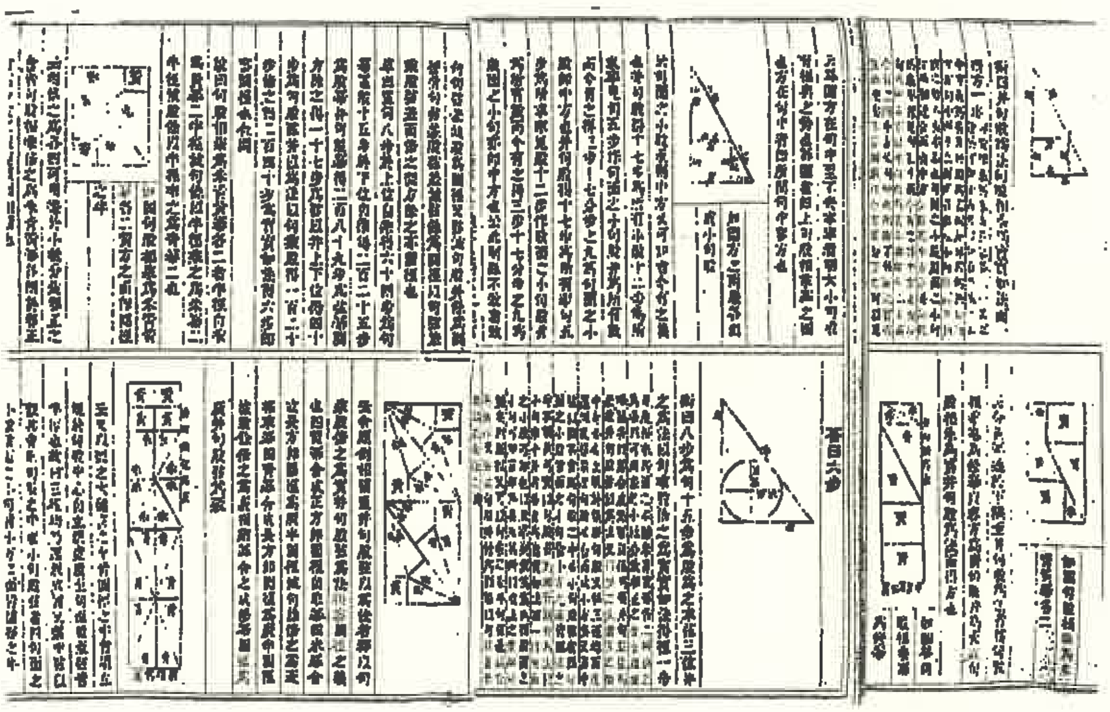
Institut
de Recherche
sur l' Enseignement
des Mathématiques

IREM de Reims
Groupe « Histoire et Épistémologie des Mathématiques »

Procédés calculatoires



en Chine ancienne.

Arnaud **GAZAGNES**

Janvier 2005

SOMMAIRE.

Avant-propos.		5
L'histoire des maths en classe.		7
Préface. (Frédéric METIN)		9
Sciences et techniques. (Jean-Claude MARTZLOFF)		11
1.	En Chine ancienne.	17
2.	Numération.	28
3.	La « procédure du *gougu* ».	41
4.	Calcul fractionnaire. Division.	51
5.	Méthodes de fausses positions.	61
6.	Surfaces circulaires. Une valeur approchée de π.	70
7.	Figures inscrites.	78
8.	Extraction de racine carrée. Equations quadratiques.	83
9.	Problèmes linéaires : Systèmes d'équations du premier degré à plusieurs inconnues.	
Systèmes indéterminés.		98
10.	Un calcul de volume.	115
11.	Un problème de restes et sa résolution par QIN Jiushao au 13ème.	120
Chronologie chinoise.		133
Bibliographie.		135
Table de conversion *pinyin*.		137
Quelques unités rencontrées.		139

AVANT-PROPOS.

La très grande majorité des textes exposés dans cette brochure remontent à la Chine antique. Le lecteur appréciera les différentes procédures de calcul que les mathématiciens d'alors ont mis en œuvre, même si leur démarche nous est inconnue. Je voulais tirer mon chapeau bas devant ces génies (et je pèse ce mot !) et, à ma modeste mesure, les faire connaître, pour, comme le disait JACOBI bien avant DIEUDONNE, l'honneur de l'esprit humain. Plus je travaillais sur les textes mathématiques chinois, plus je trouvais les démarches et les résultats passionnants. J'espère qu'une grande part de cette joie et de cet émerveillement vous parviendra à travers cette brochure. C'est son but premier.

Même s'il sera beaucoup question de temps antiques, je ne pouvais néanmoins pas ne pas parler des « restes chinois » étudiés bien après, au treizième siècle...

La transcription des idéogrammes chinois a été préférée en *pinyin* (translittération de l'écriture chinoise en alphabet latin, officiellement adoptée en Chine) plutôt que par sa traduction phonétique (donnée par l'E. F. E. O., École Française d'Extrême-Orient) plus proche de la prononciation faite par un lecteur occidental ; ce dernier, cherchant de nouveaux documents actuels, s'y retrouvera plus facilement ! Par exemple, l'ouvrage traduit par Les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques sera transcrit *jiu zhang suan shu* (et non pas *kieou tchang souan chou*). A la fin de cette brochure est placée une table de conversion.

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Jean-Claude MARTZLOFF qui m'a fourni nombre de documents, guidé dans l'Institut des Hautes Études Chinoises de Paris, corrigé mes erreurs et donné dans une grande gentillesse les renseignements nécessaires. Que soit aussi remerciée Karine CHEMLA pour les divers documents donnés.

Je remercie aussi mes collègues qui m'ont soutenu constamment dans ma démarche, insi que Frédéric METIN et Nelcy PAOLETTI, qui ont eu l'ingrate tâche de jouer les candides et qui m'ont fait plein de remarques constructives. Je n'oublie pas mes collègues rencontrés dans les stages « Histoire » animés dans le cadre du PAF, qui, par leurs questions, m'ont aidé à améliorer les documents de travail, documents devenus de fil en aiguille les chapitres de cette brochure...

Arnaud GAZAGNES,

IREM de Reims, Groupe *Histoire et Épistémologie des Mathématiques.*

« La civilisation chinoise présente l'irrésistible charme de ce qui est totalement *autre*, et seul ce qui est totalement autre inspire l'amour le plus profond, avec le désir le plus puissant de le connaître. »

Joseph NEEDHAM, in La science chinoise et l'Occident (op. réf.)

« Ce sont des mathématiques, Jim, mais pas comme nous les connaissons. »

Docteur SPOCK, « *Star Trek* »

« En matière de connaissance, ce n'est pas la quantité qui importe, mais le fait d'examiner soigneusement ce que l'on connaît. »

« *shigu zhi bu wu duo, wu shen qi suo zhi* »

XUNZI

A Choun, Poulette et Totor, Kath et Jipavs, Ninie et Zoliv,
qui se reconnaîtront.

Illustration de couverture :

Extrait du Chapitre 9 du Jiu Zhang Suan Shu, version illustrée du XVII^e^ siècle.

L'HISTOIRE DES MATHS EN CLASSE.

Il peut paraître surprenant que, d'un côté, les disciplines dites « littéraires » incluent un enseignement de leur histoire (histoire littéraire, histoire de la philosophie, ...) tandis que, d'un autre côté, les disciplines dites « scientifiques » sont le plus souvent oublieuses de leur passé. Comme si seule comptait la parole du dernier à parler, qui aurait fait la synthèse de tout et montrerait la performance des notions actuelles. Comme si ce qui était fondamental pour l'élève était apprendre (à défaut de « comprendre ») le plus de notions diverses et variées mais, point fondamental, scientifiques.

Il n'est pas question d'enseigner l'histoire des mathématiques mais d'introduire l'histoire des mathématiques en classe. L'un des objectifs de cette démarche est de montrer que les mathématiques constitue une science vivante (la recherche en est une preuve) et que les concepts de notre savoir mathématique ne se sont pas toujours constitués simplement. Il y eut en effet de grands cheminements, des erreurs persistantes et de subits éclairs : derrière les mathématiques, il y a des hommes. La démonstration du théorème de Fermat est une grande aventure [1] étalée sur plus de 350 ans !

Ainsi, dans l'enseignement secondaire, il est possible de rentrer dans cette démarche historique lors de l'étude de puissances de nombres [2] (avec VIETE, XVIe siècle), des nombres complexes (CARDAN, XVIe), des probabilités (FERMAT et PASCAL, XVIIe), du théorème "des restes" (QIN Jiushao, XIIIe), ... ou la présentation des divers aspects que peut prendre une même notion, comme la tangente à une courbe en l'un de ses points. La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue est source d'une activité riche en Collège (ou en Seconde !) ; le lecteur pourra consulter sur ce point, par exemple, la brochure de l'IREM de Reims intitulée Un fruit bien défendu.

C'est une vision historique qui donne une image constructiviste des mathématiques, opposée à une (triste) vision dogmatique d'elles.

Dans le cas où l'on présente des textes mathématiques, il convient aussi de donner leur contexte historique et philosophique pour ne pas seulement les plaquer et en faire des « deus ex machina » pour les élèves. C'est l'occasion de travailler avec des collègues des autres disciplines, comme l'histoire, la philosophie, les arts plastiques, ainsi que les pro-

[1] S. SINGH, dans Le dernier théorème de Fermat (Hachette Littératures) l'a racontée avec passion (et talent !). Vous pouvez aussi (faire) lire le Théorème du perroquet de D. GUEDJ (Ed. du Seuil), un très bon roman de vulgarisation d'histoire des maths.

[2] Un exemple se trouve dans Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, Bulletin Inter IREM Epistémologie, 1988. Le lecteur trouvera de nombreuses publications des IREM dans ce domaine sur les différents thèmes cités (liste non exhaustive !).

grammes officiels le proposent. Voilà donc, par exemple, pour le Collège, une source de thème de Travaux Croisés et, pour le Lycée, une source de thème de TPE [3] ...

Il semble indispensable de veiller à un enseignement **appuyé par** des passages historiques, et qu'ils soient tirés de textes ou de manipulations « en vrai » avec les élèves.

Appuyé par, et non pas « assisté par », pour éviter le folklore et le sensationnel.

Appuyé par, car, cela a déjà été écrit, il ne s'agit pas d'enseigner l'histoire des mathématiques mais d'en introduire son histoire.

Appuyé par, parce que l'introduction de l'histoire n'est pas un luxe que l'on s'offre devant un programme estimé suffisamment avancé pour pouvoir détourner une heure sans en compromettre le bon déroulement du planning choisi. Les programmes rappellent que « *l'introduction d'une perspective historique peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique* ».

Appuyé par, pour permettre à l'élève de se poser la question du « pourquoi ? » (qui est un outil dans son apprentissage, lui permettant de comprendre de quoi il parle) plutôt que celle du « comment ? » (qui réduit un cours à un ensemble de recettes et éloigne alors le verbe « apprendre » du verbe « comprendre ») ; l'histoire des mathématiques aide en effet considérablement sans le franchissement des obstacles didactiques et épistémologiques, l'élève s'appropriant la connaissance visée en lui donnant un sens.

Appuyé par, pour introduire une dimension historique, culturelle et de réflexion dans notre enseignement, au service de nos élèves, futurs citoyens. Parce qu'enseigner, ce n'est pas éblouir, mais éclairer.

[3] Ouvertures pédagogiques existant au moment de rédaction de cette brochure.

PREFACE.

Il serait exagéré de prétendre que je connais Arnaud depuis qu'il est tout petit, mais nous jouions déjà à cache-cache en 97, puisqu'il fit son entrée à l'IREM de Reims au moment même où l'impénétrable mystère des mutations m'en faisait partir. En revanche, ce que je peux avancer avec certitude, c'est qu'il a toujours été profondément Chinois. Attention ! Comprenez-moi bien : cela ne signifie pas du tout qu'il ait un caractère tortueux, au contraire. C'est simplement que je l'ai toujours connu s'intéressant aux mathématiques et à la culture de la Chine.

Sans Arnaud, je n'aurais pas trouvé de porte d'entrée dans cet étrange corpus de textes scientifiques que l'ignorance et l'eurocentrisme nous feraient qualifier trop rapidement de bricolages ; sans sa passion et son travail de défrichage, surtout à une époque où les textes n'étaient pas accessibles, les mathématiques chinoises seraient restées confinées au milieu universitaire, aux érudits sinologues. Car tout le monde ne déjeune pas quotidiennement avec Karine Chemla ou Jean-Claude Martzloff ! Comprenez-moi bien encore une fois : je n'insinue pas qu'Arnaud rencontre tous les matins les deux grands spécialistes français de la pensée scientifique d'Extrême-Orient… Mais il a su tirer la substance de leurs apports comme personne dans notre milieu.

Parlons-en justement ! Voilà que Dunod met courageusement à disposition des lecteurs français une nouvelle version des *Neuf Chapitres*, ce fabuleux classique des mathématiques chinoises, traduit pour nous par Karine Chemla. Superbe, costaud (mille pages et quelques), le néophyte se lancera-t-il à l'assaut ? Bon courage ! C'est un peu comme les Grandes Jorasses lorsqu'on ne connaît que le mur d'escalade du gymnase d'à côté, ou les *Éléments* d'Euclide avec pour tout bagage le Brevet des Collèges : malgré les efforts des auteurs, on a du mal à apprécier toutes les subtilités et à grimper jusqu'en haut… Il faut un peu plus d'entraînement et une interface pour Béotiens.

