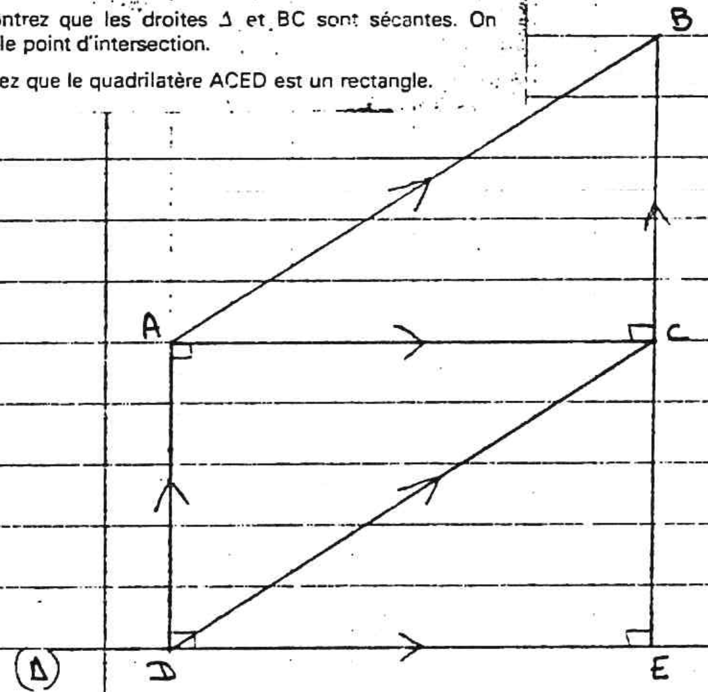
4°) Soit le point I tel que : $(DG) \cap (BF) = \{I\}$
Démontrer que ~~I ∈ G~~ $I \in (AC)$
En déduire la distance IA.

10 3 80 Exercice n° 4 page 72

Soit un parallélogramme ABCD tel que les droites AC et BC soient orthogonales. Soit Δ la droite passant par D et parallèle à la droite AC.

a) Démontrez que les droites Δ et BC sont sécantes. On appelle E le point d'intersection.

b) Prouvez que le quadrilatère ACED est un rectangle.



Rédaction:

1) Considérer les droites (Δ), (AC) et (BC)

(AC) // (Δ) } par hypothèse
(BC) $\perp$ (AC) }

Théorème : Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

$(BC) \perp (\Delta)$

Conséquence : $(BC) \cap (\Delta) = \{E\}$

2) Considérer le quadrilatère ACED :

$(AC) \parallel (DE)$ } par hypothèse
$(AD) \parallel (CE)$ }

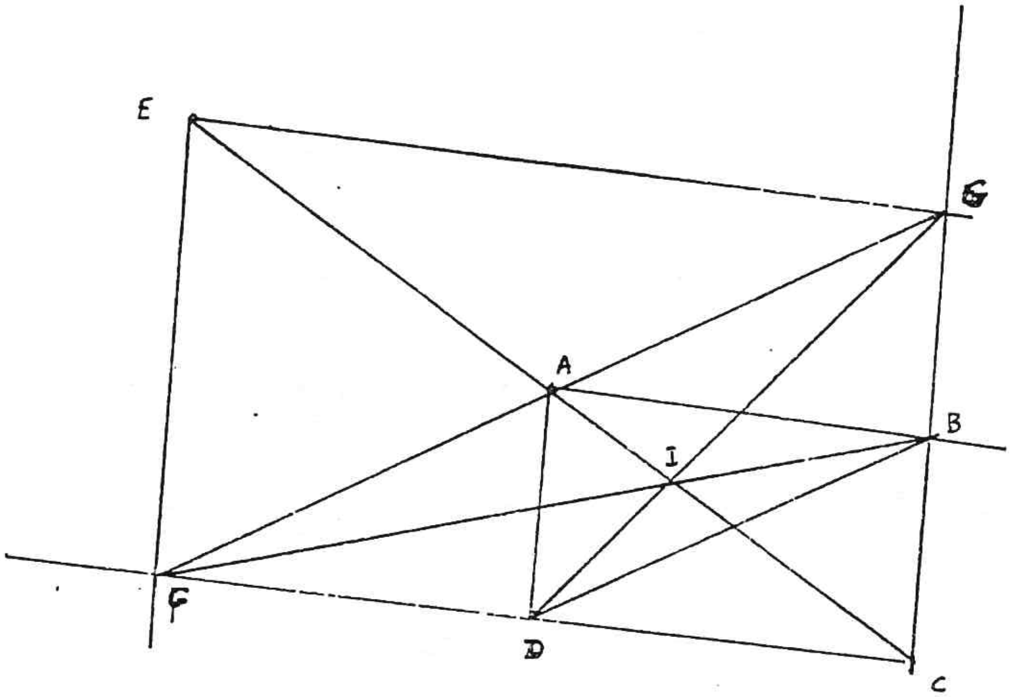
Définition : Un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.

ACED est un parallélogramme.
or $(AC) \perp (CE)$ par hypothèse.

Théorème : Un parallélogramme ayant deux côtés perpendiculaires est un rectangle.

ACED est un rectangle

Correction par les élèves du devoir (page 17),



(H) · ABCD parallélogramme.

$AE = AC$

$(EG) // (AB)$

$(EF) // (AD)$

1°) - Triangle EGC (H) A milieu $[EC]$, $(AB) // (EG)$ th ① : B milieu $[CG]$

- triangle ECF (H) A milieu $[EC]$, $(AD) // (EF)$ th ① D milieu $[FC]$

2°) (H) $(EG) // (AB)$

$(AB) // (DC)$ (ABCD parallélogramme) donc $(EG) // (FC)$

de même : $(EF) // (AD)$

$(AD) // (CG)$ $(EF) // CG$

EFCG parallélogramme : $[EG]$ diagonale passe par A milieu de $[EC]$ et $AF = AG$

3°) Triangle FGC D milieu $[FC]$, B milieu $[GC]$ th ② $(BD) // (FG)$.

4°) Triangle FGC GD médiane, FB médiane } I centre de gravité

I est sur l'autre médiane $I \in [AC]$

$$IA = \frac{AC}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ (en cm)}$$

① Rappel sur la Symétrie par centrale.

- problème de construction de la figure : échelle à prendre il faut d'abord tracer EC.

- Les enfants ont déjà fait la figure sur une feuille mais n'ont pas de vue globale de celle-ci par la tracer sur la plus grande surface au tableau.
idée d'exercice :
Observer une figure géométrique, la cacher et la tracer ensuite de mémoire.

- un élève utilise la projection P(A) en oubliant que au départ F A G ne sont pas considérés comme alignés dans la 1ère question

- Résultats :

1°) et 2°) 10/17 (17 présents)

3°) 7/17

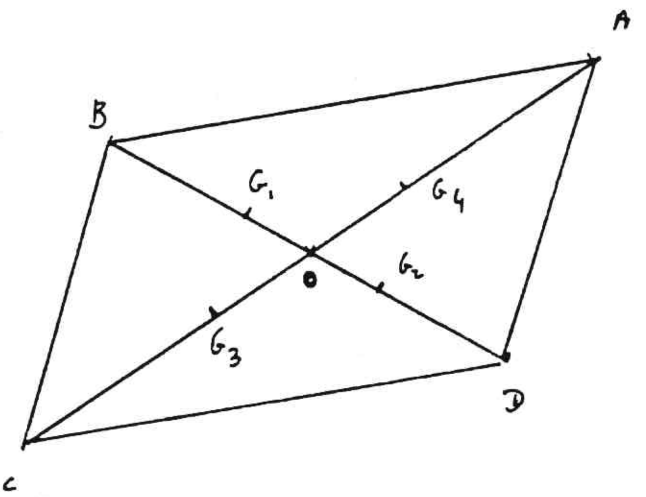
4°) 11/17

Autre exercice :

ABCD est un parallélogramme, O l'intersection de ses diagonales. On a : en centimètres : $AC = 9$, $BD = 6$.

