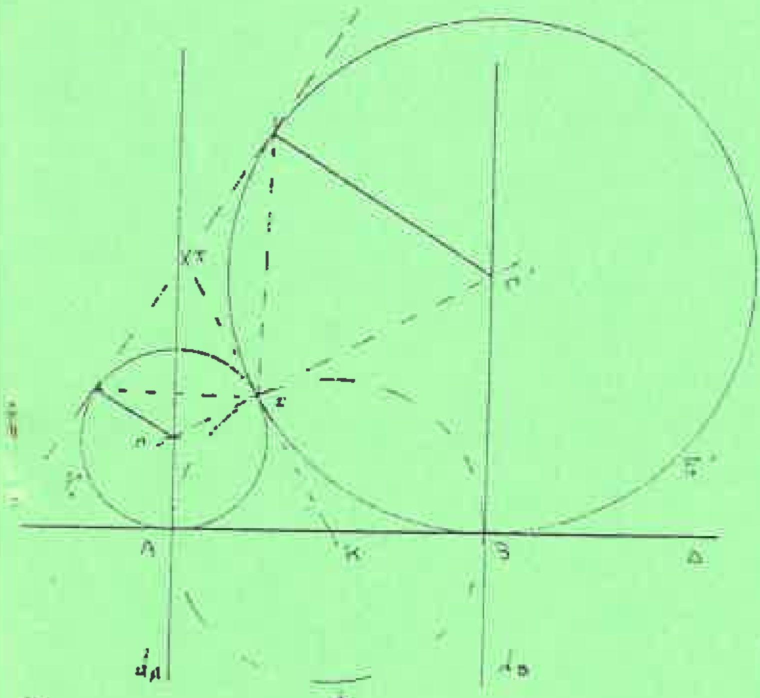
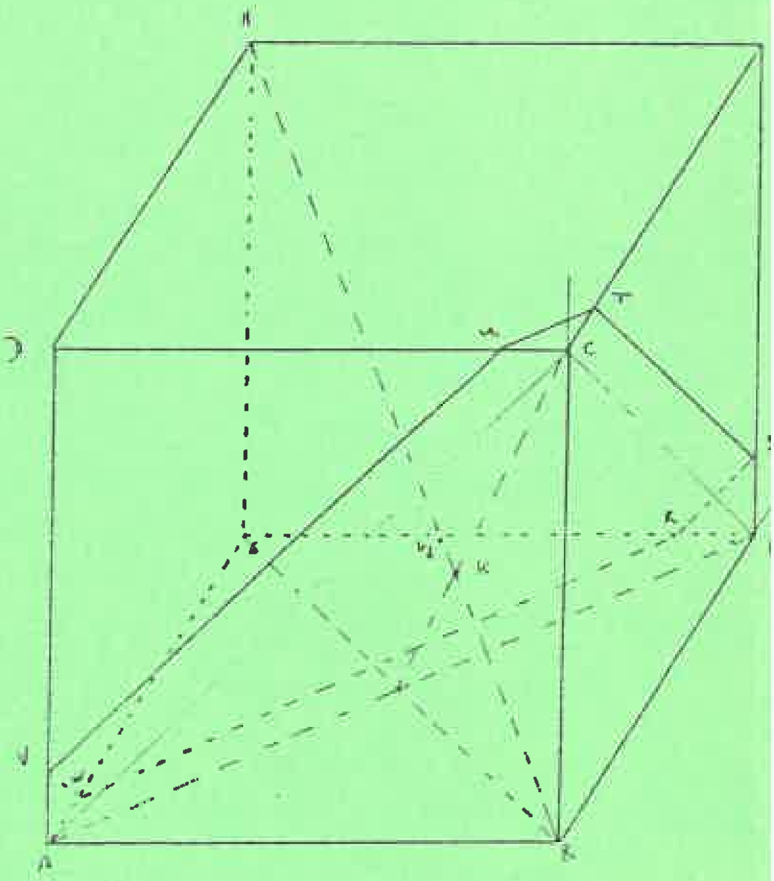
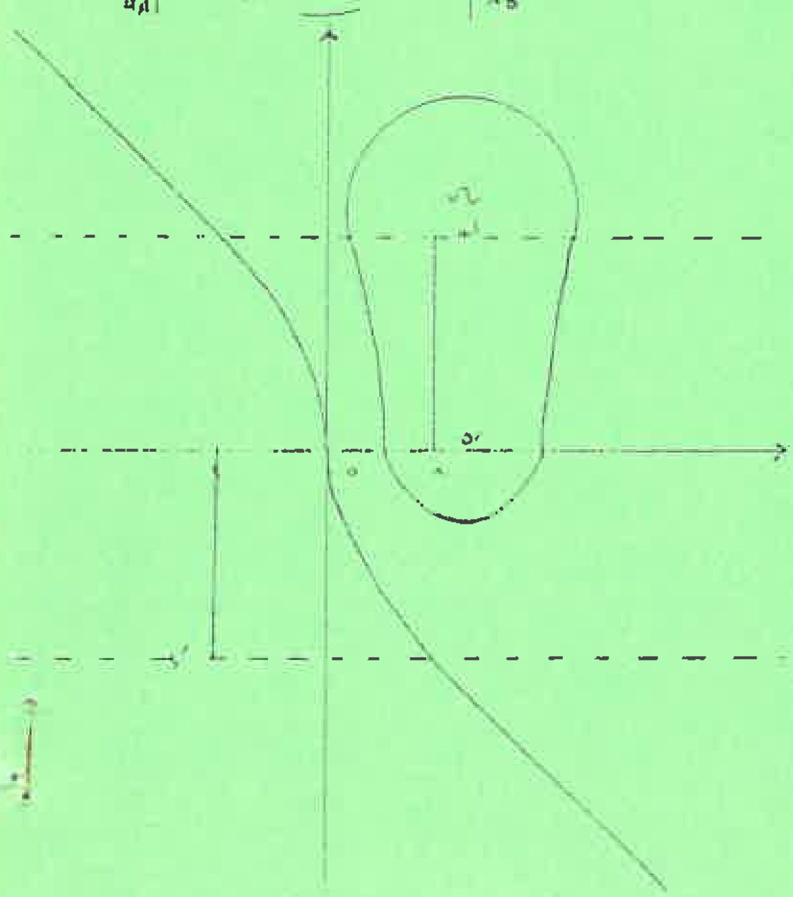
IREM de REIMS

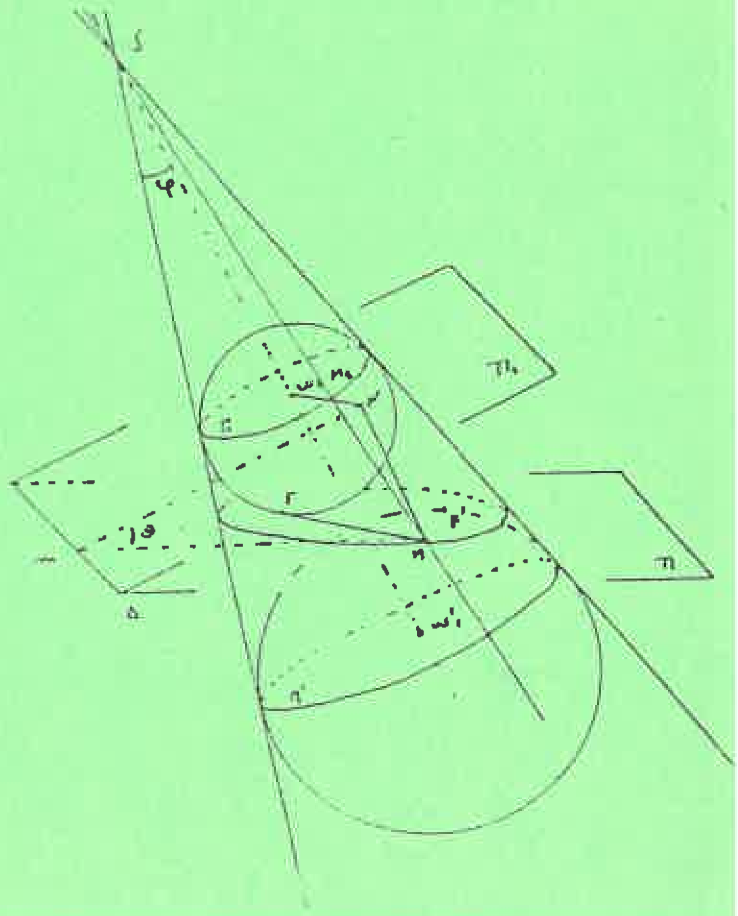
CORTIER Jean-Philippe

GEOMETRIE









IREM de REIMS
CORTIER Jean-Philippe.

PREFACE

Ce fascicule regroupe les activités du stage RAA 704 du P.A.F 86.87 [Géométrie] qui a eu lieu au Lycée Marie de Champagne. Chaque thème correspond à une journée de stage. Le public se composait de 20 Professeurs de Mathématiques enseignant en Collège ou Lycée dans les départements de l'Aube et de la Hte. Marne.

Présentation des thèmes

Thème I : Problèmes d'alignements, de lieux, de constructions.

La recherche de solutions aux exercices posés était organisée en groupe de quatre et le but était de dégager différentes méthodes de résolution afin de comparer leur efficacité et leur niveau d'abstraction.
Ces exercices pouvaient, dans une large mesure, être réinvestis dans certaines classes de 1er et 2e cycle (avec bien sûr des aménagements selon le cycle)

Thème II : Polyèdres réguliers ; section d'un cube par un plan.

Dans un premier temps, quelques propriétés des polyèdres convexes réguliers ont été étudiées.

Ensuite les stagiaires ont cherché la section d'un cube par un plan (variable) orthogonal à l'une des diagonales du cube.
Cela a donné lieu à des problèmes de construction puis de mesure de périmètre et d'aire de la section.

Ce thème a eu le prolongement suivant lors de la troisième journée de stage : Mr Y. HAUBRY a présenté la section d'un cube par un plan selon le point de vue de la Géométrie Descriptive.

Thème III : Extension des notions de médiatrices, de ligne de distance

Au moyen de la définition de la distance d'un point à une partie fermée non vide du plan affine euclidien, les notions de médiatrice de deux fermés, de ligne de distance à un fermé, de ligne de partage ont été étudiées sur différents exemples.

Cela a permis, en particulier, d'investir dans cette recherche certaines transformations du plan comme outils.

Thème IV. : Théorème de Pascal pour les coniques

ⓐ Tout d'abord les notions suivantes ont été dégagées

- tangentes à une sphère - plan tangent -
- ensemble des tangentes à une sphère, issues d'un point donné de l'espace
- Cône, recherche des sphères tangentes à un plan et à un cône donnés.

ⓑ Coniques : section plane d'un cône ou image d'un cercle par une perspective conique.

ⓒ Théorème de Pascal pour les coniques

- En quoi quelques propriétés de la perspective conique permettent de restreindre la démonstration du théorème à un cercle.
- démonstration du théorème.

Bibliographie succincte

1. Marcel Berger, Geométrie, Tome 2 et 3, Cedic Nathan 1977
2. Jacques Hadamard, Leçons de Géométrie élémentaire, Tome 1 et 2
Armand Colin 1949
3. Claude Tisseron, Géométries affine, projective et euclidienne, Hermann 198
4. Pierre Samuel, Géométrie Projective, P.U.F 1986
5. C. Lebossé et C. Hémery, Géométrie terminale C, F. Nathan 196
6. I.R.E.M de STRASBOURG, Travaux Pratiques 1eS Avril 1986
7. Composition Algèbre et Géométrie. CAPES 1986

Thème I concerné par 2. (tome 1); 5.; 6. et 1. (tome 2)
Thème II " " 1. (tome 3); 6.
Thème III " " 7.
Thème IV " " 2. (tome 2) et pour ceux qui seraient intéressés par une démonstration projective : 3.; 4.

Soit (A, B, C) un triangle. On se propose de montrer que les trois hauteurs de ce triangle sont concourantes et ce par des méthodes différentes. A vous de choisir et d'établir votre "palmarès".

M_1 : On mène par A la parallèle d_1 à (BC), par B la parallèle d_2 à (CA) et par C la parallèle d_3 à (AB). On note $d_1 \cap d_2 = \{C'\}$, $d_2 \cap d_3 = \{A'\}$, $d_3 \cap d_1 = \{B'\}$....

M_2 : Soit O le point de concours des médiatrices, I et S les points déterminés comme suit
$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OI} + \vec{OC} = \vec{OS}$.

M_3 : Soit G le centre de gravité de (A, B, C). Utiliser une homothétie de centre G pour conclure.

M_4 : Soit A, B, C, D quatre points de $\mathcal{P}$. Prouver l'identité :
$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$. Conclure.

M_5 : Soit a le projeté orthogonal de A sur (BC), A' le milieu de (B, C).
Soit M un point de $\mathcal{P}$, m son projeté orthogonal sur (BC) ; montrer que :
$MB^2 - MC^2 = 2\vec{MA'} \cdot \vec{CB} = 2\vec{mA'} \cdot \vec{CB}$; $M \in (Aa) \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$
Conclure.

Application : Soit deux droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ tracées sur une feuille de papier, se coupant hors de cette feuille. Soit K un point de la feuille. Tracer la droite passant par K et le point d'intersection des deux droites.

Indications :

M_1 : que représentent dans (A', B', C') les hauteurs de (A, B, C) ?

M_2 $(CS) \perp (AB)$ et réitérer ...

M_3 — $h(G, -2)$

M_4 —

M_5 • Poser M point de concours de (Bb) et (Cc)

• considérer K comme l'orthocentre d'un triangle dont un des sommets est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$.

Problemes d'Alignement

I. On se propose dans cet exercice classique, de dégager différentes méthodes pour un même alignement. Certaines, d'ailleurs, ne sont que des traductions dans un autre language des précédentes.

Enoncé : Soit deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en I ; A et C deux points de Δ_1, B et D deux points de Δ_2 tels que $(AB) // (CD)$. Soit J le point d'intersection de (AD) et (BC), K, (resp. L) le milieu de (A,B) (resp. de $(C,$

Question : Montrer que les points I, J, K, L sont alignés.

Méthodes proposées :
- I.1 Calcul vectoriel
- I.2 Calcul barycentrique
- I.3 Homothétie
- I.4 Analytique
- I.5 Symétries obliques.

II. Enoncé : (A, B, C, D) est un carré de centre O. Soit E le point intérieur au carré tel que le triangle (C, D, E) soit équilatéral. Soit F le point extérieur au carré tel que le triangle (B, C, F) soit équilatéral. Soit G le point extérieur au carré tel que le triangle (A, D, G) soit isocèle rectangle en G.

Questions : Q_1 Montrer que les points F, G, O sont alignés
Q_2 que peut-on dire des points A, E, F ?
Q_3 que peut dire des points B, E, G ?

III. Enoncé : $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, $\mathcal{C}'$ est un cercle de centre O' ; $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en A et B ; E est le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}$, F le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}'$.

Question : Montrer que les points A, E, F sont alignés $(O \neq O')$

- Indications proposées.

I.

I.1 $\vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{IK}$; "Thalès" ; I, K, L alignés .....

I.2 I barycentre de (A, k) (B, k) (C, −1) (D, −1) par exemple puis "associativité du barycentre".

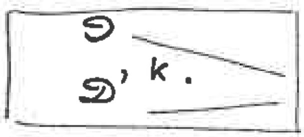
I.3 Introduire par exemple l'homothétie h_1 de centre I qui "envoie" A sur C déterminer $h_1(B)$, enfin "conservation" des milieux par une homothétie

I.4 Utiliser le repère affine $(I, \vec{IA}, \vec{IB})$

I.5 Introduire S symétrie d'axe (K, L) et de direction $\mathbb{R}.\vec{AB}$.

Remarques : (i) Cas particulier ?

(ii) application : soit $\mathcal{F}$ une feuille de papier, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes, non sécantes sur $\mathcal{F}$ et K un point de $\mathcal{F}$. Tracer la droite d passant par K et le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

$\mathcal{F}$ 

II. II Q_2 A, E, F sont alignés utiliser les angles de dtes par exemple

II Q_3 Raisonnement par l'absurde : supposer B, E, G alignés.

III. Introduire I point d'intersection de (A, B) et (O, O') et une homothétie.

I. Enoncé : Soit O, A deux points du plan euclidien $\mathcal{P}$. Soit M, N les points déterminés comme suit : le triangle (M, A, N) est rectangle en A, la droite (M, N) est // à (O, A). On note I le milieu de (M, N). On pourra introduire le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|}$.

Questions : quel est le lieu de M et N lorsque I décrit $\mathcal{H}$ où :

1) $\mathcal{H} = \mathcal{C}(A, r)$; 2) $\mathcal{H} = \Delta$ où Δ est une droite passant par A

3) $\mathcal{H} = \mathcal{D}$ la droite passant par O et orthogonale à (O, A)

4) $\mathcal{H}$ est la parabole d'équation $y = 4ax$ dans le repère $\mathcal{R}$.

II E : Soit Δ une droite de $\mathcal{P}$, A, B deux points de Δ. On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples de cercles $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ vérifiant la propriété (*)

(*) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents entre eux et respectivement tangents en A et B à Δ.

Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{T}$ leur dernière tangente commune ; on pose $\mathcal{T} \cap \mathcal{C} = \{A'\}$, $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}' = \{B'\}$.

Q1 Construire un exemple de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \in \mathcal{F}$.

Q2 Déterminer le lieu du milieu I de (A', B') lorsque $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ décrit $\mathcal{F}$.

Q3 Montrer que les cercles de diamètre $[A', B']$ sont tangents à un cercle fixe

III E : Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O ; B, C sont deux points fixes de $\mathcal{C}$

Q : Quel est le lieu de H orthocentre du triangle (A, B, C) où A décrit $\mathcal{C} \setminus \{B, C\}$

IV E : Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, Δ une droite telle que $d = d(O, \Delta) >$

A tout point M de Δ, on associe les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de M. On note M_1, M_2 les points de contact de ces tangentes.

Q : Quel est le lieu de G_M centre de gravité de (M, M_1, M_2) lorsque M décrit Δ ? Le construire.

Indications :

· I . φ_1 Penser à une transformation simple (ici translation)

φ_2 Penser à une transformation simple

φ_3 Utiliser $\mathcal{R}$ et l'analytique par exemple

φ_4 Propriété caractéristique de la parabole et transformation.

II . φ_1 : Considérer I le point de tangence de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ - - - -

φ_2 :

III ici plusieurs méthodes

M_1. Introduire $s_O(A) = D$ (s_O symétrie centrale de centre O)

considérer (D, B, H, C) et utiliser une transformation

M_2 se rappeler $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où G est centre de gravité de (A, B, C)

déterminer le lieu de G, $(\mathcal{L}(G))$ puis $\mathcal{L}(H)$.

M_3 très rapide si l'on connait une propriété du symétrique de l'orthocentre dans la symétrie orthogonale par rapport au côté du triangle.

