



UNIVERSITÉ DE REIMS

Institut de Recherche Sur L'enseignement des Mathématiques

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

N° 2 - 1996

GROUPE
HISTOIRE DES MATHS



MISCELLANEA ANALYTICA.

LIBER PRIMUS.

*De Ordinatis rationalibus in Simpliciores
resolvendis.*

LEMMA I.

Si sint l & x Cosinus Arcuum duorum A & B , quorum
uterque eodem Radio r describatur, quorumque prior
sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet nume-
rus n ad Unitatem, tunc erit

$$x = \frac{r}{2} \frac{n \sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}}}{\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}}} + \frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}} = z$, hinc erit $z^n = l + \sqrt{l^2 - 1}$, seu $z^n - l =$
 $\sqrt{l^2 - 1}$, sive, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + ll = ll - 1$; de-
letisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$
B -+ 1

CETTE BROCHURE A ETE REALISEE
EN PARTIE GRACE AU SOUTIEN
DE LA DIRECTION DES LYCEES ET COLLEGES
DANS LE CADRE DES CONTRATS DLC-ADIREM
(THEME HISTOIRE DES MATHEMATIQUES)
DE 1995-96.



UNIVERSITÉ DE REIMS

Institut de Recherche Sur L'enseignement des Mathématiques

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

N° 2 - 1996

GROUPE
HISTOIRE DES MATHS



MISCELLANEA ANALYTICA.

LIBER PRIMUS.

*De Ordinatis rationalibus in Simpliciores
resolvendis.*

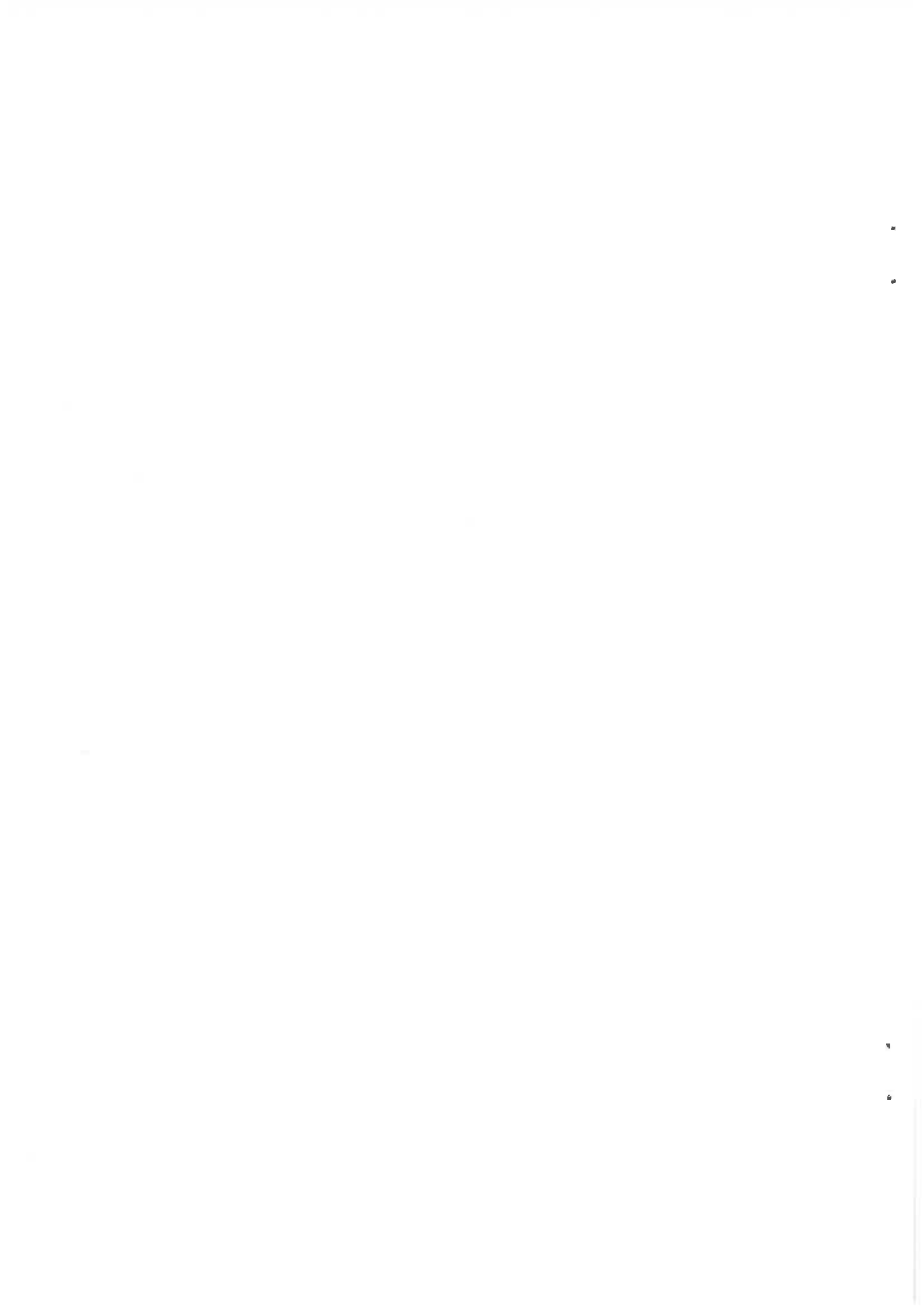
LEMMA I.

Si sint l & x Cosinus Arcuum duorum A & B , quorum
uterque eodem Radio r describatur, quorumque prior
sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet nume-
rus n ad Unitatem, tunc erit

$$x = \frac{r}{2} \sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}} = z$, hinc erit $z^n = l + \sqrt{l^2 - 1}$, seu $z^n - l =$
 $\sqrt{l^2 - 1}$, five, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + l^2 = l^2 - 1$; de-
letisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$
B + 1



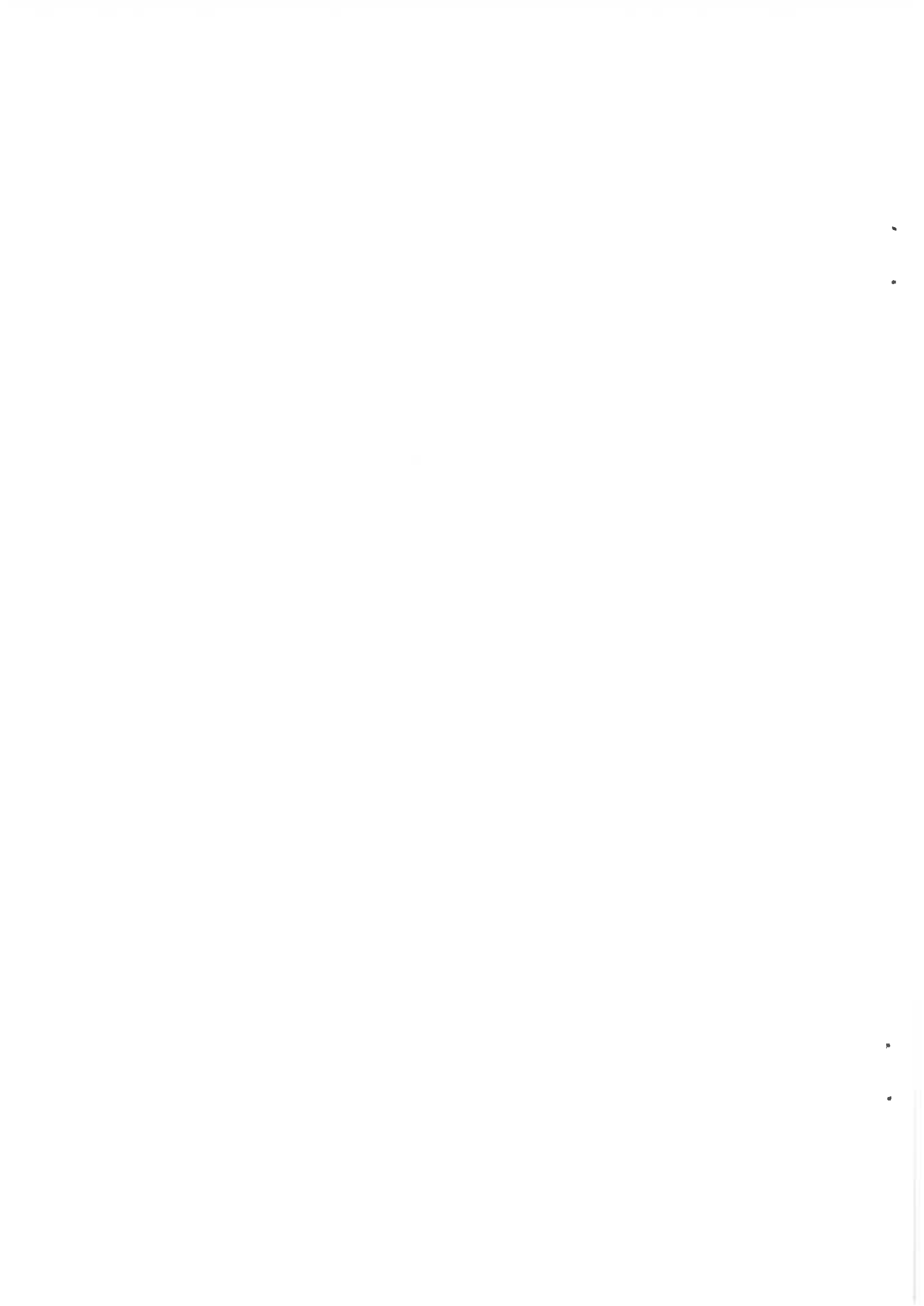
EDITORIAL

Le groupe histoire des mathématiques de l'IREM de REIMS vous présente le n° 2 de ses MISCELLANEEES.

Vous y trouverez des activités à proposer à vos élèves concernant les logarithmes.

Vous y verrez comment Cardan manipulait les quantités imaginaires.

Quant à la société des mathématiciens, vous y lirez combien on n'y hésite pas à critiquer les travaux des confrères.



SOMMAIRE

- Une lettre d'Abel*.....p.3
Un portrait savoureux de la société mathématique en France autour de 1830
- Les nombres complexes de Cardan*.....p.5
Dans ce passage de l'Ars Magna, oeuvre majeure de Jérôme Cardan, apparaissent pour la première fois de l'histoire les nombres complexes
- Un extrait des « principia » de Newton*p.13
Où Newton démontre brillamment quelques résultats à propos de la loi des aires.
- Le logarithme en TS*p.18
Une activité proposée par Patrick Perrin aux élèves de Terminale scientifique afin d'introduire la fonction logarithme dans une perspective scientifique.
- Le logarithme en TES*.....p.25
Une variante de la précédente mais proposée aux élèves des classes de Terminale économique et sociale par Jean-Claude Pénin.
- Michel Rolle et la nouvelle analyse*p.29
Jean-Marie Farey nous propose un extrait des mémoires de l'Académie des Sciences de 1703 où Michel Rolle critique vivement l'*Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hospital.



Niels Henrick ABEL

Niels Henrick ABEL naquit à Findoé en Norvège, le 5 août 1802, et mourut à Arendal, le 6 avril 1829, à l'âge de vingt-six ans.

Il entra en novembre 1815 à l'école de Christiana, où il eut en 1818 Holmboe comme professeur de mathématiques. Rapidement Abel fit preuve de dispositions particulières pour les mathématiques. Dès 1820 il composa un premier mémoire puis s'engagea aussitôt dans l'étude des équations résolubles par radicaux et montra l'impossibilité d'une telle résolution dans le cas du cinquième degré ; ses recherches portèrent aussi sur la théorie des fonctions elliptiques, en particulier sur l'étude de l'intégrale suivante :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

On lui doit également des résultats concernant les critères de convergence des séries.

La lettre qui suit est extraite des oeuvres d'Abel éditées par Sylow et Lie à Christiana en 1891, elle donne des portraits, quelque peu savoureux, de quelques mathématiciens français de la première moitié du 19ème siècle.