1°) Construire G_1 G_2 G_3 G_4 centres de gravité des triangles ABC, ADC, BCD et ABD.

2°) Démontrer que $G_1 G_3 G_2 G_4$ est un parallélogramme.



20

Le problème est volontairement axé sur la notion de distance pour qui permet de faire la transition avec la 2ème partie de la progression.

- utilisation de la réciproque de la propriété fondamentale du parallélogramme.

VI) : Objectif : Propriétés intuitives de la Symétrie.
- Orthogonalité
- distance.

) Problème utilisant une manipulation :

Tracer un point A sur une feuille blanche, plier la feuille, indiquer en piquant avec la pointe d'un compas fixée en A l'emplacement d'un point A'. Déplier la feuille que constatez vous ?

Dans l'ordre, les constatations suivantes ont été faites par les élèves : Il semble que :

① A' symétrique de A

② Si [AA'] et la droite Δ support du pli se coupent en M, M est le milieu de [AA']

③ Δ ⊥ (AA')

- 1 élève utilise un pli passant par A.
- Le terme de Symétrique est venu le premier
- les élèves n'affirment pas que leurs constatations sont vraies mais utilisent le terme "il semble que"

Ces premières constatations ont amené à préciser la notion intuitive de symétrie ~~axiale~~ par rapport à une droite.

Définition : Un point A' est symétrique d'un point A par rapport à une droite Δ si et seulement si (AA') ⊥ Δ et (AA') ∩ Δ = M milieu de [AA'].

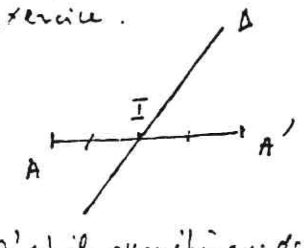
- Définition énoncée par les élèves.
  Il est normal que la notion de distance ne soit pas prononcée puisque les leçons précédentes ont particularisé le milieu
- La notion de droites perpendiculaires est liée à la construction géométrique à l'aide de l'équerre.

Comparaison de la Symétrie et de la projection :

. La projection d'un point sur une droite parallèlement à une droite donnée est une application non bijective du plan sur une droite
- La Symétrie est une bijection du plan sur lui-même.

Dans les 2 cas on a été amené à considérer le cas particulier où le point A se trouve sur la droite.
Constatation : il est son propre transformé.

- Retour sur la différence entre symétrie ponctuelle et symétrie axiale : exercice.



A' est-il symétrique de A

) Sur votre feuille, indiquer un autre point B que remarquez-vous sur A, A', B, B' symétrique de B par rapport à Δ ?

Il semble que :

① $(A'B) \cap (AB') \in \Delta$

② $(AA') \parallel (BB')$

③ $AB = A'B'$

④ $(AB) \cap (A'B') \in \Delta$

- l'égalité des distances AB et $A'B'$ n'est pas donnée en premier.
- la propriété ① n'est pas à priori la plus simple.
- les remarques intéressantes seront développées ultérieurement.

Propriétés de la Symétrie par rapport à une droite :

① Si vous pliez votre feuille suivant Δ vous constatez :

$$A \longmapsto A'$$
$$B \longmapsto B'$$

Si on note S_Δ cette bijection, on aura

ⓐ $S_\Delta(A) = A'$
$S_\Delta(B) = B'$

que dire de $S_\Delta(A')$? après pliage, les élèves constatent :

ⓔ $S_\Delta(A') = A$
$S_\Delta(B') = B$

en ~~en~~ comparant ⓐ et ⓑ :

$$S_\Delta\left[[S_\Delta(A)]\right] = A$$

$$S_\Delta\left[[S_\Delta(B)]\right] = B$$

on notera : $S_\Delta \circ S_\Delta = I$ identité.

on dira que la symétrie est involutive.

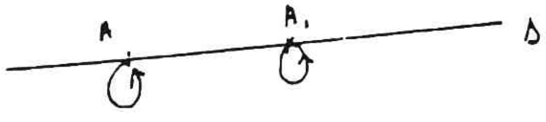
Après constatation par pliage, les élèves n'ont pas eu de difficulté à admettre cette nouvelle écriture.

② que peut on dire des points de la droite Δ ?

- Chaque point de Δ est son propre transformé.

Constatation assez rapide des élèves.

Définition : La droite Δ est invariante point par point dans la symétrie S_Δ
car : $\forall A \in \Delta$ alors $S_\Delta(A) = A$
et si $S_\Delta(A) = A$ alors $A \in \Delta$



③ Considérez la droite (AA') prenez un point A_1 de cette droite que peut on dire de son transformé ? essayez avec d'autres points en utilisant le compas.

Un point de (AA') a pour transformé un autre point de AA'.

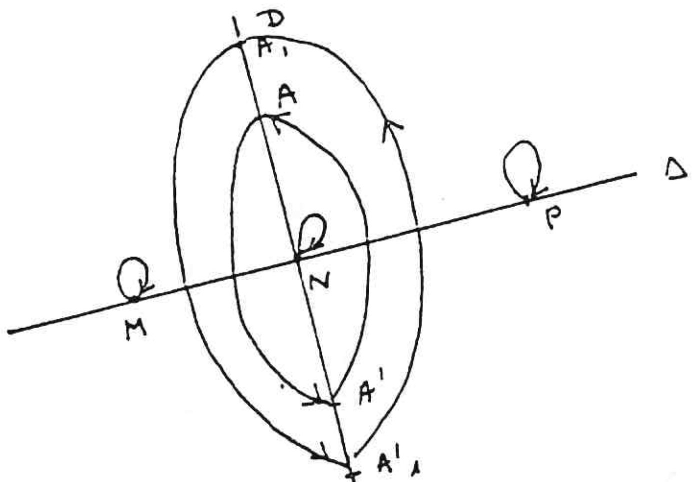
Les constatations et les écritures correspondantes ne semblent pas avoir soulevées de difficultés.

<u>Définition</u>: La droite $(AA') = D$ est invariante globalement dans la symétrie S_Δ si et seulement si :

$$\forall A \in D \quad S(A) \in D$$

Un seul point de D est son propre transformé c'est $\Delta \cap D$.

<u>schéma de la symétrie</u> :



i) <u>Définition de la perpendicularité de deux droites</u> :

$\boxed{\text{Une droite } D \text{ sera dite perpendiculaire à une droite } \Delta \text{ si et seulement si } S_\Delta(D) = D}$

On notera $D \perp \Delta$

les élèves connaissent le terme et jusqu'à maintenant il est lié au dessin géométrique utilisant l'équerre. ~~le compas~~. Il s'agit ici de développer une ébauche de modèle mathématique en donnant une définition plus abstraite de la perpendicularité qui seule devra être utilisée dans les démonstrations futures.