IV . Pour ma part, je n'ai trouvé ici qu'une solution "analytique"

Pour cela : soit H le projeté orthogonal de O sur Δ, $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère de $\mathcal{P}$ direct où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$

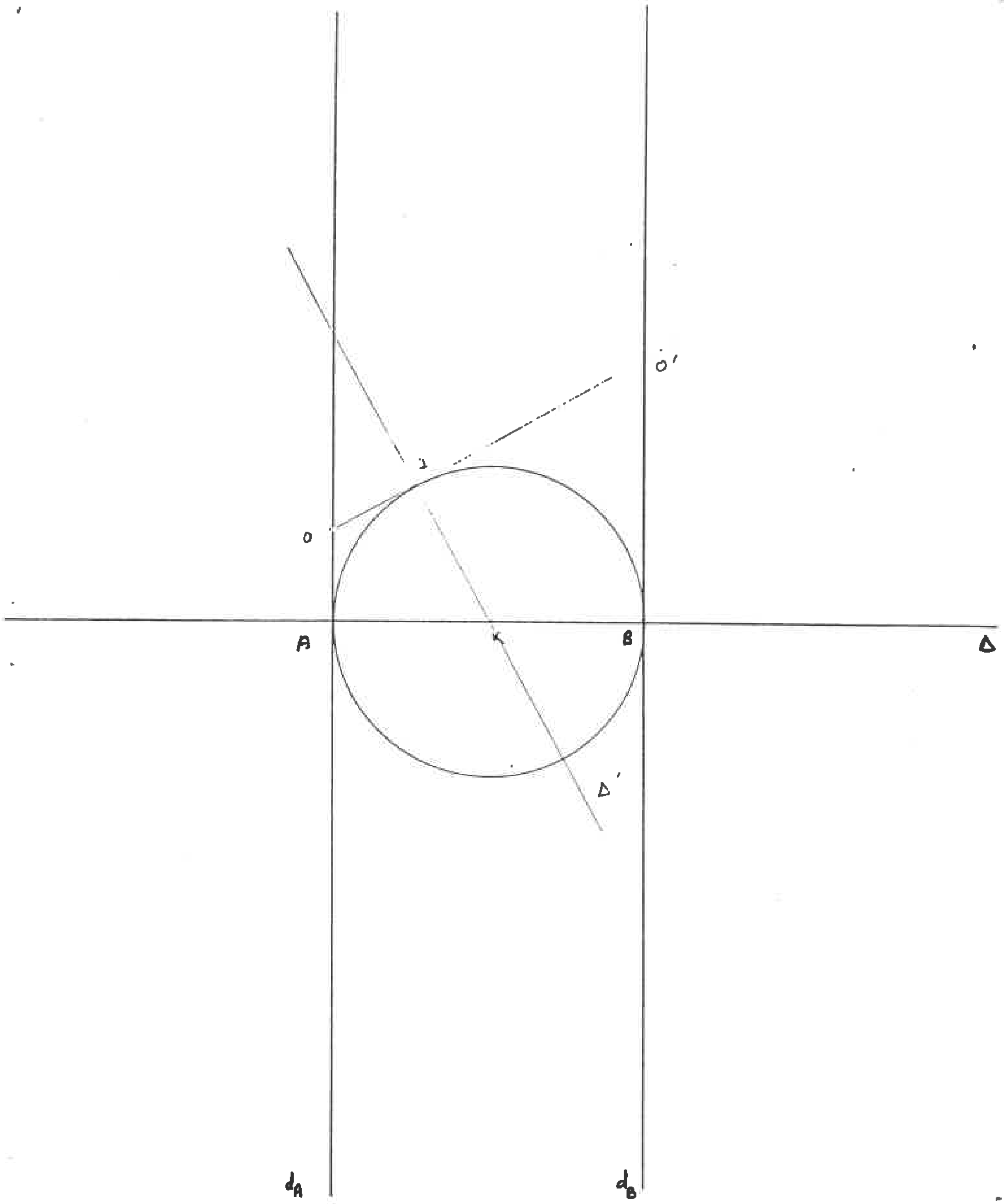
Pour $M \in \Delta$ on pose $\theta = \text{mes}\,(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM})$; soit $I = M_1M_2 \cap OH$

$G_M \quad \left(\frac{1}{3}\left(\frac{d}{\cos\theta} + \frac{2r^2\cos\theta}{d}\right), \theta\right)$ en coord. polaire (sauf erreur de calcul)

éq de $\mathcal{L}(G_M)$: $\quad X - \frac{d}{3} = \frac{2r^2}{3d}\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right)$

changt de not : $\alpha = d/3 \quad \beta = \frac{2r^2}{3d} \quad \theta = \beta + \alpha$

$\mathcal{L}(G_M)$: $Y = \pm F(X)$ où $F(X) = X\sqrt{\frac{-X+\theta}{X+\alpha}}$


O'
I
O
A
K
B
Δ
Δ'
d_A
d_B

TII

POLYEDRES

On se place dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3.

I. De l'évolution des définitions en Géométrie

Définition 1 [in : Hadamard : Leçons de géométrie élémentaires t II Armand Colin 194.
Dans le ch. IV p 419, J. Hadamard considère comme polyèdre :

- On nomme polyèdre, un volume limité par des surfaces toutes planes.
(La surface limite étant d'un seul tenant, i.e. ne se compose pas de plusieurs parties entièrement séparées les unes des autres)

Les portions de plans qui comprennent ainsi entre elles le polyèdre en sont dites les faces (ayant leur contour d'un seul tenant).

Chaque face, étant limitée par ses intersections avec les faces voisines, est un polygone : les côtés de ce polygone sont les arêtes du polyèdre ; chaque arête est commune à deux faces exactement.

Les sommets de mêmes polygones sont les sommets du polyèdre.
Un sommet n'appartenant pas à plus de deux arêtes (!) d'une même face

- Un polyèdre est dit convexe s'il est situé tout entier d'un seul et même côté par rapport au plan de l'une quelconque de ses faces.
(Un polyèdre convexe a pour faces des polygones convexes).

Définition 2. [in : Berger : Géométrie T III ch 12 Cedic Nathan 197.

- Un polyèdre convexe de $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{E}$ qui est intersection finie de demi-espaces fermés.
- Un polytope est un polyèdre convexe compact, d'intérieur non vide.

rq 1 : cette définition est donnée dans un cadre plus large : $\dim \mathcal{E} = n \geqslant 2$

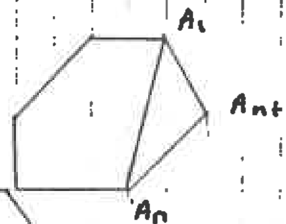
rq 2 : D'après M^r Berger : " Une définition possible d'un polyèdre serait :
un polyèdre est une réunion finie de polyèdres convexes compacts -

II. Théorème d'Euler

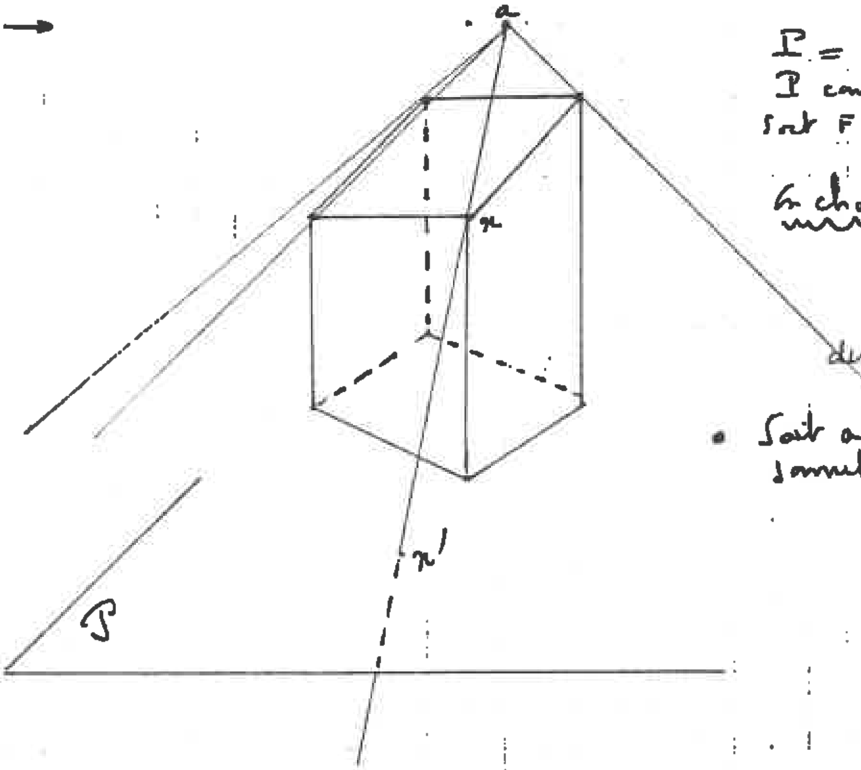
Soit P un polyèdre convexe (au sens d'Hadamard) ou un polytope (au sens de Berger)

Notation : s, a, f désignent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes, de faces de P

Rappel : Soit Π_n un polygone convexe à n côtés ($n \geq 3$), u_n la somme des "mesures des angles de Π_n". Alors $u_n = (n-2)\pi$



$$\text{Théorème (Euler) : } \quad s + f = a + 2 \quad \text{pour tout } P$$



$P = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ $\quad$ R_i demi espaces fermés

P compact $\quad \mathring{P} \neq \emptyset$

Soit F la face contenue dans R_1

On choisit $\begin{cases} a \in \bigcap_{i \geq 2} \mathring{R}_i \setminus P \\ \mathcal{P} \text{ un plan } /\!/ \text{ (plan contenant } F) \end{cases}$
tq. a et $\mathcal{P}$ soient dans deux demi espaces déterminés par F, distincts.

- Soit alors p la projection centrale de sommet a sur $\mathcal{P}$

propriétés de p :

$$p : \mathcal{E} \setminus \Pi_a \longrightarrow \mathcal{P}, \quad M \longmapsto p(M) = M'$$

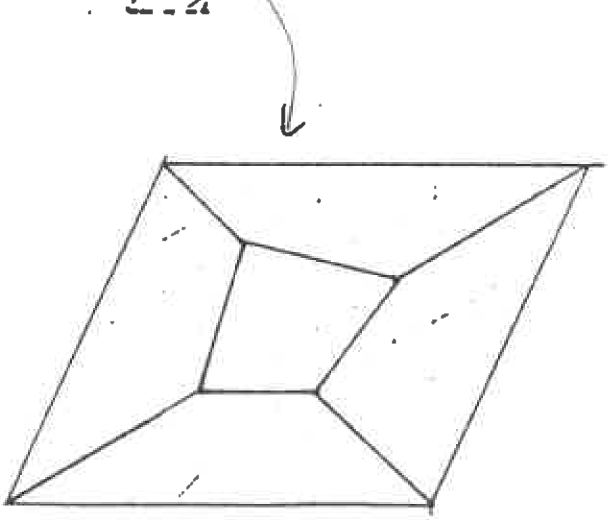
où $\{M'\} = \mathcal{P} \cap (a, M)$

p définit une bijection entre les sommets, les arêtes, les faces distinctes de F de P et un ensemble de pts, de segments et de polygones convexes de $\mathcal{P}$.

p(F)

Soit
- $\mathcal{S}$ l'ens. des sommets de P, $\mathcal{S}' = p(\mathcal{S})$
  $\mathcal{A}$ l'ens des arêtes de P, $\mathcal{A}' = p(\mathcal{A})$
  $\mathcal{F}$ l'ens des faces de P, $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} \setminus F$
  $p(\mathcal{F}^*) = \mathcal{F}'$.
- s', a', f' le nombre d'éléments de $\mathcal{S}', \mathcal{A}', \mathcal{F}'$ on a.

$$s' = s \qquad a' = a \qquad f' = f - 1$$



p($\mathcal{F}^*$)

- $p(F)$ est un polygone convexe et les polygones convexes de $\mathcal{F}'$ constituent une décomposition de $p(F$

TII s' étant le nombre de sommets de $\mathcal{F}' = p(\mathcal{F}^*)$, on discerne les intérieurs et les extérieurs qui sont en nombre égal au nombre de cotés k de $p(F)$

On a : X = somme des angles des polygones de $\mathcal{F}' = \underset{\text{rappel}}{(k-2)\pi} + 2\pi(s'-k)$

Soit alors φ'_i le nombre de polygones à i cotés de $\mathcal{F}'$, φ' leur nb total.

On a $X = \sum_i ((i-2)\pi)\varphi'_i = \pi\left(\sum_i i\varphi'_i - 2\sum_i \varphi'_i\right) = \pi\left[\left(\sum i\varphi'_i\right) - 2\varphi'\right]$

Or $\sum_i i\varphi'_i = 2$ (nb de cotés de $\mathcal{F}'$) $- k$ (on compte 1 fois ceux de la frontière ex.)

Donc on a $\begin{cases} \varphi' = f' = f - 1 = (\text{nb de faces de } \mathcal{F} - 1) \\ \sum_i i\varphi'_i = 2a' - k \end{cases}$ nb de cotés de $\mathcal{F}' = a'$

D'où $k - 2 + 2(s'-k) = 2a' - k - 2(f-1)$

Soit : $2s' - 2 - k = 2a' - k - 2f + 2$: $s' = a' - f + 2$

D'où $s + f = a + 2$ □.

III. Polyèdres convexes réguliers.

Définition : On appelle polyèdre convexe régulier tout polyèdre convexe tq.

- toutes les faces sont des polygones réguliers ayant le même nombre de côtés
- chaque sommet appartient à un nb constant de faces.

Soit P un polyèdre convexe régulier (s, a, f) le triplet associé.

Soit n le nb constant d'arêtes partant de chaque sommet.
m le nb —— de côtés de chaque face.

On a $\underline{2a = mf = ns}$

Comme $f + s = a + 2$ on a $\frac{2a}{m} + \frac{2a}{n} = a + 2$

Soit : $\boxed{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}}$.

Il est clair que l'on a $m \geq 3$ $n \geq 3$

Si $m > 3$ et $n > 3$: $m \geq 4$ $n \geq 4$ d'où $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ exclue

D'où $m \leq 3$ ou $n \leq 3$ donc $m = 3$ ou $n = 3$

Cas : $n = 3$ $\frac{1}{m} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} > \frac{1}{2}$ d'où $m < 6$

	a	s	f
$m = 3$	6	4	4
$m = 4$	12	8	6
$m = 5$	30	20	12

		a	s	f
Cas $m = 3$:	$n = 3$	6	4	4
	$n = 4$	12	6	8
	$n = 5$	30	12	20

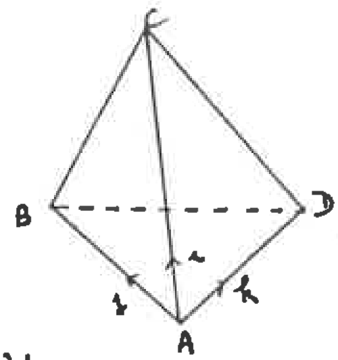
(m,n)	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(5,3)$
s	4	6	12	8	20
a	6	12	30	12	30
f	4	8	20	6	12

Théorème : Il existe exactement 5 classes de polyèdres convexes réguliers

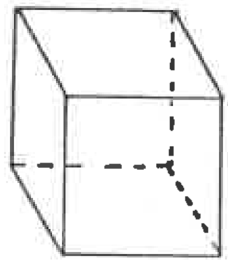
T_{II}

s nb de sommets
a nb d'arêtes
f nb de faces

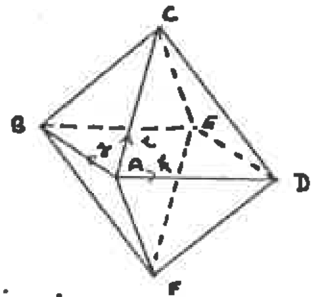
(s, a, f)



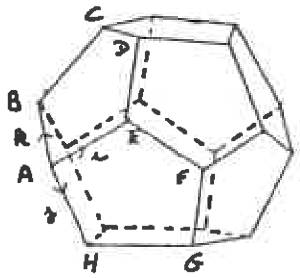
tétraèdre : $(4, 6, 4)$



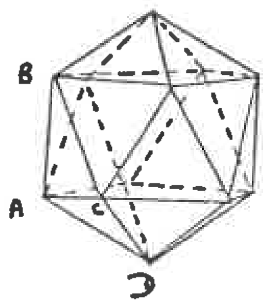
cube $(8, 12, 6)$



octaèdre $(6, 12, 8)$



dodécaèdre $(20, 30, 12)$



icosaèdre $(12, 30, 20)$

T_{II}

Section du cube par un plan orthogonal à l'une de ses diagonales

Soit ABCDEFGH un cube (cf. fig 1), a la longueur d'une arête.
On se propose d'étudier l'intersection de ce cube $(\mathcal{C})$, avec un plan orthogonal à l'une de ses diagonales (ici BH). On notera Π_d le plan orthogonal à (BH) au point K_d défini par : $K_d \in [B,H]$ et $BK_d = d$.

$\boxed{0}$ Calcul de BH en fonction a.

$\boxed{I}$ Etude de deux cas particuliers

1. Soit $\mathcal{P}(A,C,F)$ le plan passant par les points A, C, F.
   a) • Montrer que $\mathcal{P}(A,C,F)$ est orthogonal à (BH). On notera $\{K\} = \mathcal{P}(A,C,F) \cap$ (BH).
      • Montrer que (C, K) est une hauteur du triangle (A, C, F) et en déduire une construction de K.
      • Exprimer $\vec{BK}$ en fonction de $\vec{BH}$ et en déduire d tq $\mathcal{P}(A,C,F) = \Pi_d$
   b) Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}(A,C,F)$.
2. Etudier de même le cas de $\mathcal{P}(D,G,E)$.

$\boxed{II}$ Soit $d \in \left[0, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{2a\sqrt{3}}{3}, a\sqrt{3}\right]$.
Montrer que $\mathcal{C} \cap \Pi_d$ est un triangle équilatéral.

$\boxed{III}$ Soit $d \in \left]\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right[$, O le centre du cube.

1. Ici $d \in \left]\frac{a\sqrt{3}}{3}, AO\right]$.
   a) Soit $h = h(B, k)$ où $k = \dfrac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$.
   Vérifier : $h(\mathcal{P}(A,C,F)) = \Pi_d$; on note $h(A) = M$, $h(C) = P$, $h(F) = N$
   Vérifier que $M \in]A, \rightarrow[$ demi droite d'origine A ne contenant pas B
   b) Construire un exemple de $\mathcal{C} \cap \Pi_d$.

   c) Montrer que $\mathcal{C} \cap \Pi_d$ est un hexagone RSTUVW
   [Not : $R \in (EF)$, $S \in (F,G)$, $T \in (C,H)$, $U \in (C,D)$, $V \in (A,D)$, $W \in (A,E)$]

Ind :

I. 1 (a) $\vec{AC}\cdot\vec{BH} = \vec{FC}\cdot\vec{BH} = 0$

K centre de gravité du triangle (A, C, F)

$\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BH}$.