Lettre d'Abel à Holmboe

Paris, le 24 octobre 1826

Comme il me tarde d'avoir de tes nouvelles ! tu ne saurais t'en faire idée. Ainsi donc ne va pas me tromper dans mon attente, fais-moi parvenir quelques lignes consolatrices dans l'isolement où je me trouve ; car, à te dire vrai, cette capitale la plus bruyante du continent me fait pour le moment l'effet d'un désert. Je ne connais presque personne ; c'est que pendant la belle saison tout le monde est à la campagne ; ainsi ce monde n'est pas visible. Jusqu'à présent je n'ai fait connaissance qu'avec MM. Legendre, Cauchy et Hachette, et quelques mathématiciens moins célèbres quoique fort habiles : M. Saigey, rédacteur du bulletin des Sciences, et M. Lejeune-Dirichlet, Prussien qui vint me voir l'autre jour me croyant son compatriote. C'est un mathématicien d'une grande pénétration. Il a prouvé avec M. Legendre l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^3+y^3=z^3$, et d'autres fort belles choses. Legendre est d'une complaisance extrême, mais malheureusement fort vieux. Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé. D'abord je n'y compris presque rien ; maintenant j'y vois plus clair. Il fait publier une série de mémoires sous titre d'**Exercices de mathématiques**. Je les achète et les lis assidûment. Il en a paru 9 livraisons depuis le commencement de cette année. Cauchy est à présent le seul qui s'occupe des mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère etc. s'occupent exclusivement du magnétisme et d'autres sujets physiques. M. Laplace n'écrit plus rien, je pense. Son dernier ouvrage fut un supplément à sa **Théorie des probabilités**. Je l'ai souvent vu à l'Institut. C'est un petit homme très gaillard. Poisson est un petit monsieur ; il sait se comporter avec beaucoup de dignité ; M. Fourier de même. Lacroix est bien vieux. M. Hachette va me présenter à plusieurs de ces messieurs.

Les Français sont beaucoup plus réservés avec les étrangers que les Allemands. Il est fort difficile de gagner leur intimité, et je n'ose pousser mes prétentions jusque là ; enfin tout

commençant a bien de la peine à se faire remarquer ici. Je viens de finir un grand traité sur une certaine classe de fonctions transcendentes pour le présenter à l'Institut, ce qui aura lieu lundi prochain. Je l'ai montré à M. Cauchy, mais il daigna à peine y jeter les yeux. Et j'ose dire, sans me vanter, que c'est un bon travail. Je suis curieux d'entendre l'opinion de l'Institut là-dessus. Je ne manquerai pas de t'en faire part. J'ai écrit plusieurs autres mémoires surtout pour le journal de M. Crelle, dont 3 livraisons ont paru ; de même pour les annales de M. Gergonne. Un extrait de mon mémoire sur l'impossibilité de résoudre les équations algébriques a été inséré dans le bulletin de M. Férussac. Je l'ai fait moi-même. J'ai fait et je ferai d'autres articles pour ce bulletin. C'est un travail bien ennuyeux quand on n'a pas écrit le traité soi-même, mais enfin, c'est pour M. Crelle, l'homme le plus honnête du monde. J'entretiens avec lui une correspondance soutenue. Je travaille en ce moment à la théorie des équations, mon thème favori, et me voilà enfin parvenu à trouver le moyen de résoudre le problème général que voici : Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui peuvent être résolues algébriquement. J'en ai trouvé un nombre infini du 5^{ème}, 6^{ème} et 7^{ème} degré qu'on n'a pas flairé jusqu'à présent. J'ai en même temps la solution la plus directe des équations des 4 premiers degrés, avec la raison évidente pourquoi celles-ci sont les seules résolubles et non pas les autres. Quant aux équations du 5^{ème} degré j'ai trouvé que quand une telle équation est résoluble algébriquement, il faut que la racine ait la forme suivante :

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

où R, R', R'', R''' sont les 4 racines d'une équation du 4^{ème} degré qui sont exprimables par des racines carrées seules. Pour les expressions et les signes, ce problème m'a fait bien des difficultés. En outre je m'occupe des quantités imaginaires, où il reste encore beaucoup à faire ; puis du calcul intégral, et surtout de la théorie des séries infinies, si mal basée jusqu'ici. Cependant je ne puis m'attendre à en voir un résultat satisfaisant avant d'être installé chez moi, si cela se réalise jamais. Je regrette d'avoir fixé deux ans pour mes voyages, un an et demi aurait suffi. J'ai le mal du pays, et dès à présent mon séjour à l'étranger, ici ou ailleurs, ne m'offre plus tant d'avantages qu'on croirait. Je suis maintenant au fait de tout ce que les mathématiques pures offrent de plus ou moins essentiel, et il me tarde seulement de pouvoir consacrer mon temps exclusivement à rédiger ce que j'ai recueilli. Il me reste tant de choses à faire, mais tant que je serai en pays étranger, tout cela va assez mal. Si j'avais mon professorat comme M. Keilhau a le sien ! Ma position n'est pas assurée, il est vrai, mais je n'en suis pas en peine ; si la fortune m'abandonne d'une part elle me sourira peut-être de l'autre.

L'arithmétique, je l'ai étudiée tout entière, ainsi que les chapitres de ce qu'on appelle l'algèbre et toutes les propriétés des nombres, surtout de ceux qui ont un rapport de similitude entre eux ; j'ai donné de mes découvertes et de ce qui était connu avant moi, un exposé aisé ou admirable, ou les deux ensemble. En géométrie, j'ai traité de la proportion obscure et réciproque des quantités infinies avec les finies, et de la réduction en quantités finies, quoique cette méthode ait déjà été découverte par Archimède.

J.Cardan, *Ma Vie*, 1991 Editions Belin

Jérôme CARDAN

Algébriste Italien du 16ème siècle

Quant à l'astrologie divinatrice, je l'ai pratiquée, plus que je n'aurai dû et j'y ai ajouté foi à mes dépens. L'astrologie naturelle ne me fut d'aucun usage ; j'en ai reçu les premières notions il y a trois ans, c'est à dire à soixante et onze ans. Je suis très versé dans la géométrie, l'arithmétique, la médecine théorique et pratique, plus encore dans la dialectique, la magie blanche, qui étudie les propriétés des corps et des choses semblables, comme par exemple le fait que l'ambre renforce la chaleur naturelle, et pourquoi.

J.Cardan, *Ma Vie*, 1991 Editions Belin.



JEROME CARDAN

Né d'un père juriste et mathématicien en 1501 à PAVIE en Italie, JEROME CARDAN est l'une de ces extraordinaires personnalités comme la Renaissance sut en produire : il est d'une prodigieuse étendue d'esprit, a pratiqué toutes les sciences et les a toutes perfectionnées ; il est philosophe, médecin, mathématicien, physicien, mécanicien (on lui doit le cardan utilisé dans la direction des automobiles) il est également astrologue et même magicien: la science moderne est en gestation dans ce 16^{ème} siècle et les frontières entre toutes ces disciplines restent floues voire inexistantes.

JEROME CARDAN, mathématicien, est cité aujourd'hui à l'occasion des formules donnant une des racines de l'équation du 3^{ème} degré, elles furent à l'origine d'une querelle fameuse avec son compatriote Nicolo Tartaglia, querelle de priorité de publication dans laquelle, d'ailleurs, il ne joua pas le plus beau rôle ; néanmoins, et ce n'est pas la moindre contradiction d'un personnage à la fois orgueilleux et génial, il fut un mathématicien subtil et inventif : on lui doit à juste titre un certain nombre de découvertes qu'il publia en 1545, avec les célèbres formules, dans un ouvrage intitulé ARS MAGNA (ce qui signifie LE GRAND ART, nom qui désignait à l'époque l'algèbre); il y reconnaît la multiplicité des racines des équations : phénomène qui avait déjà auparavant été remarqué sur quelques équations du 2nd degré particulières, mais Jérôme Cardan fut le premier en Occident à tenir compte des racines négatives qu'on avait toujours évitées et il constata la généralité de cette propriété. Les nombres complexes apparaissent pour la première fois dans l'ARS MAGNA (vous le verrez vous-même dans le texte proposé) et il opère sur ceux-ci avec exactitude. On lui doit aussi plusieurs relations qui lient les racines aux coefficients de l'équation : "toute équation du 3^{ème} degré est divisible par l'inconnue diminuée de la racine ; le coefficient du second terme est égal à la somme des racines avec le signe changé". Pour illustrer le rapide portrait de cet étonnant personnage voici un...

TEXTE DE J.CARDAN

L'extrait proposé ici est le chapitre 37 de l'ARS MAGNA. Cet ouvrage se trouve inclus dans les oeuvres complètes de CARDAN dont les 10 gros volumes en latin se trouvent à la Bibliothèque Municipale de Reims ; nous en profitons pour adresser nos plus vifs remerciements à Mme Le Conservateur et à Mme Le Conservateur Adjoint qui nous ont permis de photographier cet ouvrage.

Nous avons choisi le chapitre 37 parce qu'on y trouve d'abord des problèmes dont les solutions sont des nombres négatifs, fait banal dira-t-on mais très nouveau à l'époque, et ensuite, c'est là, l'intérêt principal de ce chapitre, les premiers nombres complexes de l'histoire.

COMMENT ECRIVAIT-ON L'ALGEBRE SOUS LA RENAISSANCE

Jusqu'au 15^{ème} siècle l'algèbre était entièrement littéraire, en effet, les calculs, les formules et les égalités étaient écrits en toutes lettres ; dans les équations l'inconnue était désignée en général par le mot *chose* (le terme provient des algébristes Arabes) ce qui donnait *res* en Latin, *cosa* en Italien et *coss* en Allemand.

A partir de la seconde moitié du 15^{ème} siècle, on assiste en Occident à un essor assez général de l'algèbre dont l'école Italienne en est le plus bel exemple. L'évolution des recherches amène chaque mathématicien à créer et utiliser des notations propres : elles ne sont pas vraiment pratiques, mais on les trouve à l'origine des nôtres; elles seront appelées *notations cossiques* du nom de l'*inconnue* qui comme on l'a dit plus haut était désignée par *coss* en Allemand. Jérôme Cardan se conforme à cette règle et son texte est émaillé de symboles cossiques :

\tilde{m} pour moins

\tilde{p} pour plus

R pour Racine carrée

Pos pour Position : c'est un autre nom
pour l'inconnue

carré pour l'inconnue ou la chose élevée au carré

cube pour l'inconnue ou la chose élevée au cube.

Il n'utilise aucun signe d'égalité ni de parenthèse, néanmoins ces dernières existent sous la forme suivante :

R.v.25. \tilde{m} .40 pour $\sqrt{(25 - 40)}$

R.v. se lisant Racine universelle où le mot universelle met en « parenthèse » ce qui suit.

Jérôme Cardan n'est pas le premier à utiliser des nombres négatifs en occident on peut citer N. Chuquet au 15^{ème}. Mais ils apparaissent un peu fortuitement dans les calculs et on ne les utilise pas systématiquement comme les quantités positives. On remarquera que Cardan les utilise avec précaution et essaie à chaque fois de les transformer par un changement de variable $x \rightarrow -x$ en une quantité positive. Ces quantités négatives ne lui inspirent pas confiance, il les appelle d'ailleurs « fausse », en effet géométriquement en terme de distance elles ne correspondent à rien, néanmoins dans un de ses problèmes il les interprète correctement en terme de « débit ».

Voici le texte du chapitre 37 de l'ARS MAGNA. Il s'agit d'une traduction libre et d'une mise en page personnelle du passage correspondant de l'original en Latin.

CHAPITRE XXXVII

règle posant une fausse quantité

REGLE I

Cette règle est triple, en effet, soit elle pose \tilde{m} , soit elle cherche $R \tilde{m}$, soit elle cherche ce qui n'existe pas.