② Propriété :

Si $D \perp \Delta$ alors $S_\Delta(D) = D$

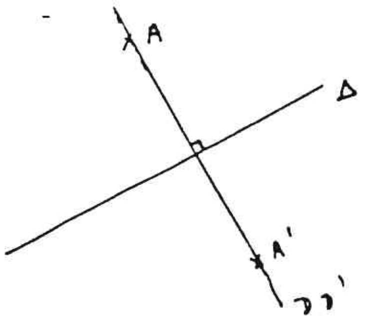
Constatation, si on plie la feuille suivant D on a $S_D(\Delta) = \Delta$ d'où.

Si $S_\Delta(D) = D$ alors $S_D(\Delta) = \Delta$

donc $\Delta \perp D$

$\boxed{\text{Si } D \perp \Delta \text{ alors } \Delta \perp D}$

(b) <u>Propriété</u> : Par un point n'appartenant pas à une droite Δ on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à Δ.



(H) Soit D une perpendiculaire à Δ telle que :
$A \in D$

(H) $S_\Delta(D) = D$ (1)

s'il existe une autre droite D' telle que $D' \perp \Delta$ et $A \in D'$

on a : $S_\Delta(D') = D'$ (2)

Soit $A' = S_\Delta(A)$ (1) et (2) entraînent $A' \in D$ et $A' \in D'$

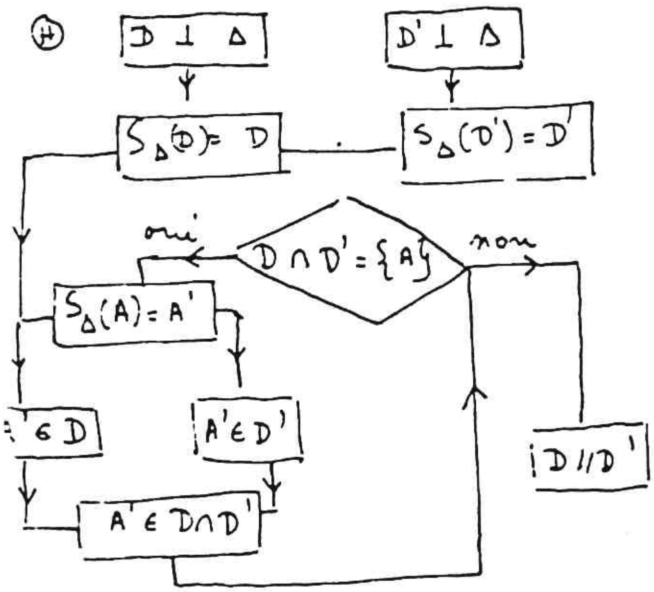
donc $A \in D \cap D'$ et $A' \in D \cap D'$.

d'où la seule condition : $D = D'$

(c) Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

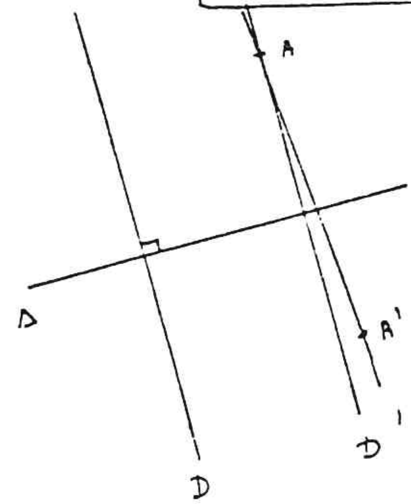
Soit $\left.\begin{array}{l} D \perp \Delta \\ \text{et } D' \perp \Delta \end{array}\right\}$ (H)

Schéma de la démonstration :



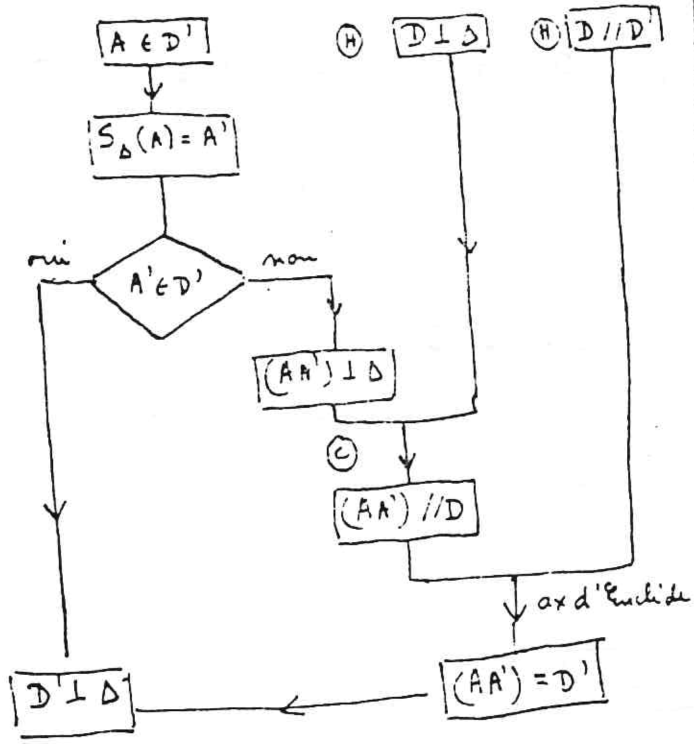
Les élèves ont trouvé un intérêt certain à établir un résumé sous forme de schéma et ou organigramme. Ce qui permet de clarifier la démonstration rédigée sur le cahier.

<u>Réciproque :</u> Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



Ⓗ $D \parallel D'$
$\Delta \perp D$

organigramme :

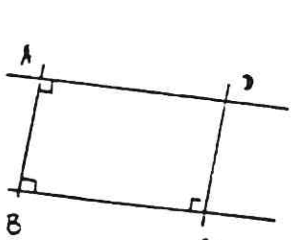


<u>Application</u> : <u>le Rectangle</u>.

Ⓑ <u>Définition</u> : Un rectangle est un quadrilatère ayant trois paires de côtés consécutifs orthogonaux

<u>Problème :</u> ABCD étant un rectangle,
① Démontrer que ABCD est un parallélogramme
② Démontrer que (AD) ⊥ (DC)

①



Ⓗ $\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (BC)\\ (DC) \perp (BC)\end{array}\right\} \rightarrow (AB) \parallel (DC)$

$\left.\begin{array}{l}(AD) \perp (AB)\\ (BC) \perp (AB)\end{array}\right\} \rightarrow (AD) \parallel (BC)$

cl : ABCD parallélogramme

bonne application de la propriété Ⓒ
11 élèves sur 24 ont trouvé.

(2) application de la propriété (d).

ABCD parallélogramme.

$\downarrow$

$(AB) \parallel (DC)$ $\qquad$ $(AD) \perp (AB)$

$\downarrow$ (d)

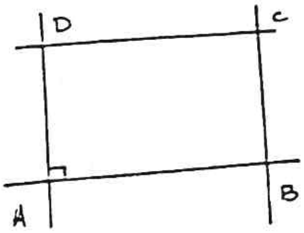
$(AD) \perp (DC)$

8/24 ont trouvé

cette propriété est nouvelle et semble plus délicate.