Mais ne réduisons pas la brochure d'Arnaud à une simple introduction à la lecture des *Neufs Chapitres*. Pour ma part, j'ai d'abord trouvé beaucoup de plaisir dans ces textes, écrits par quelqu'un de normal, c'est-à-dire un prof du secondaire, animateur IREM, militant à l'APMEP, curieux de jeux mathématiques… En écrivant cela, je me demande si, au fond, il est vraiment si normal : ça ne court pas les rues en ce moment, les jeunes qui travaillent tant sur des matières qui ne leur rapporteront que de l'estime, ces bénévoles que toutes les associations s'arrachent ! Pour reprendre le fil de cette préface, un des intérêts majeurs de la brochure, c'est qu'Arnaud l'a écrite en tant qu'enseignant et que le discours n'est jamais totalement étranger à la classe ; je peux d'ailleurs témoigner de l'impact de cette lecture sur ma propre vision des mathématiques, et même de leur histoire, en rapport avec mon enseignement. Voici une nouvelle façon de « rendre étranger ce qui était évident », selon l'expression de Dominique Bénard : un langage différent de celui auquel nous sommes habitués, des problèmes et des solutions qu'il nous faut faire nôtres en saisissant les caractères communs scientifiques et humains, tout en reconnaissant un certain décalage culturel.

Dépassons maintenant cette naïveté mêlée au désir d'exotisme qui nous fit baptiser des théorèmes du nom de Thalès ou d'Al Kashi : avec cette porte ouverte vers des mathématiques d'ailleurs, nous avons l'occasion de ne plus nous contenter des « restes chinois »…

Frédéric Métin, IREM de Dijon, janvier 2005.

SCIENCES ET TECHNIQUES.

[1] Pour la Chine, comme pour d'autres civilisations, plus on remonte le temps, plus il devient difficile de préciser ce qu'on doit entendre exactement par "science". C'est pourquoi la "science chinoise" peut se définir de différentes manières : il peut s'agit de toute idée, découverte ou méthode chinoise qui joue encore un rôle dans la science actuelle, mais aussi ce peut être aussi l'ensemble des traditions visant à interpréter ou à agir sur la nature qui se sont développées dans le monde chinois. La première définition conduit souvent à présenter le savoir ancien comme un océan d'erreurs duquel émergent de temps à autre les brillantes anticipations de précurseurs géniaux : Zhang Heng (78-139), inventeur du premier sismographe connu, devient géophysicien, l'alchimiste Sun Simo (VII^e s.), biochimiste et, à l'extrême, Zhuangzi, penseur de la relativité. Il en découle donc une classification des savoirs anciens claquée sur les catégories de la science actuelle, supposées a priori universelles et atemporelles. Une telle approche trahit souvent les réalités historiques : parler sans réserves de physique ou de biologie chinoises oblige à regrouper artificiellement des ensembles de faits initialement épars et sans cohérence globale, et contraint à attribuer aux anciens des motivations qui ne pouvaient pas être les leurs. La seconde définition, plus soucieuse d'histoire que de téléologie, vise à comprendre le passé à partir du passé plutôt qu'à partir du présent, et invite à rendre compte d'interactions complexes entres facteurs multiples, internes comme externes, qui ont agi sur la vie des idées dans leur contexte historique : d'où, par exemple, l'éclairage de l'histoire de l'alchimie par le taoïsme, et celui de l'astronomie par le ritualisme divinatoire. Toutefois, il ne faudrait pas confondre sciences, techniques et philosophie, ni oublier qu'il existe des sciences chinoises indépendantes de pratiques magico-religieuses : aucun lien de continuité ne permet d'associer les conceptions protocolaires et emblématiques des nombres propres aux devins de l'Antiquité, dont parle Marcel Granet, à celles purement rationnelles de mathématiciens comme Lui Hui (III^e s.), Zu Chongzhi (V^e s.), Li Shunfeng (VII^e s.).

Plusieurs jugements contradictoires, trop souvent entachés de partialité, ont été portés sur les sciences chinoises. Certains savants, comme le père Gaubil au XVIII^e siècle, ont défendu l'idée d'une très haute antiquité de celles-ci (XXV^e s. av. notre ère). Mais ces déductions reposaient sur les textes apocryphes et sur une chronologie chinoise parfaitement mythique. Pour d'autres, la science chinoise ne serait qu'un ensemble inorganisé de connaissances empiriques, et le peu de vérité qu'on trouverait ne pourrait s'expliquer que par des emprunts aux autres civilisations : en 1760, Joseph de Guignes écrit un mémoire pour prouver que « les Chinois sont une colonie égyptienne » ; au début du XX^e siècle, l'historien japonais Iijima Tadao tente sans grand succès de faire dériver toute l'astronomie chinoise de celle des Babyloniens. En même temps que l'on se sert des ressemblances entre cultures pour conclure à des influences unilatérales de l'Occident sur la Chine, les différences sont jugées révélatrices d'une infériorité chinoise de principe, en vertu du préjugé courant selon lequel tout savoir scientifique ne peut venir que du monde européen, inventeur de la méthode expérimentale et porteur de l'héritage grec. Mais l'idée d'une Europe fermée aux influences extérieures ne se justifie pas davantage que celle d'une Chine ouverte, mais elle-même dépourvue de rayonnement.

---

[1] Texte extrait de la rubrique « Sciences et techniques », in Dictionnaire de la Civilisation chinoise, pp. 613-618, Encyclopædia Universalis, Albin Michel, 1998. Reproduction autorisée avec l'aimable autorisation de son auteur, que je remercie.

En contact avec des civilisations iranienne, hellénistique et romaine dans l'Antiquité, la Chine est en relation avec l'ensemble du continent asiatique sous les Tang. Sous les Mongols, à l'époque des grands voyageurs, les influences réciproques de l'Iran islamisé et de la Chine se font particulièrement sentir : trigonométrie sphérique et instruments astronomiques de Guo Shoujing, d'origine islamique (vers 1279), mais aussi traductions persanes d'ouvrages chinois de médecine, enfin, contacts scientifiques avec l'Europe par l'intermédiaire des missions jésuites à partir de la fin du XVI^{e} siècle. Pourtant, malgré l'importance de ces échanges, on doit reconnaître que les sciences chinoises forment un ensemble de traditions très différentes de celles de l'Europe, de l'Islam, ou même de l'Inde, car dominées par une perspective « organiciste » (prédominance de la croyance à un ordre général et spontané dans un univers à l'image d'une totalité organique, et dans lequel chaque phénomène se trouve en correspondance continue avec tous les autres, tout en passant par des phases de croissance, maturité et déclin). D'où l'intérêt des penseurs chinois pour les phénomènes impliquant une implication une action à distance (magnétisme, marées, phénomènes sismiques, autorégulation des organismes...) de préférence à ceux qui reposent sur des actions directes et mécaniques ; pour l'algèbre plutôt que pour la géométrie et, enfin, pour les théories ondulatoires plutôt que pour les théories atomistiques.

Mathématiques

Les inscriptions sur os et écailles (*jiaguwen*) découvertes dans la région de Anyang, dans l'actuelle province de Hénan, à la fin du siècle dernier, nous apprennent que, dès les XIV^{e}-XI^{e} siècles avant notre ère, les Chinois utilisaient une numération décimale de type « hybride », combinant dix signes fixes pour les unités de 1 à 9, avec des marqueurs de position particuliers pour les dizaines, centaines, milliers et myriades. Aux abords de l'ère chrétienne, le système se stabilise et note déjà les nombres pratiquement de la même manière qu'en chinois moderne. Le zéro-cercle, très probablement d'origine indienne, n'est attesté qu'au XIII^{e} siècle, mais, auparavant, on ménageait un espace vide pour indiquer les unités manquantes.

Habiles calculateurs, rompus aux opérations sur les grands nombres comme sur les fractions dès le début de notre ère, les Chinois n'ont jamais conçu les mathématiques comme une science déductive, mais plutôt comme une logistique reposant sur la manipulations d'instruments, essentiellement le boulier (*suanpan*) et les baguettes à calculer (*chousuan*). Pour dire « calculer », la langue chinoise moderne utilise des termes comme *yansuan* ou *tuisuan*, dont le sens premier est, respectivement, « manœuvrer les baguettes », « pousser les baguettes ». Peut-être issues des tiges d'achillée à usage divinatoire, ces baguettes en bambou, ivoire ou métal, longues d'une dizaine de centimètres et de section circulaire, triangulaire ou carrée, étaient placées soit sur une quelconque surface horizontale, la table à compter, soit aussi, vraisemblablement, sur un échiquier dont les cases offraient des repères naturels permettant de distinguer les divers ordres d'unités, ou même de « mettre en mémoire » le résultat d'un calcul intermédiaire. Cet ensemble instrumental permettait non seulement d'effectuer les opérations courantes de l'arithmétique élémentaire, mais aussi d'exécuter des algorithmes beaucoup plus complexes : opérations sur les polynômes, résolutions d'équations numériques.

Le boulier, qui est encore très répandu en Extrême-Orient, se compose de deux étages de boules mobiles enfilées sur des tringles serties dans un cadre en bois, et séparées par une barre transversale. Depuis les Ming, il en existe plusieurs variétés qui se différentient soit par le nombre de tringles qui les composent (27 au maximum), soit par le nombre de boules par tringle (5 en bas et 2 en haut, ou bien 5 + 1, ou 4 + 1) ; les boules du bas valent chacune une unité, et celle du haut cinq unités. L'origine de cet instrument, dont l'utilisation suppose la mémorisation de règles rimées très différentes de celles qu'énoncent nos tables, reste mal connue. On le considère généralement comme un perfectionnement tardif des anciennes baguettes à calculer survenu au plus tôt sous la dynastie des Yuan, voire des Song. Toutefois, certains historiens comme Yamasaki Yoemon le font dériver du boulier romain, car un ouvrage chinois, dont certaines parties pourraient remonter aux Han, le *Shushu jiyi* (*Les traditions de l'art calculatoire*) contient une description d'un instrument à calculer à boules. Mais le boulier ne s'est vraiment répandu en Chine qu'à partir des Ming. Contrairement aux savantes baguettes, il n'a eu d'application pratiquement qu'en arithmétique commerciale.

D'autres instruments de mathématiques d'origine européenne, comme le compas de proportion de Galilée, les réglettes multiplicatives de Neper, la règle à calcul, ont pris beaucoup d'importance à partir du XVII^e^ siècle.

Le plus ancien traité de mathématiques chinois connu – le *Jiuzhang suanshu*, ou les *Neuf Chapitres sur l'art mathématique* – compilé sous les Han, a exercé une influence considérable. Il se présente comme une collection de deux cent quarante-six problèmes, regroupés principalement par rubriques à visées utilitaires : arpentage des champs, échanges de marchandises, travaux de terrassement, impôts et corvées, mesures des distances sur le terrain, etc. Après l'énoncé de chaque question viennent la réponse, le procédé permettant de l'obtenir et, enfin, à la différence des textes égyptiens ou babyloniens, un ou plusieurs commentaires contenant des justifications rationnelles. Bien des méthodes utilisées – règle de trois directe, inverse ou composée, règle de société, algorithme d'Euclide, calcul des triplets pythagoriciens – sont les mêmes que celles d'autres civilisations de l'Antiquité, encore que certains algorithmes –comme, par exemple, celui qui permet de résoudre tout système numérique de *n* équations du premier degré par réduction de ce qui correspond à notre matrice du système à la forme triangulaire et par substitutions successives (méthode dite « de Gauss ») – ne sont attestés qu'en Chine. Les règles d'addition et de soustraction pour les nombres négatifs qu'on y trouve ne sont pas moins originales, car ceux-ci ne dont pas conçus seulement comme des débits financiers, résultant de soustractions « impossibles », mais comme des objets indépendants. A vrai dire, figurés par de simples baguettes noires ou rouges, ces nombres se trouvaient naturellement abstraits du contexte concret qui les avait suscités et, par conséquent, plus facilement assujettis à des manipulations formelles.
Dès la dynastie des Han, les algébristes chinois savaient résoudre sur la table à compter l'équation du second degré qu'ils considéraient comme représentant une opération généralisée, de même nature que l'extraction de racine carrée, elle-même conçue comme une division particulière. Les spécificités de leur technique instrumentale les amenèrent à effectuer les calculs comme dans la méthode de Ruffini-Horner (début du XIX^e^ s.), méthode bien attestée en Chine au XIII^e^ siècle.

Dès le début du VII^e^ siècle, Wang Xiaotong, qui fut reçu docteur en mathématiques à l'issue d'un concours couronnant sept années d'études, connaît l'équation du troisième degré. Sous la dynastie mongole des Yuan, l'ermite (1192-1279) et le professeur itinérant Zhu Shijie (vers 1300) développent une algèbre de polynômes (*tianyuan shu*) mettant en jeu jusqu'à quatre inconnues. Ils y parviennent en affectant les baguettes correspondant aux coefficients numériques des monômes à des places particulières de la table à compter. L'équation finale d'un problème résultait soit d'une soustraction entre deux quantités égales calculées verbalement de deux façons différentes, soit de l'élimination successive des variables entre systèmes polynomiaux. C'est une généralisation de ces méthodes qui conduira le mathématicien japonais Seki Takakazu (1642-1708) à découvrir les déterminants, indépendamment de Leibniz, à la fin du XVII^e^ siècle. Les procédures chinoises conduisaient à n'envisager que la forme unique f (x) = 0, contrairement à celles des arabes qui estimèrent longtemps nécessaire de distinguer d'innombrables cas d'équations pour éviter les quantités négatives. En revanche, les mathématiciens chinois ne s'intéressaient pas aux solutions d'équations « par radicaux » mais seulement à l'expression numérique des racines.