D'abord nous recherchons les solutions des questions, que \tilde{p} ne permet pas de déterminer comme une chose vraie ; par exemple, si on dit :

un carré est égal à 4 choses \tilde{p} 32

et, si dans une recherche identique,

un carré est égal à 1. chose \tilde{p} 20

alors si l'on veut obtenir la valeur vraie, dans la première question, on trouve que la chose est 8, et dans la seconde 5, mais si tu dis par *retournement*,

un carré \tilde{p} 4 choses est égal à 32

la chose sera 4. et sera encore vraie dans

un carré plus une chose égales à 20

ainsi donc : si 4 \tilde{p} sert à ces questions, donc 4 \tilde{m}^1 est la valeur pour

1 carré égal à 4 choses \tilde{p} 32 et pour 1 carré égal à 1 chose \tilde{p} 20

pour cette raison tu *retourneras* les equations, comme nous avons dit dans le premier chapitre, et si l'issue en est impossible, dans l'un et l'autre chapitre, la question est fausse par \tilde{p} et par \tilde{m} , et si c'est vrai par \tilde{p} dans l'un, ce sera par \tilde{m} dans l'autre, et telle est la nature de cette question.

QUESTION I

La dot de la femme de François est de 100 pièces d'or de plus que le pécule de François et la dot de sa femme multipliée par elle-même est de 400 pièces d'or de plus que le pécule de François multiplié par lui-même, on cherche la dot et le pécule.

Nous supposerons que François possède une chose \tilde{m} donc que la dot de sa femme est de

100 pièces d'or \tilde{m} 1 chose

multiplie les parts par elles-mêmes, il viendra

1 carré pour l'une et 10000 \tilde{p} 1 chose au carré \tilde{m} 200 positions pour l'autre,

la différence de ces parts est de 400 pièces d'or, donc

1 carré \tilde{p} 400 p 200 positions sont égales à 10000 \tilde{p} 1 chose au carré

rejette les quantités communes, tu auras

9600 égal à 200 positions.

Donc la chose est 48 et il possède autant en \tilde{m} , c'est à dire de débit, et la dot sera ce qui reste jusqu'à 100, évidemment 52. Donc François a eu 48 pièces d'or de débit, sans aucun capital ou pécule et la dot de sa femme fut de 52 pièces d'or et en opérant autrement tu serais parvenu à des questions très difficiles voire inextricables. Telle est encore la nature de cette question.

¹ \tilde{m} , comme on l'a dit, représente le signe « - » actuel, Cardan utilise ce « \tilde{m} » indistinctement avant ou après le nombre qu'il qualifie.

QUESTION II

J'ai 12 pièces d'or de plus que François et le cube des miennes est de 1161 de plus que le cube de celle de François. posons 1 chose \tilde{m} pour François, moi j'ai 12 pièces \tilde{m} 1 position, élève au cube les parties, elle deviendront

1 cube \tilde{m} pour l'une

1728 \tilde{p} 36 choses au carré \tilde{m} 432 choses \tilde{m} 1 chose au cube pour l'autre

la différence de ces parts est 1161 donc

1 cube \tilde{m} \tilde{p} 422 choses \tilde{p} 1161 sera égale à 1728 \tilde{p} 36 choses au carré \tilde{m} 1 choses au cube,

rejette \tilde{m} 1 cube et 1161 de chacune des parts, elles deviendront

432 choses égales à 36 choses au carré \tilde{p} 567

c'est pourquoi

1 carré \tilde{p} $15\frac{3}{4}$ est égal à 12 choses,

donc la chose est $1\frac{1}{2}$, c'est à dire, ce que François possède en moins, et moi j'ai

$10\frac{1}{2}$, tels sont les quantités de pièces d'or cherchés.

QUESTION III

Et de la même façon si je dis encore, j'ai douze pièces d'or de plus que François, et le carré des miennes est 128 de plus que le cube des pièces d'or de François, nous donnerons \tilde{m} 1 chose à François quant à moi j'ai 12 pièces d'or \tilde{m} 1 chose, et le carré des miennes sera

144 \tilde{p} 1 chose carré \tilde{m} 24 choses

et ceci est égal à

\tilde{m} 1 chose au cube \tilde{p} 128

donc

16 \tilde{p} 1 chose au carré \tilde{p} 1 chose au cube est égal à 24 choses.

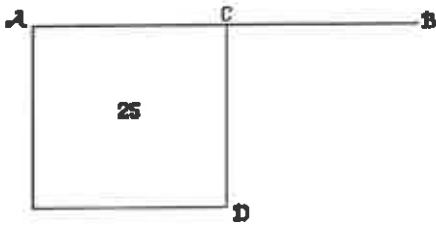
Et la chose sera 4 \tilde{m} et François aura autant de débit, quant à moi 8 pièces d'or de pécule.

REGLE II

Le second genre de fausse position a lieu par la racine \tilde{m} . J'en donnerai un exemple, si on dit, divise 10 en deux parties, de telle sorte que le produit de l'une par l'autre donne 30 ou 40, il est évident que l'issue ou question est impossible, cependant nous la traiterons, nous diviserons 10 en deux parties égales, il viendra la moitié, 5, multiplie la par elle-même, il vient 25, retranche de 25 ce qui doit être précisément produit, comme 40 ; ainsi que je te l'ai enseigné dans le petit chapitre des opérations dans le quatrième livre, il sera produit un reste de \tilde{m} 15, dont la R ajoutée puis soustraite de 5 fait apparaitre les parties, qui mutuellement multipliées produisent 40, elles seront donc

5 \tilde{p} R \tilde{m} 15 et 5 \tilde{m} R \tilde{m} 15.

DEMONSTRATION



Afin d'accéder à une véritable compréhension de la règle, soit la ligne AB, de longueur fixée égale à 10, que l'on veut diviser en deux parties, dont le produit soit 40. Or 40 est le quadruple de 10, c'est pourquoi nous voulons le quadruple de AB en entier, soit donc AD, le carré de AC, moitié de AB, et que de AD soit enlevé le quadruple de AB ; éloigné d'un nombre, la

racine du reste, pour autant que quoi que ce soit reste, ajoutée et soustraite de AC, montrerait les parties, mais puisque un tel reste est moins, pour cette raison tu imagineras R m 15, différence de AD et du quadruple de AB, que tu ajouteras et diminueras de AC et tu auras ce qui est cherchée, à savoir

$$5 \tilde{p} R \vee 25 \tilde{m} 40 \text{ et } 5 \tilde{m} R \vee 25 \tilde{m} 40$$

ou bien

$$5 \tilde{p} R \tilde{m} 15 \text{ et } 5 \tilde{m} R \tilde{m} 15.$$

Multiplie $5 \tilde{p} R \tilde{m} 15$ par $5 \tilde{m} R \tilde{m} 15$ en laissant de côté les tourments intellectuels que cela peut te causer, il vient $25 \tilde{m} \tilde{m} 15$ c'est à dire $\tilde{p} 15$, donc ce produit est 40. Cependant la nature de AD, n'est pas la même que la nature de 40, puisqu'une superficie est éloignée de la nature du nombre et de la ligne, plus proche cependant de cette quantité, qui vraiment est

$$5. \tilde{p}. \tilde{R}. \tilde{m}. 15.$$

$$5. \tilde{m}. \tilde{R}. \tilde{m}. 15.$$

$$25. \tilde{m}. \tilde{m}. 15. \text{ au carré est } 40$$

sophistique, puisque par cette dernière il n'est pas permis de travailler comme avec un pur moins, ni comme dans d'autres opérations, ni de rechercher ce qui est. Une de ces méthodes est telle que l'on doit ajouter le carré de la moitié du nombre au nombre à produire et de la R de l'agrégat² diminuer et ajouter le moitié de ce qui est partagé³. Un exemple dans ce cas, divise 10 en deux parties, dont le produit soit 40, ajoute 25, carré de la moitié de 10, à 40 il vient 65 de sa racine enlève 5 et ajoute lui ensuite 5, tu auras les parties conformes à la représentation⁴,

$$R 65 \tilde{p} 5 \text{ et } R 65 \tilde{m} 5.$$

Mais ces nombres différents de 10, ajoutés ne font pas 10, mais R 260 et la subtilité arithmétique s'avance jusqu'à ce point dont cette situation extrême est, comme je l'ai dit, pour cette raison aussi subtile qu'inutile.

QUESTION IV

Fais avec 6 deux parties dont les carrés additionnés fassent 50. cette question se résout par la première et non par la seconde règle : en effet c'est un pur moins ; pour cela, multiplie 3, moitié de 6, par lui-même, il vient 9, enlève-le de la moitié de 50, qui est 25, il

² agrégat = somme

³ Cette phrase rappelle en faite la méthode pour résoudre d'une façon générale le système $x - y = S, xy = P$.

⁴ Dans le cas où existe une solution réelle, comme c'est le cas de l'exemple qui nous occupe, on peut représenter ce système par une figure assez classique.

reste 16 dont tu ajoutes et enlève la racine, qui est 4, de 3, moitié de 6 ; il viendra les parties 7 et 1 \tilde{m} , dont les carrés joints font 50 et l'agrégat 6.

QUESTION V

Par la même méthode on résout cette question, fais de 6 deux parties, dont l'une multipliée par celle qui reste fasse \tilde{m} 40. Multiplie 3, moitié de 6 par lui-même, cela fait 9, ajoute le à 40, cela fait 49, dont la racine est 7 ; ajoute-la à 3, moitié de 6 et soustrais-la et tu auras 10 \tilde{p} et 4 \tilde{m} qui multipliés l'un par l'autre produisent 40 \tilde{m} et ajoutés font 6 ; de même 10 \tilde{m} et 4 \tilde{p} produisent 40 \tilde{m} et ajoutés font 6 \tilde{m} , pour cette raison encore cette question est de pur \tilde{m} et revient à la première règle.

De par ce qui précède il est visible que si l'on dit : fais avec 6 deux parties qui multipliées réciproquement produisent 40 ; la question dépend du \tilde{m} sophistique, et mène à la seconde règle. Mais si on dit : fais avec 6, deux parties, qui multipliées réciproquement produisent 40 \tilde{m} ou bien, avec 6 \tilde{m} fais deux parties dont les produits soient \tilde{m} 40, pour l'un et l'autre genre la question dépend du \tilde{m} pur et mène à la première règle ; les parties seront telles qu'elles ont été établies ; mais si on dit que de 6 \tilde{m} soient faites deux parties qui multipliées produisent 40 p, la question dépendra du m sophistique et mènera à la seconde règle ; les parties seront :

$$\tilde{m} 3 \tilde{m} R \tilde{m} 31 \text{ et } \tilde{m} 3 \tilde{p} R \tilde{m} 31$$

REGLE III

De fait nous pouvons rechercher un autre genre de m qui n'est ni en pur m, ni une R m mais une chose en général fausse⁵ et cette règle tient en quelque sorte des deux précédentes, j'en donnerai un exemple ci-dessous.

QUESTION VI

Peut-on trouver trois nombres en proportion continue⁶, dont la R du premier, soustraite du premier donne le second, et la R du second soustraite du second donne le troisième. Nous poserons donc le premier comme 1 carré, alors le second sera 1 carré m 1 position et le troisième sera 1 carré \tilde{m} 1 position \tilde{m} R de 1 carré \tilde{m} 1 position ; multiplie le premier par le troisième et le second par lui-même, et tu auras les quantités elle-même

$$\left| \frac{1}{4} \quad \left| \tilde{m} \frac{1}{4} \quad \left| \tilde{m} \frac{1}{4} \quad \tilde{m} R \tilde{m} \frac{1}{4} \right. \right. \right.$$

en opérant comme tu vois, et le produit de la première par la troisième est $\tilde{m} \frac{1}{16} \tilde{p} R \frac{1}{64}$, à

savoir $\frac{1}{8} \tilde{m} \frac{1}{16}$, et on obtient autant en multipliant le second nombre par lui-même.⁷

⁵ Tout ce passage est difficile, comment comprendre ce mot qui peut signifier une quantité négative comme quelque chose de faux, au sens moderne du terme.