<u>Propriété du rectangle</u> :

- un rectangle est un parallélogramme ~~qui a un angle droit~~ dont deux côtés consécutifs sont perpendiculaires.



(H) ABCD parallélogramme

$(A,D) \perp (A,B) \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (AD) \\ (AD) \parallel (BC)\end{array}\right\} \xrightarrow{(d)} (AB) \perp (BC) \rightarrow$ ABCD rect.

$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (BC) \\ (BC) \parallel (AB)\end{array}\right\} \rightarrow (DC) \perp (BC) \rightarrow$

cette démonstration a semblé plus facile aux élèves qui l'ont trouvée dans leur majorité.

III **Objectif :**
- Conservation de la distance dans toute symétrie axiale
- Médiatrice
- application aux figures planes particulières.

② **Conservation de la distance dans une symétrie par rapport à une droite dans le cas où un point est sur la droite.**

① Découverte intuitive :

① Soit un point A et Δ une droite, on construit $S_\Delta(A)$ que dire des points de Δ ?

② . Soit un segment [A A'] construire l'ensemble des points équidistants de A et A'.
conclusion ?

Définition et Axiome :

L'ensemble des points équidistants de deux points A et A' est l'axe de symétrie du segment [A A'], cet ensemble est appelé médiatrice du segment [A A'].

Propriétés : - Comme I, milieu de [A A'] est équidistant de A et de A', I appartient à la médiatrice de [AA']
- La médiatrice est aussi perpendiculaire à (A A')
- La médiatrice d'un segment est unique. ceci est une conséquence de l'unicité de la perpendiculaire à une droite menée d'un point donné.
- $MA = MA'$ si et seulement si $M \in (\Delta)$ médiatrice de [A A'].

. Les élèves choisissent plusieurs points M sur Δ ils constatent soit avec le double décimètre (pris en premier) et le compas, l'équidistance $MA = MA'$ dans tous les cas.

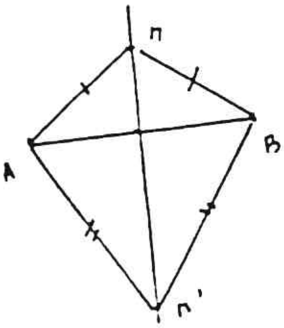
- Après des hésitations, les enfants utilisent le compas et constatent que les points semblent alignés.

pas de difficultés.

Comment montrer qu'une droite est médiatrice d'un segment ?

ⓐ En utilisant deux points de la droite :

(H) $MA = MB$
$M'A = M'B$
$M \neq M'$



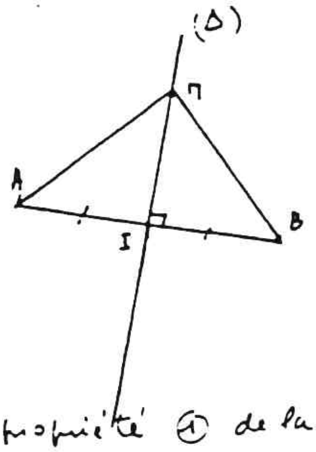
$MA = MB \Rightarrow M \in \text{Med}[AB]$
$M'A = M'B \Rightarrow M' \in \text{Med}[AB]$
$\rightarrow (MM')$ med $[AB]$

Théorème 1 : Si $M \neq M'$ et $MA = MB$, $M'A = M'B$ alors (MM') est la médiatrice de $[AB]$.

- Construction de la médiatrice d'un segment au compas.

ⓑ Cas particulier :

(H) I milieu de $[AB]$
$(D) \perp [AB]$

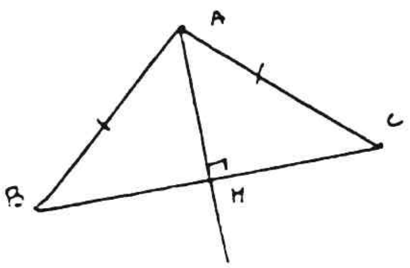


C'est une conséquence de la propriété ① de la médiatrice.

Théorème 2 : Si I milieu de $[AB]$ et $[MI] \perp [AB]$ alors MI est la médiatrice de $[AB]$

ⓒ Dans un triangle isocèle :

(H) $AB = AC$
$AH \perp BC$



$A \in \text{Med}[BC]$
$(AH) \perp BC$ unique
$\rightarrow \text{Med}[BC] \perp BC \rightarrow (AH) = \text{Med}[BC]$

Théorème 3 : Si $AB = AC$ et $(AH) \perp (BC)$ alors (AH) est la médiatrice de $[BC]$

- Beaucoup d'enfant ont tendance à construire $MA = MB = M'A = M'B$.

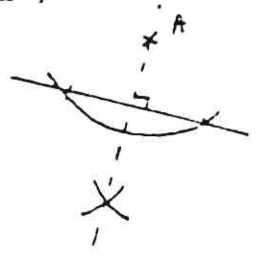
- Remarques sur la figure obtenue : losange, rhombe. ou le cas particulier où M est sur $[AB]$ c'est alors le milieu de $[AB]$ la figure obtenue est un triangle.

Constructions :

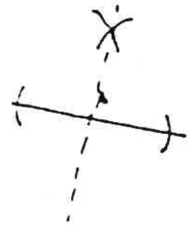
ⓐ du milieu d'un segment.

ⓑ De la perpendiculaire à une droite donnée contenant un point donné.

- $A \notin D$



. $A \in D$

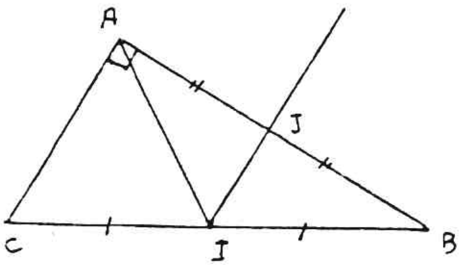


Propriétés de la médiatrice appliquées aux figures planes :

I Triangle rectangle :

Définition : Un triangle ayant deux côtés orthogonaux est un triangle rectangle.

Problème : Soit ABC un triangle rectangle en A, I le milieu de l'hypoténuse [BC].
Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



D'autres démonstrations sont proposées par les élèves.

Ⓗ $(AB) \perp (AC)$
I milieu $[BC]$
J milieu $[AB]$

① $\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu } [BC] \\ J \text{ milieu } [AB] \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (IJ) \parallel (AC) \\ (AC) \perp (AB) \end{array}\right] \Rightarrow (IJ) \perp (AB)$

② $\left.\begin{array}{l} (IJ) \perp (AB) \\ J \text{ milieu } [AB] \end{array}\right] \Rightarrow IJ \text{ méd } [AB] \Rightarrow IA = IB$

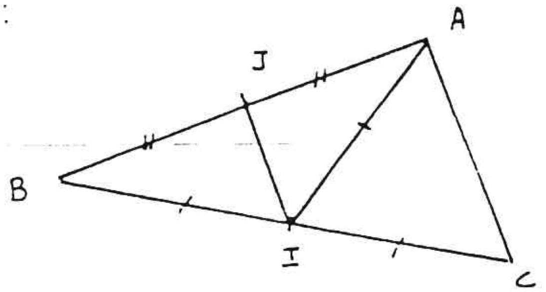
$\left.\begin{array}{l} ③\ IA = IB \\ ④\ IB = IC \end{array}\right] \Rightarrow IA = IB = IC$

Conclusion : I centre du cercle passant par A, B, C appelé cercle circonscrit au triangle ABC.