Vers les XI^e-XII^e siècles, le triangle dit « de Pascal » apparaît en Chine en tant que moyen de calcul des coefficients du développement de $(a + b)^n$, mais sans aucun lien avec la combinatoire, domaine pratiquement inconnu des Chinois.

Vers 330 avant J.-C., les Mohistes élaborent un ensemble de définitions mathématiques analogues à celle d'Euclide, mais leur tentative reste sans lendemain, et on chercherait vraiment la moindre trace de raisonnement axiomatico-déductif dans la géométrie chinoise, science essentiellement appliquée, qui s'occupe de la planimétrie et de la stéréométrie d'objets comme le champ en forme de corne de bœuf, en forme de van, la digue, le rempart, le mur de douve de fortifications. Il est caractéristique que la plupart des mots conservent leur sens courant, et c'est pourquoi il arrive souvent que plusieurs termes s'appliquent à la même figure abstraite. En outre, l'importance des concepts d'e perpendiculaire et d'aire, ainsi que l'absence de notion d'angle sont aussi typiques de cette géométrie que de la géométrie babylonienne. Pourtant, certains auteurs n'ont pas estimé superflu de prouver ce qu'ils affirmaient : Liu Hui (III^e s.) explique des résultats d'algèbre élémentaire et de géométrie (théorème de Pythagore, diamètre du cercle inscrit dans un triangle, identités) en se servant d'un principe d'équidécomposabilité (invariance de l'aire ou du volume d'une figure par fragmentation et réassemblage des divers morceaux) ; à cet effet, il utilise des pièces colorées qu'il manipule à la manière d'un puzzle. Au XIII^e siècle, Yang Hui utilise le même principe pour trouver la somme de séries. Zu Kengzhi (V^e s.) justifie le calcul du volume de la sphère en appliquant le principe dit « de Cavalieri » à un solide obtenu par intersection de deux cylindres égaux se pénétrant orthogonalement. Liu Hui, déjà cité, approche l'aire du cercle par celle d'une suite de polygones réguliers inscrits de 6×2^n côtés ($n = 1, 2, \ldots, 5$) et parvient à l'encadrement $314\ 64/625 < 100\ \pi < 314\ 169/625$. Deux siècles plus tard, grâce à un raffinement de ce procédé, Zu Chongzhi en déduit l'excellente approximation $\pi = 355/113$, dite communément « de Métius » (1586). Mais la géométrie déductive ne commence à être connue en Chine qu'à partir du XVII^e siècle, grâce à une traduction partielle des *Eléments d'Euclide* par Matteo Ricci et Xu Guangqi (1607), effectuée à partir d'un manuel de Clavius. De nombreux mathématiciens s'intéressent alors à cette science et parviennent à en découvrir des résultats nouveaux pour eux (stéréométrie des polyèdres). Mais ils ne conservent rien de la trame discursive du discours géométrique, sans doute en raison de l'étrangeté pour eux d'un cadre qu'ils ne pouvaient pas ne pas associer aux raisonnements de la scolastique, base des enseignements scientifiques comme religieux des missionnaires, la géométrie chinoise n'étant pas fondée sur la « mise à l'épreuve » d'une langue aux phrases constamment contrôlées du point de vue de leur valeur de vérité à partir de principes axiomatiques immuables agissant sur des objets idéaux, mais sur la manipulation et l'observation cas par cas des particularités des figures tangibles.

Deux types de problèmes de théorie des nombres – le problème dit « des cent volailles » et celui des restes – présentent de l'intérêt pour l'histoire comparée des mathématiques, car on les rencontre aussi bien en Chine, en Inde, en Europe que dans le monde islamique. Dans nos notations, ils s'écrivent :

$$(1)\quad a x + b y + c z + \ldots = 100$$
$$x + y + z + \ldots = 100$$
$$(2)\quad x \equiv r_1 \pmod{m_1} \equiv r_2 \pmod{m_2} \equiv r_3 \pmod{m_3} \ldots,$$

Dans le premier exemple, on demande, par exemple, de trouver le nombre de coqs, poules et poussins, sachant qu'un coq coûte cinq pièces de monnaie, une poule trois, trois poussins une pièce et que cent pièces permettent d'acheter cent volailles. Dès le V^e siècle, Zhang Qiujian sait le résoudre correctement. On le retrouve plus tard chez Mahâvirâ Abû Kâmil, Alcuin, Bhâskara II.

Dans le second cas, il s'agit de résoudre des systèmes de congruences simultanées. Ces questions remontent à Sunzi – mathématicien du IV^e ou V^e siècle de notre ère, qui n'a aucun rapport avec le stratège du même nom – dont le célèbre problème s'énonce : « Déterminer un nombre sachant que si on le divise par 3, 5, 7 les restes valent respectivement 2, 3, 2. » D'autres questions similaires apparaissent également chez Aryabhata I (V^e s.), chez Fibonacci ($XIII^e$ s.)... En 1247, Qin Jiushao en présente pour la première fois une procédure résolutoire complète, dite « du grand développement » (*dayan*), qui s'applique à des nombres quelconques. En 1801, dans ses *Disquisitiones Arithmaticæ*, Gauss traite le problème pour des modules premiers entre eux, mais il faut attendre 1859 pour qu'un autre mathématicien, Lebesgue, en fournisse une solution générale. D'après Libbrecht, les règles chinoises et indiennes pour les problèmes de congruences *dayan* et *kuṭṭaka* n'ont pas de rapport entre elles. Il semble donc que, si ces problèmes n'ont pas été découverts indépendamment, ils ont été transmis d'une culture à l'autre sans indication de solution.

Les formules sommatoires les plus remarquables sont celles qui apparaissent sans preuves dans le *Miroir de jade des quatre inconnues* (*Siyuan yujian*), de Zhu Shijie (1303), et qui s'appliquent à des séries ayant pour terme général le produit d'un terme d'une suite arithmétique par un naturel, un nombre triangulaire ou un carré. Dans la même voie, Li Shanlan (1810-1882) – le Ramanuja chinois – chercha des solutions de l'équation aux différences finies : $F(n, p) = a(n, p)\, F(n-1, p-1) + b(n, p)\, F(n-1, p)$ qui généralise la formule de récurrence des coefficients binomiaux et obtient des sommations comme :

$$\Sigma_j \binom{k}{j}^2 \binom{n+k}{k} = \binom{n+2k-1}{2k}^2$$

Au XX^e siècle, des mathématiciens comme Hua Luokeng Chen Jingrun, Wang Yuan, se sont rendus célèbres par leurs recherches sur les problèmes de Waring, de Goldbach, et les équations diophantiennes.

Jean-Claude MARTZLOFF

EN CHINE ANCIENNE.

Résumé.

Ce chapitre présente le cadre historique dans lequel sont apparues, en Chine ancienne, les procédures mathématiques détaillées dans la brochure. En particulier, il sera question de découvrir ce que l'on appelle couramment « mathématiques chinoises ».

1. Deux des plus anciens ouvrages.

Les ouvrages suivants sont de la Dynastie des Han (commencée au II^e siècle avant JC) ; il y eut quand même auparavant des embryons de calcul mathématique (comme dans les prémisses de toute civilisation), notamment l'élaboration d'un système de numération, la connaissance des opérations arithmétiques et quelques propriétés algébriques élémentaires. Les informations sur les connaissances des Chinois dans les dix siècles qui ont précédé notre ère ne sont pas fournies par des traités mathématiques mais par des inscriptions (sur des os ou des écailles) ainsi que par des œuvres littéraires.

1.1. Une compilation.

Pour se faire une première idée, il est correct de penser que les ouvrages chinois sont des ouvrages pratiques et pédagogiques, c'est-à-dire des supports pour un enseignement du calcul numérique (et des problèmes d'application) ou encore des modes d'emploi (de descriptions) de techniques.

Nous pouvons nous demander d'où nous viennent les textes mathématiques chinois. En effet, comme dans d'autres civilisations, les mathématiques ont été étroitement liées aux connaissances de leur époque et, à ce titre, il n'y a pas de traité mathématique en tant que tel. On les trouve dans deux domaines différents : le premier est scientifique (traités de calendrier, d'astronomie, ...), le second, littéraire ou historique, lorsqu'il y est fait mention de connaissances mathématiques.

Les premiers textes mathématiques chinois qui nous sont parvenus datent de la dynastie des Han (– 202, 220), pendant laquelle s'est faite la première unification solide de l'empire. Un système bureaucratique s'installe. On assiste dans de nombreux domaines du savoir à un travail de synthèse, de mise en ordre des acquis antérieurs par des fonctionnaires savants (de tendance confucéenne).

Au cours de cette période se sont développées la géométrie appliquée (où l'on trouve des relations dans le triangle rectangle, le carré et le cercle, la détermination des distances, des calculs de surfaces et de volumes, le théorème dit « de Pythagore ») et l'arithmétique (où se trouvent des problèmes sur les 4 opérations, avec des nombres entiers ou fractionnaires, des extractions de racines carrées ou cubiques, des résolutions des problèmes à une ou plusieurs inconnues, ...).

Notons leur connaissance des nombres négatifs dès les débuts de l'ère chrétienne. Alors que les Européens réfléchissaient sur le statut particulier de ces nombres, les Chinois les utilisaient depuis fort longtemps. Très tôt, les mathématiciens chinois ont ajouté, multiplié et retranché des nombres à l'aide de baguettes, rouges pour les nombres positifs et noires pour les négatifs.

Les Dix Classiques du Calcul (Suanjing shi shu) est un nom donné communément à la collection de manuels mathématiques compilés officiellement au début de la dynastie Tang (vers 750), à partir de textes anciens ou modernes, en vue des examens impériaux de mathématiques. Les fonctionnaires mathématiciens reçurent alors un statut qui leur donnait les traités (et de facto les notions) à connaître, la durée des études, ... En effet, auparavant, la majorité des fonctionnaires lettrés étaient plus intéressés par les belles-lettres (dont les textes étaient écrits au pinceau et recopiés en nombre très réduit) ; leur recrutement et leur avancement étaient basés sur des concours purement littéraires ou militaires. La pratique des calculs qui s'y trouvent a non seulement été très développée au début de ce millénaire mais s'est aussi très vite stabilisée lors des siècles suivants. C'est au VII^e siècle, par l'exigence d'un enseignement officiel et le regroupement des notions connues alors, qu'ils furent compilés sous ce titre générique.

Aucun de ces livres n'a survécu [1] mais, par chance, on possède malgré tout quelques fragments arithmétiques de la même époque (premier millénaire de notre ère) [2].

Leurs auteurs ont des origines sociales des plus diverses : QIN Jiushao appartient au milieu des grands fonctionnaires, YANG Hui exerce à des niveaux plus modestes et ses ouvrages font écho aux préoccupations des milieux marchands, LI Ye est un ermite qui s'est retiré de la fonction publique suite à l'invasion mongole et pratique les mathématiques avec amis et disciples, ...

Il est à noter que le nombre de ces classiques change suivants les historiens : il en existe plus de 10, sans compter les variantes d'un même livre. Ce qui ne les empêche pas de s'interroger : quelle forme la collection des Dix Classiques de Calcul prit-elle à l'origine ? était-ce un unique manuscrit ou étaient-ils plusieurs ? est-ce que les étudiants étaient capables de les consulter immédiatement ou cela était-il réservé aux maîtres ? Les questions sont encore sans réponse.

Il y a deux traits essentiels dans les mathématiques chinoises. Le premier est qu'elles sont étroitement liées à la pratique, les travaux en mathématiques répondant aux besoins des technocrates dans les problèmes de « tous les jours ». Le second est qu'elles relèvent de techniques de calcul et non pas de théories, de « mathématiques pour les mathématiques » : leur objet principal était de dégager des méthodes pour résoudre des problèmes

---

[1] Pillages, autodafés, bibliothèques brûlées, ... Ainsi, l'empereur QINSHIHUANG, connu, d'un côté, pour son unification de la Chine, a fait brûler, d'un autre côté, les Classiques et enterrer vivants les lettrés...

[2] Il s'agit de textes extrêmement élémentaires qui font partie des manuscrits découverts à Dunhuang au début de ce siècle. L'un d'eux, daté de 952, contient une table de multiplication (*jui jui*, « neuf neuf ») pour les nombres de 1 à 9, où l'économie du produit $b \times a$ est faite lorsque le produit $a \times b$ est déjà noté. Il contient aussi une table à double entrée destinée à la conversion des pas (unités d'aire).

concrets : finances, arpentage, commerce, ... Cette caractéristique n'a guère changé durant les deux mille ans suivants.

1.2. Le Zhoubi Suanjing.

Son titre se traduit par Canon des calculs gnomoniques des Zhou (la dynastie des ZHOU a régné sur la Chine de – 1121 à – 256) et commenté plus tard par ZHAO Shang (III^e siècle), ZHEN Luan (VI^e siècle) et LI Chunfeng (VII^e siècle). Ce livre n'est pas une liste de problèmes accompagnés de leurs réponses mais un dialogue entre un maître (CHEN Zi) et son élève (RONG Fong).