$\mathcal{S}(A,C,F) = \Pi_{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$

(b) $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}(A,C,F) = (A,C,F)$

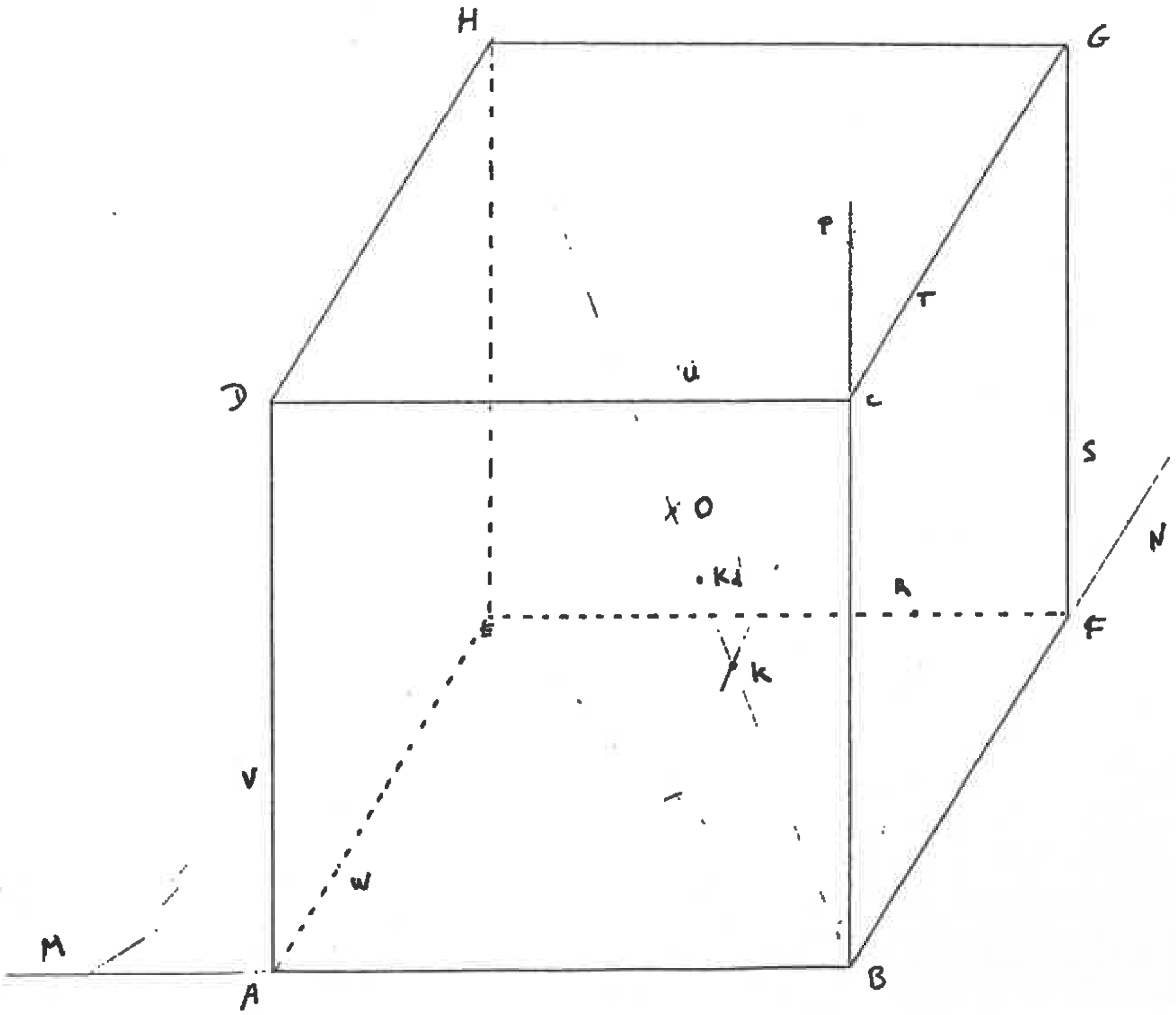
2) utiliser s_O où O est le centre du cube.

II on traite le cas $d \in [0, \frac{a\sqrt{3}}{3}]$ (l'autre cas par symétrie.)
utiliser une homothétie de centre B.

III. 1. (a) (b) $1 < k < 3/2$

(c) utiliser (b)

(d) Les triangles (R,S,N), (T,P,U), (M,V,W) sont équilatéraux et de même côté.



$\overline{\text{III}}$. 3 $\quad g(\mathcal{H}_d) = 3a\sqrt{2}$

$\overline{\text{IV}}$ 1

$$\begin{array}{rcl} \left[0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d & \longmapsto & f(d) = \begin{cases} \dfrac{3d^2\sqrt{3}}{2} & \text{pour } d \in \left[0, \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right] \\ \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{2d^2}{a^2} + \dfrac{6d}{a\sqrt{3}} - 1\right) & \text{pour } d \in \left]\dfrac{a\sqrt{3}}{3}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right. \end{cases} \end{array}$$

d) Quelle est la nature des triangles (R, S, N), (T, P, U), (M, V, W).

2. Ici $d \in [AO, \frac{2a\sqrt{3}}{3}[$.
Quelle transformation simple permet de se ramener au cas précédent ?

3. On a donc : $\forall d \in]\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{2a\sqrt{3}}{3}[\quad \Pi_d \cap \mathcal{C} = \mathcal{H}_d$ hexagone
Montrer que le périmètre de $\mathcal{H}_d$ est constant.

4. Donner un exemple de d pour lequel $\Pi_d \cap \mathcal{C}$ est un hexagone régulier.

IV. Etude de l'aire de $\mathcal{C} \cap \Pi_d$.

1. Soit $d \in [0, a\sqrt{3}]$ $\quad S(d)$ l'aire de $\mathcal{C} \cap \Pi_d$

   a) Montrer qu'il suffit de déterminer $S(d)$ pour $d \in [0, \frac{a\sqrt{3}}{2}]$

   b) si $d \in [0, \frac{a\sqrt{3}}{3}]$. Calculer $S(d)$.

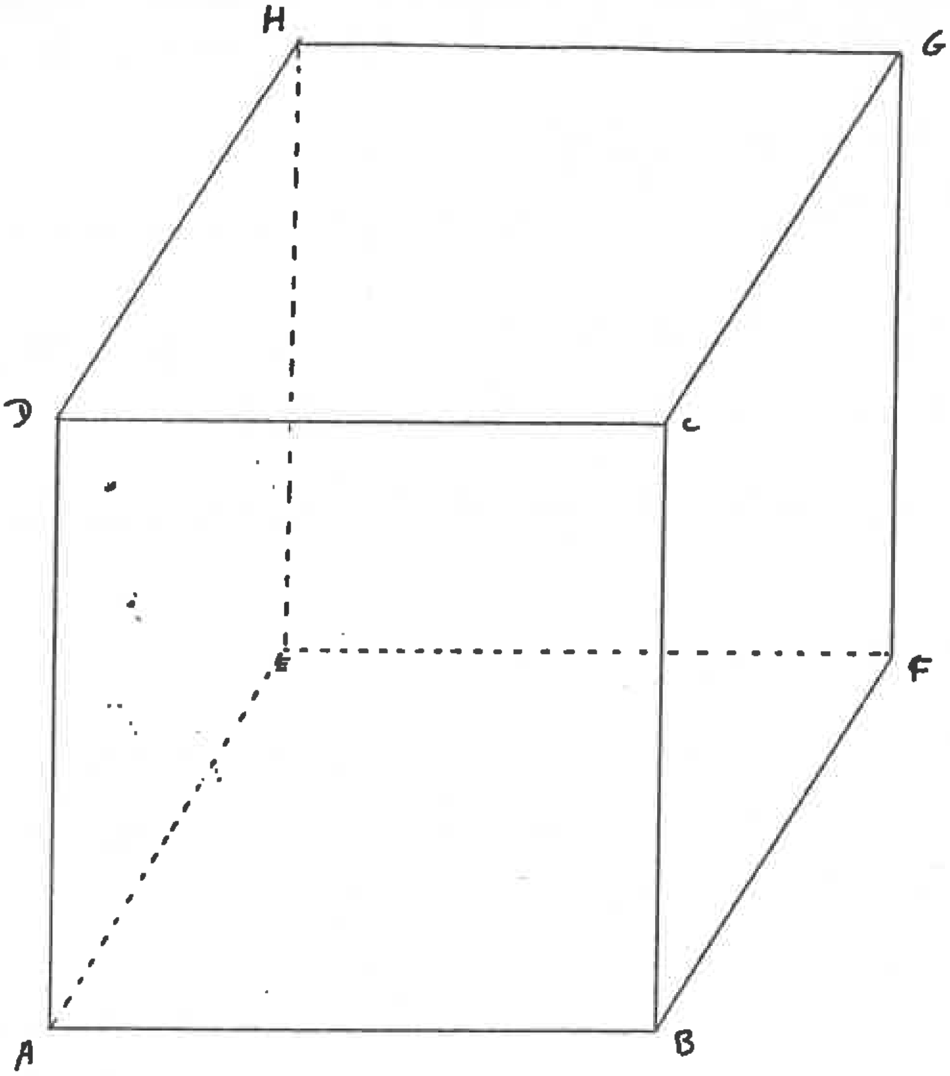
   c) si $d \in]\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{3}}{2}]$ $\quad \Pi_d \cap \mathcal{C} = \mathcal{H}_d$ hexagone noté aussi RSTUVW cf III.

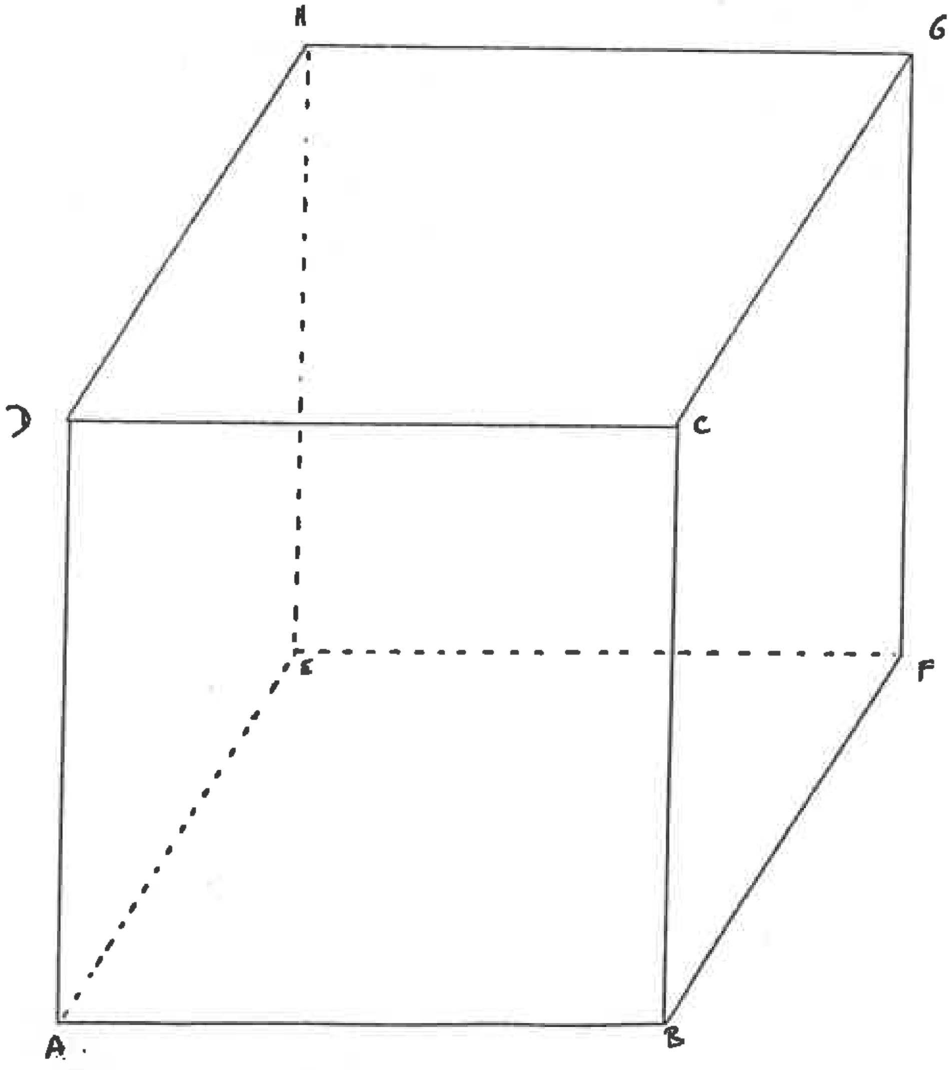
   remarquer $S(d) =$ aire $MNP - 3$ aire RSN
   (not du III.1, a)

   En déduire $S(d)$.

2. Etude de : $\begin{array}{ccc} [0, a\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d & \longmapsto & S(d) \end{array}$ (Variations)

T_{II}





I. Réflexion lumineuse sur un miroir plan M. (Figure F_I)

Soit A, B deux points éléments du même demi-espace déterminé par $\mathcal{P}$, plan contenant M_o, surface réfléchissante de M. On suppose en outre que les projections orthogonales a, b de A et B sur $\mathcal{P}$ sont sur M_o.

La source lumineuse est placée en A.

Question : quel point F de M_o doit-on éclairer pour que le rayon lumineux issu de A se réfléchissant en F vienne éclairer B ?

Pour cela :

1. On suppose $a = b$. Quel est le point F ?

2. $a \neq b$.

   Soit (A, S, B) une ligne polygonale avec $S \in M_o$. Montrer que l'on peut trouver $S' \in (a,b)$ tq $L[(A,S,B)] \leq L[(A,S',B)]$

   où on note $L[(A,S,B)]$ la longueur de la ligne polygonale (A,S,B).

   En déduire une première localisation du point F

3. Soit $s_{\mathcal{P}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. $A' = s_{\mathcal{P}}(A)$

   Soit φ le plan passant par A et B et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

   Comparer $L[(A,T,B)]$ et $L[(A',T,B)]$ où $T \in (a,b)$.

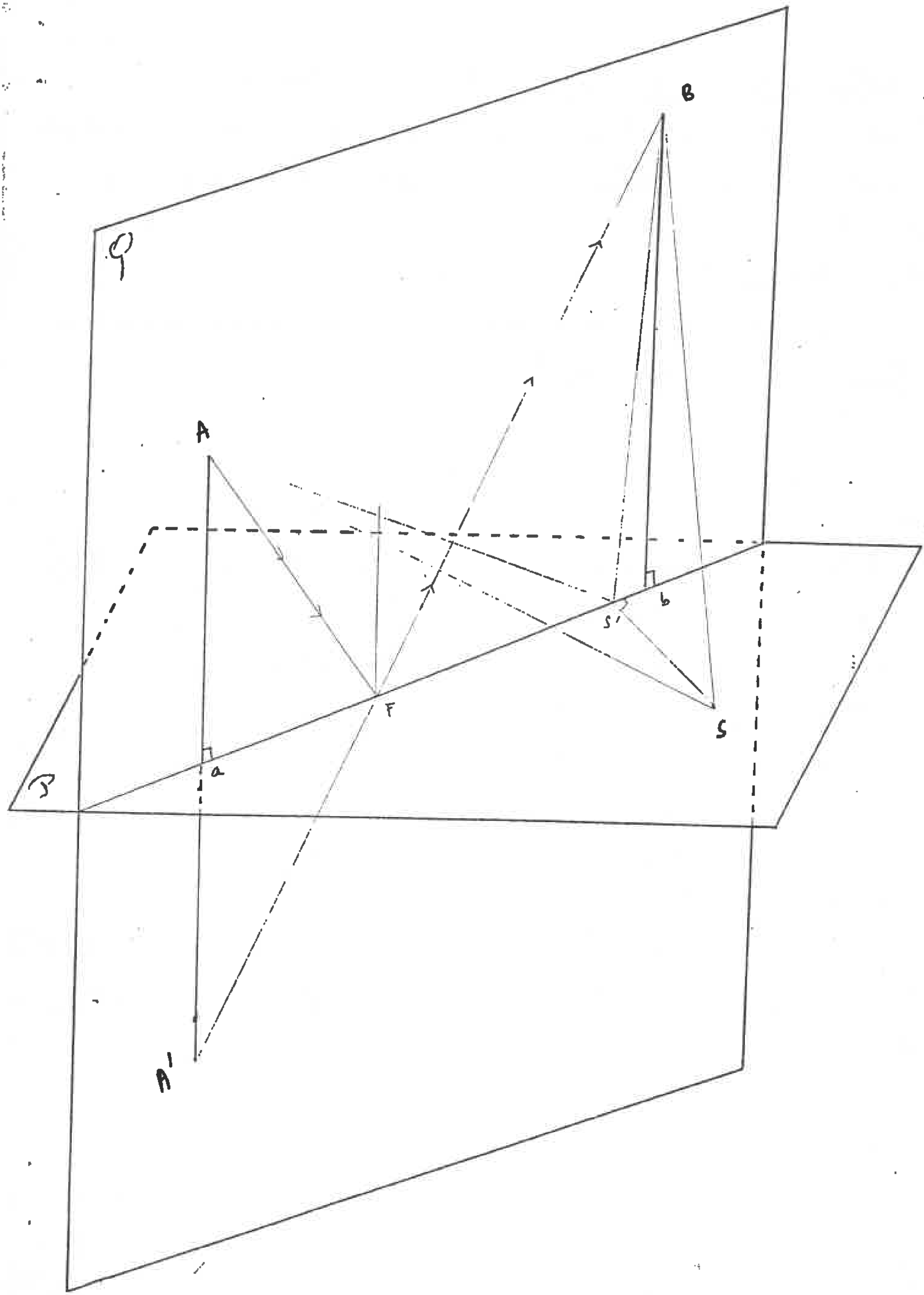
   En déduire le point F.