Théorème : le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.

Propriété : le segment joignant le milieu de l'hypoténuse au sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle est a pour mesure la moitié de celle de l'hypoténuse.

Réciproque :



(H) I milieu [BC]

$IA = IB = IC$

J milieu [AB]

(H) $\left.\begin{array}{l} IA = IB \\ JA = JB \end{array}\right] \Rightarrow (IJ)$ med $[AB] \Rightarrow (IJ) \perp [AB]$

$\left.\begin{array}{l} J \text{ milieu } [AB] \\ I \text{ milieu } [BC] \end{array}\right] \Rightarrow (IJ) \parallel (AC)$

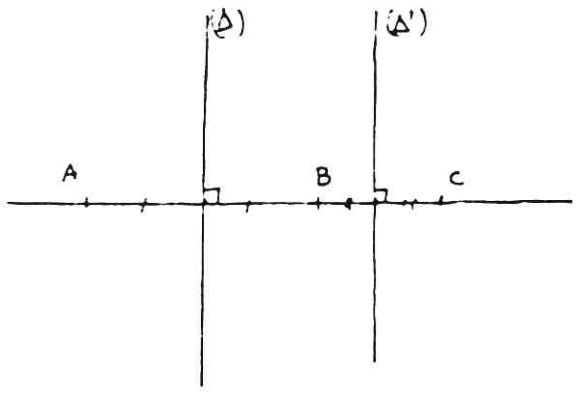
$\Rightarrow (AC) \perp (AB)$

Théorème réciproque : ① Si le centre du cercle circonscrit à un triangle est le milieu d'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle.

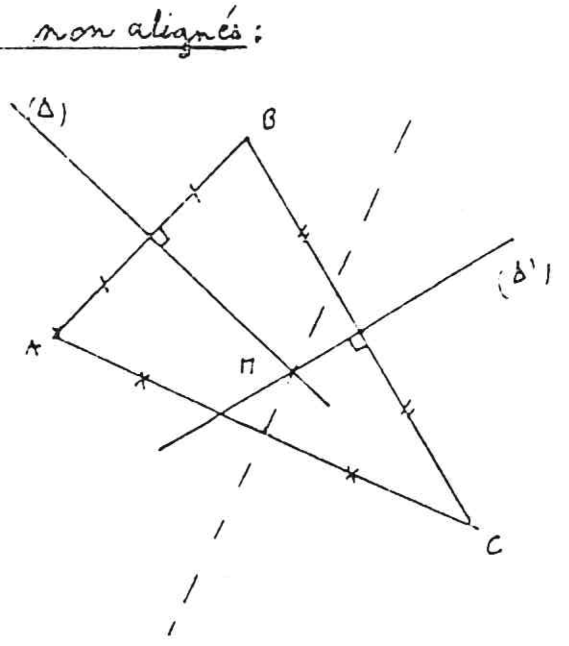
② La médiane relative à l'hypoténuse est isométrique à la moitié de l'hypoténuse. d'un triangle rectangle.

- Point équidistant de trois points donnés.

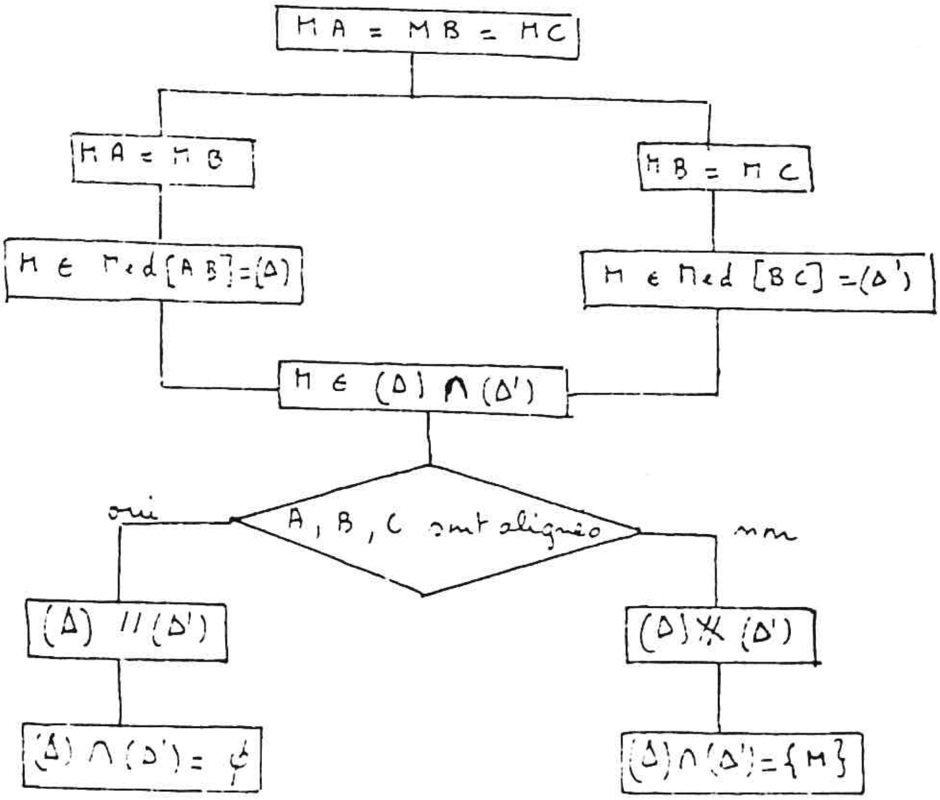
① Si les 3 points A, B, C sont alignés :



② A, B, C non alignés :



Organigramme de la démonstration :
Si M existe.



Le cas n° 2 montre que $M \in Med[AC]$ on en déduit.

Théorème : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

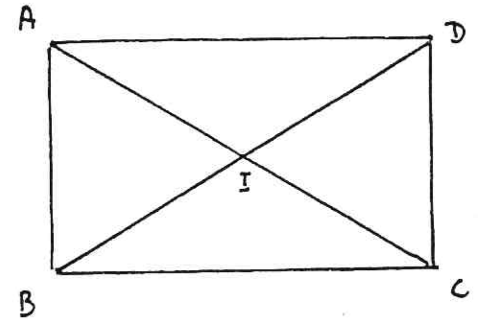
③ $\left.\begin{array}{l} S_\Delta(A) = D \\ S_D(C) = B \end{array}\right] \overset{\text{axiome}}{\Rightarrow} \quad AC = DB$

<u>Théorème 1</u>. Les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.

<u>Théorème 2</u> : Les diagonales d'un rectangle sont isométriques

<u>Réciproque du théorème 2</u>.

Un parallélogramme ayant ses diagonales isométriques est un rectangle.