Il est surtout important pour l'histoire de l'astronomie chinoise. Les astronomes le connaissent comme étant leur plus ancien ouvrage. Il s'y trouve la description « du toit ouvrant » (la Terre est plate et l'Univers est fini) ; la théorie cosmologique repose sur des textes mathématiques. Dans cet esprit, la hauteur du soleil peut être calculée avec son ombre et un gnomon *(bi)*.

La numération décimale, les 4 opérations élémentaires sur les fractions et l'extraction de la racine carrée d'un nombre quelconque sont utilisées. Le théorème de Pythagore pour des triangles 3-4(-5) et 6-8(-10) et la similitude pour des triangles rectangles sont exposés. 3 est pris comme valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre [3] , même si une meilleure approximation est connue.

Cet ouvrage est à signaler pour deux raisons principales.

(1) Un des commentaires (par ZHAO Shuang) contient une liste de 15 formules pour résoudre les triangles rectangles.

(2) Il contient la figure « de l'hypoténuse » *(xian tu)* qui fournit une preuve visuelle du théorème de Pythagore, sans explication.

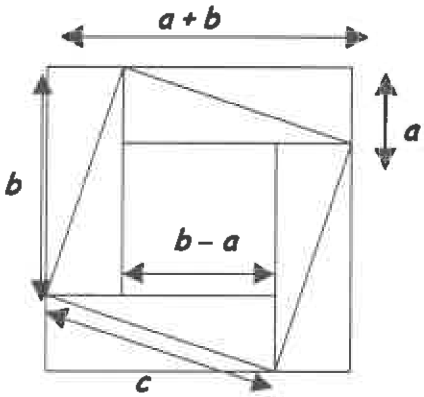
ZHAO Shuang (fin du III^e) a commenté ce passage en écrivant que « *le carré de l'hypoténuse contient 4 surfaces rouges et 1 surface jaune* » [4] . Autrement dit, le carré qui est ins-

[3] Ce rapport vaut π ; cette notation est anachronique. Les Chinois parlent en terme de rapport.

[4] Ces couleurs sont dans le texte original.

crit « obliquement », de côté *c*, dans le grand carré est constitué de quatre triangles rectangles rouges et d'un carré jaune *(voir figures)*. Ce qui permet de calculer son aire. De nos jours, on écrirait :

$$c^2 = 4\frac{a\,b}{2} + (b-a)^2$$



De plus, en appliquant le même raisonnement au « grand » carré (qui a pour côté $a + b$), il obtient ce que nous traduisons par : $(a + b)^2 = (b - a)^2 + 4\ a\ b$. Formule qui est intéressante lorsque connaissant la somme (ou la différence) et le produit de deux nombres, on veuille les connaître.

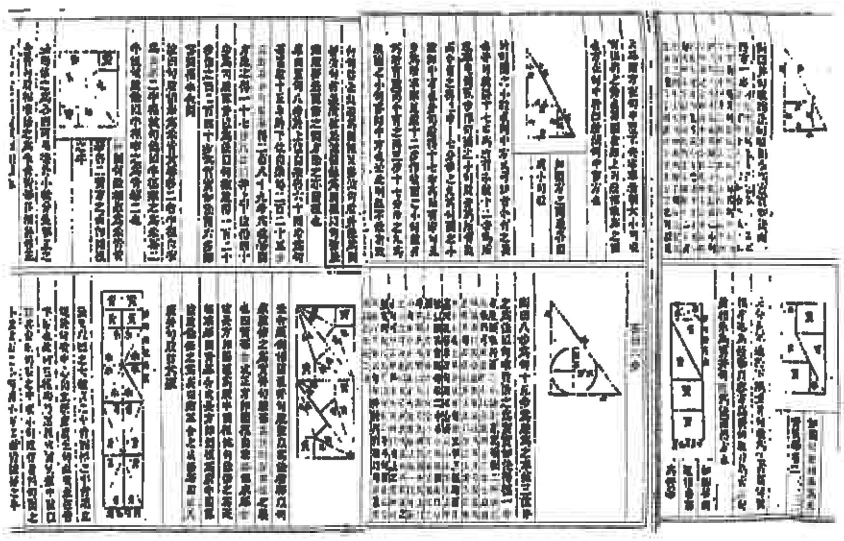
La « figure de l'hypoténuse » n'est pas très patente en tant que démonstration du théorème de Pythagore ; cela semble être plutôt une sorte de vérification en comptant les petits carreaux. On peut voir cette situation comme une sorte de boîte à outils de propriétés arithmétiques et algébriques avec, venant s'y surajouter, une superstructure graphique dont l'une serait, bien sûr, la justification et une autre, une aide à la mémorisation des formules car il est plus facile de se souvenir ce que l'on comprend que d'apprendre des mécanismes bruts.

1.3. Le Jiu Zhang Suan Shu (*JZSS*). 九章算術

En décomposant ce titre (*jiu* = 9, *zhang* = chapitre, *suan* = calcul et *shu* = technique), on peut le traduire par Les neuf chapitres sur les procédures de calcul. C'est à un processus de compilation (comme il a été écrit plus haut) que l'on doit sans doute cet ouvrage anonyme (comme beaucoup de Classiques). Bien qu'il ait exercé une influence sur la majeure partie des mathématiciens en Chine (et aussi dans les pays voisins) pour des siècles -on en trouve encore la marque dans des manuels d'enseignement utilisés dans les campagnes au début du XX^{e} siècle-, on ne sait quasiment rien des circonstances précises qui présidèrent à sa rédaction. On sait seulement qu'il a été compilé entre - 200 et 300 (et plus tard si l'on tient compte des commentaires).

A la différence des Éléments d'Euclide, le JZSS présente les connaissances mathématiques dans le contexte de problèmes, sous forme de procédures de calcul, ou algorithmes, et non pas sous forme de théorèmes. Le nombre de chapitres du JZSS ne repose pas sur une subdivision logique mais sur une répartition des problèmes de façon mnémotechnique. En effet, les mathématiques chinoises ne se divisent pas de la même façon interne que la nôtre (arithmétique, géométrie, algèbre, ...). Le JZSS est une collection de 246 problèmes qui comprennent toujours (1) l'énoncé du problème, (2) la réponse numérique et (3) la méthode qui doit être utilisée pour calculer la solution d'après les données. Chaque problème suit un plan invariable et ne contient ni définition, ni explication logique.

D'une façon générale, chaque chapitre du JZSS est construit dans un ordre qui dépend du degré de complexité mathématique (par exemple, le calcul d'aires planes précède celui des aires curvilignes). De même que tous les autres classiques, le JZSS fut l'objet de commentaires, dont certains sélectionnés par la tradition étaient appelés à accompagner le texte dans toutes ses rééditions.



Extrait[5] *du Chapitre 9 du* JZSS. Version illustrée du XVIIe siècle.

LIU Hui 劉徽 (env. 263) est un grand mathématicien, que d'aucuns nomment l' « EUCLIDE chinois ». On ne sait quasiment rien de lui. C'est patiemment qu'il commente et justifie, en y attachant une importance certaine, les résultats de cet ouvrage, explique des calculs avec la règle que nous appelons « règle de 3 » [6] . Tous, sauf un : celui de la preuve de la formule du volume d'une sphère mais cela ne diminue en rien le travail tant en qualité qu'en quantité qu'il a fourni. Modeste et sage, il écrit « attendre quelqu'un de meilleur pour compléter cette preuve » [7] . C'est dans ce contexte de validation qu'il suggère 3,14 comme valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre (par duplication de polygones réguliers dans un cercle), établit le principe d'exhaustion pour des cercles, suggère le principe de Cavalieri pour le volume précis d'un cylindre... Tout étudiant qui avait à se pencher sur le JZSS se penchait aussi sur les commentaires (indissociables) de LIU Hui.

Ce dernier n'a pas été le seul commentateur : on peut citer LI Chunfeng (et son équipe) au VIIe siècle, LIANG Shi, ... Toutes ces personnes ont validé les procédures données, s'interrogeant à chaque fois sur la question de la correction de celles-ci. C'est une autre pratique de la démonstration mathématique que celle que nous connaissons dans sa modalité dans les Éléments d'EUCLIDE.

---

[5] Le lecteur peut voir des figures inscrites ; nous en reparlerons dans un prochain chapitre...

[6] Ou aussi « règle de la quatrième proportionnelle »... Au passage, cette règle était connue aux XVIe et XVe siècles sous le nom de « règle chinoise » (règle *catayn*).

[7] Cela sera fait par ZU Chongzhi et son fils ZU Geng environ 250 ans plus tard.

Parmi les différentes opinions sur la composition du JZSS, celle qui apparaît la plus fiable dans la communauté scientifique actuelle est celle de LUI Hui. Ce dernier pense que le JZSS ont été rédigés par ZHANG Cang et GENG Shouchang (de la période des Han Occidentaux [8]), à partir de textes écrits avant la Dynastie Qin. Toujours est-il que le l'ouvrage qu'est le JZSS (bien qu'ayant connu, au cours des siècles, quelques différences d'édition) est maintenant une entité unique dont sont joints à jamais les commentaires de Liu Hui et les gloses de Li Chunfeng (du début de la Dynastie Tang).

Certaines notions mathématiques sont présentées dans cette brochure : le chapitre du JZSS dont chacune d'elle est tirée sera exposé à ce moment. Voici toutefois les grandes lignes de ces 9 chapitres. [1] *fang tian* [champ carré], relatif au calcul de l'aire des triangles, des trapèzes, des cercles ; il y a aussi tout un travail sur les fractions. [2] *su mi* [millet et grain décortiqué], relatif aux pourcentages et proportions. [3] *shuai fen* [parts décroissantes selon les rangs], relatif aux partages proportionnels et à la « règle de 3 ». [4] *shaoguang* [diminution de la longueur], où il s'agit de calculer la largeur d'un rectangle d'aire donnée et de longueur variable ; le chapitre finit par des extractions de racine. [5] *shang gong* [estimation des travaux publics], relatif au génie civil (volumes à édifier, ...). [6] *junshu* [distribution équitable de marchandises] ou paiement égalitaire de l'impôt en fonction du transport. [7] *ying bu zu* [trop et pas assez], relatif aux méthodes de fausses positions pour résoudre des équations ou des systèmes 2 × 2 linéaires. [8] *fangcheng* [champs carrés], relatif à des résolutions de systèmes carrés linéaires. [9] *gougu* [base hauteur] pour des résolutions de triangles rectangles.

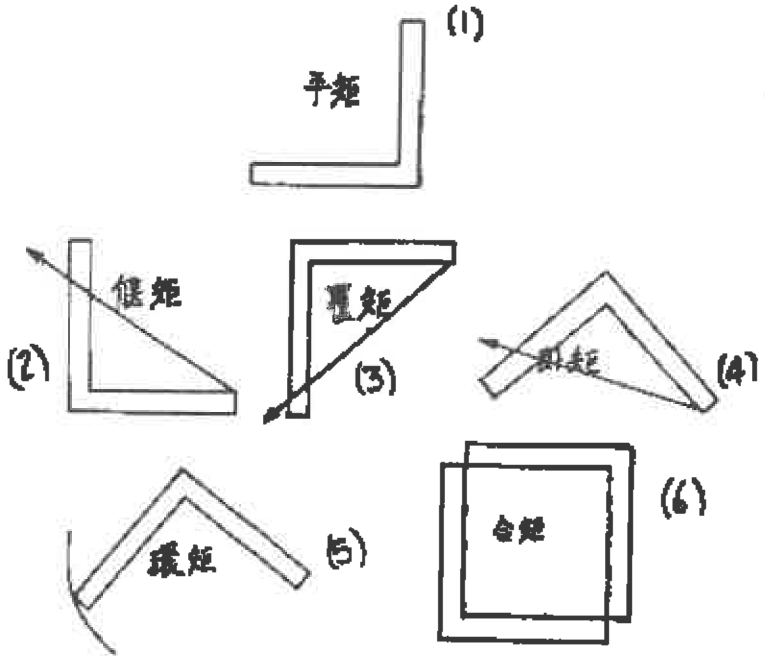
2. L'équerre.

L'instrument géométrique fondamental de l'arpenteur et de l'architecte chinois sous la dynastie des Han est l'équerre (*ju*).

Dans le Zhoubi Suanjing, ZHAO Shuang, commentateur de cet ouvrage, en explique les différents usages [9] : *« On place l'équerre horizontalement pour rendre droit* (1) *; on incline l'équerre pour viser la hauteur* (2) *; on renverse l'équerre pour mesurer la profondeur* (3) *; on couche l'équerre pour savoir l'éloignement* (4) *; on fait tourner l'équerre pour faire le cercle* (5) *; on unit les équerres pour faire le carré* (6). »

[8] Voir la chronologie chinoise en annexe.

[9] Cité dans la thèse de Robert SCHRIMPF *(op. réf.)*. Les nombres entre parenthèses indiquent le report de l'explication à la figure correspondante ci-dessous.



Engendrant le carré (*yuan*), forme de la terre, et le cercle (*fang*), forme du ciel, l'équerre permet de mesurer l'univers [10] . Aussi l'équerre de référence est-elle définie par deux nombres, 3 (nombre du ciel) et 4 (nombre de la terre), mesurant respectivement le *gou* et le *gu*, les petit et grand côtés de cette équerre fondamentale. De plus, les nombres pairs (respectivement impairs) appartiennent à la série terrestre (respectivement céleste). ZHAO Shuang explique combien les dimensions de cette équerre sont liées à celles du carré et du cercle fondamentaux : « *Le diamètre du cercle étant de 1, le tour est de 3 ; le côté du carré étant de 1, le périmètre est 4. En déroulant le tour du cercle, on fait la base* (gou), *en développant le périmètre du carré, on fait la hauteur* (gu), *on les réunit en un angle unique, ils se joignent en diagonale par une corde* (xian) *de 5.* » Un triangle rectangle est donc explicitement défini par la seule donnée des *gou* et *gu*. L'hypoténuse a une importance moindre que celle des deux autres côtés ; c'est plutôt une ligne géométrique. L'équerre est ainsi le support matériel de la règle du *gougu* [11] . C'est pourquoi on ne trouvera pas de terme chinois correspondant au terme grec τριγωνον.