⁶ Trois nombre en progression géométriques.

⁷ Ce calcul n'est visiblement par exact, est-ce une erreur de Cardan ou une autre interprétation du m.R.m, quantité tenant à la fois du pur m et du R.m ?

Isaac NEWTON

(Woolsthorpe Lincolnshire 1642 - Londres 1727)

Étudiant au Trinity College de Cambridge, il s'intéressa particulièrement à la Géométrie de Descartes et à l'optique de Képler. Sous l'égide d'Isaac Barrow, auquel il succéda comme professeur à Cambridge en 1669, il avait dès cette date fait de grandes découvertes en Géométrie et posé les fondements de son oeuvre. Il en fit état dans le manuscrit : " De analysis per aequationes numero terminorum infinitas ", non publié avant 1711, mais qui circulait parmi ses amis.

En 1671 il présenta son télescope à miroir ; en 1672 il exposa sa théorie des couleurs sur la composition de la lumière blanche.

Dans les " Principes mathématiques de la philosophie naturelle " paru en 1687, il jette les bases d'une nouvelle physique : la théorie des forces centrales et la loi de l'attraction universelle.

A la base de son second traité le plus étudié : " Méthodes des fluxions et séries infinies ", écrit vers 1671 mais non publié avant 1736, se trouve la notion de mouvement instantané. Il y introduit sa notation caractéristique du calcul différentiel (\dot{x} , \ddot{y} , ...). Les procédures algorithmiques de Newton sont encore utilisées actuellement.

En 1699 il est élu à l'académie des sciences dès que cette institution peut admettre en son sein des savants étrangers. En 1703 il est élu président de la Royal Society et le restera jusqu'à sa mort. Il eut droit à des funérailles dignes du héros national qu'il était devenu dans son pays.



LES PRINCIPIA

Fruit d'une réflexion mûrie pendant une vingtaine d'années, les *Philosophae Naturalis Principia Mathematica* paraissent en 1687. Construits sur le modèle des éléments d'Euclide, (Newton reste attaché à la rigueur de la géométrie grecque) ils se composent de trois livres précédés de deux courtes sections.

La première section donne une série de définitions concernant les notions de masse, quantité de mouvement et forces. La deuxième section contient trois axiomes ou lois du mouvement : le principe d'inertie (déjà énoncé par Galilée), la loi fondamentale de la dynamique $F = d/dt(mv)$, le principe de l'action et de la réaction ; selon la terminologie actuellement en cours.

Le livre I des *Principia* est consacré à l'étude du mouvement dans le vide, des corps soumis à l'action d'une force centrale. Le livre II étudie les mouvements de ces mêmes corps dans un fluide résistant. Le livre III expose le système du monde de Newton. Il décrit les mouvements des planètes et de leurs satellites, et en démontre les lois (en particulier les lois empiriques de Képler⁽¹⁾), par le principe de gravitation universelle.

Le passage qui suit est extrait du livre I⁽²⁾. Dans cette proposition I, Newton démontre que la loi des aires est une conséquence de l'hypothèse d'une accélération centrale. Son argumentation est purement géométrique, à l'exception du dernier point qui utilise un passage à la limite qui se justifie par les principes de la méthode des fluxions. On ne peut qu'être admiratif devant la simplicité des moyens utilisés pour parvenir à un résultat aussi important.

(1) Cf note en fin d'article.

(2) Nous y avons joint l'énoncé du premier axiome et un corollaire dont il est fait mention dans le texte.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripetes.

PROPOSITION I. THÉOREME I.

*Dans les mouvemens curvilignes des corps, les aires décrites * autour d'un centre immobile, sont dans un même plan immobile, & sont proportionnelles au temps.*

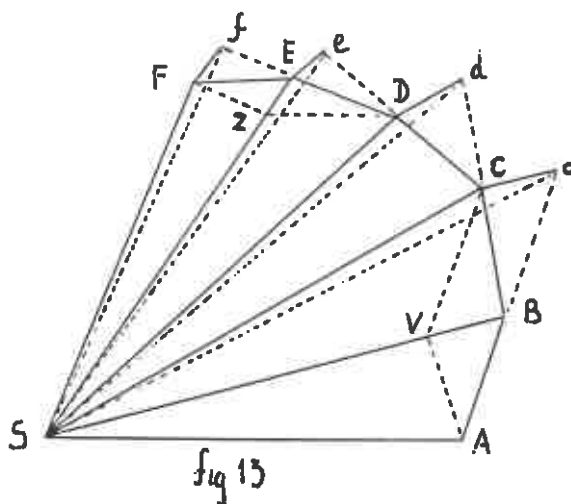
Supposé que le temps soit divisé en parties égales, & que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchoit, la droite $BC = AB$; Donc en tirant au centre S , les rayons AS , BS , cS , les aires ASB , $BS c$ seroient égales. Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B , la force

Fig. 13.

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre sont les espaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, & par l'arc sur lequel s'appuient ces rayons.

Tome I.

G



centripete agisse sur lui par un seul coup , mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc & à suivre la droite BC . Si on tire la ligne Cc parallèle à BS , laquelle rencontre BC en C , à la fin de ce second temps, le corps (selon le 1. Corollaire des loix) sera en C dans le même plan que le triangle ASB .

En tirant ensuite la ligne SC , le triangle SBC sera égal au triangle Sbc , à cause des parallèles SB , Cc , donc il sera aussi égal au triangle SAB .

De même , si la force centripete agit successivement sur le corps en C , D , E , &c. & qu'elle lui fasse décrire à chaque petite portion de temps les droites CD , DE , EF , &c. ces lignes seront toutes dans le même plan ; & le triangle SCD sera égal au triangle SBC , le triangle SDE au triangle SCD , & le triangle SEF au triangle SDE . Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : & en composant, les sommes des aires quelconques $SADS$, $SAFS$ seront entr'elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente & que leur largeur diminue à l'infini ; il est clair (par le Cor. 4. du Lemme 3.) que leur dernier périmètre ADF , sera une ligne courbe. Donc la force centripete, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption ; & les aires quelconques $SADS$, $SAFS$, qui étoient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur seront encore proportionnelles dans ce cas. *C. Q. F. D.*

A X I O M E S,

O U

L O I X D U M O U V E M E N T.

P R E M I E R E L O I.

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve , à moins que quelque force n'agisse sur lui , & ne le contraigne à changer d'état.

COROLLAIRE I.

Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il auroit parcouru ses côtés séparément.

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

*
* *

Note :

En s'appuyant sur les observations de Tycho Brahé de la trajectoire de la planète Mars, Képler énonça en 1609 dans son *Astronomia Nova* ses deux premières lois : les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers, et les aires balayées par le rayon vecteur joignant le soleil à la planète sont proportionnelles au temps. En 1619, dans son *Harmonia Mundi*, il affirma sa troisième loi : "les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnelles aux cubes des grands axes de leur orbite".

Sources :

Cahier de Science & Vie n°13 consacré à Newton, 1993.

J.P. Verdet, Une histoire de l'astronomie, Points Sciences Seuil, 1990.

Carl B. Boyer, The History of the calculus and its conceptual development
Dover Editions, 1959.

Geneviève KIENZ

Patrick PERRIN

LOGARITHMES EN TERMINALE SCIENTIFIQUE

L'activité présentée dans les pages suivantes est le résultat d'une expérimentation menée pendant trois ans dans des classes de Terminale Scientifique. Elle est destinée à introduire dans une perspective historique les fonctions logarithmes décimal et népérien.

Dans un souci pédagogique le logarithme décimal est introduit en premier afin d'insister sur la relation fondamentale $\log ab = \log a + \log b$ et ses premières applications. Le lien avec la primitive de la fonction inverse n'est étudié qu'en second lieu, car il présente de plus grandes difficultés techniques. Il me paraît cependant indispensable qu'il ne soit pas simplement admis car il est au coeur de la problématique à savoir : trouver les fonctions transformant un produit en somme.

Cette activité est aussi l'occasion d'évoquer d'autres points du programme tels que : suites arithmétiques et géométriques, approximation d'un nombre réel, méthode des trapèzes, aire et primitive. Elle a été conçue pour pouvoir être traitée en début d'année (courant Novembre), après l'étude des chapitres concernant continuité et dérivabilité des fonctions, primitives des fonctions continues. Elle nécessite environ deux séquences de deux heures, une partie du travail pouvant être préparée à la maison par l'élève (textes de Laplace et de Lagrange par exemple).

Alors que la tendance de certains manuels est de réduire le cours de Mathématiques à un simple formulaire, dans lequel les démonstrations non triviales sont rejetées en exercices réservés aux élèves suivant l'enseignement de spécialité, il me semble nécessaire de réintroduire une véritable démarche scientifique dans la classe. A ce sujet la lecture du texte de Laplace en apprend plus, à mon sens, sur la nature de la démarche en mathématiques que n'importe quel problème de baccalauréat.

Source des textes :

L'école Normale de l'An III : Leçons de Mathématiques ; sous la direction de Jean Dhombres ; Ed. Dunod. Paris. 1992.

Pour en savoir plus sur l'histoire des logarithmes :

Histoire des Logarithmes ; Charles Naux. Ed. Blanchard. Paris. 1966.

Les Logarithmes de Briggs ; Jean Marie Farey & Patrick Perrin ; Article paru dans la revue Repère . 1995

Patrick PERRIN
IREM de Reims

INTRODUCTION AUX LOGARITHMES

Les textes qui suivent sont extraits des leçons données à l'Ecole Normale de l'an III (1795) par deux grands mathématiciens français de l'époque : Pierre Simon de Laplace (1749-1827) et Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Dans ce premier texte, Laplace présente les logarithmes comme étant les fonctions qui, à une progression géométrique, font correspondre une progression arithmétique. Il développe plus particulièrement le cas de la fonction logarithme décimal qui, à la progression géométrique 1, 10, 100, 1000,..., fait correspondre la progression arithmétique 0, 1, 2, 3,...

Dans la progression arithmétique, un terme quelconque est égal au premier, plus à la raison multipliée par le nombre qui indique le rang du terme, diminué de l'unité.(1)

Dans la progression géométrique, un terme quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance, moindre d'une unité que le nombre qui indique le rang.(2)

En examinant avec attention ces divers résultats, on observe entre eux une analogie remarquable. Tout ce qui, dans les rapports, les proportions et les progressions arithmétiques, se rapporte aux sommes ou aux différences, se rapporte aux produits ou aux quotients dans les rapports, les proportions et les progressions géométriques. Tout ce qui, dans les progressions arithmétiques se rapporte aux produits, se rapporte aux puissances dans les progressions géométriques.

Cette analogie a conduit Neper à la découverte des logarithmes, admirable instrument, qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double si l'on peut ainsi dire, la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs; invention d'autant plus satisfaisante pour l'esprit humain qu'il l'a tirée en entier de son propre fond. Dans les arts, l'homme emploie les forces et les matériaux de la nature pour accroître sa puissance ; mais ici tout est son ouvrage.