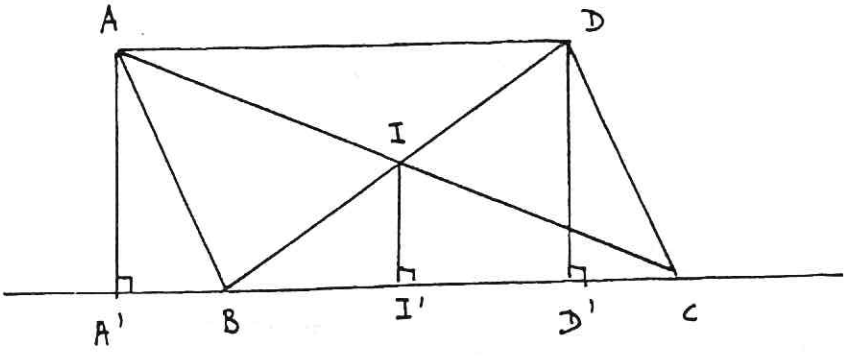


Ⓗ $\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ parallélogramme} \\ AC = BD \end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{IB = ID = IA = IC}_{\Downarrow}$.

$IB = ID = IA$

$\cancel{BAD}\ (BA) \perp (BD) \Leftarrow ADB$ triangle rect. $\Leftarrow IB = ID = IA$

<u>Exercice 2</u> : Montrer que les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.



Ⓗ $\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ parallélogramme} \\ I' = P(I) \quad A' = P(A) \quad D' = P(D) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} I \text{ milieu } [BD] \Rightarrow P(I) \text{ milieu } [BD'] \\ I \text{ milieu } [AC] \Rightarrow P(I) \text{ milieu } [A'C] \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} (II') \text{ méd } [BD'] \Rightarrow S_{(II')}(B) = D' \\ (II') \text{ méd } [A'C] \Rightarrow S_{(II')}(C) = A' \end{array}\right] \overset{\text{axiome}}{\Rightarrow} BC = D'A'$

$ADD'A'$ est un rectangle $\Rightarrow D'A' = AD$

$\Rightarrow BC = AD$

même démonstration pour AB et DC.

les élèves éprouvent des difficultés à utiliser la propriété : un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle il serait utile de récapituler tous les cas permettant de dire qu'un quadrilatère est un rectangle

Construction expliquée point par point aux élèves

- Lors d'une activité précédente une recherche a été effectuée dans laquelle les élèves ont évalué avec le compas les distances entre des points A, B et $S_\Delta(A)$ $S_\Delta(B)$. L'utilisation directe de l'axiome sans support de figure leur semble

(b) Conservation de la distance dans une symétrie par rapport à une droite dans le cas de points non situés sur la droite.

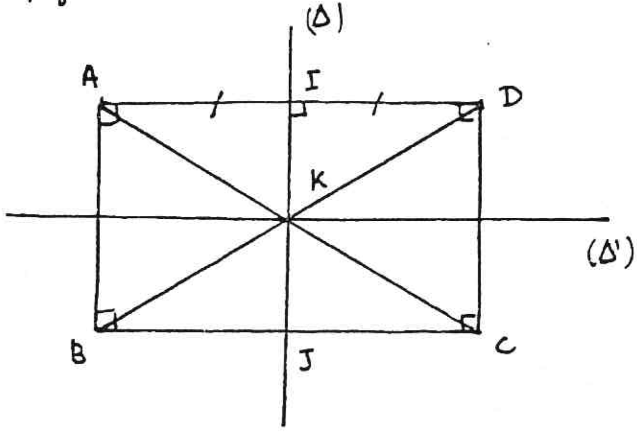
I Après construction des élèves :

(a) Axiome : Toute symétrie orthogonale conserve les distances.

Les élèves remarquent que pour tous point si $S_\Delta(A) = A'$ $S_\Delta(B) = B'$ et $AB = A'B'$ – ils éprouvent une certaine difficulté à penser comparer des segments symétriques lorsqu'ils n'ont pas de point sur Δ ou lorsqu'ils sont situés de part et d'autre de Δ. Le retour à l'application de l'axiome mécaniquement, sans support de la figure, est nécessaire ensuite la vérification directe avec le compas est réalisée.

Exercice 1 :

Soit la figure :



(H) $(AD) // BC$ $\quad (AD) \perp (BA)$ $\quad (\Delta) \perp (AD)$

$(AB) // DC$ $\quad (AD) \perp (DC)$

I milieu $[AD]$ $\quad (BC) \perp AB$

~~[illegible] [BC]~~ $\quad (BC) \perp (DC)$

1°) (Δ) médiatrice de $[BC]$

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta) \perp (AD)\\ (AD) // (BC)\end{array}\right] \quad (\Delta) \perp (BC) \quad (1)$$

P : projection orthogonale du plan sur (BC)

$(AB) \perp (BC) \Rightarrow p(A) = B$

(1) $(\Delta) \perp (BC) \Rightarrow p(I) = J$

$(DC) \perp (BC) \Rightarrow p(D) = C$

I milieu $[AD] \Rightarrow p(I)$ milieu $[BC] \Rightarrow J$ milieu $[BC]$ (2)

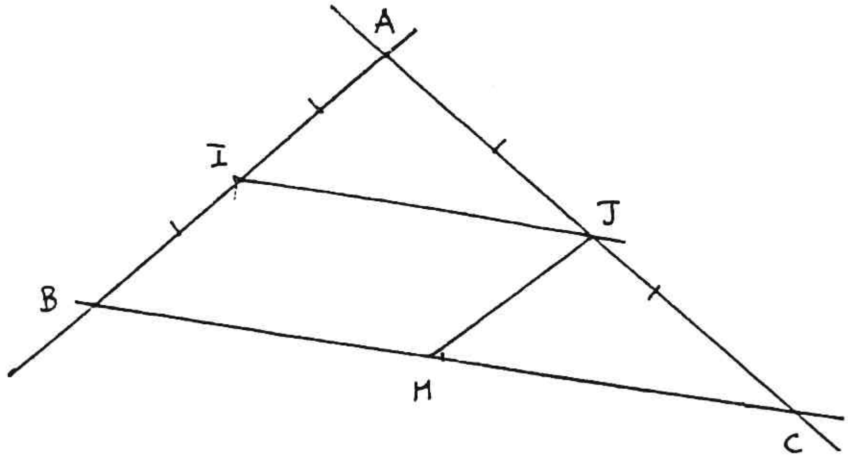
Conclusion : (Δ) médiatrice $[BC]$

2°) $AB = DC$?

Soit S_Δ symétrie orthogonale de droite (Δ)

$$\left.\begin{array}{l}S_\Delta(A) = D\\ S_\Delta(B) = C\end{array}\right] \text{ Axiome } - AB = DC$$

Application au triangle.



(H) I milieu [AB]
J milieu [AC] $\Big] \Rightarrow P_{(AB)}(J) = M$ milieu [BC] $\Rightarrow BM = MC$ (1)

(IJ) // (BC)

IJMB parallélogramme. $\Rightarrow$ IJ = BM. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $IJ = \dfrac{BC}{2}$

Théorème :

Le segment ayant pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle est isométrique à la moitié du troisième côté.

Losange :

Les enfants ont été mis devant le problème suivant :

Construire un quadrilatère ABCD tel que :

AB = BC = CD = DA = 10 (en centimètres)

Remarque sur la construction :

- y a-t-il des quadrilatères superposables ?