3. Démonstration mathématique en Chine.

3.1. Le terme « démonstration ».

Le mathématicien HARDY a écrit que « *les mathématiques grecques sont seules vraies* ». Pour nous, héritiers de la rigueur d'Euclide mise en avant dans ses Éléments, il est difficile de concevoir une mathématique dépourvue de définitions, d'axiomes, de raisonnements hypothético-déductifs, de conjonctions comme « donc », « or », « de plus », ... Contrairement

---

[10] Cet ouvrage explique que « *la figure carrée correspond à la terre, la figure ronde ou le cercle correspond au ciel. Le ciel est le cercle ; la terre est le carré.* »

[11] Appelée chez nous... « théorème de Pythagore ». Voir le chapitre correspondant.

aux textes mathématiques grecs que nous connaissons, les chinois ne proposent pour démonstrations que des algorithmes. Ceux-ci sont structurés et tiennent lieu de validation à la règle. Le but est d'expliquer l'utilisation des méthodes pour résoudre des problèmes spécifiques.

Sur le fond, la démarche de LIU Hui est très proche de celle d'EUCLIDE dans ses Éléments dans ce que nous appelons de nos jours une « preuve » : ils cherchent tous les deux à convaincre leur lecteur sur la validité du propos écrit juste avant.

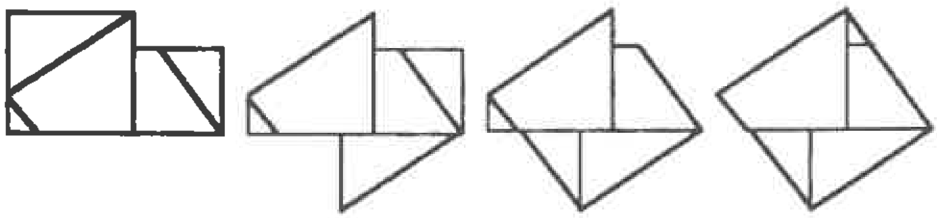
Sur la forme, il y a une différence certaine :

- dans les Éléments, nous rencontrons beaucoup de termes tels αποδειξις, επιδειξις, δεικνυμι, traduits [12] par « preuve », « démonstration », ancrés dans une démonstration aristotélicienne ;
- dans la culture mathématique chinoise, et donc chez LIU Hui, aucun mot ne correspond à « preuve » ; la démonstration n'a jamais joué le rôle normatif qu'elle a eu dans sa période grecque.

Par leurs méthodes de calcul, les ouvrages chinois surpassent de loin leurs contemporains grecs. Leurs remarquables [13] procédures de calcul reposaient sur des considérations géométriques et non pas algébriques. C'est particulièrement frappant quand on observe les résolutions d'équations dans les ouvrages anciens.

Un lecteur qui reste dans une démarche « mathématiques grecques » aura l'impression que les mathématiques chinoises ne sont qu'un ensemble de recettes de calcul. Pourtant, comme le montreront les divers exemples de cette brochure, les résolutions ont abouti à des résultats parfois complexes et non triviaux.

Un argument clé de justification, comme nous l'avons vu plus haut avec la « figure de l'hypoténuse », est la dissection de figures et le principe d'invariance des aires (un jeu de puzzle). Ainsi, la démonstration du théorème de PYTHAGORE [14] peut être vue [15] ainsi :



Les chinois détestent la lourdeur des raisonnements formels et préfèrent se faire comprendre à demi-mot. D'ailleurs, cette horreur du discursif va de conserve avec la prédilection du concret ; leurs ouvrages mathématiques le montrent tout à fait lorsque le seul cas particulier suffit pour énoncer le général, lorsque les découpages judicieux permettent de constater immédiatement l'exactitude des solutions, ...

[12] Respectivement : montrer (dans le but de démontrer), montrer (de façon élogieuse) et « je montre » (dans le but de prouver). Tous ces mots ont la racine δεικ en commun.

[13] Le lecteur pourra apprécier tout au long de la brochure !

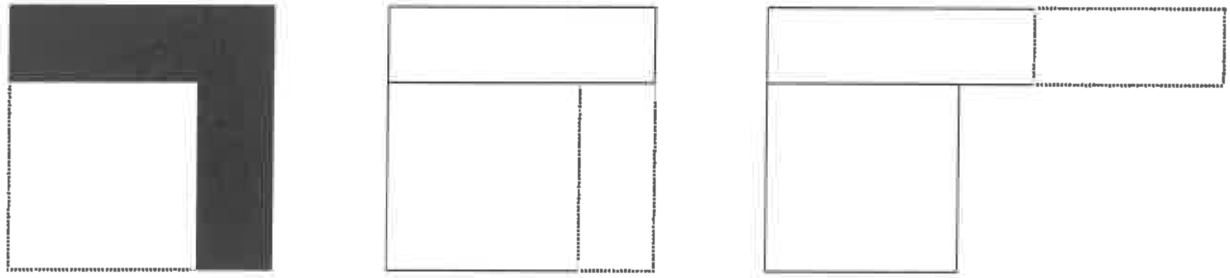
[14] Pour ce théorème, voir le chapitre correspondant de cette brochure.

[15] Illustration tirée de l'article d'Evelyne BARBIN *(op. réf.)*.

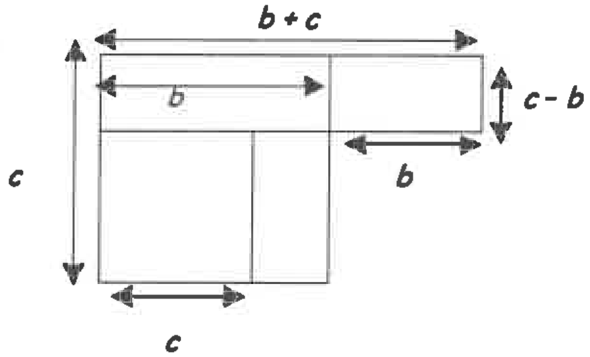
3.2. Un nouvel exemple.

Il s'agit de la « figure du charpentier » (*ju*).

Dans un carré (figure de gauche) est inscrit un autre carré : lorsqu'on soustrait le petit carré du grand, il reste (coloriée) une équerre, un « gnomon ». On coupe (figure du centre) la partie inférieure de cette équerre (un rectangle) pour la coller (figure de droite) au bout de la partie supérieure (un autre rectangle qui a la même largeur).



Que venons-nous d'établir ?



L'aire du gnomon vaut $c^2 - b^2$.

Elle vaut aussi l'aire du rectangle de côtés $b + c$ et $c - b$.

C'est-à-dire : $c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$.

3.3. Un contre-exemple ?

Sur cette méthode de découpe, le lecteur pourrait contester en arguant que ces techniques de dissection manquent de rigueur en s'appuyant sur l'illustration [16] suivante :

Le carré de dimension 8 (cm) est découpé en 2 triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 5 et deux trapèzes dont les bases parallèles mesurent 3 et 5. On assemble ces quatre pièces en un rectangle dont les côtés sont 5 et 5 + 8 = 13. La surface du carré est 64 (cm^2), celle du rectangle est 65. Conclusion : 64 = 65 !

[16] L'auteur de cette manipulation n'est autre que Lewis CAROLL. L'œil averti du lecteur verra que la différence (de 1 cm^2) se situe sur la (fausse) diagonale.

Toutefois, il n'est connu aucun exemple dans toute l'histoire chinoise d'erreur mathématique due à un « mauvais » découpage (du type précédent). C'est aussi le fruit d'un travail fait par tous les commentateurs qui ont toujours validé les méthodes et en ont proposé d'autres lorsqu'ils n'étaient pas d'accord [17].

4. Encore quelques brins d'histoire…

Cela a été dit dans l'avant-propos, les thèmes de cette brochure sont essentiellement tirés des Dix Classiques du Calcul. Toutefois, pour que le lecteur ne reste pas sur sa faim et ait envie de lire d'autres ouvrages (qu'il trouvera en bibliographie), voici en (très) grandes lignes [18] une description des décennies ultérieures :

La période allant du VII^e au XVI^e siècle a vu la création et le développement d'une algèbre proprement chinoise ainsi que les premières apparitions de la trigonométrie. On peut citer les très riches Ceyuan Haijing [Miroir maritime des mesures du cercle] de LI Zhi (en 1248) [19], Shushu jiuzhang [Neuf sections du livre des nombres] de QIN Jiushao (en 1247) et Siyuan Yujian [Miroir de jade des quatre inconnues] de ZHU Shijie (en 1303), …

Ensuite, et jusqu'au XIV^e siècle, les ouvrages mathématiques sont constitués principalement des commentaires des ouvrages des siècles antérieurs, dont les méthodes sont éclaircies et développées, les exigences des grands travaux ne nécessitant pas de nouvelles méthodes mathématiques. Le perfectionnement des calculs sur les calendriers occupait un petit nombre de savants.

Les mathématiques chinoises déclinèrent à partir ce moment en une « mathématique du commerce ». D'ailleurs, c'est à cette période qu'apparaît le fameux boulier. Par contre, confondre les mathématiques chinoises avec l'utilisation d'un boulier est largement abusif puisqu'elle symbolise justement le début du déclin des mathématiques chinoises. La chute des mathématiques au XIII^e siècle est due, en partie, au rôle mineur qu'elles jouaient dans la société chinoise. Elles n'étaient considérées qu'à partir du moment où elles débouchaient sur des résultats pratiques : c'est pourquoi elles ne purent pas se développer et s'étiolèrent. Le Suanfa tongzong (Somme des règles de calcul) est le dernier ouvrage important proprement chinois publié avant l'apparition des ouvrages occidentaux.

La dynastie des Qing (dès le XVIIe siècle) a connu un nouvel élan. Les Jésuites atteignent la Chine : celle-ci bénéficie d'ouvrages mathématiques européens *(xiru)*. La Chine emprunte également à l'Europe de nombreuses techniques de calcul : calcul écrit, réglettes de NEPER, … Matteo RICCI (1552-1610) travaille sur le problème des calendriers et, aidé, traduit des écrits latins (Éléments d'Euclide) en chinois. Les figures géométriques sont une nouveauté et accompagnent dorénavant les écrits. MEI Wending (1633-1721), en étudiant ces travaux, développe la planimétrie, la trigonométrie sphérique, … Les potentialités internes aux mathématiques chinoises furent développées par d'autres. Les mathématiciens japonais, appréciant leur science pour elle-même et non pour son éventuelle utilité pratique,

---

[17] LIU Hui, ne se satisfaisant pas de 3 comme valeur de « π », en a déterminé une plus précise.

[18] Comment résumer en quelques lignes de si grandes richesses mathématiques ?

[19] Le lecteur intéressé se plongera dans la thèse de Karine CHEMLA *(op. réf.)*.

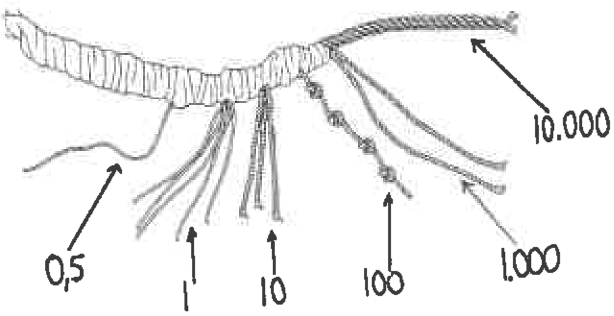
affinèrent certaines techniques chinoises du XIII^e siècle. Le protestant Alexander WYLIE (1815, 1887), en contact permanent avec LI Shanlan (1811, 1882), propose une synthèse sur les mathématiques chinoises. Ce dernier, petite parenthèse, a eu du mal à introduire ces « nouvelles » mathématiques ; il utilisa comme ses aînés des caractères chinois (à π est associé un caractère correspondant à *périphérie*, à e (celui de l'exponentielle), un caractère correspondant à *bégaiement*, au signe intégral un caractère correspondant à *accumulation*). C'est là le début des échanges internationaux mathématiques, même si l'approche des mathématiques reste différente pour chaque culture (par exemple, les textes européens ne présentent pas le contexte des calculs développés). Notons l'apparition seulement au début du XX^e siècle des chiffres arabes dans les textes chinois.

NUMERATION.

1. L'homme et son nombre.

1.1. Les cordelettes.

Dans les tout premiers temps, alors que l'écriture n'est pas encore présente, celle-ci est remplacée par le nouage de cordelettes. De nombreux livres font mention de cordes nouées, comme le Yijing [1] : « *Dans la haute antiquité, nouer les cordelettes servait à gouverner.* » Avant l'écriture, le nouage en tenait lieu. Plus précisément, les nombres sont exprimés à l'aide de différentes façons de nouer des cordelettes (de différentes épaisseurs).