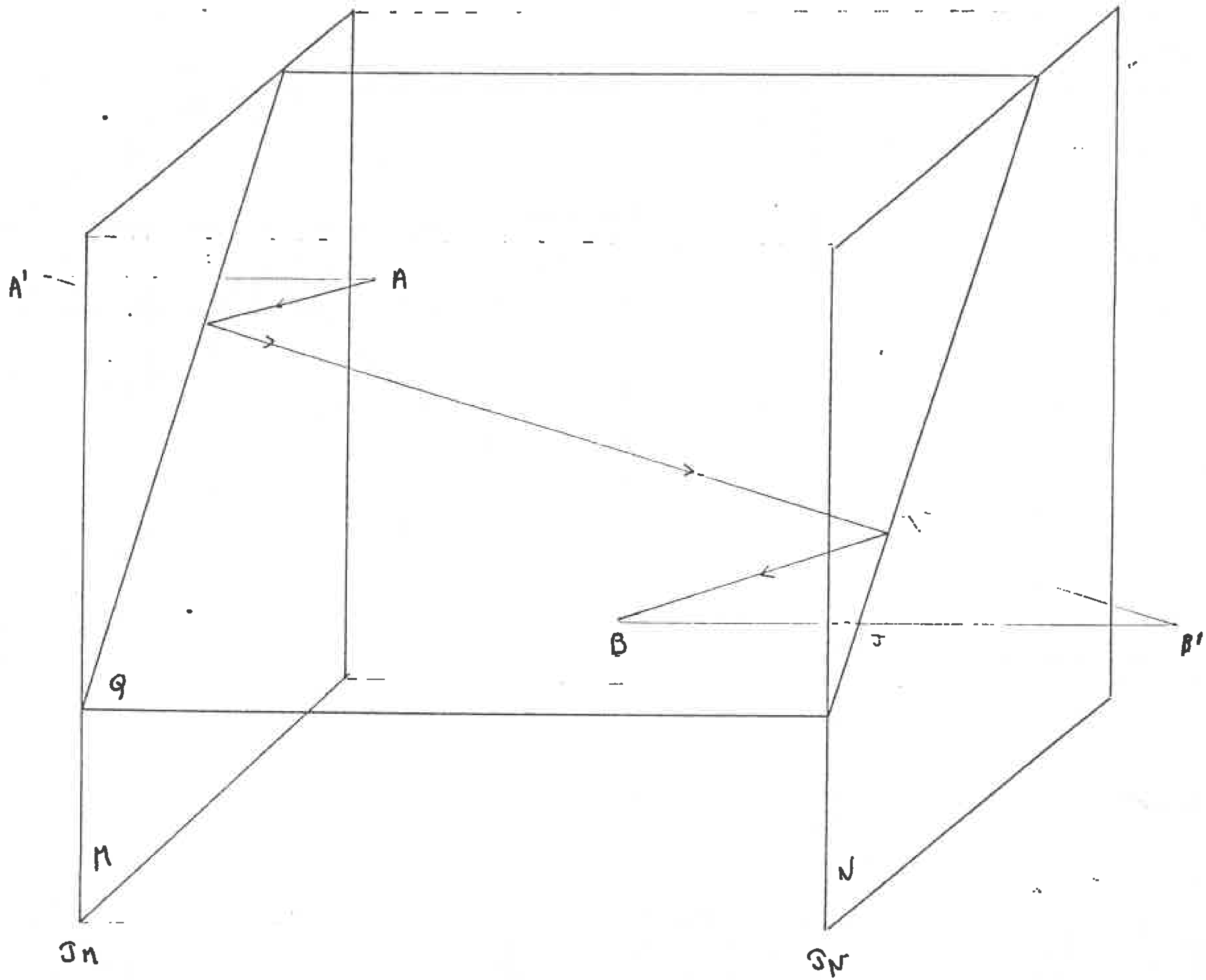
   Montrer que la perpendiculaire Fu en F à $\mathcal{P}$ est bissectrice dans φ de $(\widehat{FA,FB})$

Donner une formulation géométrique de la loi de la réflexion lumineuse sur un miroir plan.

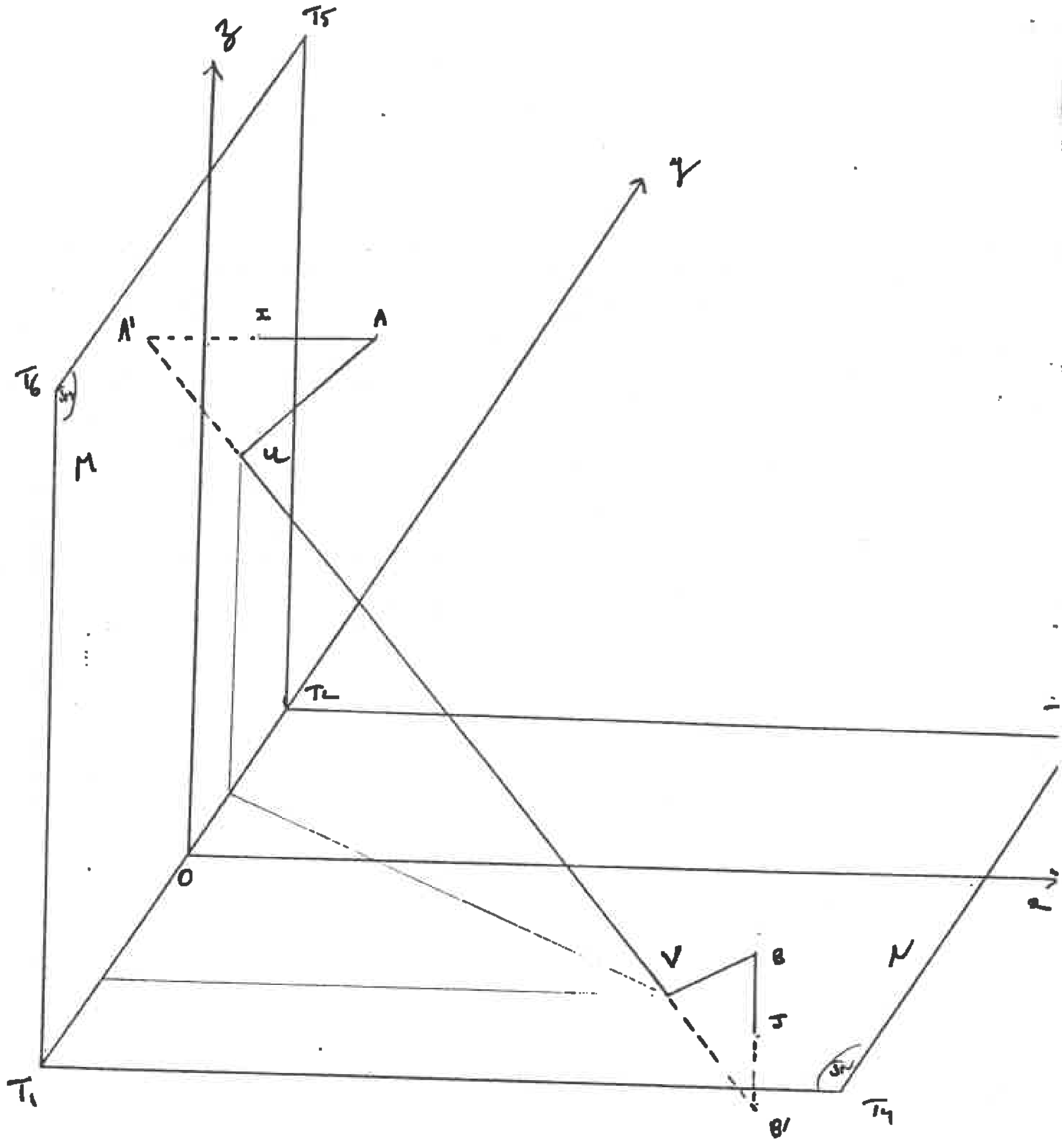
II. Réflexions lumineuses successives sur deux miroirs parallèles. F_{II}

Soit M, N deux miroirs plans rectangulaires de telle sorte qu'ils constituent les deux faces opposées d'un parallélépipède rectangle Π, les surfaces réfléchissantes M_o, N_o se faisant face. Soit A, B deux points intérieurs à Π.


Q
B
A
b
s'
F
S
a
P
A'


A'
A
B
J
B'
g
M
N
σM
σN

F_{III}



I.R.E.M. de REIMS
CORTIER Jean-Philippe
Stage : GEOMETRIE T_{III}
1986 - 1987

Thème III : Extensions des Notions de distance, médiatrice, lignes de distance

Introduction :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien, d la distance euclidienne sur $\mathcal{P}$.

Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ et $x \in \mathcal{P}$: on note $d(x,P) = \inf\limits_{m \in P} (d(x,m))$;

remarquons que : pour tout $x \in P$ $\quad d(x,P) = 0$.

En effet : $\quad 0 \leq \inf\limits_{m \in P} d(x,m) \leq \underset{\text{car } x \in P}{d(x,x) = 0}$ ce qui assure $d(x,P) = \inf\limits_{m \in P} d(x,m) = 0$

mais la réciproque est en général fausse.

En effet : soit $(a,b) \in \mathcal{P}^2$ $a \neq b$ $\quad P = [a,b[$

On a $\quad d(b,P) = 0$ et $b \notin P$

$(d(b,P) = 0$ car $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in P, \ d(b,m) < \varepsilon)$.

Ceci nous amène à introduire :

Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ on définit $\overline{P} = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,P) = 0\}$

On a : $P \subset \overline{P}$

Une partie P du plan sera dite fermée si $P = \overline{P}$.

Par exemple $P = \{a\}$, $P = \mathcal{D}$, où a est un pt de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, sont des parties fermées de $\mathcal{P}$.

I. Préliminaires

On a le résultat suivant : $\boxed{R}$ si F est une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$ et $x \in \mathcal{P}$.
alors il existe $a \in F$ tel que $d(x,a) = d(x,F)$

(pour une démonstration : cf [(complément)])

- Vérifier $\boxed{R}$ pour $F = \mathcal{D}$ droite de $\mathcal{P}$.

- Soit F une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$.

Montrer : $\forall (x,y) \in \mathcal{P}^2 \quad |d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y)$

remarque : ceci prouve en particulier que $g : \begin{array}{l} \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = d(x,F) \end{array}$ est continue

II. Zones d'attraction.

Définition 1 : Soit F une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$ et $a \in F$.
On appelle zone d'attraction de a, relativement à F, la partie de $\mathcal{P}$ notée $Z(a)$ tq : $Z(a) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,F) = d(x,a)\}$

1. Soit $F = \mathcal{D}$ droite de $\mathcal{P}$ et $a \in \mathcal{D}$ déterminer $Z(a)$

2. propriétés élémentaires de $Z(a)$

   Montrer
   - $a \in Z(a)$; $Z(a) \cap F = \{a\}$.
   - $x \in Z(a) \iff \begin{cases} \forall b \in F \setminus \{a\}, & x \in H_b \text{ demi plan fermé limité} \\ \text{par la médiatrice} & \text{de } (a,b) \text{ contenant } a. \end{cases}$

3. Déterminer la zone d'attraction de a relativement à F dans les cas suivants :

   (i) $F = \mathcal{D}$ déjà vu cf II.1

   (ii) F demi plan fermé

   (iii) F segment $[a_1, a_2]$

   (iv) F disque fermé

   (v) F cercle

   Déterminer dans chacun de ces cas les points x de $\mathcal{P}$ tq $d(x,F)$ est atteint en un seul point a.

III. Lignes de distance

Définition 2 : Soit F une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$; on appelle ligne de distance α à F, la partie de $\mathcal{P}$ notée $L(F,\alpha) = \{x \in \mathcal{P}, d(x,F) = \alpha\}$

Par exemple si $F = \{a\}$ $a \in \mathcal{P}$ $L(\alpha) = L(F,\alpha) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,a) = \alpha\} = \mathcal{C}(a,\alpha)$ cercle de centre a et de rayon α.

1. Construire des exemples de lignes de distance dans les différents cas de [II,3]

2. Montrer que : $L(\alpha) \cap Z(a) = \mathcal{C}(a,\alpha) \cap Z(a)$.

IV. Médiatrice de deux parties fermées

Définition 3. Soit A, B deux parties fermées non vide de $\mathcal{P}$; on appelle médiatrice de A, B notée $M(A,B)$, la partie de $\mathcal{P}$ défini par :

$$M(A,B) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,A) = d(x,B)\}.$$

rq : si $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ $\quad M(A,B) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,a) = d(x,b)\}$ et la médiatrice de (a,b) au sens classique du terme.

1. Déterminer la médiatrice de A et B dans les cas suivants :

(i) $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ (on prendra ds toute la suite $d(a,b) = 4$ (en cm))

(ii) $A = \{a\}$ $B = \Delta$ la droite passant par b et $\perp$ à (a,b).

(iii) $A = \mathcal{D}$ $B = \mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites sécantes en O.

(iv) Soit le triangle (a,b,a') rectangle en a et isocèle, $b' = s_O(a')$ où O est le milieu de $[a,b]$. On pose $A = [a,a'] \cup C$ où C est le quart de cercle de centre b, ayant pour extrémités a et b', $B = s_O(A)$.

2. Quelques propriétés de la médiatrice

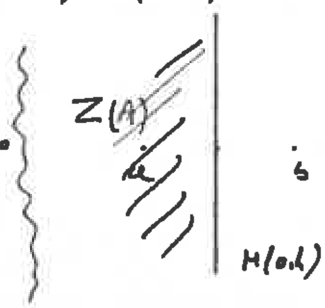
- $M(A,B) \supset A \cap B$; $M(A,B)$ est une partie fermée de $\mathcal{P}$.
- $\forall (a,b) \in A \times B \quad [a,b] \cap M(A,B) \neq \emptyset$ (cf Ind.).

3. Médiatrice et lignes de distance.

Définition 4 : Soit F une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$, A une partie fermée non vide de F ; on appelle zone d'attraction de A relativement à F, la partie de $\mathcal{P}$ notée $Z(A)$ définie par $Z(A) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,A) = d(x,F)\}$

rq : si $A = \{a\} \subset F$ $\quad Z(A) = Z(\{a\}) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,a) = d(x,F)\} = Z(a)$!

Exemple : $F = \{a,b\}$ $\quad A = \{a\}$.



(a) Déterminer $Z(A)$, $Z(B)$ dans les différents cas du IV. 1.

(b) Montrer : $A \subset Z(A)$

$$L(F,\alpha) \cap Z(A) = L(A,\alpha) \cap Z(A) \qquad \alpha > 0$$

c. Soit $F = A \cup B$ A, B, F fermés non vides de $\mathcal{P}$.

- Montrer : $x \in Z(A) \iff d(x, A) \leq d(x, B)$
- En déduire $Z(A) \cup Z(B) = \mathcal{P}$; $Z(A) \cap Z(B) = M(A, B)$.
- Soit $\alpha > 0$. Montrer $L(F, \alpha) = (L(A, \alpha) \cap Z(A)) \cup (L(B, \alpha) \cap Z(B))$.

cette dernière égalité donne une méthode pour déterminer des lignes de distance.

4. Médiatrice et symétries.

Soit toujours A, B deux parties fermées non vides de $\mathcal{P}$ et $F = A \cup B$.

(a) On suppose qu'il existe $f \in I_s(\mathcal{P})$ tq $f(A) = A$ et $f(B) = B$
Montrer que $Z(A)$, $Z(B)$ et $M(A, B)$ sont invariantes par f.

(b) On suppose qu'il existe une symétrie orthogonale S (i.e. soit une symétrie centrale, soit une réflexion) échangeant A et B : $S(A) = B$
Montrer qu'elle échange aussi $Z(A)$ et $Z(B)$, que $M(A, B)$ est invariante par S et que $I(S) = \{m \in \mathcal{P}, S(m) = m\} \subset M(A, B)$

(c) On suppose qu'il existe une réflexion S_D échangeant A et B et que A est contenue dans un des demi-plans ouverts limités par D.
Montrer que $Z(A)$ est le demi plan fermé limité par D contenant A.
En déduire $M(A, B) = D$.

5. Application.

Utiliser ce qui précède pour déterminer les lignes de distance de $F = A \cup B$ dans les cas décrits au IV 1 et en outre dans le cas suivant :

(V). Soit (a, b, c, d) un carré admettant ac pour diagonale. Soit C le quart de cercle de centre d ayant pour extrémités a et b, A et B les demi droites portées respectivement par ac et bc, d'origine a et b et ne contenant pas c. Dessinez A, B, C sur une même figure
Préciser les zones d'attraction des parties A, B, C relatives à $F = A \cup B \cup C$ ainsi que les lignes de distances à F.

V. Lignes de partage entre deux parties

Définition 5 : Soit A, B deux parties fermées non vides de $\mathcal{P}$ et $\lambda \in [0,1]$.
On appelle ligne de partage entre A et B dans le rapport λ l'ensemble
$$C(\lambda) = \{ x \in \mathcal{P} \ , \ (1-\lambda)\, d(x,A) = \lambda\, d(x,B) \}.$$

rq : si $\lambda = 0$ $\quad C(0) = \{ x \in \mathcal{P},\ d(x,A) = 0 \} = \overline{A} = A$

si $\lambda = 1$ $\quad C(1) = B$

si $\lambda = 1/2$ $\quad C(1/2) = M(A,B)$.

1. Exemples de lignes de partage

(i) $A = \{a\}$ $\quad B = \{b\}$ $\quad a \neq b$ $\qquad$ Tracer $C(\lambda)$

(ii) $A = \{a\}$ $\quad B = \mathcal{D}$ droite de $\mathcal{P}$. $\quad$ Tracer $C(\lambda)$

(iii) Soit (O, i, j) un repère orthonormal de $\mathcal{P}$, $a = (2,0)$, $a' = (2,4)$

$b = s_O(a)$, $b' = s_O(a')$ $\quad$ Soit $A = [a, a']$ $\quad B = [b, b']$

Tracer $C(1/2)$, $C(1/4)$, $C(3/4)$.

T_{III} (Solution partielle)

I [Complément]

[1] Soit F une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$ et $x \in \mathcal{P}$.

Soit $r \in \mathbb{R}$ tq $r > d(x,F)$ et $B(x,r) = \{m \in \mathcal{P},\ d(x,m) \leq r\}$

$B(x,r)$ est le disque fermé de centre x et de rayon r.

- On a $F \cap (B(x,r)) \neq \emptyset$

En effet supposons $F \cap B(x,r) = \emptyset$ alors $\forall m \in F$, $m \notin B(x,r)$ donc $d(x,m) > r$

ce qui amène $\underbrace{\inf_{m \in F} d(x,m)}_{d(x,F)} \geq r$ ce qui est absurde vu le choix de r. ($r > d(x,F)$)

- $d(x,F) = d(x, F \cap (B(x,r)))$

$\forall t \in F \cap B(x,r)$ $\quad t \in F$ et $d(x,t) \geq d(x,F)$

d'où $d(x, F \cap B(x,r)) \geq d(x,F)$

Soit $t \in F$ $\quad$ 1er cas $\quad$ si $t \in B(x,r)$ $\quad d(x,t) \geq d(x, F \cap B(x,r))$ car $t \in F \cap B(x,r)$.

2e cas $\quad$ si $t \notin B(x,r)$ $\quad d(x,t) > r$

or $\forall z \in F \cap (B(x,r))$ $\quad d(x,z) \leq r$

ce qui amène $d(x, F \cap B(x,r)) \leq r$

d'où pour $t \notin B(x,r)$ $\quad d(x,t) > r \geq d(x, F \cap B(x,r))$

donc $\forall t \in F$ $\quad d(x,t) \geq d(x, F \cap B(x,r))$

ce qui amène $d(x,F) \geq d(x, F \cap B(x,r))$.

Conclusion $d(x,F) = d(x, F \cap (B(x,r)))$

or $F \cap B(x,r)$ est un fermé borné non vide de $\mathcal{P}$ donc est un compact de $\mathcal{P}$

et l'application $\begin{array}{l} \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longmapsto d(x,t) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{P}$ donc sur $F \cap B(x,r)$

donc $\exists a \in F \cap B(x,r)$, $\quad d(x,a) = \inf_{t \in F \cap B(x,r)} d(x,t) = d(x, F \cap B(x,r)) = d(x,F)$.

donc $\exists a \in F$ $\quad d(x,a) = d(x,F)$ □

[2] Soit F une partie fermée non vide de $\mathcal{P}$ et $(x,y) \in \mathcal{P}^2$.