Pour rendre l'analogie dont nous venons de parler, plus sensible, et pour en voir naître les logarithmes, concevons que l'on écrive, l'une au-dessous de l'autre, deux progressions : la première géométrique et commençant par l'unité ; la seconde arithmétique et commençant par zéro. Il est aisé de voir qu'au produit de deux termes quelconques de la progression géométrique répond la somme des deux termes correspondants de la progression arithmétique, et qu'à une puissance quelconque d'un des termes de la première progression, répond le produit du terme correspondant de la seconde par l'exposant de la puissance.(3)

Il suit de là que si l'on renfermait dans une progression géométrique tous les nombres 1, 2, 3, etc., en lui faisant correspondre une progression arithmétique commençant par zéro, la somme des deux termes de la progression arithmétique indiquerait le produit des deux nombres correspondants dans la progression géométrique; et par conséquent, leur différence indiquerait le quotient de ces mêmes nombres. Pareillement, le produit d'un terme de la progression arithmétique par 2, 3, etc., indiquerait la puissance seconde, troisième, etc., du nombre correspondant de la progression géométrique ; et par conséquent, la division d'un terme de la progression arithmétique, par 2, 3, etc., indiquerait la racine seconde, troisième, etc. du nombre correspondant. Une table qui renfermerait les deux progressions précédentes réduirait donc les multiplications à des additions, les divisions à des soustractions, les élévations de puissances à des multiplications, et les extractions de racines à des divisions. Cette table est celle des logarithmes; on nomme ainsi les nombres de la progression arithmétique correspondant aux nombres naturels qui sont censés appartenir à une progression géométrique.(4)

À la vérité, les nombres naturels 1, 2, 3, etc., n'entrent point rigoureusement dans une même progression géométrique : mais on conçoit que si, entre un et cent mille, par exemple, on insère un très grand nombre de moyens géométriques (5) ils croîtront par degrés insensibles, et les nombres naturels pourront se confondre avec eux. Si en prenant zéro pour le premier terme de la progression arithmétique, et cinq par exemple, pour le terme correspondant à cent mille dans la progression géométrique, on insère entre un et cinq le même nombre de moyens arithmétiques (6); ils seront les logarithmes des moyens géométriques correspondants.(7)

On peut, à la progression arithmétique 0, 1, 2, etc., faire correspondre telle progression géométrique que l'on veut, ce qui donne une infinité de systèmes de logarithmes ; mais le plus commode est le système dans lequel on lui fait correspondre la progression décimale 1, 10, 100, 1 000, etc.(8) Alors, dans chaque logarithme, le nombre qui précède les décimales et que l'on nomme sa caractéristique, indique l'ordre des unités les plus considérables du nombre auquel il appartient ; et pour multiplier ou diviser un nombre par dix, cent, etc.. il suffit d'augmenter ou de diminuer sa caractéristique d'une, de deux unités, etc.(9)

C'est sur ces principes que sont fondées nos tables de logarithmes : on voit qu'elles deviendront d'un fréquent usage dans la société quand le système des divisions décimales sera généralement admis . La facilité qui en résulte dans tous les calculs est un des principaux avantages de l'introduction de ce système. Il faut donc s'attacher particulièrement à développer dans l'enseignement la nature des logarithmes et leurs divers usages.

I) Questions sur le texte de Pierre Simon De Laplace

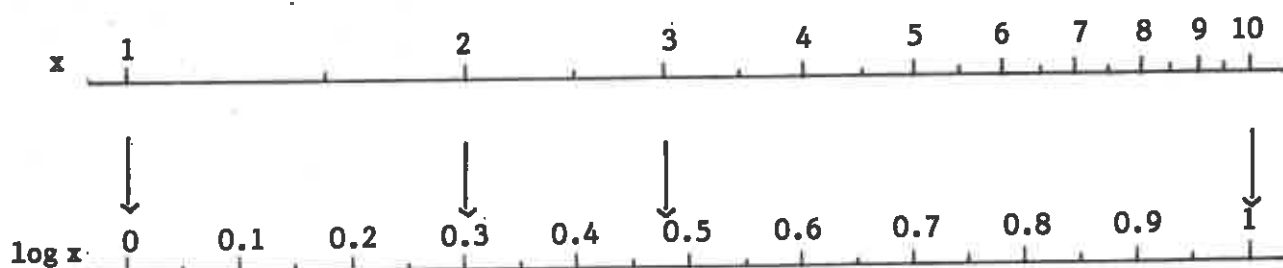
- (1) : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , exprimez u_n en fonction de u_1, n et r .
 (2) : Soit (v_n) une suite géométrique de raison q , exprimez v_n en fonction de v_1, n et q .
 (3) : Voici une illustration de la propriété énoncée par Laplace dans ce paragraphe :

rang n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_n =$	1	q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}
$u_n =$	0	r	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$	$7r$	$8r$	$9r$	$10r$

(Pour Laplace le premier terme est de rang 1 et non de rang 0 comme indiqué par commodité dans ce tableau)

- Quel est le produit des termes de rang 3 et 5 de la suite v ?
 Quel est la somme des termes de rang 3 et 5 de la suite u ?
 Quel est le quotient des termes de rang 7 et 4 de la suite v ?
 Quelle est la différence des termes de rang 7 et 4 de la suite u ?
 Quel est le carré du terme de rang 5 de la suite v ? Quel est le cube du terme de rang 2 de la suite v ?
 Quel est le double du terme de rang 5 de la suite u ? Quel est le triple du terme de rang 2 de la suite u ?
 Comment expliquez-vous ces analogies de calculs entre les suites v et u ?

(4) : Considérons les deux segments de droite gradués ci-dessous :



Sur le second à des points équidistants correspondent des nombres en progression arithmétique (la graduation est donc régulière).

Sur le premier, à des points équidistants correspondent des nombres en progression géométrique (vérifiez-le avec 1 ; 2 ; 4 ; 8 et avec 1 ; 3 ; 9)

En fait, les nombres de la seconde ligne sont les logarithmes décimaux (en abrégé log) de ceux de la première ; ils vérifient $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$. On voit par exemple que $\log 2 \approx 0.30$ et $\log 3 \approx 0.48$. Les propriétés énoncées par Laplace s'écrivent ainsi : $\log a + \log b = \log(ab)$; $\log a - \log b = \log(a/b)$; $2\log a = \log a^2$; $3\log a = \log a^3$; $\frac{1}{2}\log a = \log \sqrt{a}$; $\frac{1}{3}\log a = \log \sqrt[3]{a}$. (a et b étant deux réels strictement positifs). En utilisant les valeurs approchées de $\log 2$ et de $\log 3$, calculez une valeur approchée de $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$.

(5) : Un nombre c est la moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b (Laplace dit le moyen géométrique) si a ; c ; b forment une progression géométrique. Calculez c en fonction de a et b ; quelle est la moyenne géométrique de 1 et 10 ?

(6) : Un nombre d est la moyenne arithmétique de deux nombres a et b si a ; d ; b forment une progression arithmétique ; calculez d en fonction de a et b. Quel est le nombre dont le logarithme décimal est égal à 0.5 ?

(7) : Choisir 5 pour le logarithme de 100000 revient à prendre 1 pour le logarithme de 10, puisque $100000 = 10^5$.

(8) : Ce système le plus commode est celui des logarithmes décimaux (cf note (4)). Que vaut $\log 10^n$, n étant un entier naturel ?

(9) : La caractéristique d'un nombre positif est sa partie entière ; sachant que $\log 2 \approx 0.301$, calculez une valeur approchée de $\log 20$, $\log 200$. Que vaut $\log(1/10)$? $\log(10^{-n})$? Calculez une valeur approchée de $\log 0.2$, de $\log 0.02$?

Dans ce second texte, Lagrange expose une méthode pour calculer le logarithme décimal d'un nombre donné.

(Le) travail de Néper parut en 1614 ; on en sentit tout de suite l'utilité et on sentit en même temps qu'il serait plus conforme au système décimal de notre arithmétique, et par conséquent beaucoup plus simple de faire en sorte que le logarithme de 10 fût l'unité, moyennant quoi celui de 100 serait 2, et ainsi de suite.

Briggs contemporain de Néper, est l'auteur de ce changement. dans le système des logarithmes, ainsi que des tables de logarithmes dont on fait usage communément. Il en a calculé une partie, et le reste l'a été par Vlacq Hollandais.

Ces tables parurent à Goude en 1628 elles contiennent les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 100 000 calculés jusqu'à dix décimales, et elles sont maintenant très rares, mais on a reconnu depuis que, pour les usages ordinaires, sept décimales suffisaient et c'est ainsi qu'ils se trouvent dans les tables dont on se sert journellement . Briggs et Vlacq employèrent différents moyens très ingénieux pour faciliter leur travail. Celui qui se présente le plus naturellement et qui est encore un des plus simples, c'est de partir des nombres 1, 10, 100, etc., dont les logarithmes sont 0, 1, 2, etc., et d'intercaler, entre les termes successifs des deux séries, autant de termes correspondants qu'on voudra, dans la première par des moyennes proportionnelles géométriques, et dans la seconde par des moyennes arithmétiques. De cette manière, quand on sera parvenu à un terme de la première série, qui approchera jusqu'à la huitième décimale du nombre donné dont on cherche le logarithme, le terme correspondant de l'autre série sera, à la huitième décimale près, le logarithme de ce nombre. Par exemple, pour avoir le logarithme de 2, comme 2 tombe entre 1 et 10, on cherche d'abord, par l'extraction de la racine carrée de 10, le moyen proportionnel géométrique entre 1 et 10; on trouve 3,16227766 et le moyen arithmétique correspondant entre 0 et 1, sera 1/2, ou bien 0,50000000, ainsi on est assuré que ce dernier nombre est le logarithme de l'autre. Puisque 2 est encore entre 1 et le nombre qu'on vient de trouver, on cherchera de même le moyen proportionnel géométrique entre ces deux nombres, on trouve le nombre 1,37823941 ; ainsi, en prenant de même le moyen arithmétique entre 0 et 0,50000000, on aura le logarithme de ce nombre, lequel sera 0,25000000. Maintenant 2 étant entre ce dernier nombre et le précédent, il faudra, pour en approcher toujours, chercher le moyen géométrique entre ces deux-ci, ainsi que le moyen arithmétique entre leurs logarithmes, et ainsi de suite. On trouve ainsi, par un grand nombre de pareilles opérations, que le logarithme de 2 est 0.3010300, que celui de trois est 0,4771213, etc., en ne poussant l'exactitude que jusqu'à la huitième décimale. Mais ce calcul n'est nécessaire que pour les nombres premiers, car pour ceux qui sont le produit de deux ou de plusieurs leurs logarithmes se trouvent en faisant simplement la somme des logarithmes de leurs facteurs. Comme le temps destiné dans cette séance aux mathématiques est déjà écoulé , nous remettrons la conférence à la décade prochaine.(10)

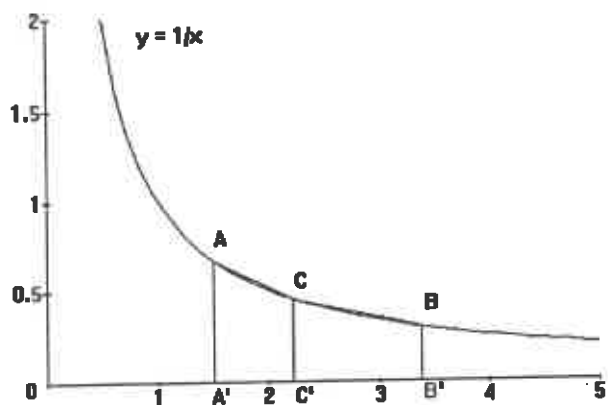
II) Questions sur le texte de Louis Lagrange

(10) : En utilisant uniquement les quatre opérations et la touche racine carrée de votre calculatrice, vérifiez les résultats donnés dans le texte (attention il y a des erreurs) et poursuivez le calcul de $\log 2$ jusqu'à en obtenir une valeur approchée à 10^3 près.

En suivant la même méthode calculez une valeur approchée de $\log 3$ à 10^{-3} près.

Parmi les fonctions logarithmes, outre le logarithme décimal, une autre fonction joue un rôle très important, c'est le logarithme népérien (ainsi nommé en l'honneur de John Néper). Nous allons le rencontrer à propos du problème de la quadrature de l'hyperbole.