Il y a [2] , de gauche à droite, une corde représentant la fraction 1/2, cinq fibres représentant chacune une unité, trois cordes représentant chacune une dizaine, quatre nœuds représentant chacun une centaine, deux cordes moyennes représentant chacune un millier et une grosse corde représentant une dizaine de milliers. Ainsi, sur cette cordelette est inscrit le nombre $1 \times 10\,000 + 2 \times 1\,000 + 4 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \times 1 + 0{,}5 = 12\,435{,}5$.

1.2. Les doigts de la main.

Enfin, il faut mentionner une méthode plus populaire utilisant les doigts de la main : chaque doigt est partagé en 9 (à l'aide des phalanges : une combinaison « haut, milieu, bas » avec « gauche, milieu, droite ») et le doigt désigné représente la position du chiffre dans le nombre (chiffre des centaines, des dizaines, des unités, des dixièmes et des centièmes). Au-delà de la simple présentation du nombre, il y a un aspect plus que pratique : il est dit que cette méthode permet de faire des calculs « les mains dans les manches » et sur les

[1] L'un des cinq Classiques de la civilisation chinoise ; il est explicitement indissociable d'une forme de divination. On y trouve le système de numération binaire et, en particulier, les 64 hexagrammes (figures composées de six lignes pleines (— *yang*) ou brisées (- - *yin*), héritage de l'achilléomancie, représentant les situations possibles dans la vie et, de là, par transformation, la mutation de cette situation). La citation est tirée du *Grand Commentaire* de cet ouvrage.

[2] D'après une illustration d'un ouvrage japonais, cité dans l'ouvrage de YABUUTI Kiyosi *(op. réf.)*.

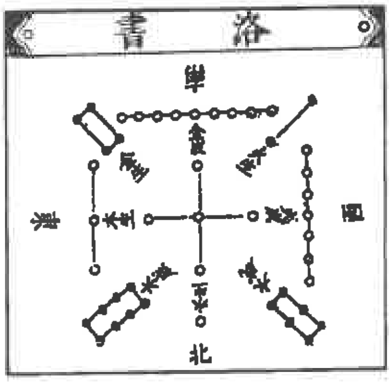
marchés clandestins de nos jours (appelés aussi « marchés fantômes »), un vendeur peut se voir proposer le prix d'un article, discrètement, en communiquant par des signes de la main, sans que ce dernier s'ébruite chez les autres commerçants...

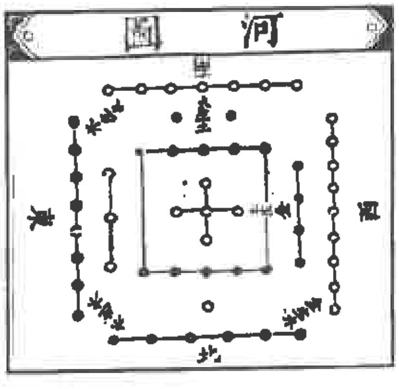
Cette méthode se retrouve dans le Suanfa tongzong (Traité systématique des méthodes mathématiques) de CHENG Dawei (1592).

1.3. Des carrés magiques.

Tout comme chez les Pythagoriciens pour lesquels tout était nombre, il y avait chez les Chinois de l'Antiquité une essence mystique des nombres. Un tel lien entre nombres et univers peut se lire, par exemple dans le Yijing, livre qui interprète les phénomènes de l'univers ou humains à l'aide de nombres. Ainsi les nombres impairs inférieurs à 10 sont considérés comme des nombres « *yang* » (ou « célestes »), tandis que les pairs sont « *yin* » (ou « terrestres »). Il est aussi écrit « *le nombre du ciel et de la terre est 55* », ce dernier nombre étant égal à la somme des entiers de 1 à 10. C'est, très probablement, pour ce lien que les premiers érudits les ont étudiés.

Dans ce même traité, il est écrit que « *du Fleuve jaune sortit le Diagramme du fleuve (Hetu), de la Rivière Luo sortit l'Inscription de la Luo (Luoshu)* ». Ces deux diagrammes (sans qu'une forme précise leur soit donnée), représentés ci-dessous, sont communément considérés comme la base des 8 trigrammes (construits à partir de trois traits *yin* ou *yang* dessinés en pile). Selon la légende, un cheval-dragon sortit du Fleuve jaune avec sur son dos le premier diagramme et une tortue sortit de la Rivière Luo avec, sur elle, le second.





Au VI^e siècle, ZHEN Luan explique que chacun des neuf chiffres est associé à une salle de la maison royale de telle sorte que *« 2 et 4 sont les épaules, 6 et 8 les pieds, 3 la gauche, 7 la droite, 9 la tête, 1 la chaussure et 5 le centre »* [3] . Plus tard, sous la Dynastie des Song, et plus précisément au XI^e siècle, le savant ZHU Zhen remplaça, le premier, ces figures par des nombres (comme outils de calcul). Le lecteur notera que le Diagramme du Fleuve contient les nombres de 1 à 9 et l'Inscription de la Rivière Luo, les nombres de 1 à 10 ; les nombres pairs sont représentés en noir, les nombres impairs, en blanc. Le Diagramme du Fleuve est un carré magique [4] de somme 15. Curieusement, pendant la Dynastie des Song du Sud, les deux noms ont été échangés ! Toujours est-il que, d'une part, ce carré magique a, encore aujourd'hui, une influence sur tout ce qui touche la superstition et que, d'autre part, ce lien fort du Yijing entre nombres et univers, montré plus haut, a suscité des travaux mathématiques : par exemple, YANG Hui (vers 1270) expose la construction des carrés d'ordre 3 et 4 (« Le Diagramme des 16 fleurs »), en donne d'autres (sans justification) comme le « Diagramme des 100 enfants » (d'ordre 10) et fournit des figures de cercles magiques entrelacés. Enfin, il y aura, indirectement, le travail sur les calendriers [5] , entre autres.

1.4. Les écailles de tortues.

Les caractères chinois (dont ceux représentant les chiffres) voient le jour vers le milieu de la dynastie Shang (vers – 1600). Les plus anciennes traces connues (pourtant découvertes seulement en 1899) sont des inscriptions divinatoires sur des os et des écailles de tortue (*jiaguwen*) [6] .

On trouve deux systèmes de numération. Le premier est lié au calendrier, du moins à la façon de compter les jours par blocs de 60, puis les mois lunaires et les années : une première série de 10 symboles (se référant aux 10 troncs célestes *(gan)*) et une seconde série de 12 symboles (se référant aux 12 rameaux terrestres *(zhi)*) combinées donne un « cycle sexagésimal ». Toutefois, ce système (qui ne correspond à aucun cycle astronomique naturel) n'a jamais été utilisé dans des calculs (mais dans la datation).

Intéressons-nous au second. Quatorze [7] signes sont utilisés : neuf pour représenter les nombres de 1 à 9, quatre pour les nombres 10, 100, 1 000 et 10 000 et un pour « et » (parfois utilisé). Dans les *jiugawen*, on compte avec un système décimal ; il n'est écrit aucun nombre supérieur à 10 000. Pour écrire un nombre « composé », on utilise une combinaison des signes précédents ; ainsi le symbole composé du signe 100 en bas et du signe 5 en haut représente le nombre [8] 500. Dans le même esprit, 734 est écrit, verticalement, « 7 100 »

---

[3] Cité dans le livre anglais de J.-Cl. MARTZLOFF *(op. réf.)*, p. 363.

[4] La somme des nombres sur chaque ligne, colonne et diagonale est constante.

[5] Voir le chapitre traitant du théorème des restes.

[6] En effet, des questions sont écrites sur des omoplates de bovins ou des carapaces de tortues. Celles-ci sont approchées d'un feu, ce qui produit des craquelures, interprétées comme signes divinatoires.

[7] Ce nombre 14 ne tient pas compte des évolutions graphiques de ces caractères.

[8] Il n'y a guère qu'un pas à franchir pour arriver à notre système de position : il suffit de supprimer les parties représentant les puissances de 10...

(« et ») « 3 10 » (« et ») « 4 », utilisant les principes additif et multiplicatif. Dans ce système, 30 000 est le plus grand nombre connu.

Ce système s'est rapidement développé sous la dynastie des Shang [9] , probablement grâce à l'expansion économique d'alors qui invite à créer un système de notation, plus maniable : il fallait déjà utiliser des livres où étaient enregistrés des nombres.

On peut aussi citer les *jiajiezi*. On appelle ainsi tout caractère d'écriture employé dans un sens nouveau, c'est-à-dire qu'il n'avait pas à l'origine. C'est l'un des six procédés qui ont permis la formation de caractères chinois. Par exemple, les symboles du scorpion et de la myriade [10] (*wan*) sont identiques, peut-être parce que la multitude de ses petits sur le dos de la femelle fait penser à un nombre immense. De même, celui du doigt et de 10 sont identiques, les deux mains réunies comptant 10 doigts.

1.5. Une suite linéaire.

La numération des *jiugawen* s'est développée dans les temps. L'étape suivante, qui remonte à environ 2 500 ans (pendant la dynastie des Zhou occidentaux), voit apparaître des inscriptions sur bronze. Les caractères changent de forme (à part 1, 2 et 3) [11] . Dans le même temps, le « et » additif disparaît, les nombres sont écrits en suite linéaire de caractères et un nouveau caractère, *yi* [12] , apparaît (tantôt pour dix mille tantôt pour cent millions, suivant que le nombre est inférieur ou supérieur à cent millions) et, du coup, de plus grands nombres sont écrits. En chinois, les nombres sont décomposés toutes les quatre puissances de 10, et non toutes les trois, comme dans les langues occidentales. Il y a aussi une nouvelle forme de lecture des nombres.

- Pour les nombres inférieurs à cent millions.

Les traités font état de 13 caractères numériques fondamentaux :

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	10^3	10^4

Ces nombres s'écrivent respectivement *yi, er, san, si, wu, liu, qi, ba, jiu, shi, bai, qian, wan.*

Pour écrire un nombre, on énumère les dizaines de mille, les milliers, les centaines, les dizaines et les unités qu'il contient (les illustrations suivent) :

138 : (1 fois) 100, 3 (fois) 10, 8 *bai san hi ba*

---

[9] La période Shang se situe vers la fin du XIe siècle avant notre ère.

[10] Une myriade d'unités en compte 10 000. Le terme chinois est ainsi traduit par un seul terme en français (et non pas par les deux de « dix mille »).

[11] Des exemples de l'évolution des caractères seront trouvés dans les livres de J.-Cl. MARTZLOFF *(op. réf.)*.

[12] Même s'il est retranscrit en pinyin comme le *yi* du « un », l'idéogramme est différent...

1 035 : (1 fois) 1 000, 3 (fois) 10, 5

111 836 : [1 (fois) 10 (et) 1] (fois) 10 000, 1 (fois) 1 000, 8 (fois) 100, 3 (fois) 10, 6

soit $(10 + 1) \times 10\,000 + 1 \times 1\,000 + 8 \times 100 + 3 \times 10 + 6$

百	三	十	八
100	3	10	8

千	三	十	五
1000	3	10	5

一	十	一	萬	一	千	八	百	三	十	六
1	10	1	10^4	1	1000	8	100	3	10	6

Ce système est très proche du système de numération positionnel décimal (qui, lui, ne recourt qu'à 10 symboles). Il ne fait pas cas de la valeur 0 ; nous y reviendrons.

L'usage veut que l'on mentionne aujourd'hui obligatoirement zéro [13] *(ling)*, dès qu'une ou des puissances de 10 viennent à manquer dans l'expression d'un nombre, afin d'éliminer toute erreur d'interprétation. Ainsi 504 est décomposé en « cinq cent zéro quatre » *(wu bai ling si)*, 1 058, en « un mille zéro cinq dix huit » et 2 005, en « deux mille zéro cinq ». Mais il ne s'agit là que d'un usage tardif dans l'histoire de la numération chinoise.

- <u>Nombres entiers supérieurs à cent millions.</u>

Ces nombres n'apparaissent qu'exceptionnellement dans les traités et nécessitent le recours à des unités particulières pour éviter une trop grande répétition du caractère *wan*. Un caractère spécial apparaît donc pour 100 000 000 (= $10\,000^2$). On décompose en centaines de millions, centaines de mille, dizaines de mille, milliers, centaines, dizaines et unités.

◊ <u>Dans le JZSS.</u>

Prenons le cas de [14] 1 644 866 437 500. Ce nombre est égal à :

$$(10\,000 + 6\,000 + 400 + 40 + 8) \times 100\,000\,000 + (6\,000 + 600 + 40 + 3) \times 10\,000 + 7\,000 + 500$$

(ou encore 16 448 centaines de millions 6 643 dizaines de milliers 7 milliers 5 centaines) et s'écrit mot à mot : 1 - myriade - 6 - milliers - 4 - centaines - 4 - dizaines - 8 - centaines de millions - 6 - milliers - 6 - centaines - 4 - dizaines - 3 - myriades - 7 - milliers - 5 - centaines.

En caractères chinois :

一萬六千四百四十八億六千六百四十三萬七千五百

◊ <u>Dans le Ce Yuan Hai Jing (Reflets des mesures du cercle sur la mer)</u> [15].

---

[13] 零 ; la myriade (10^4) s'écrit aujourd'hui 万.

[14] Il se trouve dans le problème 4-24. Il a aussi la particularité d'être le plus grand nombre rencontré dans les <u>Classiques de Calcul</u>.

[15] Écrit par LI Zhi en 1248. On y trouve une algèbre des fractions rationnelles et des polynômes généralisés (incluant des puissances négatives de l'inconnue).