$\exists a \in F$ $\quad d(x,a) = d(x,F)$ cf [1]

d'où $d(x,y) + d(x,a) \geq d(y,a) \geq d(y,F)$

inégalité triangulaire.

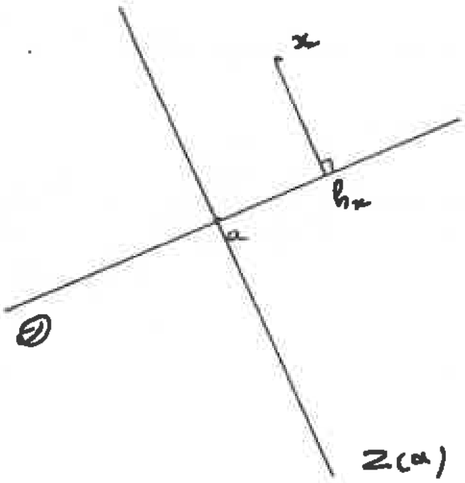
d'où $d(x,y) \geq d(y,F) - d(x,F)$

en échangeant les rôles de x et y $\quad d(y,x) \geq d(x,F) - d(y,F)$

d'où $|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y)$ □

II Zones d'attraction.

II 1



Soit $x \in \mathcal{P}$ $d(x,\mathcal{D}) = d(x,h_x)$ où

h_x est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{D}$

$x \in Z(a) \iff d(x,\mathcal{D}) = d(x,a)$

$\iff d(x,h_x) = d(x,a)$

or (Pythagore) $(ah_x)^2 + (h_x x)^2 = (ax)^2$

d'où $x \in Z(a) \iff ah_x = 0$

$\iff h_x = a$

$\iff x \in \Delta_a$ droite passant par a et $\perp$ à $\mathcal{D}$

2. Soit $a \in F$. • $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{car F fermé}}}{d(a,F)=0} = d(a,a) \Longrightarrow a \in Z(a)$

- $\{a\} \subset Z(a) \cap F$ car $a \in Z(a)$ et $a \in F$.
- Soit $x \in Z(a) \cap F$ $d(x,F) = 0 = d(x,a) \Rightarrow x = a$

  $Z(a) \cap F \subset \{a\}$ □
- Soit $x \in Z(a)$: $\forall b \in F \setminus \{a\}$ $d(x,a) = d(x,F) \leq d(x,b)$

  donc $x \in H_b = \{t \in \mathcal{P},\ d(t,a) \leq d(t,b)\}$

  demi plan fermé limité par la médiatrice de [a,b] contenant a.

  donc $x \in \bigcap_{b \in F \setminus \{a\}} H_b$

  Réciproquement : soit $x \in \bigcap_{b \in F \setminus \{a\}} H_b$: $\forall b \in F \setminus \{a\}$ $d(x,a) \leq d(x,b)$

  $d(x,a) \leq d(x,a)$

  d'où $\forall t \in F$ $d(x,a) \leq d(x,t)$

  d'où $d(x,F) \leq d(x,a) \leq d(x,F) \Longrightarrow x \in Z(a)$.

IV Médiatrice de deux parties fermées.

IV 2. • $\forall m \in A \cap B$ $d(m,A) = d(m,B) = 0 \Longrightarrow m \in M(A,B)$!

- Soit $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $m \longmapsto h(m) = d(m,A) - d(m,B)$

  par I $m \mapsto d(m,A)$ est continue donc aussi h.

  $M(A,B) = h^{-1}(0)$ est donc fermée.
- $h([a,b])$ image continue d'un connexe (segment de $\mathcal{P}$) est donc un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle I de $\mathbb{R}$

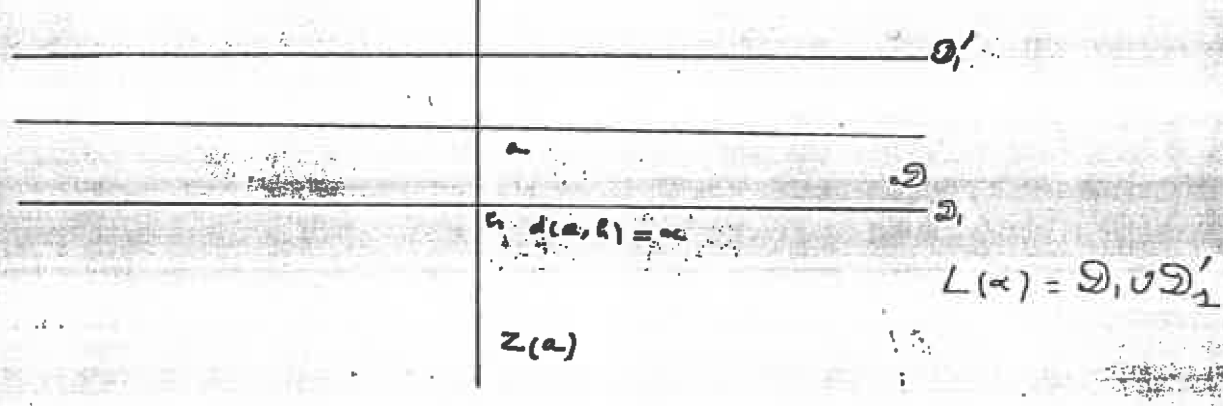
  or $h(a) = -d(a,B) \leq 0$, $h(b) = d(b,A) \geq 0$ donc

  $0 \in h[a,b] = I$ cf $\exists m \in [a,b]$ $h(m) = 0$

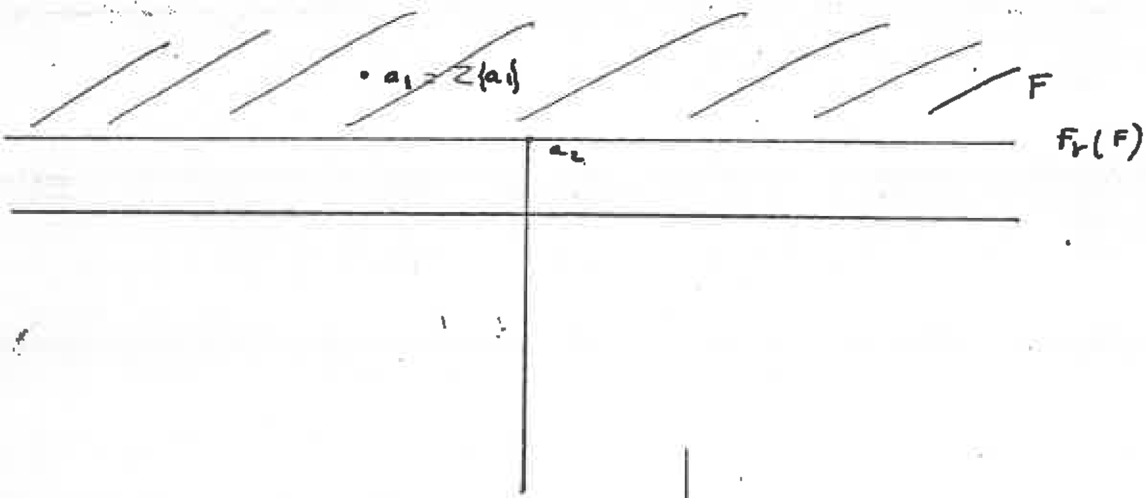
  $[a,b] \cap M(A,B) \neq \emptyset$.

II. 3 (Zones d'attractions, Lignes de distances)

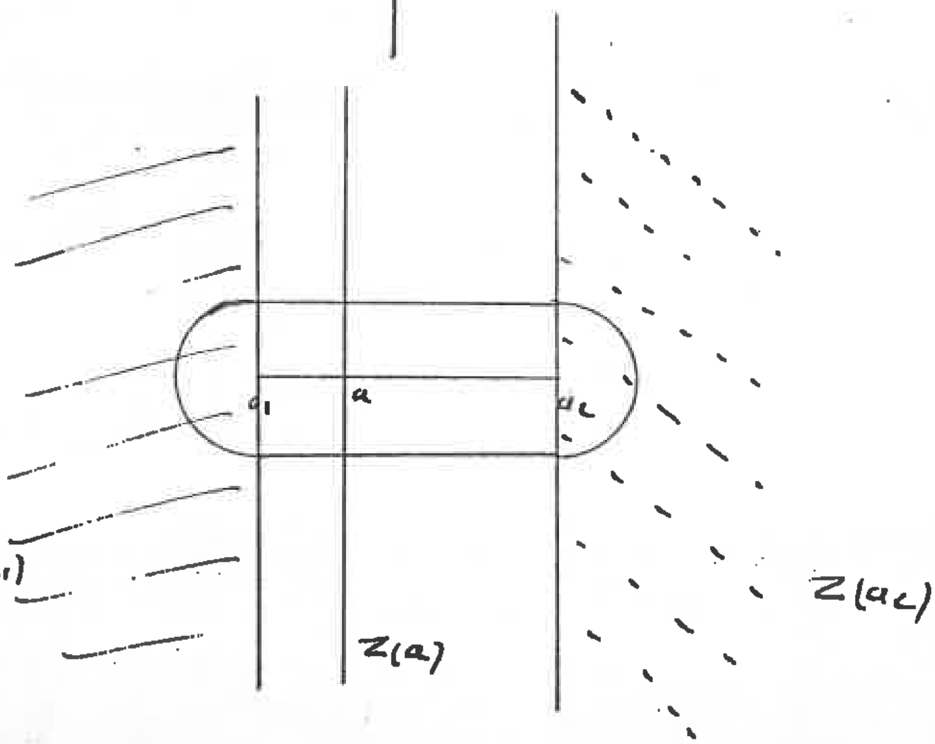
(i) $F = \mathcal{D}$



(ii) $F = \eta$



(iii) $F = [a_1, a_2]$



(iv) $F = D(0,r)$

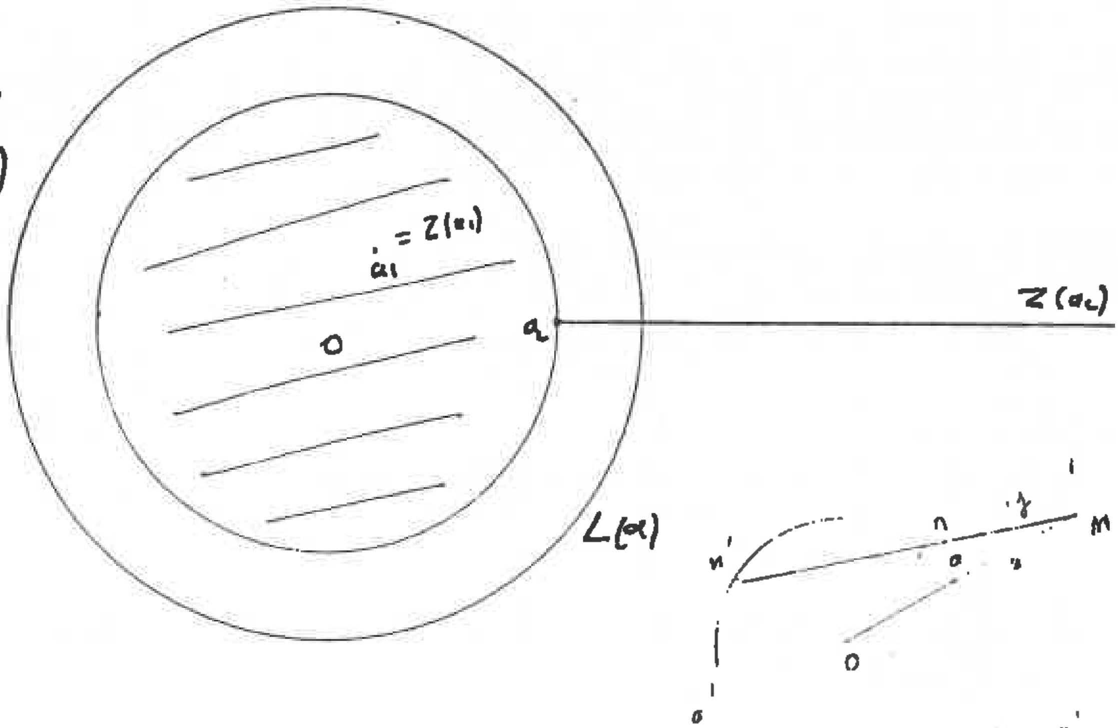
si $a \in \mathring{D}$ $\quad Z(a) = \{a\}$

si $a \in Fr(D)$ $\quad Z(a) = [a, \rightarrow[\ \subset (0,a)$

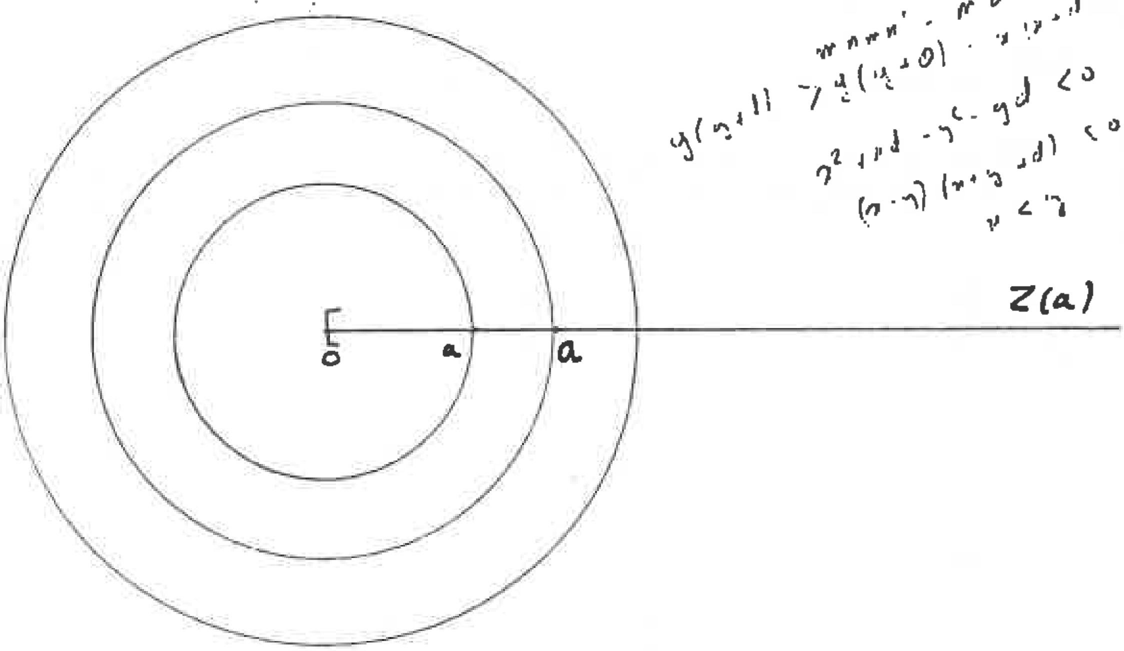
$\alpha > 0$

$x \in L_\alpha \Leftrightarrow d(x,F) = \alpha$

$\Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(0, r+\alpha)$



(v) $F = \mathcal{C}(0,r)$



$\alpha > 0$

$0 < \alpha \leq r$ $\quad L_\alpha = \mathcal{C}(0, r+\alpha) \cup \mathcal{C}(0, r-\alpha)$

$\alpha > r$ $\quad L_\alpha = \mathcal{C}(0, r+\alpha)$

IV Médiatrice de deux parties fermées.

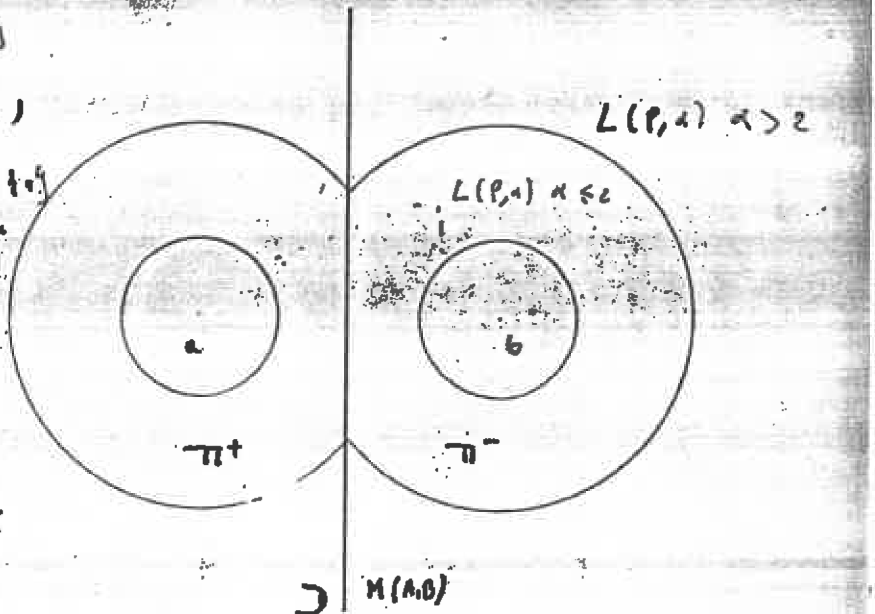
(i) (L) $A = \{a\}$ $B = \{b\}$ $F = \{a, b\}$

$D = M(A,B)$ est la médiatrice de (a,b)

$Z(\{a\})$ zone d'attraction de $A = \{a\}$ relativement à F est Π^+ demi plan fermé de frontière $D = M(A,B)$ contenant $A = \{a\}$

— de même $Z(\{b\}) = \Pi^-$

(Σ) s_D symétrie orthogonale d'axe D échange a et b et donc on retrouve le résultat du IV.4.c