III) Logarithmes népériens et quadrature de l'hyperbole

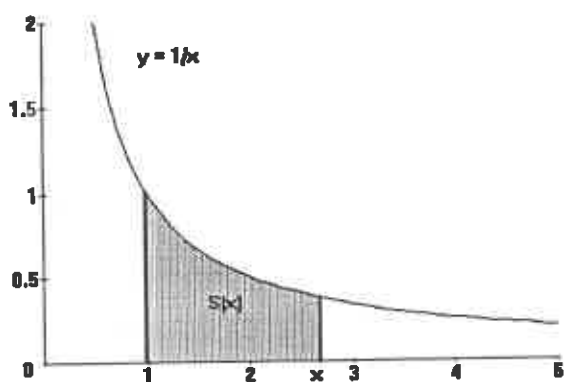


A/ 1°) Soit H la branche d'hyperbole d'équation $y=1/x$, $x>0$ dans le repère orthogonal (O, i, j) . On considère trois nombres positifs a, c, b en progression géométrique croissante. A, C, B sont les points de H d'abscisses respectives a, c, b et A', C', B' leurs projetés orthogonaux sur l'axe Ox.

Montrez que les trapèzes $ACC'A'$ et $CBB'C'$ ont la même aire qui est égale à

$$(b-a)/2c.$$

On admet dans la suite du problème que les trapèzes curvilignes $ACC'A'$ et $CBB'C'$ ont également même aire. (Par définition le trapèze curviligne est un trapèze dont l'un des côtés non parallèles est remplacé par un arc de courbe).



2°) Pour tout réel $x>0$, on note $S(x)$ l'aire du trapèze curviligne hachuré (cf figure ci-contre).

On appelle fonction logarithme népérien (en abrégé \ln) la fonction définie par :

$$\ln x = S(x) \text{ si } x \geq 1 \text{ et } \ln x = -S(x) \text{ si } 0 < x < 1.$$

i) Que vaut $\ln 1$? Justifier

graphiquement l'encadrement : $1/2 < \ln 2 < 1$.

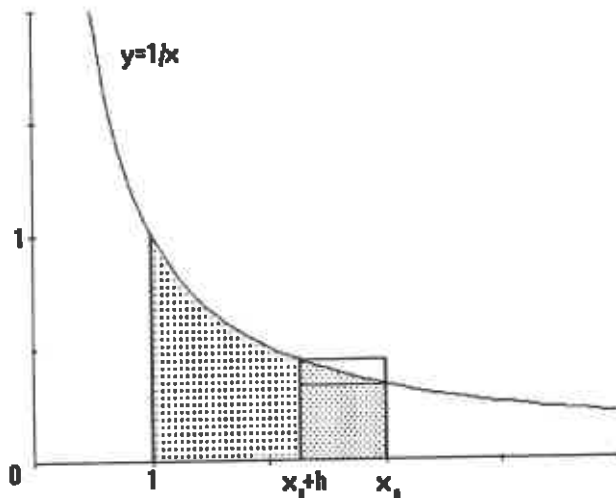
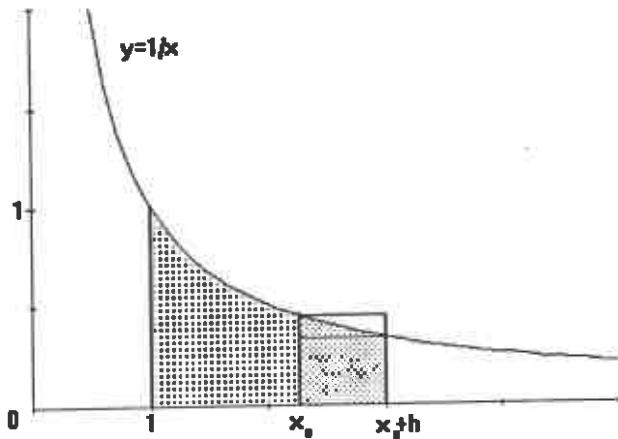
ii) Soient a et b deux réels strictement positifs avec $a < b$. Soient les points $A(a, 1/a)$, $B(b, 1/b)$, $A'(a, 0)$, $B'(b, 0)$; montrer que l'aire du trapèze curviligne $AA'B'B$ est toujours égale à $\ln b - \ln a$. On distinguera plusieurs cas : $1 \leq a \leq b$ ou $0 < a \leq 1 \leq b$ ou $0 < a \leq b \leq 1$. justifier graphiquement l'encadrement : $5/6 < \ln 3 < 3/2$.

iii) Montrer que pour tout réel $a > 0$, $\ln(1/a) = -\ln a$. (On pourra utiliser le 1°) et la progression géométrique $1/a, 1, a$ ou $a, 1, 1/a$).

iv) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$. (on pourra utiliser le 1°) et la progression \sqrt{x}, x ou $x, \sqrt{x}, 1$)

v) Montrer que, pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. (on pourra utiliser le 1°) et la progression a, \sqrt{ab}, b)

3°) Nous allons démontrer dans cette question que la fonction \ln définie dans le 2°) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et calculer sa dérivée.



a) Soit $x_0 > 0$ et $h > 0$.

En interprétant graphiquement $\ln(x_0+h) - \ln(x_0)$, montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{h}{x_0+h} \leq \ln(x_0+h) - \ln(x_0) \leq \frac{h}{x_0} .$$

En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0}$ quand h tend vers 0^+ .

b) Soit $x_0 > 0$ et $h < 0$ tels que $x_0+h > 0$.

En interprétant graphiquement $\ln(x_0) - \ln(x_0+h)$, montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{h}{x_0+h} \leq \ln(x_0) - \ln(x_0+h) \leq \frac{h}{x_0} .$$

En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x_0) - \ln(x_0+h)}{h} = \frac{1}{x_0}$ quand h tend vers 0^- .

c) Déduire du a) et du b) que \ln est la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule en 1.

Une introduction du Logarithme Néperien en Terminale ES

Il s'agit du compte rendu d'un travail fait en 1995 et 1996 dans des classe de Terminale ES avec et sans spécialité Mathématique . La première de ces classe était de faible effectif, 23 élèves, mais par contre très hétérogène et d'un niveau général assez faible, la seconde, de 30 élèves, beaucoup plus homogène était d'un niveau nettement meilleur.

Avant propos

Ce travail, dans les deux cas, a été fait en deux parties : la première, à travers une démarche à caractère historique, consista à introduire le logarithme népérien et à justifier historiquement sa propriété fondamentale : $\ln ab = \ln a + \ln b$; la deuxième, a eu pour but d'éclairer les élèves sur le fait, également fondamental pour la fonction logarithme, que sa dérivée est la fonction $\frac{1}{x}$.¹

Introduction du logarithme et de ses propriétés algébriques (durée 0h 30).

Brève introduction historique expliquant l'apparition des logarithmes au 17^{ème} siècle.

Au 16ème et 17ème siècle, on assiste à un développement sans précédent des moyens de transport maritimes et du commerce, ces échanges favorisent en particulier le développement de la banque : Des calculs de toutes sortes apparaissent, qu'ils soient d'ordre financier pour les banquiers ou géométrique afin d'établir de nouvelles cartes pour les navigateurs... Sans entrer dans les détails, disons qu'à cette époque apparaît assez universellement une demande de simplification des calculs, en particulier ceux faisant intervenir des multiplications et des divisions. Une réponse sera fournie par Néper vers 1614 avec son invention des logarithmes qui permet de transformer les « multiplications en additions »

Je distribue une petite table de logarithmes aux élèves (voir annexe) après leur avoir fait ranger leurs calculatrices, car nous allons faire comme les contemporains de Neper, et calculer avec cette table, en particulier, quelques multiplications et divisions.

Calculer avec la table : 13×14 23×19 17^2 19×24 25×19
 $192 : 39$ $391 : 23$ $403 : 13$ $468 : 39$

¹ Pardon x \rightarrow 1/x Essayez d'expliquer la nuance à l'élève de Term ES moyen !

J'ai traité avec les élèves la première multiplication en mettant en relation chaque nombre avec son logarithme trouvé dans la table. Les autres ont été faites par les élèves seuls sans difficulté apparente (j'avais en fait, encore en souvenir les difficultés que ma jeunesse avait rencontrées avec les célèbres tables Bouvard et Ratinet). Je pensais que ces calculs allaient rapidement lasser les élèves, vues leurs apparentes incongruités à l'époque des calculatrices, mais contrairement à mon attente ce ne fut pas le cas. J'ai induit ensuite avec eux les formules classiques :

x	\longrightarrow	$\ln(x)$
13	\longrightarrow	2,56495
\times 14	\longrightarrow	$+ 2,63906$
182	\longleftarrow	5,20401

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \text{etc.}$$

L'intérêt de cette démarche est de faire connaître aux élèves une fonction par l'intermédiaire d'une table numérique ; c'est un aspect quelque peu oublié depuis l'avènement des calculatrices mais qui a l'avantage de montrer immédiatement la fonction dans sa globalité donc de la personnaliser d'une certaine façon, (tout au moins sur un intervalle) ce que la calculatrice ne peut faire quand on lui demande un logarithme quelconque : qu'est-ce qui ressemble plus à un nombre qu'un autre, fut-il logarithme ou non !

Propriétés analytiques : dérivée du logarithme.

Question : Comment faire comprendre aux élèves qu'une fonction « aussi magique »² que \ln qui transforme les multiplications en additions, a une dérivée aussi simple que $\frac{1}{x}$. Il était

évidemment hors de question de dériver successivement l'égalité $\ln ab = \ln a + \ln b$ par rapport à chacune des variables etc..., à la rigueur on pouvait admettre le résultat, mais j'ai préféré la démarche suivante :

Déroulement de la séance la première année (durée 0 h 30)

J'ai fait tracer aux élèves, ceux-ci s'aidant de leur calculatrice, une représentation graphique précise de la fonction \ln . Ayant convenu avec eux que sur un intervalle assez petit, de l'ordre de 0,1 au delà d'une valeur x_0 , la courbe se confond avec une portion de droite, à savoir la tangente, alors le coefficient directeur de cette portion de droite se confond avec la dérivée de la fonction en ce point, autrement dit :

$$(\ln(x_0))' \equiv \frac{\ln(x_0 + 0,1) - \ln(x_0)}{0,1}$$

Ceci fait, il restait à programmer sur les calculatrices le second membre de la « presque égalité » ci-dessus et à le faire représenter point par point sur le graphique précédent. On reconnaissait alors assez facilement la représentation graphique de $x \rightarrow \frac{1}{x}$.

² Ce n'est pas une remarque d'élève.

Mon but était d'essayer de les convaincre graphiquement que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, car c'est un aspect des choses qu'ils conçoivent et retiennent assez bien, comme je l'ai remarqué. Néanmoins ils ne semblent pas tous avoir bien compris le passage entre la dérivée de la fonction en x_0 et le coefficient directeur de la tangente en cette valeur.

Déroulement de la séance la deuxième année (durée 0 h 30)

Ayant constaté la difficulté évoquée précédemment, j'ai demandé aux élèves d'étudier la différence $\ln(x+1) - \ln(x)$ pour les valeurs données dans la table de Logarithme. Les élèves savaient que cette différence que l'on retrouve en économie sous la forme de coût marginal est approchée par la dérivée de la fonction.

Après avoir demandé aux élèves de mettre en vis à vis la colonne des x avec celles des résultats ils ont convenu que la dérivée du \ln était $\frac{1}{x}$.

En annexe vous trouverez la petite table des logarithmes népériens de 1 à 480 que j'avais distribuée aux élèves.

Jean Claude PENIN
Groupe Histoire des Math.
IREM de REIMS

CRITIQUES DE MICHEL ROLLE
SUR LA NOUVELLE ANALYSE

Les passages extraits sont tirés d'un article de 25 pages paru en 1703 dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (Paris, p. 312 à 336). M. Rolle (1652 - 1719) est un des opposants, au sein de cette Académie, aux idées développées dans "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes", publié par le Marquis Guillaume François de l'Hospital à Paris en 1696.(1)

Dans l'introduction de cet ouvrage de 181 pages, l'Hospital reconnaissait tout ce qu'il devait à Leibniz et Jean Bernoulli, indiquait qu'il avait eu l'intention de publier une seconde partie concernant le calcul intégral mais que, prévenu que Leibniz s'apprêtait à publier sur ce calcul, il y avait renoncé; enfin il rendait justice à Newton d'avoir "trouvé quelque chose de semblable au calcul différentiel" dans "Principia Mathematica" (1687), tout en remarquant que le calcul de Leibniz était "plus expéditif".