Le nombre 717 445 350 000 apparaît dans le problème 7-2 ; il se décompose comme indiqué plus haut :

$$((7\,000 + 100 + 70 + 4) \times 10\,000 + (4\,000 + 500 + 30 + 5)) \times 10\,000$$

◊ Dans le Shushu jiyi (Mémoire sur l'art des nombres) [16] :

Il y a 10 unités d'ordre supérieur, dites « les 6 degrés » (*shi deng*), nommées *yi, zhao, jing, gai, zi, rang, gou, jian, zheng* et *zai*. Leurs valeurs diffèrent selon des lois de filiation dans lesquelles il y a 3 degrés :

	yi	*zhao*	*jing*	*gai*	...	*zai*
Degré inférieur	10^5	10^6	10^7	10^8	...	10^{14}
Degré moyen	10^8	10^{16}	10^{24}	10^{32}	...	10^{80}
Degré supérieur	10^8	10^{16}	10^{32}	10^{64}	...	$10^{4\,096}$

Il n'y a pas de caractère pour les nombres inférieurs à 1 (ce qui revient à travailler avec des puissances de 10 négatives) [17] .

1.5. Et puis…

Après les Han (de – 206 à 220), la forme des nombres (c'est-à-dire leur écriture graphique) ne change plus guère. Seule la décomposition des nombres connaît quelques minimes variations. A l'époque des Ming (de 1368 à 1644), un caractère particulier, *ling*, apparaît et est utilisé à la place vide des unités, comme une sorte de zéro.

Au XII^e^ siècle, dans le Sud de la Chine, des améliorations graphiques apparaissent et des mathématiciens, comme QIN Jiushao, emploient de nouvelles écritures, alors que dans le Nord, le système n'est pas modifié. C'est-à-dire que, entre le Nord et le Sud, différents systèmes du numération sont employés. Ce qui semblerait indiquer une absence d'échanges de savoir entre ses deux régions.

Enfin, au XVII^e^ siècle, les Jésuites importent les techniques européennes de calcul et, en particulier, l'écriture indo-arabe des nombres. Petit à petit, ces deux types d'écriture (avec des mots et avec des chiffres) se côtoient.

De nos jours, les nombres chinois ont aussi une autre forme d'écriture, appelée *guan zi* (« chiffres officiels ») ; elle est utilisée par exemple dans les cas où les chiffres ne doivent pas être contrefaits (actes publics, chèques, …) [18] .

Forme complexe :	壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒	捌	玖
Forme simple :	一	二	三	四	五	六	七	八	九
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

[16] Son auteur, XU Yue, a vécu au début du troisième siècle. Il a été compilé et commenté par ZHEN Luan vers 550.

[17] Voir le paragraphe 6.

[18] Tiré de l'ouvrage de J. Cl. MARTZLOFF *(op. réf.)*.

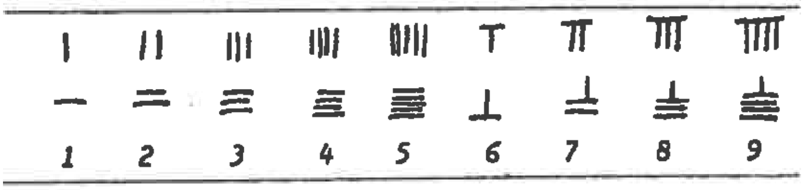
Actuellement, en Chine, l'écriture des nombres tend à être la même que la nôtre : les Chinois utilisent les chiffres arabes. Ils utilisent toutefois les séparateurs de dix milliers (nous utilisons pour notre part les milliers) dans les écritures numéraires.

2. Menées à la baguette…

Parallèlement à ces écritures, une autre est née : celles des baguettes. Les calculateurs chinois s'en servent, à l'époque des Printemps et Automnes (de – 722 à – 481), le plus souvent en bambou (ce que l'on peut penser, à travers les trois caractères chinois les désignant, *suan*, *chou* ou *ce*). Même si elles sont utilisées comme instrument de calcul sur la période commençant à la dynastie des Han et finissant à celle des Yuan (de 1279 à 1368), et seront alors remplacées par le boulier, elles servent à représenter des nombres jusqu'au début du… XXᵉ siècle. Une description (dans les *Chapitres sur les tubes musicaux et l'astronomie* du Livre des Han) explique que leur diamètre est un sixième de pouce, qu'elles sont longues de 6 pouces et que 271 baguettes placées côte à côte forment un hexagone et tiennent dans une main [19] .

Ces calculateurs créent un système spécifiquement adapté au maniement scientifique des nombres. Cette notation n'utilise plus que neuf symboles - pour les chiffres de 1 à 9 - et représente le 0 par l'absence ou la place vide. Les chiffres sont représentés par des baguettes posées horizontalement ou verticalement, déplacées pendant les calculs.

Il y a deux manières (graphiquement distinctes) d'écrire [20] les chiffres de 1 à 9 :



Cette disposition est expliquée dans deux livres (de référence), le Classique mathématique de SUNZI (rédigé autour du Vᵉ siècle) et le Classique mathématique de XIAHOU Yang.

On peut lire dans le premier : « *Dans la méthode de calcul, sachez d'abord le rang. Un est vertical, dix est horizontal, cent est debout, mille est gisant. Mille et dix se regardent, dix mille et cent se regardent.* »

C'est très proche de ce qui est écrit dans le second : « *Un est vertical, dix est horizontal, cent est debout, mille est gisant. Mille et dix se regardent, dix mille et cent se correspondent.* » Mais il est dit de plus : « *A partir de six, cinq est placé au-dessus, perpendiculairement. Six ne s'accumule pas dans les calculs, cinq ne se dispose pas.* » [21]

---

[19] De plus (selon R. SCHRIMPF), le texte ajoute que ces dimensions sont en rapport avec celles des tuyaux sonores fondamentaux.

[20] En fait, les bâtonnets représentés sur papier n'avaient pas tous la même longueur.

[21] On utilise bien cinq baguettes pour représenter 5. D'autres civilisations ont introduit un symbole : les Romains, par exemple, ont utilisé V. Pour les nombres supérieurs, on utilise le complément à 5 : 6 = 5 + 1, d'où sa représentation, VI.

Ce système de numération est basé sur deux principes : (1) la position et le rang des chiffres et (2) l'alternance.

Les symboles de la première série sont utilisés pour noter les unités, les centaines et, de façon plus générale, les puissances paires de 10, tandis que les symboles de la seconde le sont pour les dizaines, les milliers et, plus généralement, les puissances impaires de 10. L'alternance des orientations a été mise au point probablement pour éviter la confusion lorsque plusieurs chiffres sont accolés.

Pour écrire le nombre 6 572, on écrit, en commençant par la droite, 2 (chiffre des unités) vertical, 7 horizontal (dizaines), 5 vertical (centaine) et 6 horizontal (millier).

Dans l'écriture de 203, on notera la place « vide » du chiffre des dizaines ; celle-ci est rapidement repérée par le fait que les baguettes des centaines et des unités sont toutes les deux verticales.

Rien ne laisse supposer qu'à l'époque existait une marque spéciale pour un « zéro » qu'une place vide. L'alternance des positions des baguettes (verticales ou horizontales) permet de lever dans certains cas cette équivoque (et de marquer sans ambiguïté possible un « zéro ») : il suffit en effet de trouver deux chiffres successifs avec la même position pour en déduire qu'il y a une place vide entre les deux. De même, lorsque le dernier chiffre du nombre a une position verticale, cela montre que le nombre n'a pas de chiffre pour les unités. Du coup, cette absence de zéro à la fin du nombre ne permet pas de distinguer 1, 100 ou 10 000 dans l'écriture « | ». Le lecteur, en fonction du contexte, détermine la valeur.

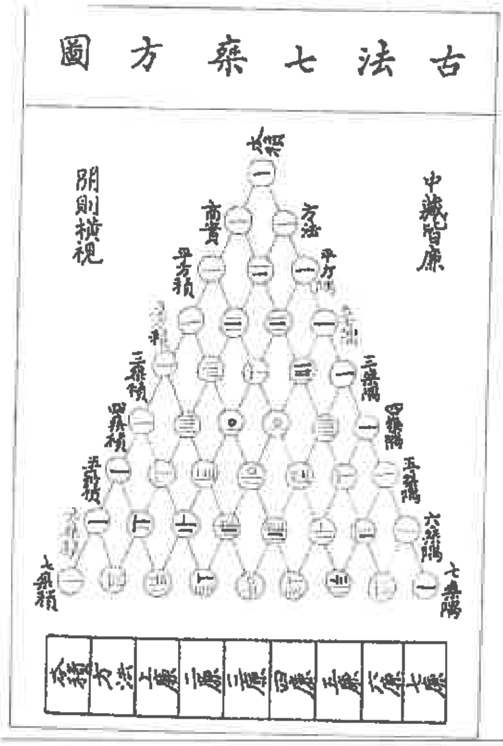
Ce qui est sûr, c'est que les mathématiciens chinois commenceront à utiliser le zéro (sous forme d'un petit cercle) entre les XII^e et XIII^e siècles ; il n'y aura plus d'ambiguïté possible quant aux nombres. Dès lors, cette notation avec des baguettes deviendra positionnelle. Ce qui n'empêchera pas certains de modifier la notation des chiffres [22] .

On connaît plusieurs écritures pour un nombre décimal. Par exemple, QIN Jiushao écrit un symbole représentant l'unité de mesure entre la partie entière et la partie décimale.

Un triangle bien connu… Deux versions du triangle de PASCAL ». L'illustration de gauche *(voir ci-dessous)* est tirée du Siyuan yujian (Miroir de jade des quatre inconnues) de ZHU Shijie (vers 1303) ; les nombres sont représentés avec les baguettes à calculer. Un œil averti verra une « coquille » dans l'avant-dernière ligne… Celle de droite est tirée du Yongle dadian (Grande encyclopédie de l'ère Yongle) (1407) ; les nombres sont représentés par leur forme écrite.

---

[22] J.-Cl. MARTZLOFF explique ces " signes secrets " (*an ma*) (op. réf.).



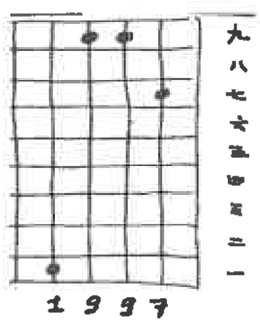
3. Ne pas perdre la boule...

Les quatre opérations usuelles ainsi que l'extraction d'une racine cubique, la résolution d'un système carré ou d'une équation polynomiale se faisaient donc avec ces baguettes. LIU Hui, au III^e siècle, les a employées pour approcher « π » avec 6 décimales exactes...

Ceci dit, leur usage n'était pas des plus pratiques. On peut imaginer, par exemple, les militaires s'arrêter en manœuvres pour étaler leurs baguettes à terre et faire leurs calculs. C'est pourquoi d'autres moyens ont été cherchés pour les remplacer : ainsi naissent les systèmes de boules. Ainsi, ZHEN Luan (vers 550) donne plusieurs méthodes dans le Shushu yiji (Mémoire sur l'art des nombres), dont les perles à calculer et le calcul mental. Nous allons nous intéresser à quelques-uns de ses systèmes, ayant en commun la représentation [23] positionnelle décimale des nombres.

Dans le Shushu yiji, le Maître de Tien Mou, interrogé sur la représentation des nombres, mentionne plusieurs systèmes permettant de les matérialiser (parmi beaucoup d'autres dont il ne souvient plus) : celui de l'Accumulation, de l'Unité Suprême, des 2 symboles, des 3 pouvoirs, des 5 éléments, des 8 trigrammes, des 9 palais, de la tortue, ...

◊ Première représentation : Le système *tai yi* (L'unité suprême).

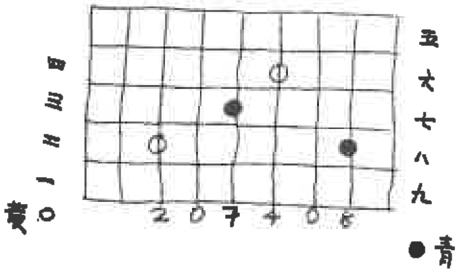


[23] Les dessins sur ce point sont tirés de l'article référencé de LIU Dun.

Le plateau est composé de neuf rainures horizontales (chacune correspondant à un chiffre) sur lesquelles on place les boules ; les boules sont placés les unes après les autres, tout comme sont écrits les chiffres dans le nombre, mais à des « hauteurs » différentes. [24]

◊ Deuxième représentation.

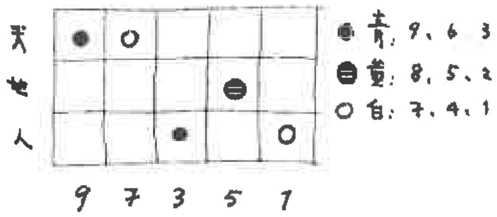
On utilise des boules de deux couleurs différentes (jaune et rouge), ce qui réduit le nombre de rainures à 5. Les perles jaunes prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4 en partant du bas vers le haut et les perles rouges, les valeurs 5, 6, 7, 8 et 9 en partant du haut vers le bas.



◊ Troisième représentation : Le système *san cai* (Les trois pouvoirs).