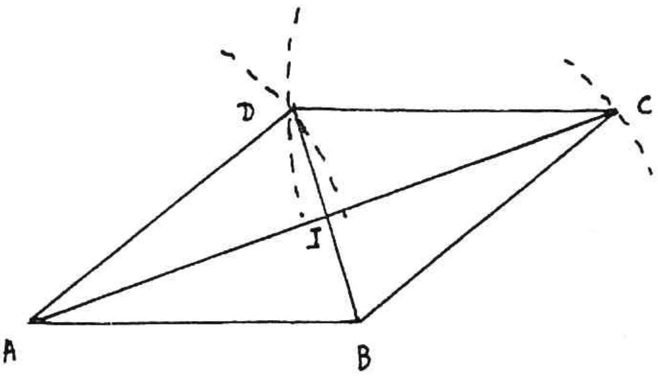
Bien que la notion d'angle ne soit pas au programme, il a été utile de la rappeler en utilisant les angles géométriques et on rapporteur que les élèves savent utiliser.

- Il semble que ce soit un parallélogramme.
- Les diagonales semblent perpendiculaires.
- Il semble qu'il y a 4 triangles isocèles dans la figure.
- Chaque diagonale est médiatrice de l'autre.

- 12 élèves ont dessiné des carrés.

- l'utilisation du compas ne vient pas en premier

- les élèves commencent par tracer un segment qu'ils reportent certaines figures ne se fermant pas.



Démonstration de ces propriétés :

Les élèves ont démontré seuls les diverses propriétés du losange.

(H) $\left.\begin{array}{l} DA = DC \\ BA = BC \end{array}\right] \Rightarrow (BD) \text{ med } [AC] \Rightarrow (BD) \perp (AC)$

$\left.\begin{array}{l} (BD) \text{ med } [AC] \Rightarrow I \text{ milieu } [AC] \\ \text{de même } (AC) \text{ med } [BD] \Rightarrow I \text{ milieu } [BD] \end{array}\right] \Rightarrow ABCD$ est un parallélogramme

- les côtés opposés sont parallèles

Cette figure est appelée losange.

Recherche d'une définition.

certains élèves confondent les données premières et les propriétés.

Définition :

Un quadrilatère ayant ses quatre côtés isométriques est un losange.

Propriétés démontrées :

1. Les diagonales d'un losange sont médiatrices l'une de l'autre.
2. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
3. Un losange est un parallélogramme particulier

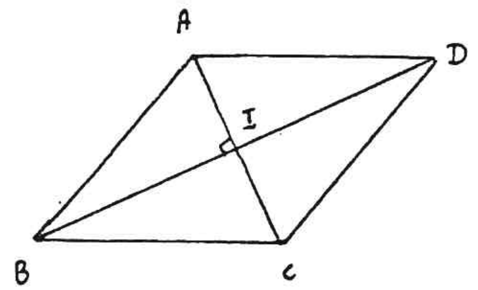
Propriétés réciproques.

Les élèves donnent les énoncés des réciproques

1. Un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange.

Démonstration : Les élèves construisent des figures parmi lesquelles on trouve le carré et le rhombe.


seul le carré est un losange.



(H) ABCD parallélogramme $\Rightarrow$ I milieu de BD
$(AC) \perp (BD)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow (AC)$ med $[BD]$

donc AB = AD
BC = CD

$\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu } [AC] \\ (AC) \perp (BD) \end{array}\right] \Rightarrow (BD) \text{ med } [AC] \Rightarrow \begin{array}{l} BA = BC \\ DA = DC \end{array}$

donc
AB = AD
BC = CD
BA = BC
DA = DC

<u>3 égalités suffisent</u> $\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ AD = DC \\ DC = CB \end{array}\right] \begin{array}{l} AB = DC = AD \\ = BC \end{array}$

notion de transitivité quelques difficultés. les enfants cherchent les autres égalités pouvant être utilisées

ABCD est un losange.

(2) Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques est un losange.

aucune difficulté

<u>Carré</u> :

<u>Définition</u> : Un quadrilatère étant à la fois losange et rectangle est un carré.

Trouvée par les élèves

Ce quadrilatère existe puisqu'il a été construit.

<u>Comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?</u>

Les élèves trouvent intuitivement les propriétés portant sur les implications
Rectangle $\Rightarrow$ carré
losange $\Rightarrow$ carré

(1) On peut utiliser la définition

(2) à partir d'un rectangle :

Un rectangle ayant deux côtés consécutifs isométriques est un carré.

partir du losange :
(3) Un ~~rectangle~~ losange ayant deux côtés consécutifs orthogonaux est un carré

- Difficulté des élèves à prendre le minimum de données
ex : losange ayant 4 côtés ~~isométriques~~ orthogonaux est un carré

(4) Un losange ayant ses diagonales isométriques est un carré.

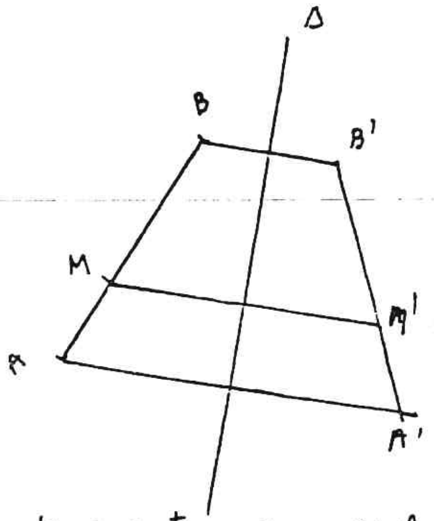
aucune difficulté sur la démonst[...]

(ce qui découle de la remarque d'un élève : un losange inscrit dans un ...)

VIII Dernières propriétés de la symétrie par rapport à une droite :

- Conservation de l'alignement.
- Conservation du milieu
- Conservation des ~~directions~~ parallélisme.

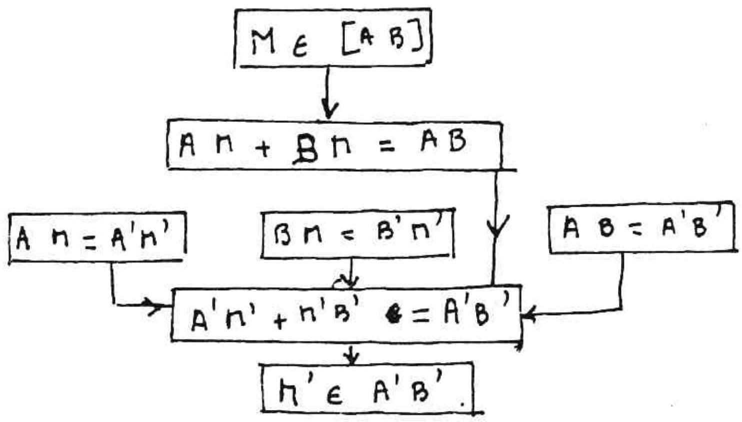
1) Conservation de l'alignement des points :



- Il faut montrer que quel que soit $M \in [A,B]$ $S_\Delta(M) \in [S(A), S(B)]$
- On peut montrer que si $M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$

donc il faut démontrer que $S_\Delta(M) = M' \in [A', B']$ ou $A'M' + M'B' = A'B'$

organigramme de la démonstration :



Théorème : les symétries orthogonales conservent l'alignement des points.