Dans le corps du traité, l'Hospital exposait les règles de cette nouvelle analyse, le calcul des différences et les usages que les nouveaux utilisateurs pourraient en faire pour trouver en particulier les tangentes, les extremums, les points d'inflexion et de rebroussement, etc...

DU NOUVEAU SYSTEME DE L'INFINI

Par M. ROLLE

On avait toujours regardé la Géométrie comme une Science exacte, et même comme la source de l'exactitude qui est répandue dans toutes les autres parties des Mathématiques. On ne voyait parmi ses principes que de véritables axiomes: tous les théorèmes et tous les problèmes qu'on y proposait étaient ou solidement démontrés, ou capables d'une solide démonstration; et s'il s'y glissait quelques propositions ou fausses ou peu certaines, aussitôt on les bannissait de cette science.

(1) Une réimpression de la seconde édition de 1716 a été faite par l'IREM de Dijon au début des années 80.

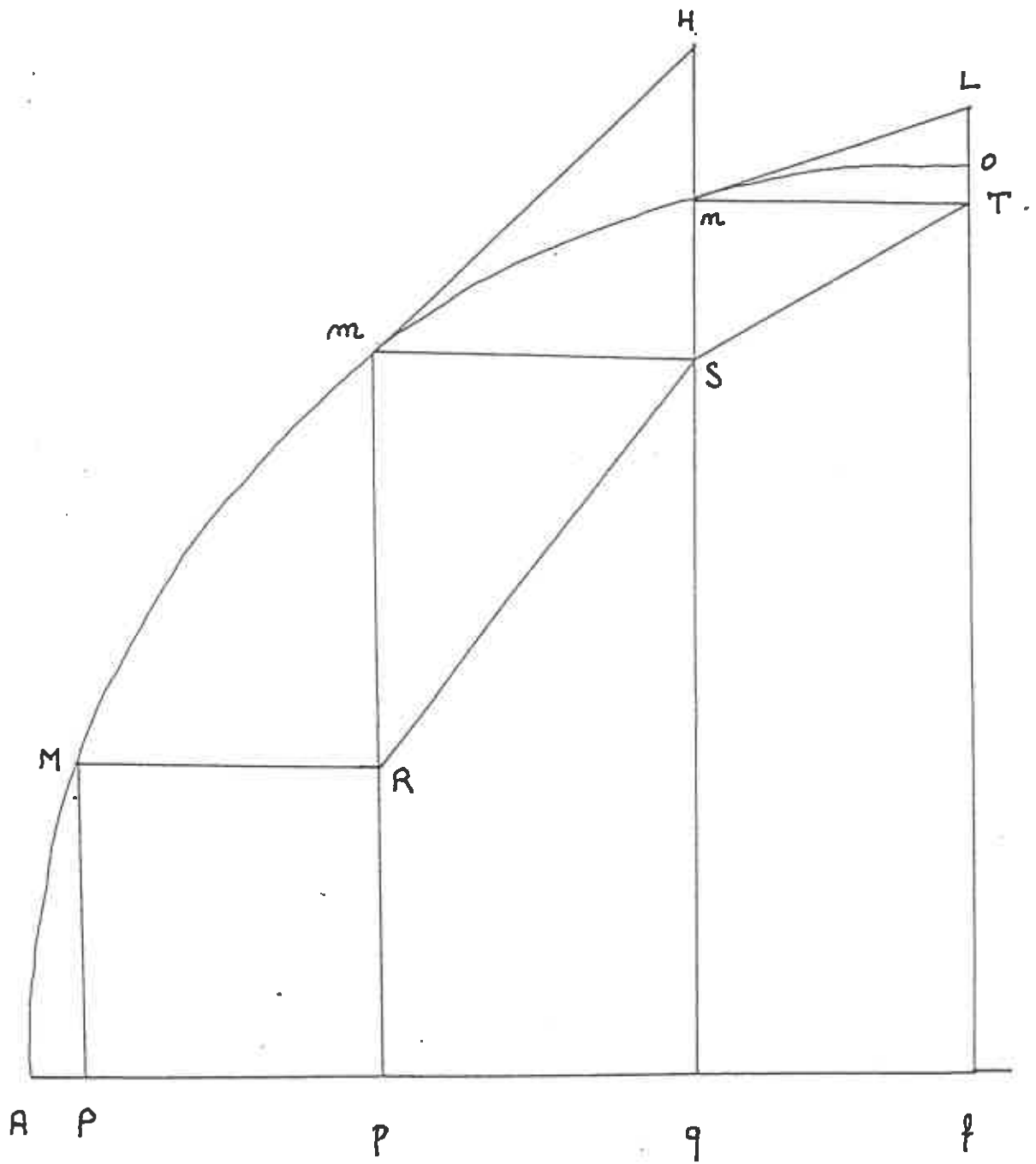


Figure de la deuxième page de l'article de Rolle
reprise de la 46^e de la 4^e planche de l'Analyse de l'Hospital

Mais il semble que ce caractère d'exactitude ne règne plus dans la Géométrie depuis que l'on y a mêlé le nouveau Système des Infiniment petits. Pour moi, je ne vois pas qu'il ait rien produit pour la vérité, et il me paraît qu'il couvre souvent l'erreur.

Cependant d'habiles Géomètres reçurent ce système aussitôt qu'il commença à paraître, et ils tâchèrent de le soutenir. Dans cette vue ils proposèrent plusieurs questions de Géométrie, et ils prétendirent que le système était absolument nécessaire pour les résoudre. Ce qui me donna l'occasion d'en faire l'examen, et de proposer quelques difficultés que j'y avais observées. (...)

L'exposé de Rolle consistera d'abord à réexpliquer les "demandes" de l'Hospital en les reformulant sous forme de six suppositions.

.../...

Sixième Supposition

On suppose que les Infiniments petits sont réels, divisibles à l'infini et infiniment variables. Ainsi MR , Rm , etc. sont des quantités réelles, divisibles à l'infini, et infiniment variables.

Cela suit des suppositions précédentes: mais on a encore confirmé cette supposition dans les réponses qu'on a faites aux Mémoires que j'avais proposés à l'Académie sur ce sujet en l'année 1700.

-A toutes ces suppositions du Système, j'ajouterai quelques unes des conditions qui en sont inséparables, et dont je me servirai dans la suite.-

Quand on suppose deux appliquées comme MP et mp , ou mp et nq , et que l'une est infiniment proche de l'autre; alors on a une égalité différentielle qui exprime le rapport de l'appliquée, de l'abscisse, et de leurs premières différences, selon l'Analyse des Infiniment petits, sect. 1.

Les autres différences donnent une suite infinie d'égalités, selon les règles qu'on a proposées dans la sect. 4 de cette Analyse.

Outre les conditions que l'on a marquées ici, il s'en trouve quantité d'autres, lorsque les Courbes sont formées sur des points fixes ou sur d'autres foyers; lorsqu'elles se forment par la projection des corps, par des mouvements composés; et en plusieurs manières. Mais il me paraît que ce que j'ai dit ci-dessus, est suffisant pour faire voir dans la suite que le Système est insoutenable.

C'est ensuite qu'il s'en prendra à la notion mal définie d'infiniment petit, en énonçant trois séries de "difficultés du système".

Dans les extraits qui vont suivre, il dira prouver...

... que les infiniment petits seraient nuls

PREMIERES DIFFICULTES DU SYSTEME.

Suivant la sixième supposition les Infiniment petits sont réels et divisibles à l'infini. Mais il semble que l'on tombe en contradiction, lorsqu'on suppose que ces Infiniment petits sont réels et divisibles. Car l'égalité que fournit la définition de la Courbe, jointe à l'égalité différentielle du premier genre, détermine les Infinis; en sorte que chaque Infini est un zéro absolu, comme la différence de 4 à 4, ou de 5 à 5, etc. Et par conséquent ils n'ont aucune étendue et ne sont plus divisibles.

Cela se prouve en plusieurs manières, comme on le va voir ici. Mais avant que de proposer des preuves générales, j'ai cru qu'il serait bon d'en donner des preuves particulières, parce qu'elles demandent moins d'application, et que même ces preuves particulières pourraient suffire dans cette occasion.

. Soit pour exemple la Parabole ordinaire, qui est de toutes les Courbes celle dont l'égalité est la plus simple.

Si l'on prend a pour l'expression de son paramètre; que chaque appliquée comme MP soit nommée y , et que son abscisse AP soit nommée x : alors on aura $a x = y y$, suivant la nature de cette Parabole.

Si de cette égalité génératrice $a x = y y$ on tire une égalité différentielle selon les règles qu'on a proposées dans l'Analyse des Infiniment petits, sect 1, on aura $a dx = 2 y dy$. Et dans cette égalité, dx et dy sont des Infiniment petits selon cette Analyse, page 2: en sorte que dx exprime MR ou son égale Pp , et que dy exprime la différence mR .

Mais suivant la sixième supposition les Infiniment petits sont des quantités réelles: d'où il s'ensuit que l'appliquée mp serait réellement distincte de l'appliquée MP , et que l'abscisse Ap

serait aussi réellement distincte de l'abscisse AP.

Or l'abscisse Ap est égale à $x + dx$, et l'appliquée pm est égale à $y + dy$. Donc, par la définition de la Parabole, le rectangle de l'abscisse $x + dx$ et du paramètre a , est égal au carré de l'appliquée $y + dy$. Ainsi $a x + a dx$ est égal à $y^2 + 2 y dy + dy^2$: et prenant cette égalité avec les deux précédentes, on aurait un Problème exprimé par trois égalités, comme on le voit ici en K.

$$K \begin{cases} a x = y^2 \\ a dx = 2 y dy \\ a x + a dx = y^2 + 2 y dy + dy^2 \end{cases}$$

Otant la première et la seconde égalité de la troisième, c'est à dire, choses égales de choses égales, selon l'axiome ordinaire; il en résulte $dy^2 = 0$. Donc $dy = 0$, et substituant 0 au lieu de dy dans l'égalité différentielle, on trouve aussi $dx = 0$. Mais 0 est ici l'expression du zéro absolu, ou d'un rien tel que la différence de 4 à 4. D'où il suit que dans ce problème K, les Infiniment petits sont des riens absolus.

Déjà il est encore manifeste que l'on tombe en contradiction, quand on attribue de l'étendue aux Infiniment petits dx et dy : et cette contradiction devient plus grande à mesure qu'on augmente cette étendue. Car si l'on prend 4, par exemple, au lieu de l'Infiniment petit dy ; alors l'égalité $dy = 0$ se changera en $4 = 0$, et cette contradiction deviendra infiniment petite, si au lieu de 4 on substitue une quantité infiniment petite. Mais si cette quantité est réelle, la contradiction est réelle aussi, quelque idée que l'on ait de l'infinie petitesse.

En d'autres exemples le calcul ne serait pas si facile: mais on peut toujours se servir des règles générales de l'Algèbre pour résoudre le Problème qu'expriment les égalités; et il se trouve qu'on ne saurait éviter la contradiction, quand on attribue de l'étendue aux Infiniment petits. Pour le détail du calcul on peut le conduire en différentes manières, et entr'autres de la manière que l'on va voir ici.