Soit $\alpha > 0$

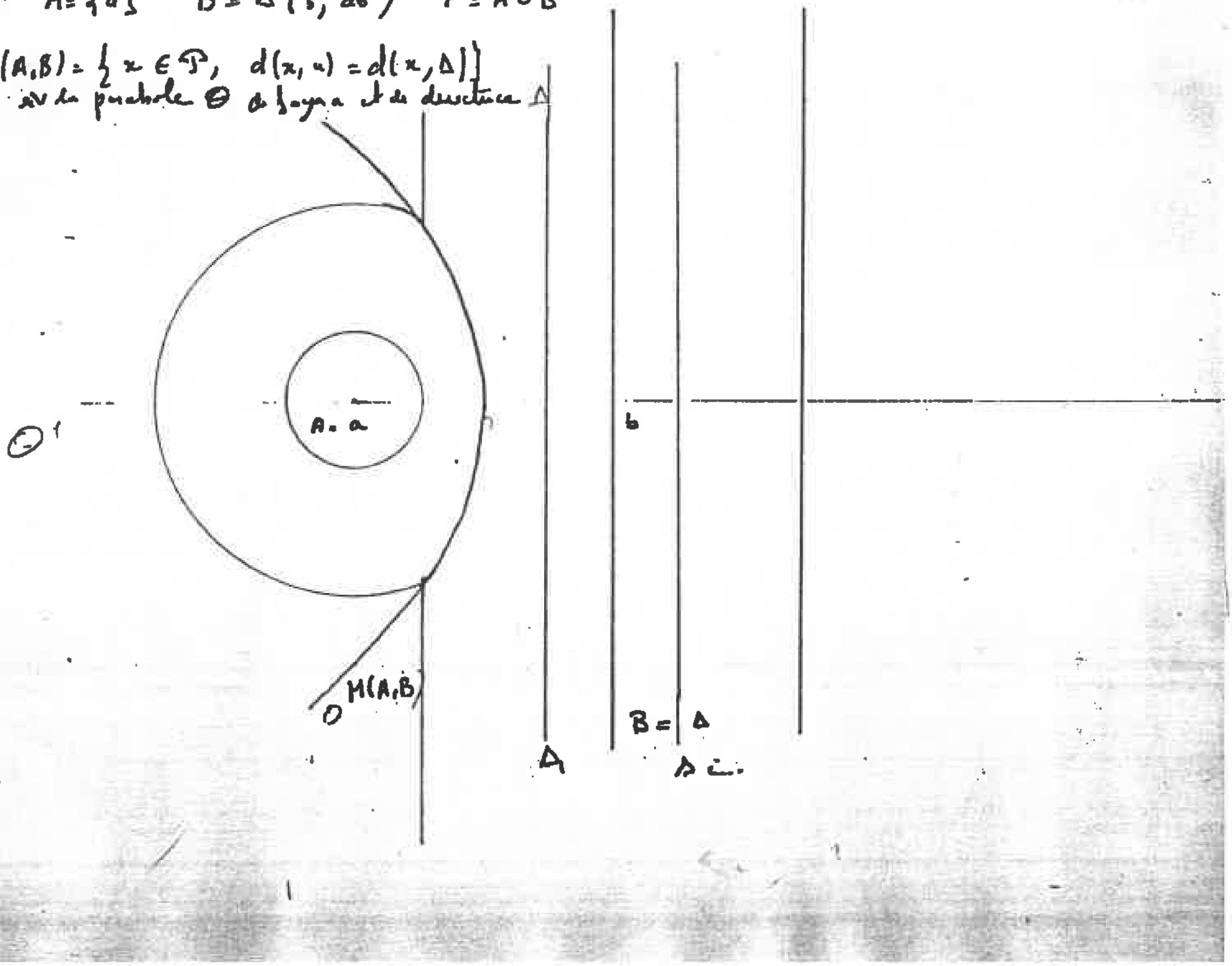
$L(F,\alpha) = (L(a,\alpha) \cap Z(a)) \cup (L(b,\alpha) \cap Z(b))$

d'après [IV]

or $L(a,\alpha) = \mathcal{E}(a,\alpha)$. Donc il faut considérer deux cas $0 < \alpha \le 2$ (bleu)
$L(b,\alpha) = \mathcal{E}(b,\alpha)$ $\alpha > 2$ (noir)

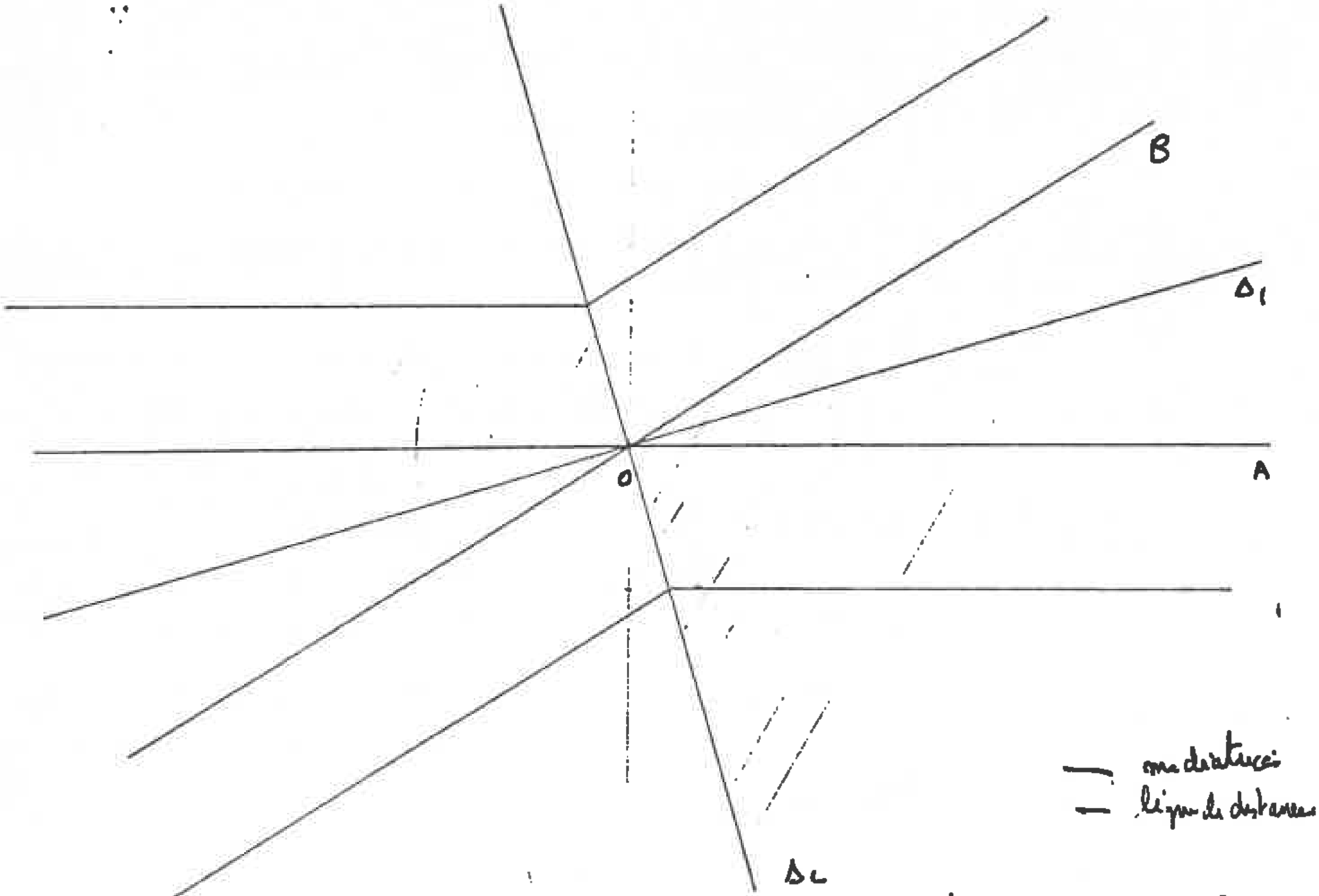
(ii) $A = \{a\}$ $B = \Delta(b, \vec{ab}^{\perp})$ $F = A \cup B$

$M(A,B) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x,a) = d(x,\Delta)\}$
est la parabole Θ de foyer a et de directrice Δ



IV 1. A, B deux droites sécantes en O. $F = A \cup B$.

(...)



- Médiatrice : $M(A,B) = \{ m \in \mathcal{T},\ d(m,A) = d(m,B) \} = \Delta_1 \cup \Delta_2$ où Δ_1, Δ_2 sont les bissectrices de (A,B).

$\frac{Z}{I}$ rq Soit s_1 la réflexion Δ_1, s_2 la réflexion d'axe Δ_2; s_1 (s_2) échange A et B

Donc en appliquant [ ], $s_1^{(A)}$ échange $Z(A)$ et $Z(B)$ - - - - - -

- $Z(A)$. zone d'attraction de A rel. à $F = A \cup B$.

$m \in Z(A) \iff d(m,A) = d(m, A \cup B)$
$\iff d(m,A) \leq d(m,B)$ cf aussi [ ]

$Z(A)$ zone hachurée ///
$Z(B) = s_1(Z(A))$

- Ligne de distance $\alpha > 0$

$\mathcal{L}(F,\alpha) = (\mathcal{L}(A,\alpha) \cap Z(A)) \cup (\mathcal{L}(B,\alpha) \cap Z(B))$. en bleu.

$\alpha = 2$ (exemple) rappel $\mathcal{L}(A,\alpha) = \Delta_1 \cup \Delta_2$ $\Delta_1 (\Delta_2) \mathbin{//} A$.
$d(\Delta_1, A) = \alpha$

$F = A \cup B$ fermé

IV 3. b) $Z(A) = \{x \in \mathcal{P},\ d(x, A) = d(x, F)\} = M(A, F)$ donc $Z(A)$ fermé.

$A \cap F = A \subset M(A, F) = Z(A)$.

$m \in L(F, \alpha) \cap Z(A) \iff d(m, F) = \alpha = d(m, A)$

$\iff m \in L(A, \alpha) \cap Z(A)$.

c) Soit $x \in Z(A)$ $\quad \forall t \in F = A \cup B \quad d(x, A) = d(x, F) \leq d(x, t)$

en particulier $\forall t \in B \quad d(x, A) \leq d(x, t)$

$d(x, A) \leq d(x, B)$ □

Récipt. Soit $x \in \mathcal{P}$ tq $d(x, A) \leq d(x, B)$

alors $\forall t \in F \quad d(x, A) \leq d(x, t)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{clair si } t \in A \\ \text{si } t \in B \\ d(x,A) \leq d(x,B) \leq d\ldots \end{array} \right.$

d'où $d(x, A) \leq d(x, F)$

d'autre part il est clair que $d(x, A) \geq d(x, F)$ car $A \subset A \cup B = F$

d'où $d(x, A) = d(x, F)$ $\quad x \in Z(A)$

cf : $x \in Z(A) \iff d(x, A) \leq d(x, B)$.

$Z(A) \cup Z(B) = \mathcal{P}$ $\qquad Z(A) \cap Z(B) = M(A, B)$ s'en déduisent facilement.

$\alpha > 0 \qquad L(F, \alpha) = L(F, \alpha) \cap \mathcal{P} = L(F, \alpha) \cap (Z(A) \cup Z(B))$

$= - - - - - - - - -$

4. (Médiatrice et symétries)

Montrer le lemme suivant : Lemme : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } f \in I_s(\mathcal{P}) \text{ et } A \text{ partie fermée de } \mathcal{P} \\ \forall x \in \mathcal{P} \quad d(f(x), f(A)) = d(x, A) = d(x, \ldots) = d(f(x), f\ldots \end{array} \right.$

(a) $f \in I_s(\mathcal{P})$ et $f(A) = A$, $f(B) = B$. $\qquad F = A \cup B$.

Soit $x \in Z(A)$ $\quad d(f(x), f(A)) = d(f(x), A) = d(x, A) = d(x, F) = d(f(x), f(F\ldots$

car $f(A) = A$ $\qquad x \in Z(A)$ $\quad$ lemme.

Comme $f(F) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = A \cup B = F$ lemme

on a pour $x \in Z(A)$ $\quad d(f(x), A) = d(f(x), F) \Rightarrow f(x) \in Z(A)$

On a donc $f(Z(A)) \subset Z(A)$

/ En fait on a $f(Z(A)) = Z(A)$ en utilisant f^{-1} qui jouit des mêmes propriétés que f.

En utilisant $M(A,B) = Z(A) \cap Z(B)$ et f surjective car $f \in I_s(S)$

on a $f(M(A,B)) = M(A,B)$

ⓑ Soit $f = S$ symétrie orthogonale tq $S(A) = B$ (d'où $S(B) = A$ et $S(F) = F$)

Soit $x \in Z(A)$ $\quad d(x,A) = d(x,F) = d(S(x), S(A)) = d(S(x), S(F))$

$= d(S(x), B) = d(S(x), F)$

d'où $\quad S(x) \in Z(B)$: $\quad S(Z(A)) \subset Z(B)$

de même $\quad S(Z(B)) \subset Z(A)$

en utilisant le fait que S est involutive $\quad S(S(Z(A)) \subset S(Z(B)) \subset Z(A)$

on obtient $Z(A) \subset S(Z(B)) \subset Z(A)$

d'où $\quad S(Z(B)) = Z(A)$ et $S(Z(A)) = Z(B)$.

d'où aussi $\quad S(M(A,B)) = M(A,B)$ □.

Soit $m \in I(S)$ $\quad d(m, A) = d(f(m), S(A)) = d(m,B)$

d'où $\quad I(S) \subset M(A,B)$ □

ⓒ Soit une réflexion S_D tq $S_D(A) = B$. On suppose que A est contenue dans un des deux demi plan ouverts limités par D. noté Π^+.

d'où $\forall (x,u) \in \Pi^+ \times A \qquad d(x,u) \leq d(x, S_D(u))$ (*)

Soit $x \in \overline{\Pi_+}$ $\qquad$ si $x \in D$ alors d'après (b) on a $D \subset M(A,B) \subset Z(A)$

d'où $x \in Z(A)$.

si $x \in \Pi^+$ $\quad$ soit $b \in B$ tq $d(x,b) = d(x,B)$

$d(x,B) = d(x,b) \geq d(x, S_D^{-1}(b)) \geq d(x,A)$

car $S_D^{-1}(b) \in S^{-1}(B) = A$

car $S_D^{-1}(b) \in A$

$x \in \Pi^+$ cf (*)

cf si $x \in \Pi^+$ $\quad d(x,B) \geq d(x,A)$ d'où $x \in Z(A)$

cf IV.3.c

finalement $\quad \Pi_+ \subset Z(A)$

Réciproquement : Soit $x \in Z(A)$ et $a \in A$ tq $d(x,A) = d(x,a)$

$d(x,A) = d(x,a) \leq d(x,B) \leq d(x, S_D(a))$ car $S_D(a) \in B$

d'où $x \in \Pi^+$ ce qui assure $Z(A) \subset \Pi^+$

finalement $\quad Z(A) = \Pi^+ \qquad Z(B) = \Pi^- \qquad M(A,B) = \Pi^+ \cap \Pi^- = D$.

$$\boxed{\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{P}, \ \frac{MF}{MH} = 1\}}$$

F foyer H proj. orthogonale de M sur $\mathcal{D}$ (directrice)

Sommet S milieu de F, K où $\{K\} = \Delta(F, \vec{j}^{\perp}) \cap \mathcal{D}$

paramètre $p = FK$

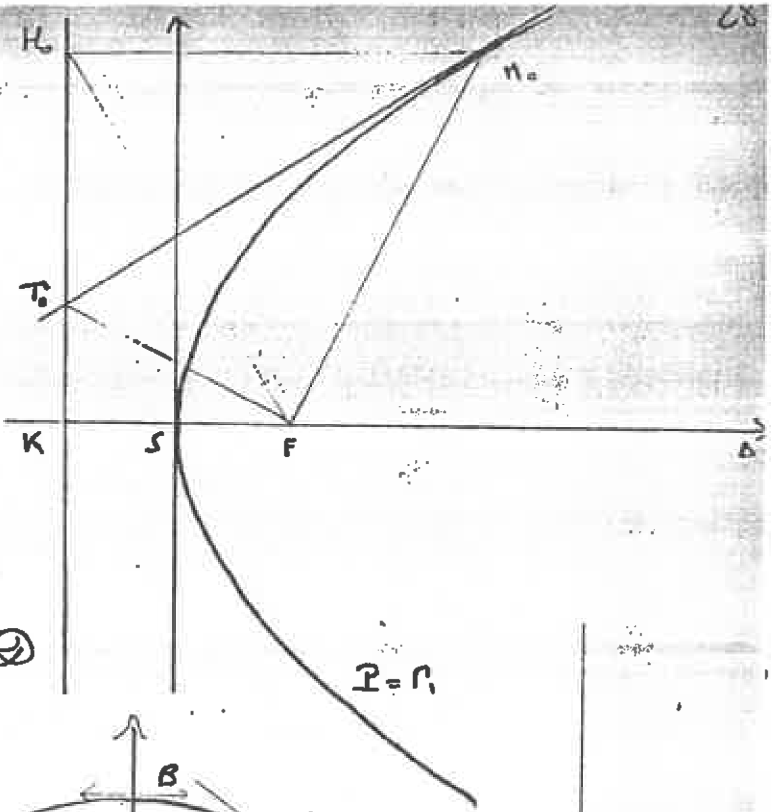
équation réduite de $\mathcal{P}$ dans $(S, \vec{i'}, \vec{j'})$ avec $\vec{i'} = \frac{\vec{KS}}{KS}$; $y^2 = 2px$

équation de la tangente en $M_0 \binom{x_0}{y_0}$

$px_0 - y_0 y + px_0 = 0$ $(\mathcal{T}_{M_0})$

propriétés : $\mathcal{T}_{M_0}$ est la médiatrice de $[F, H_0]$

l'angle $\widehat{M_0 F T_0}$ est droit où $T_0 = \mathcal{D} \cap \mathcal{T}_{M_0}$



$$\boxed{E = \{M \in \mathcal{P}, \ \frac{MF}{MH} = e\} \quad 0 < e < 1}$$

$a = OA = OA'$ $\quad c = OF = OF' = ea$

$b = OB = OB' = \sqrt{a^2 - c^2}$; $e = c/a$

$OK = a/e = a^2/c$

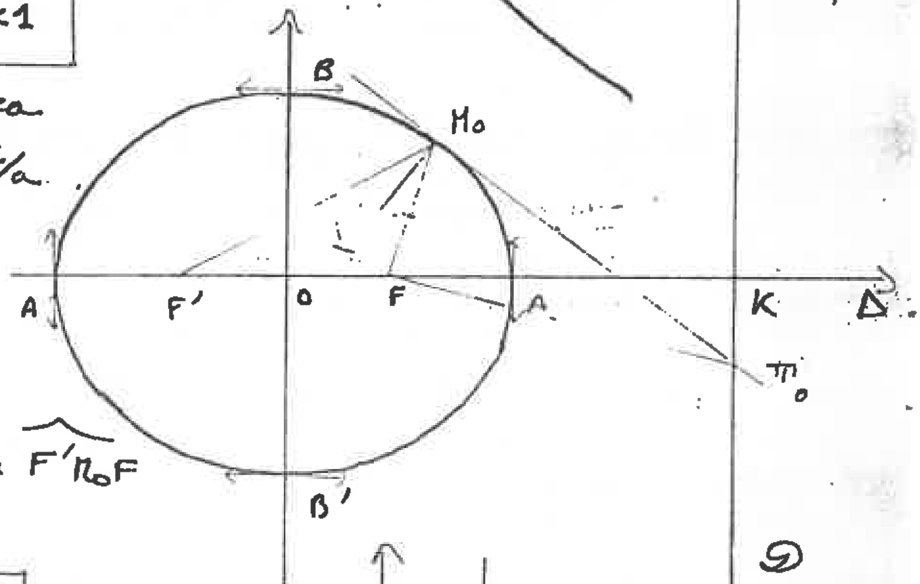
équation réduite dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\widehat{M_0 F T_0}$ est droit