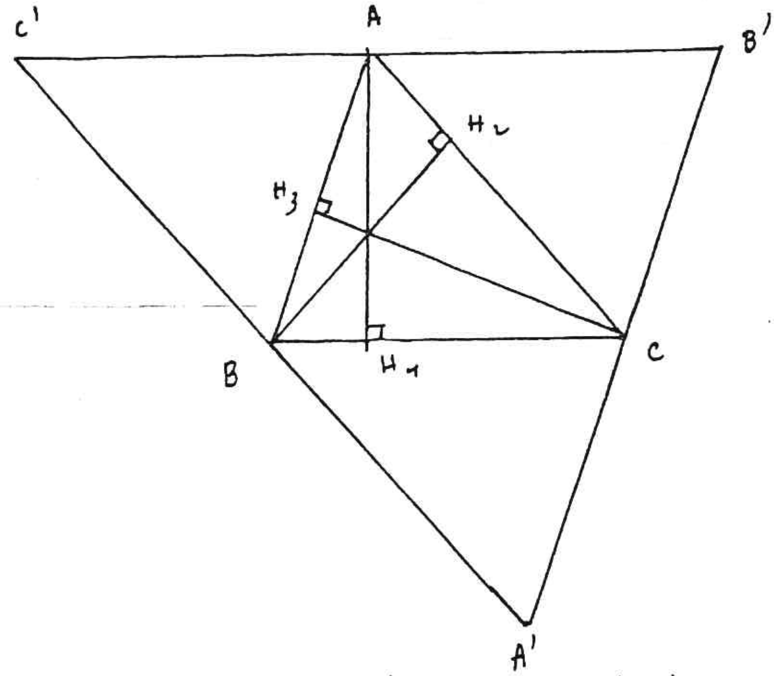
Conséquence : - l'image d'un segment est un segment isométrique
- l'image d'une demi-droite est une demi-droite
- l'image d'une droite est une droite.

la méthode a été donnée aux élèves car la notion de point "courant" d'une droite ou d'un segment ne peut être trouvée directement à ce niveau.

- il a été nécessaire de passer par plusieurs contre-exemples pour que les élèves admettent cette équivalence

Hauteurs d'un triangle :

① Construction d'un triangle connaissant les côtés.



De chaque sommet on trace des parallèles au côté opposé.
que dire des hauteurs de ABC ?

. Les quadrilatères ABCB' et ABA'C sont des parallélogram.
- nous on a les égalités de côtés opposés

$AB = A'C = CB'$.

C est milieu de [A'B']

de même A est milieu de [C'B']

B milieu [C'A']

$$\left.\begin{array}{l} AH_1 \perp BC \\ BC \parallel C'B' \end{array}\right] \Rightarrow AH_1 \perp C'B'$$

de même pour : $BH_2 \perp (C'A')$

$CH_3 \perp (A'B')$

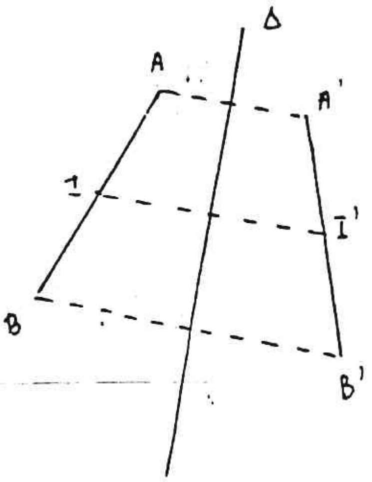
(AH_1), (BH_2), (CH_3) sont les médiatrices du triangle A'B'C', elles se coupent en un même point. Elles sont aussi les hauteurs du triangle ABC d'où

<u>Théorème</u> : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre de ce triangle.

. utilisation du compas.
- remarque sur les écarts angulaires qui sont indépendants de la longueur des côtés.
- La construction a été complétée par le professeur.

Les élèves ont démontré seuls la propriété sans difficulté.

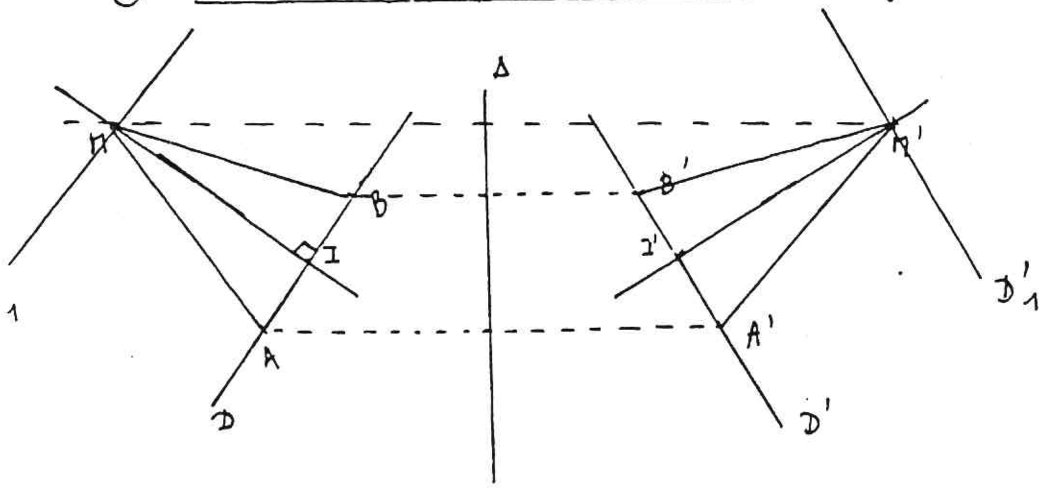
② Conservation des milieux.



Ⓗ I milieu [AB]

$$\begin{array}{ccc} \boxed{IA = IB} & & \boxed{A, I, B \text{ alignés}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{I'A = I'B} & & \boxed{A', I', B' \text{ alignés}} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \boxed{I' \text{ milieu } [A'B']} & \end{array}$$

③ Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité.



Ⓗ $[AB] \subset D$ $\quad B' = S_\Delta(B)$ $\quad D' = S_\Delta(D)$

I milieu $[AB]$ $\quad A' = S_\Delta(A)$

$M \in \text{Med}\,[AB]$ $\quad I' = S_\Delta(I)$

$M' = S_\Delta(M)$

Demonstration :

$$I \text{ milieu } [AB] \overset{②}{\Longrightarrow} I' \text{ milieu } [A'B']$$

$$M \in \text{Med}\,[AB] \Rightarrow MA = MB \overset{①}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} M'A' = MA \\ M'B' = MB \end{array}\right] \Rightarrow M'A' = M'B'$$

$$\Downarrow$$

$$(M'I') \perp (A'B') \Leftarrow M' \in \text{Med}\,[A'B']$$

conclusion : Si $(M,I) \perp (A,B)$ alors $(M',I') \perp (A',B')$

La Symétrie droite conserve l'orthogonalité.

Soit $D_1^* \,//\, D$ avec $M \in D_1$ on a :

$$\begin{array}{ccccc} (D_1) // (A,B) & \Leftrightarrow & \boxed{(M,I) \perp (A,B) \Rightarrow (M,I) \perp (D_1)} & & \text{si } D'_1 = S_\Delta(D_1) \\ & & \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow & & \\ (D'_1) // (A',B') & \Leftrightarrow & \boxed{(M',I') \perp (A',B') \Rightarrow (M',I') \perp (D'_1)} & & \end{array}$$

conclusion : la symétrie droite conserve le parallélisme.