Soit pour exemple le cercle ordinaire, et qu'il soit exprimé, comme on le fait ordinairement, par l'égalité marquée ici en S.

$$S \quad \dots \dots y^2 + y = a x - x x .$$

Son égalité différentielle suivant l'Analyse des Infiniment petits, sect.1, est telle qu'on la voit ici en R.

$$R \dots \dots 2 y dy = a dx - 2 x dx.$$

Substituant, dans S, $x + dx$ au lieu de x , et $y + dy$ au lieu de y ; on aura l'égalité marquée M.

$$M \dots \dots y y + 2 y dy + dy^2 = a x + a dx - x x - 2 x dx - dx^2$$

De cette égalité M ôtant la proposée S, on trouvera celle qui est marquée N.

$$N \dots \dots 2 y dy + dy^2 = a dx - 2 x dx - dx^2$$

Comparant cette égalité N à l'égalité différentielle R, pour faire évanouir dy , on trouvera la résultante P.

$$P \dots \dots 4 y y dx^2 + 4 x x dx^2 - 4 a x dx^2 + a a dx^2 = 0. \quad \left. \right\} (2)$$

Dans cet exemple on pourrait en demeurer là; car l'on percevrait aisément que cette égalité est toute imaginaire lorsque l'Infiniment petit dx est réel. Mais, pour se conformer en cela aux règles générales, il faut comparer cette égalité P à la proposée S, pour faire évanouir x ou y , et l'on trouvera que $a a dx^2 = 0$. Où l'on peut voir clairement que l'Infiniment petit dx est égal à 0, et que l'on tomberait en contradiction si l'on prenait pour dx une quantité réelle.

Souvent on peut abrégé le calcul, quand on fait quelque attention au détail. Ainsi il aurait suffi dans cet exemple de prendre en R une valeur de dy , et de la substituer dans le seul monôme $2 y dy$, qui fait partie de l'égalité N. Car de cela seul on aurait trouvé l'égalité $dy^2 = - dx^2$, où l'on voit aisément que cette égalité deviendrait imaginaire, si l'on prenait une étendue réelle pour l'un ou l'autre des Infiniment petits.

Non seulement on s'assure par cette règle que les Infiniment petits sont toujours des riens absolus dans l'égalité différentielle; mais on peut encore s'assurer que ce sont des riens absolus par leur institution.(...)

... que, même s'ils n'étaient pas nuls, leur présence n'ajouterait parfois rien au calcul

{2) P n'est pas la résultante qu'on trouverait spontanément; pour trouver P, Rolle forme $A=4y^2(2ydy+dy^2)$ d'après N, puis $B=4y^2(2ydy)$ et $C=(2ydy)^2$ d'après R; P vient alors de $A=B+C$. Le but est là d'opposer P et S.

SECONDES DIFFICULTES

Je vois pas que ce système ait rien produit pour la vérité. On reconnaît d'abord que les effets des méthodes qu'on propose dans la nouvelle Analyse sont toujours les mêmes quand on substitue des quantités finies à volonté au lieu des Infiniment petits dx et dy : Ce qui prouve que le succès, bon ou mauvais, n'est point attaché à l'infinie petitesse qu'on suppose dans le Système.

Pour faire voir en quoi consiste cette difficulté, je chercherai ici les Tangentes de la Parabole $ax = yy$ par le moyen de la règle qu'on a insérée dans l'Analyse des infiniment petits, page 11 et 12. Je supposerai 100 000 toises au lieu de l'Infiniment petit dx , et 738 toises au lieu de l'Infiniment petit dy (on peut prendre tels autres nombres qu'on voudra) et l'on verra qu'on trouve par ces valeurs supposées la même chose que par les Infiniment petits.

En prenant les dx et dy , la règle donnera l'Analogie marquée ici en A.

$$A. \quad dy : dx :: y : PT. \quad \left. \vphantom{dy} \right\} (3)$$

Et si l'on prend au lieu de ces Infiniment petits les valeurs finies dont je viens de parler, la règle donnera l'Analogie B.

$$B. \quad 738 : 100\ 000 :: y : PT.$$

Divisant le produit des termes moyens par le premier terme de l'Analogie A, on aura:

$$PT = \frac{y \ dx}{dy} \quad \text{selon la règle.}$$

Et si l'on fait la même chose sur l'Analogie B, la règle donnera:

$$PT = \frac{100\ 000 \ y}{738}$$

Ensuite prenant, suivant la règle, l'égalité différentielle de $ax = yy$, on trouve $a \ dx = 2 \ y \ dy$.

Et si l'on substitue dans cette égalité différentielle les valeurs supposées de dx et dy , on aura la fausse égalité différentielle marquée ici en C.

$$C. \quad 100\ 000 \ a = 2 \ y \ 738$$

En prenant selon la règle une valeur de dx dans l'égalité différentielle; multipliant cette valeur par y ; et la divisant par dy , on aura:

$$\frac{2 \ y \ y}{a} \quad \text{pour la valeur de PT.}$$

(3) proportionnalité que nous traduirions par: $dy/dx = y/PT$

Et si pour faire la même chose sur la fausse égalité différentielle C , l'on prend la valeur de 100 000 qui représente dx ; on aura :

$$100\ 000 = \frac{2\ y\ 738}{a} ;$$

multipliant par y et divisant par 738 qui représente dy , l'on trouvera :

$$\frac{2\ y\ y}{a} \text{ pour PT ,}$$

comme on l'a trouvé en prenant les dy et dx . Ainsi le Problème est résolu par les quantités finies, de même que par les Infiniment petits.

De là il paraît que le succès n'est point un effet de l'infinie petitesse qu'on attribue aux dx et dy , puisque la règle donne la même chose lorsqu'on prend des quantités finies à volonté au lieu où l'on employe ces dx et dy .

... qu'ils seraient, dans certains cas, une simple écriture dont la présence s'accommoderait mal de la logique

Outre ce défaut, il semble que dans la méthode des Infiniment petits il y a une pétition de principe, en ce que l'égalité différentielle est toujours une partie de ce que l'on demande, et quelquefois tout ce que l'on cherche. Par exemple, on suppose dans le neuvième article de cette Analyse, que pour trouver les Tangentes des Lignes géométriques de tous les genres, on ait déjà l'égalité différentielle. Mais quand on a une fois cette égalité, on n'a pas besoin de tout ce que l'on dit d'ailleurs dans cet article pour trouver ces Tangentes: il suffit d'effacer le d qui est dans les dx , pour avoir la sous-tangente sur l'axe des y , et d'effacer le d qui est dans les dy , pour avoir la sous-tangente sur l'axe des x . Ainsi quand on a $2\ y\ dy = a\ dx$ pour l'égalité différentielle de la Parabole, et que l'on efface le d qui est en dx , aussitôt on trouve $2\ y\ dy = a\ x$,

$$\text{ou } dy = \frac{a\ x}{2\ y}$$

pour la sous-tangente sur l'axe des y . Pareillement de dy , effaçant d. , on trouvera $2\ y\ y = a\ dx$,

$$\text{ou } dx = \frac{2\ y\ y}{a}$$

qui est la sous-tangente des x . Or l'on ne s'est proposé par l'Analyse des Infiniment Petits (art.9), que de trouver les sous-tangentes; ainsi l'on y suppose ce qui est question, et tout ce que l'on y fait d'ailleurs paraît superflu.

... qu'ils apparaîtraient ou disparaîtraient
dans les calculs pour des raisons mal expliquées

Il y a encore d'autres usages du Système où il semble qu'il y ait aussi des pétitions de principe. En voici un exemple considérable que j'ay tiré de l'Analyse des Infiniment petits, art. 5. On a prescrit dans cet article de retrancher $dx.dy$ de la quantité $y.dx + x.dy + dx.dy$; et pour rendre raison de ce retranchement, on a cité l'art. 2. de cette Analyse, qui est le même dont j'ay parlé dans la quatrième supposition. Selon cet article, il serait permis de prendre - indifféremment - le reste ou la partie $y.dx + x.dy$ au lieu du tout $y.dx + x.dy + dx.dy$; et c'est en cela que consiste ma difficulté. Car s'il était permis de prendre - indifféremment - la partie au lieu du tout; cette indifférence permettrait aussi de prendre le tout $y.dx + x.dy + dx.dy$ au lieu de la partie $y.dx + x.dy$; et même on serait porté à le préférer, parce que c'est le tout qui se présente dans l'opération. Ce n'est pas rendre raison de ce retranchement, de dire, comme on a fait dans cet article cinquième, que $dx.dy$ est infiniment petit par rapport à $y.dx + x.dy$: Car ces trois Infiniment petits étant des riens absolus, l'un n'est pas plus grand que l'autre. De plus, selon ce qui a été dit icy dans les premières difficultés, s'il est permis d'ôter $dx.dy$ à cause de son infinie petitesse, ce serait aussi à cause de la petitesse infinie qu'il serait permis de le laisser. De sorte que dans l'Analyse des Infiniment petits on ne voit pas ce qui détermine à prendre la partie $y.dx + x.dy$ au lieu du tout $y.dx + x.dy + dx.dy$, ou à prendre le tout pour la partie. Cependant cela n'est point libre: car si l'on avait pris le tout dans cet exemple, de cela seul s'évanouiraient tous les projets de l'Analyse des Infiniment petits. Il y a donc une autre raison qui oblige de préférer la partie; et c'est cette raison que l'on n'a pas marquée dans cette Analyse.

Mais on peut voir dans la Méthode de Messieurs de Fermat et Barou la véritable cause de ce retranchement; et même il semblerait en comparant cette Méthode à l'Analyse des Infiniment petits, que l'art.2 de cette Analyse n'aurait été mis dans le Système, que pour déguiser la formule ordinaire des Tangentes, qu'on appelle égalité différentielle.

Par les difficultés que j'ay proposées jusqu'icy, l'on voit que les Infiniment petits que l'on a introduits dans le calcul différentiel, ne contribuent rien pour trouver la vérité, qu'ils sont encore inutiles pour l'opération, et qu'après les avoir mis dans une question, il faut d'ailleurs pour la résoudre, faire tout ce que l'on ferait si l'on ne les y avait point mis. (...)

... que les suppositions sur les infiniment
petits seraient fausses

Ainsi l'on peut dire que les différences plus petites qu'aucune quantité donnée, sont de véritables riens dans le sens des anciens Géomètres; et delà on voit que ce ne sont pas les différences infiniment petites du nouveau Système, puisque dans le nouveau Système l'on attribue à ces Infiniment petits une étendue réelle, et que l'on y fait quantité d'autres suppositions qui ne conviennent point au zéro absolu. Mais si l'on rejetait toutes ces suppositions, il serait vrai de dire que les quantités plus petites qu'aucune quantité donnée répondent aux dx et dy de l'égalité différentielle, qui en ce sens ne seraient que des rien absolus, et ne désigneraient que le point Mathématique .

Nonobstant toutes ces difficultés, il est vrai de dire que l'Analyse des Infiniment petits est un Ouvrage très curieux, et qu'il s'y trouve quantité de choses nouvelles et très ingénieuses.

fin

Les critiques de M. Rolle ne faisaient qu'ouvrir
une longue période de travaux et de polémiques,
- mot faible quand la querelle de la priorité entre
Leibniz et Newton sera soulevée - sur les fondements
du calcul infinitésimal.



*ont collaboré à la rédaction
de cette publication :*

*Jean-Marie Farey
Geneviève Kientz
Jean-Claude Penin
Patrick Perrin
Simone Lokeland*



Fiche Dublirem

Titre : MISCELLANEES

Auteur : Groupe « Histoire des Mathématiques » de Reims

Niveau : Second cycle et Formation des maîtres

Date : Juin 1996

Mots-clé : **spécialité :** Histoire des Mathématiques

autres : Activité en classe
Analyse
Abel
Cardan
Logarithme
Newton
Quadrature
Table de Logarithme

Résumé : Brochure périodique contenant :
- des extraits de textes anciens.
- des comptes rendus d'expérimentations en classe.
- des études de formules ou thèmes mathématiques ayant joué un rôle historique

ISBN 2-910076-09-1

Format A4	Nombre de pages 45	Prix 25,00F	IREM numéro 36
--------------	-----------------------	----------------	-------------------