$\mathcal{T}_{M_0}$ est la bissectrice extérieure de $\widehat{F' M_0 F}$

équation de $\mathcal{T}_{M_0}$: $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$



$$\boxed{H = \{M \in \mathcal{P}, \ \frac{MF}{MH} = e\} \quad e > 1}$$

$OA = OA' = a$ $\quad OF = OF' = c = ea > a$

$OK = \frac{a}{e} = a^2/c$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

équation réduite de H dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

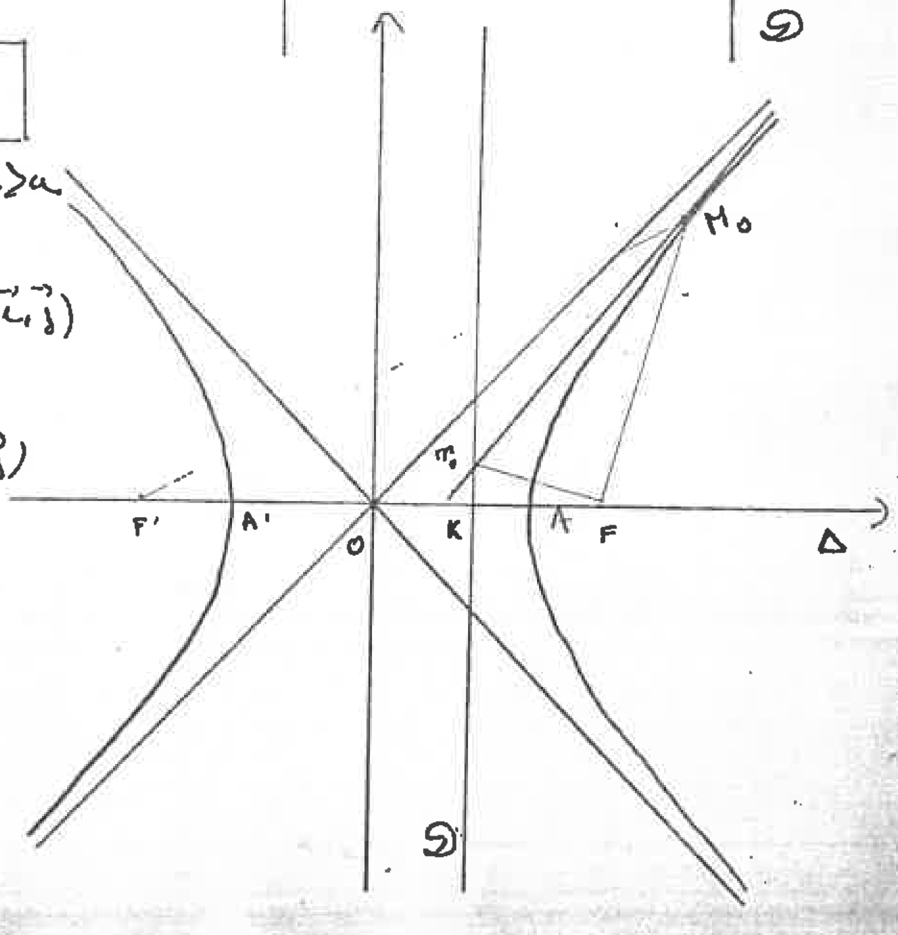
équation des asymptotes dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$y = \frac{b}{a} x$ $\quad y = -b/a \, x$

équation de $\mathcal{T}_{M_0}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

$\mathcal{T}_{M_0}$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{F' M_0 F}$



Thème IV : Coniques non dégénérées comme perspectives de cercle ; théorème de Pascal

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien. $E = \vec{\mathcal{E}}$

Soit $\Sigma(O,r)$ une sphère de centre O et de rayon $r > 0$.

I Intersection d'une sphère et d'une droite - Plan tangent à une sphère - Tangente.

Soit $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$ un r.o.n de $\mathcal{E}$ $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$; $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$

On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}(M_0, u)$.

1. Etudier $\mathcal{D} \cap \Sigma$ (Ind : choisir une équation cartésienne pour Σ paramétrique pour $\mathcal{D}$) introduire $\alpha = OM_0^2 - r^2$

2. Soit $M_0 \in \Sigma$ M_t le point de $\mathcal{D}$ tq $\overrightarrow{M_0M_t} = t\vec{u}$.

Déf : on dit que $\mathcal{D}_{M_0} = \mathcal{D}(M_0, u)$ est tangente en $M_0 \in \Sigma$, à Σ si $\Sigma \cap \mathcal{D}_{M_0} = \{M_0\}$

Montrer que : $\mathcal{D}_{M_0}$ est tangente à Σ en $M_0 \iff \mathcal{D}_{M_0} \subset \Pi(M_0, \vec{n_0})$

où Π est un plan défini par M_0 et un vecteur normal $\vec{n_0}$.

3. Soit $S \in \mathcal{E}$ fixé. ~~...~~

[a] On note $\Lambda = \{M \in \mathcal{E}, \ \mathcal{D}_S = (S, M) \text{ tgte à } \Sigma\} \cup S$

On choisit $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$ r.o.n tq $\overrightarrow{OS} = \theta \vec{k}$. $\theta \geqslant 0$

Montrer que Λ admet pour équation cartésienne :

$$(x^2+y^2)(r^2-\theta^2) + r^2(z-\theta)^2 = 0$$

Etude de Λ.

Montrer que : $r > \theta \implies \Lambda = \{S\}$

$r = \theta \implies \Lambda$ est un plan

On suppose désormais $r < \theta$

Etudier $\Sigma \cap \Lambda$ (Ind : on montrera que $\Sigma \cap \Lambda = \mathcal{C}(\omega, \rho)$ dont on précisera le plan, ω, ρ)

Montrer que $\Lambda = \bigcup_{N \in \mathcal{C}} (S, N)$

Définition : Soit $S \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan $\mathcal{P}$ tq $S \notin \mathcal{P}$

On appelle cône de sommet S et de directrice $\mathcal{C}$ la surface engendrée par une droite assujettie à passer par S et un point de $\mathcal{C}$.

(une telle droite est appelée génératrice du cône)

$\bar{I}$ tq : Soit $S \in \mathcal{E}$ et $\Sigma = \Sigma(O, r)$ tq $OS > r$

L'ensemble Λ des tangentes issues de S à Σ est un cône de sommet S

dont une directrice est le cercle $\mathcal{C} = \Lambda \cap \Sigma$ dont le plan est orthogonal à OS.

La sphère Σ et le cône C sont dits tangents (on encore la sphère Σ ~~est~~ inscrite dans Λ) et $\mathcal{C}_1$ est le cercle de contact.

$\boxed{4}$. Réciproquement

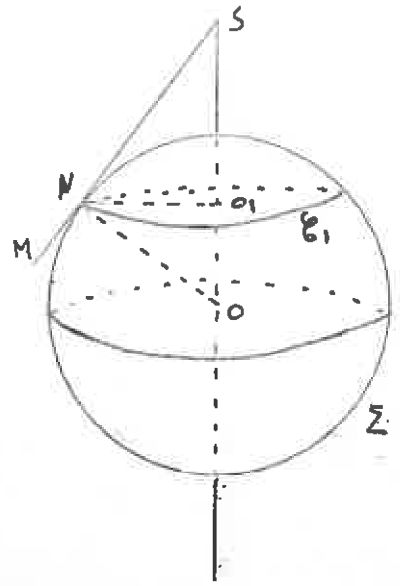
Soit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1, r_1)$ un cercle d'un plan $\mathcal{P}_1$ et $S \in (O_1, \vec{n_1}) \setminus \{O_1\}$

où $\vec{n_1}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

Montrer que l'on peut déterminer un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal tel que l'on puisse se ramener à l'étude précédente I 3. a, c'est à dire : si l'on note Γ le cône de sommet S et de directrice $\mathcal{C}_1$, Γ est l'ensemble des points $M \neq S$ de $\mathcal{E}$ tq (S, M) est tangente en un point de $\mathcal{C}_1$ à une sphère $\Sigma(O, r)$ auquel on adjoint S.

$\boxed{C}$ Soit Π un plan de $\mathcal{E}$ et $\Gamma = (S, \mathcal{C}_1)$ un cône

Montrer qu'il existe au moins une sphère Σ' inscrite dans Γ et tangente à Π.

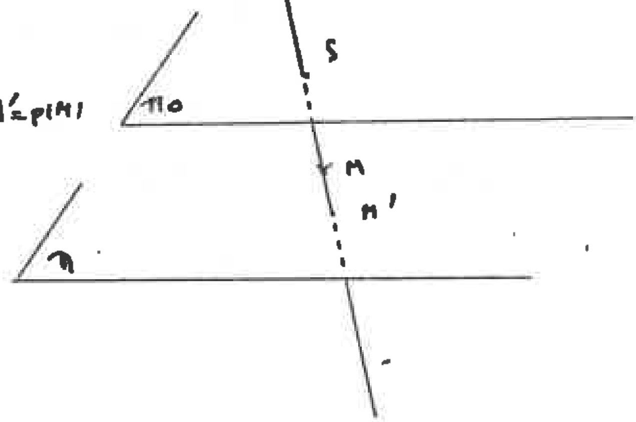


II. Coniques comme perspectives de cercles

Soit $S \in \mathcal{E}$ et Π un plan de $\mathcal{E}$ tq $S \notin \Pi$. On note Π_0 le plan passant par S et parallèle à Π : $\Pi_0 = (M_0, \vec{\Pi})$

La projection conique de sommet S, sur le plan Π est l'application :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \setminus \Pi_0 & \longrightarrow & \Pi \\ M & \longmapsto & p(M) = M' \end{array} \quad \text{tq} \quad \{M'\} = (S, M) \cap \Pi$$



remarquons que : $\forall M \in \mathcal{E} \setminus \Pi_0 \quad p((S,M)^*) = M' = p(M)$

où $\quad (S,M)^* = (S,M) \setminus \{S\}$.

Introduction

Soit $S \in \mathcal{E}$, $\mathcal{C}_1$ un cercle d'un plan $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{E}$ tq S soit sur l'axe de $\mathcal{C}_1$ (c.à.d la perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$, passant par le centre de $\mathcal{C}_1$) et $S \notin \mathcal{P}_1$

On note Γ le cône de révolution de sommet S et de directrice $\mathcal{C}_1$

Soit Π un plan de $\mathcal{E}$. tq $S \notin \Pi$. Soit p la projection conique de sommet S, sur Π.

Il existe toujours une sphère Σ inscrite dans Γ et tangente à Π (cf I.3.c)

(le centre de Σ est élément de (O_1, S) où $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1, r_1)$)

[en il en existe deux sauf dans le cas où Π_0 est tangent à $\mathcal{C}_1$].

On note F le point de contact de Σ et Π.

quitte à remplacer $\mathcal{C}_1$ par un cercle homothétique qui aura même projection conique sur Π [en effet $p(\mathcal{C}_1) = \Gamma \cap \Pi$]. on pourra toujours supposer que $\mathcal{C}_1$ est le cercle de contact de Σ et Γ. [$\mathcal{C}_1 = \Sigma \cap \Gamma$]

et que $\mathcal{P}_1$ est le plan du cercle de contact.

D'où la considération de deux cas :

1^e cas : $\mathcal{P}_1 \parallel \Pi$. déterminer $p(\mathcal{C}_1) = \Gamma \cap \Pi$

2^e cas : on suppose $\mathcal{P}_1 \not\parallel \Pi$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \Pi = \Delta$ où Δ est une droite.

Notation : $\theta = \text{mes}\,(\widehat{\Pi, \mathcal{P}_1})$ avec $0 < \theta \leq \pi/2$

φ la mesure du "demi angle" au sommet du cône Γ.

Soit $M_1 \in \mathcal{C}_1$ (cercle de contact) $M = p(M_1) \in \Lambda \cap \Pi$

Soit $N = p_1(M)$ où p_1 est la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}_1$

$m = p_2(M)$ où p_2 ——————— (ds $\mathcal{P}_1$) de $\mathcal{P}_1$ sur Δ

- Montrer que $MF = e\,Mm$ avec $e = \dfrac{\sin\theta}{\cos\varphi}$

  d'où $M \in \Gamma_e\,(F, \Delta, e)$: $p(\mathcal{C}_1) \subset \Gamma_e$
- Etude de $\Gamma_e \subset p(\mathcal{C}_1)$.
- Nature de Γ_e ; pour cela étudier $e - 1$.

<u>Théorème</u> : Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle d'un plan $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{E}$, S un point de l'axe du cercle avec $S \neq O$.

L'image de $\mathcal{C}_1$ par une perspective conique de centre S sur un plan Π ne passant pas par S est une conique ; c'est :

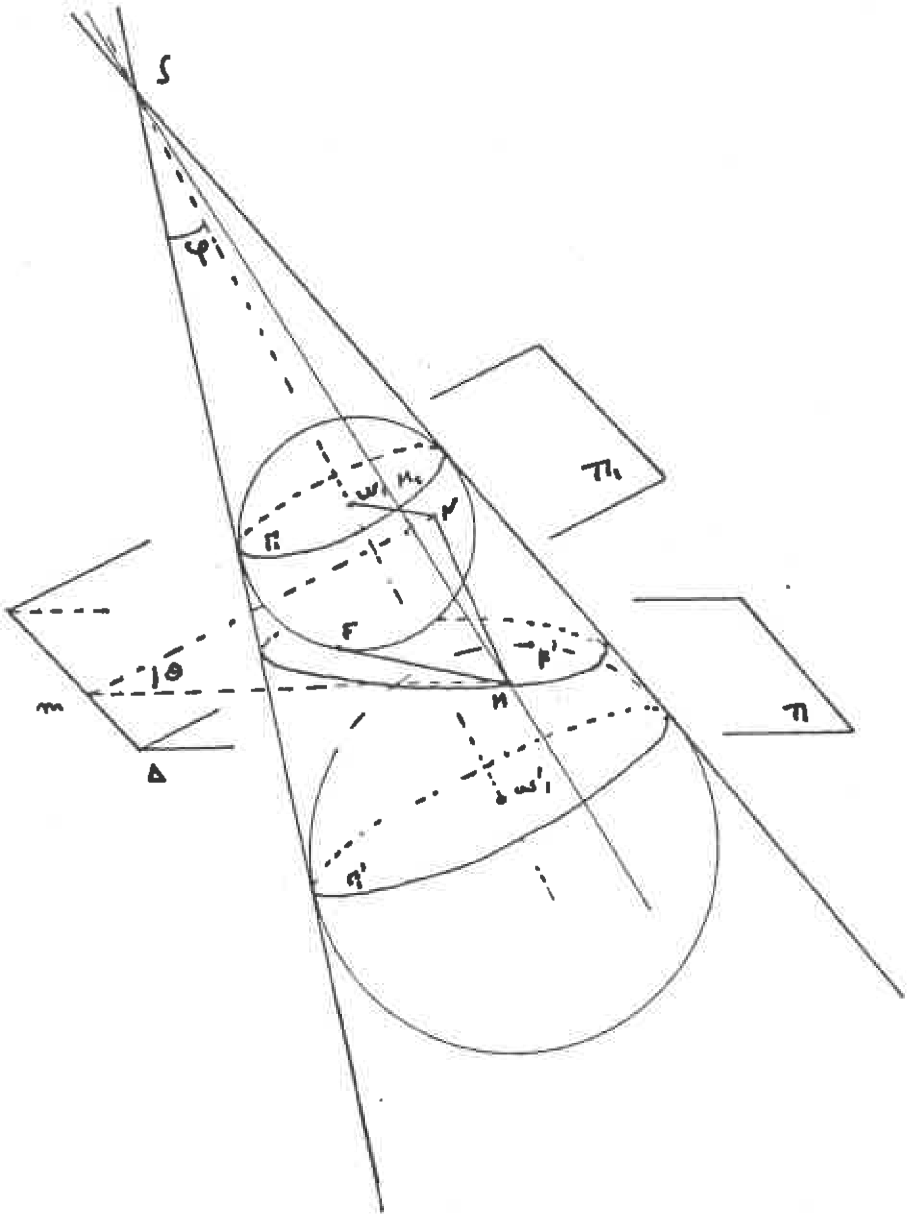
une ellipse si $\Pi_0 = (S, \vec{\Pi})$ ne coupe pas $\mathcal{C}_1$ ($\Leftrightarrow \pi/2 - \theta > \varphi$)

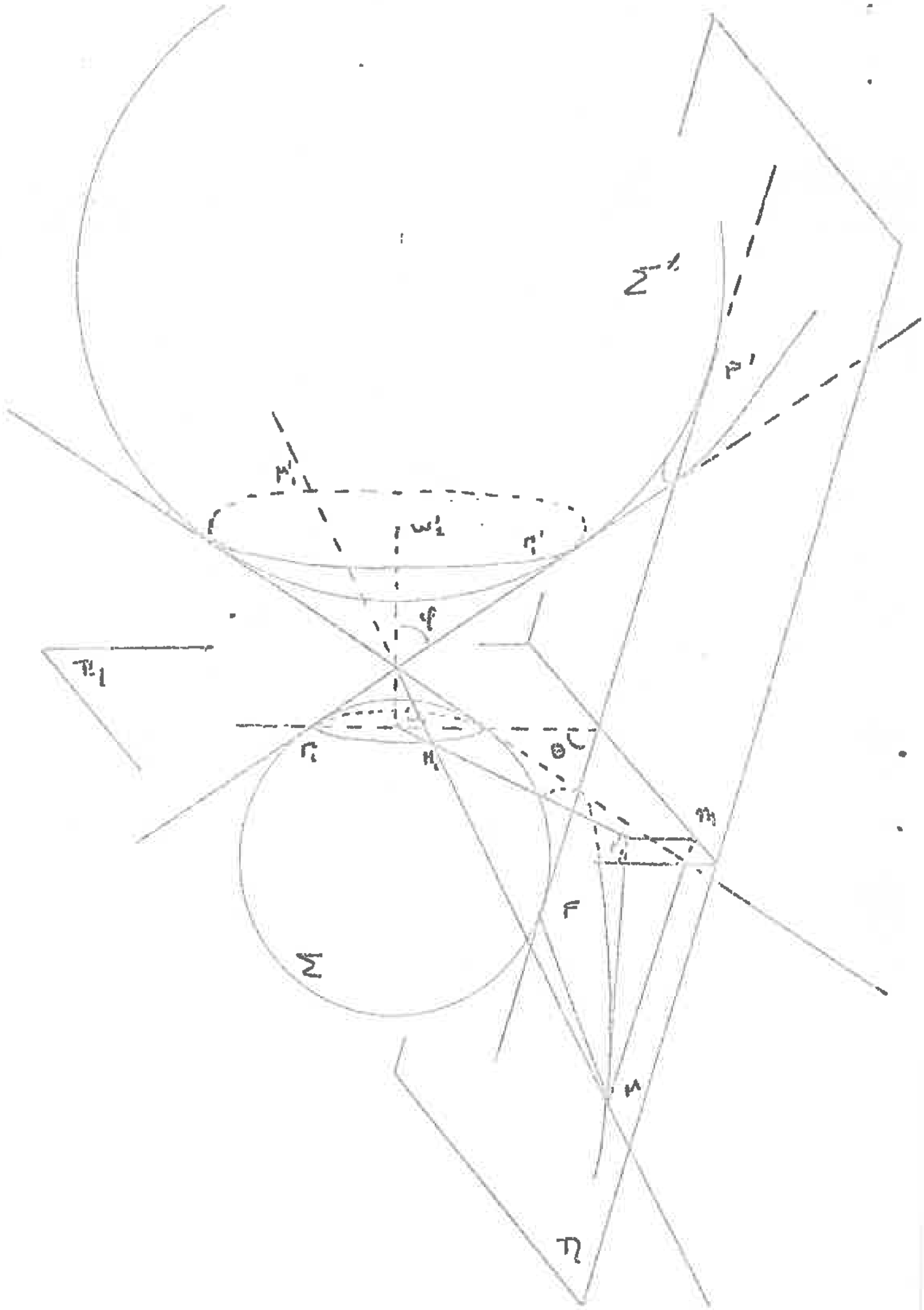
une hyperbole si $\Pi_0 \cap \mathcal{C}_1 = \{2\text{ pts distincts}\}$ ($\Leftrightarrow \pi/2 - \theta < \varphi$)

une parabole si $\Pi_0 \cap \mathcal{C}_1 = \{1\text{ point}\}$ ($\Leftrightarrow \pi/2 - \theta = \varphi$)

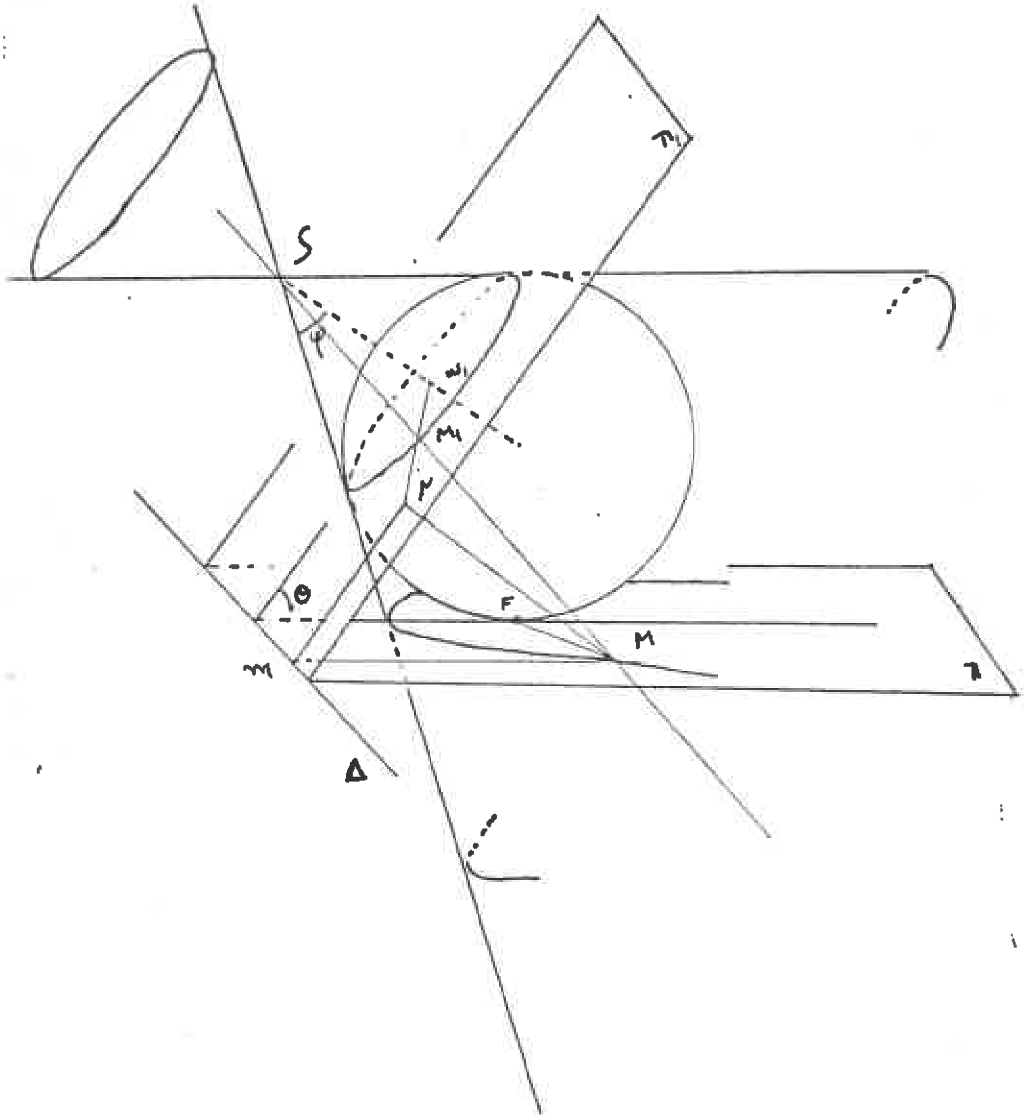
<u>Proposition</u> : Toute conique peut s'obtenir comme perspective conique d'un cercle.

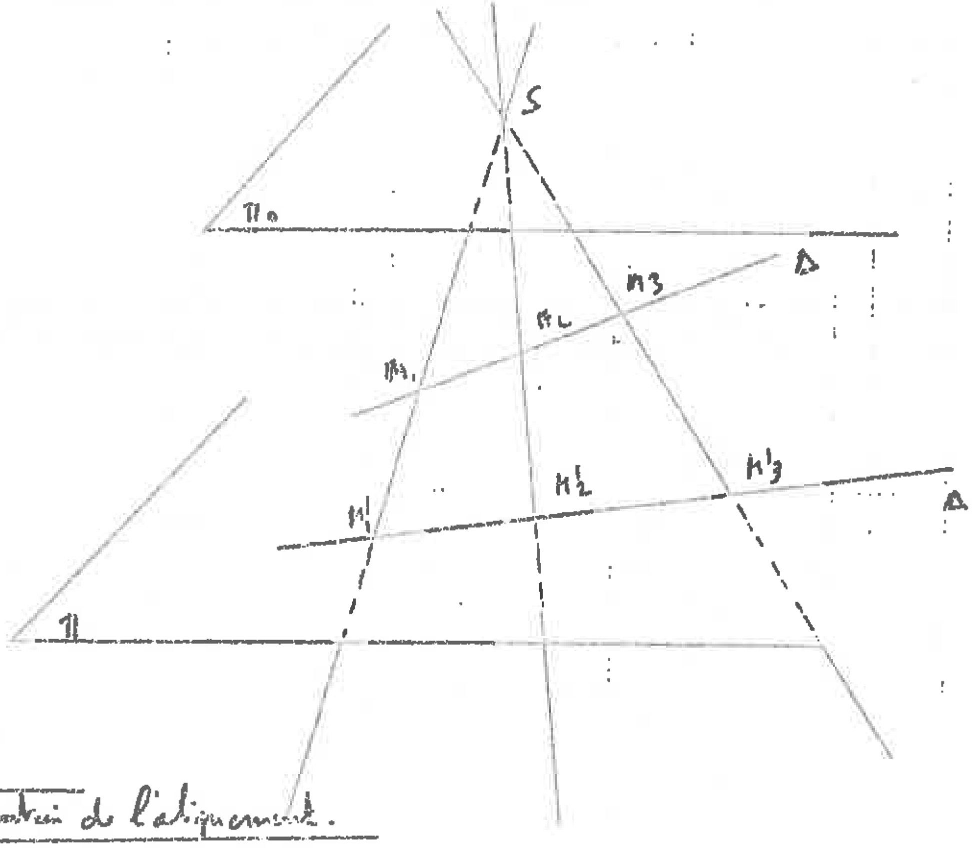
En effet, en utilisant le procédé précédent, pour une conique $(F, \mathcal{D}, e)$ donnée il suffit de déterminer θ, φ tq $e = \dfrac{\sin\theta}{\cos\varphi}$.


S
φ
π₁
π
θ
m
Δ
F
F'
M
ω₁
ω'₁



Σ^{-1}
P'
M'_1
W'_1
M'
φ
π_1
θ
M_1
m
F
Σ
M
Π


S
π_1
φ
ω_1
M_1
μ
θ
F
M
m
π
Δ

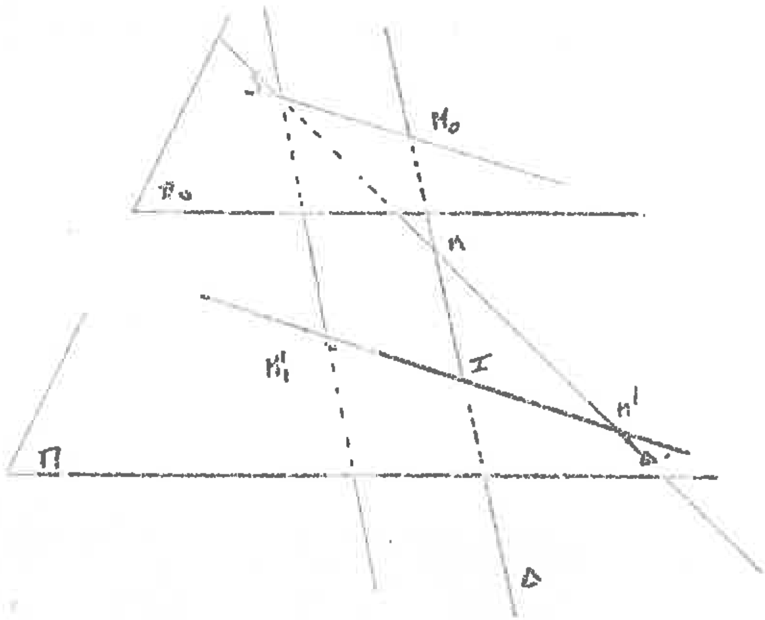


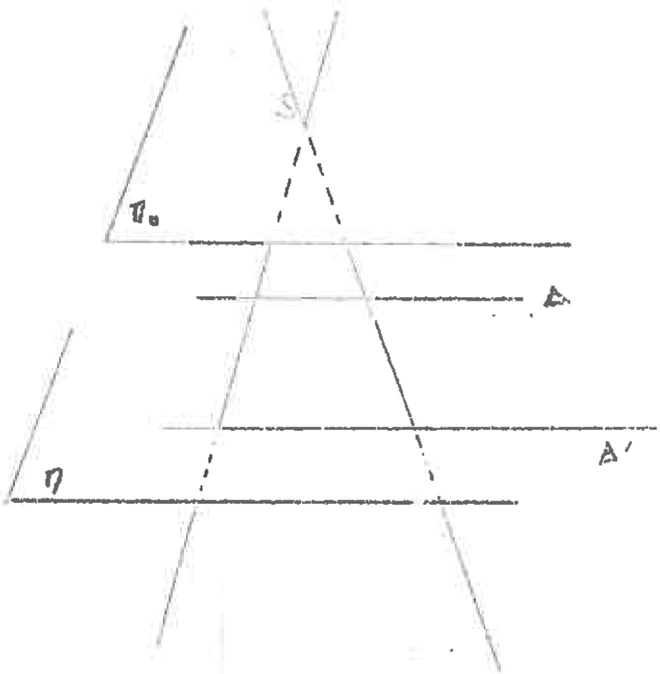
Préservation de l'alignement.

Soit Δ une droite de $\mathcal{E}$ tq $S \notin \Delta$, M_1, M_2, M_3 trois points alignés sur Δ, M_1, M_2, M_3 n'appartenant pas à Π_0 alors $p(M_1), p(M_2), p(M_3)$ sont alignés sur une droite Δ' de Π

→ en effet S et Δ définissent un plan $\mathcal{P} \neq \Pi_0$ non parallèle à Π_0 (Π)

donc $\mathcal{P} \cap \Pi = \Delta'$ dte et $p(M_i) \in \Pi \cap \mathcal{P} = \Delta'$ □.





Théorème (de Pascal pour les cercles)

Soit A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$, M, N, P les points de concours des couples de "côtés opposés" (BC', CB') (CA', AC') (AB', BA'). Alors les points M, N, P sont alignés.

démonstration :

L'idée est d'utiliser le théorème de Ménélaüs (qui donne une CNS pour que trois points soient alignés) voir Annexe

Pour cela il faut considérer M, N, P comme une transversale d'un triangle : à cet effet considérons le triangle (I, J, K) construit à partir de AB', BC', CA' : $\{I\} = (BC') \cap (CA')$ $\{J\} = (CA') \cap (AB')$ $K = (AB') \cap (BC')$

D'après le théo. de Ménélaüs on aura :

M, N, P alignés ssi $\dfrac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \cdot \dfrac{\overline{MK}}{\overline{MI}} \cdot \dfrac{\overline{NI}}{\overline{NJ}} = 1$

Or : $\mathcal{D}(P, A', B)$ est une transversale à (I, J, K) donc $\dfrac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \cdot \dfrac{\overline{BK}}{\overline{BI}} \cdot \dfrac{\overline{A'I}}{\overline{A'J}} = 1$

$\mathcal{D}(M, C, A')$ " " " $\dfrac{\overline{MK}}{\overline{MI}} \cdot \dfrac{\overline{CI}}{\overline{CJ}} \cdot \dfrac{\overline{B'J}}{\overline{B'K}} = 1$

$\mathcal{D}(N, C', A)$ " " " $\dfrac{\overline{NI}}{\overline{NJ}} \cdot \dfrac{\overline{AJ}}{\overline{AK}} \cdot \dfrac{\overline{C'K}}{\overline{C'I}} = 1$

en appliquant trois fois le théorème de Ménélaüs

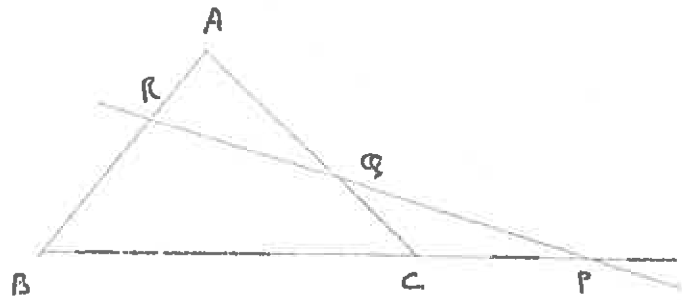
En multipliant membre à membre on obtient.

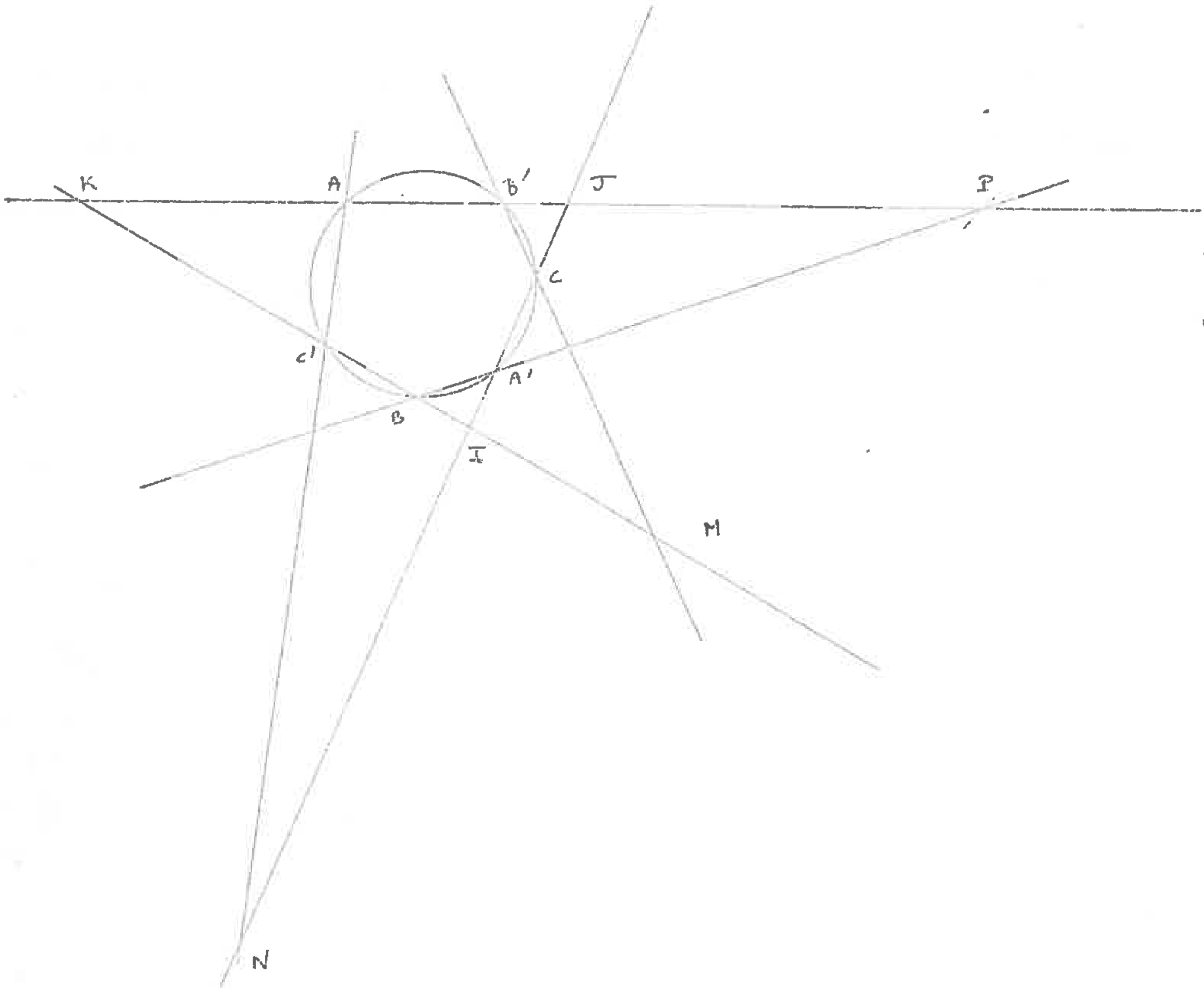
$$\left(\frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \cdot \frac{\overline{MK}}{\overline{MI}} \cdot \frac{\overline{NI}}{\overline{NJ}}\right) \underbrace{\frac{\overline{BK} \cdot \overline{C'K}}{\overline{B'K} \cdot \overline{AK}}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\overline{A'I}\ \overline{CI}}{\overline{C'I} \cdot \overline{BI}}}_{\beta} \cdot \underbrace{\frac{\overline{B'J}\ \overline{AJ}}{\overline{A'J} \cdot \overline{CJ}}}_{\gamma} = 1$$

or en utilisant la puissance d'un point par rapport à un cercle

$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(K) = \overline{KB} \cdot \overline{KC'} = \overline{KA} \cdot \overline{KB'}$ de même en calculant $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(I)$, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(J)$ les quantités α, β, γ sont égales à 1

cf. $\dfrac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \cdot \dfrac{\overline{MK}}{\overline{MI}} \cdot \dfrac{\overline{NI}}{\overline{NJ}} = 1$ ce qui assure l'alignement de M, N, P. $\square$


A
R
Q
B
C
P


K
A
B'
J
P
C
C'
A'
B
I
M
N