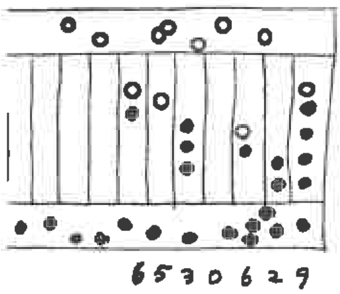
La méthode suivante fait intervenir une couleur de plus, ce qui réduit le nombre de rainures à 3. Les trois pouvoirs sont le ciel (de couleur caractéristique le vert), la terre (le jaune) et l'homme (le blanc). On utilise donc des boules vertes, jaunes ou blanches, disposées sur un plateau où sont gravées trois rainures : la supérieure représente le ciel, la moyenne, l'homme et l'inférieure, la terre. Dans chaque colonne (à imaginer) du plateau, les boules ont des valeurs différentes :

	Blanche	Jaune	Verte
Supérieure	7	8	9
Moyenne	4	5	6
Inférieure	1	2	3



◊ Quatrième représentation.

ZHEN Luan propose l'utilisation d'un instrument différent. Il y a toujours les rainures verticales mais on rajoute une zone supérieure où sont placées des perles rouges (o) valant chacune 5 unités et une zone inférieure où sont placées des perles noires (•) valant chacune 1 unité. On remarquera d'une part la ressemblance de cette représentation avec celle des baguettes (rôle du 5) et d'autre part avec celle du boulier.



Le boulier apparaîtra plus tard. Ses origines sont assez mystérieuses. Les historiens se partagent entre trois dates : les Printemps et les Automnes (-770, -476), la Dynastie des

[24] Robert SCHRIMPF propose dans sa thèse un lien entre ce procédé et les trigrammes.

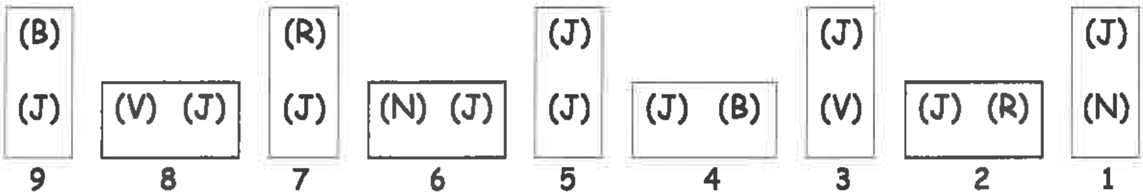
Han (-206, 220) et la fin des Yuan (1279, 1368). En tous cas, une réforme des instruments calculatoires est lancée et se réalisera entre les X^e et XIV^e siècles, dans les milieux marchands.

◊ Un dernier système.

Les fiches ont une extrémité (tête) jaune et le reste peut avoir l'une des couleurs suivantes : jaune, noire, rouge, verte ou blanche.

Une tête noire (N) (couleur de l'eau) vaut 1 lorsqu'elle est tournée vers l'Est ou le Sud et 6 lorsqu'elle est tournée vers l'Ouest ou le Nord. De même, une tête rouge (R) (couleur du feu) représente 2 ou 7, une tête verte (V) (couleur du bois) représente 3 ou 8, une tête blanche (B) (couleur du métal) représente 4 ou 9, une tête jaune (J) (couleur de la terre) représente 5.

ZHEN Luan représente alors le nombre 987 654 321 ainsi :



4. Le zéro.

L'origine du zéro, faute de documents, doit être traitée avec beaucoup de précaution, en Chine comme dans tout autre pays. De plus, il peut avoir plusieurs aspects derrière lui :

- un *nombre* qui a exactement le même statut que n'importe quel autre nombre ;
- un *symbole positionnel* spécifique qui montre l'absence de certains ordres d'unités ;
- un *symbole opérationnel* écrit après la dernière unité d'un nombre pour le multiplier par la base (usuellement... 10).

Si toutefois le zéro avait été connu en Chine ancienne, il n'aurait pas le premier sens. Aucun des textes mathématiques n'admet zéro comme solution d'une équation et aucun n'utilise un nombre « zéro » dans ses calculs (comme les autres nombres). Peut-être en raison de la nature des problèmes posés.

Jusqu'au VIII^e siècle, il n'est connu aucun graphisme pouvant être interprété en tant que symbole. A moins de considérer comme tels des termes de langage comme *kong*, le vide. Jusqu'à cette période, la prudence est donc de rigueur.

A partir du VIII^e siècle, on a des documents qui attestent d'une représentation du zéro par un carré, un point ou un cercle (selon les périodes). Le chapitre 104 du Kaiyuan zhanjing [25] rapporte que « *après le 9, la dizaine s'écrit dans la rangée suivante ; dans chaque rangée vide, on inscrit toujours un point et tout est noté à chaque endroit si bien que l'on ne peut pas se tromper et que les calculs en sont simplifiés* ».

---

[25] Littéralement : Traité d'astronomie astrologique de l'ère Kaiyuan. Cette ère se situe entre 713 et 742. Ce chapitre est une traduction de textes astronomiques indiens.

Peut-être ce point (du VIII^e) est-il à l'origine du zéro graphiquement dessiné sous forme de cercle (et identique au nôtre) et apparu dans un écrit de l'algébriste QIN Jiushao en 1247. Mais faute de documents....

Certains pensent que ce zéro circulaire est d'influence indienne. D'autres pensent que c'est une invention chinoise née d'une déformation d'un autre symbole pour le zéro, le zéro carré (comme l'employait LIU Qin au XIIIe siècle). Le problème est ouvert....

Toutefois, le zéro devient commun aux deux régions *(cf. supra)* vers le milieu du XIII^e siècle (le livre le plus ancien où il apparaît est celui de QIN Jiushao en 1247). Peut-être que cette notion est antérieure, parce qu'elle s'est diffusée dans deux régions qui avaient des systèmes de numérations différents quant à leur complexité.

Après l'époque mongole, les Chinois emploient progressivement le zéro comme un chiffre ordinaire. C'est seulement à partir des Ming que le zéro se voit attribuer un caractère (encore d'actualité), que l'on lit *ling*, dont le sens usuel est « goutte de rosée ».

5. Les nombres négatifs.

Dès le début du premier millénaire, on trouve (dans le JZSS) des nombres négatifs. Les mathématiciens d'alors les manipulaient sans erreur. Toutefois, on ne les rencontre ni dans les énoncés des problèmes, ni dans leurs réponses. C'est-à-dire qu'ils n'existent qu'à travers des procédés opératoires. On ne trouve aucun ouvrage spécifique traitant d'une théorie sur ces nombres (mais seulement de règles de calcul). Une raison possible est qu'un nombre représente toujours une entité concrète (longueur, volume, ...) et donc n'est pas une valeur négative. L'idée d'introduire la notion de « négatif » dans les calculs a eu un courant favorable : rappelons-nous le dualisme des Chinois de l'antiquité en termes de couples, à travers, par exemple, le *yin* et le *yang*.

On les rencontre donc, avec les nombres positifs, seulement dans les exécutions d'algorithmes, comme les résolutions d'équations quadratiques ou les méthodes de fausse position double. D'ailleurs les règles dans ces dernières se divisent en plusieurs sous cas, suivant que les données intermédiaires étaient positives ou négatives [26] .

Les règles d'utilisation ressemblent toujours beaucoup à nos « règles des signes ». Dans le JZSS [27] , elles ne s'appliquent qu'à l'addition et à la soustraction. D'ailleurs, il y a un lien très étroit entre nombre positif et gain (*de*) et nombre négatif et perte (*shi*). Plus tard, en 1299, dans le Suanxue qimeng, les règles s'appliquent aussi à la multiplication [28] . On peut citer, par exemple, pour l'addition, « *les baguettes de noms contraires se réduisent mutuellement* » et « *celles de même nom s'accroissent mutuellement* » et, pour la multiplication, « *les baguettes de même nom sont multipliées l'une par l'autre et font du positif* ». En

[26] Voir le chapitre sur ce thème.

[27] Le lecteur trouvera dans le chapitre « Systèmes. » les règles d'addition et de soustraction.

[28] Et l'on se retrouve dans la même situation que connaît Brulard, personnage principal de La vie d'Henri Brulard, écrit par STENDHAL.

général, des origines au XVII^e siècle (où apparaîtront les influences européennes), les mathématiciens utilisent le procédé établi dans le JZSS.

Dans les calculs, les baguettes étaient différenciées. Un procédé consiste à utiliser deux couleurs : rouge (pour les nombres positifs) et noir (pour les nombres négatifs) ; c'est le cas dans le JZSS. (C'est ce que les mathématiciens du Sud au XII^e préféraient). Ou encore des tiges *(suan)* de forme triangulaire ou carrée dans un cas comme dans l'autre.

Dans les écrits, un nombre négatif était noté en barrant d'un trait de pinceau le dernier chiffre non nul. (C'est ce que les mathématiciens du Nord au XII^e préféraient). On utilisait aussi des caractères particuliers : *fu* (pour les négatifs) qui évoque une dette et *zheng* (pour les positifs) que l'on pourrait traduire par « droit » ou « correct ».

Sous la dynastie des SONG (960 - 1279), l'imprimerie xylographique était déjà développée, c'est pourquoi dans les ouvrages de QIN Jiushao et Li Zhi (deux mathématiciens du XIII^e) des représentations des baguettes à calculer, alors que dans les textes du V^e donnés plus haut, il n'est question que de leur maniement.

6. Les nombres décimaux et la métrologie.

Les deux systèmes évoqués plus haut se prolongent pour les nombres décimaux. Tout comme ont été inventés des noms pour décomposer les nombres (nous l'avons vu au premier paragraphe), d'autres noms (de nouveaux indicateurs de position) vont être inventés pour 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, etc. qui sont *fen, li, hao, si*, etc. A noter que pour le second système, on écrit *bu* (pas) sous le chiffre des unités.

Toutefois les mathématiciens ont longtemps préféré utiliser une description comme (exemple de notre vie courante) *1 m 7 dm 4 cm* à *1,74 m*. LIU Hui, dans l'un de ses calculs du rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle [29] , ne conçoit pas 0, 866 025 4 *chi* mais 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu* + 2/5 *hu*. YANG Hui, en 1275, écrit 24 *bu* 3 *chi* pour 123 *chi* (1 *bu* = 5 *chi*).

Les nombres décimaux, ou plutôt l'écriture décimale, est venue tardivement. A cela, il y a deux (au moins) arguments :

- Du point de vue de la manipulation des baguettes de calculs, il suffisait d'un déplacement. En effet, multiplier (respectivement diviser) un nombre par 10^n revient à déplacer à droite (respectivement à gauche) les bâtons de *n* rangs.
- Des tables de conversion pour les unités (de poids, ...) été utilisées, de même que les *jiugui* [30] . Ainsi, comme 1 *jin* = 16 *liang* et 1 *liang* = 24 *zhu*, $\frac{143}{64}$ *jin* = 2 *jin* 3 *liang* 18 *zhu*. De même, dans son Suanxue qimeng (Introduction à la science du calcul), ZHU Shijie écrit « *Deux ? Garde un deux cinq !* », ce qui correspond à 2 ÷ 16 = 0,125 (1 *jin* = 16 *liang*).

---

[29] Écrire « π » serait anachronique ; les Chinois parlent en termes de rapport.

[30] Formules servant dans les divisions. Voir le chapitre « Calcul fractionnaire. Division. ».

LA « PROCEDURE DU *GOUGU* ».

Résumé.

La « procédure du *gougu* » est un procédé opérant sur des triangles rectangles : on cherche, à partir de données combinant les longueurs des côtés, à déterminer complètement les dimensions d'un triangle rectangle, sans revenir à la relation « de Pythagore ».

Introduction.

Le chapitre 9 du JZSS, comportant 24 problèmes, est appelé « *gougu* », littéralement « base - hauteur ». La technique du *gougu* met en scène des triangles rectangles. Du moins, pour être plus exact, dans les mathématiques chinoises, lorsque l'on parle du triangle rectangle, il s'agit de ***résolutions de triangle rectangle***. Il est à noter que jamais, dans ce Chapitre 9, le terme « triangle » est utilisé : le triangle rectangle est une configuration dont les côtés sont liés par une relation, la « procédure du *gou* et du *gu* » : le *gou* est la base, le « petit » côté du triangle rectangle, et le *gu* est la hauteur, le « grand » côté ; l'hypoténuse est appelée *xian* [1] . A partir d'un triangle rectangle (présenté sous des habillages variés), il s'agit en fait de déterminer les côtés inconnus à partir d'éléments connus.

Les unités de longueur utilisées sont telles que 1 *zhang* = 10 *chi* = 100 *cun*.

1. La « procédure du *gougu* ».

Dans toute la suite de ce chapitre, a désigne la longueur du *gou*, b, celle du *gu* et c, celle de l'hypoténuse. Il est à rappeler que toute formulation algébrique est anachronique vis-à-vis des mathématiciens chinois : cette liberté prise ici a pour but de faciliter la compréhension de la technique du *gougu*. De même, sauf mention contraire, la plupart des figures sont des reconstitutions actuelles fondées sur les textes de certains commentaires.

1. 1. Divers cas d'énoncé.

On possède 2 des données suivantes, a, b, c, $a + b$, $b + c$, $a + c$, $b - a$, $c - a$, $c - b$ et l'on demande de trouver les inconnues parmi a, b ou c. Il y a donc 36 possibilités [2] ; les redondantes sont toutefois éliminées pour faire apparaître 9 cas.

Six sont référencées dans le tableau suivant :

---

[1] Voir le paragraphe du premier chapitre parlant de l'équerre.

[2] Avec 2 éléments pris parmi 9, il y a $C_9^2 = \dfrac{9\,!}{2\,!\,(9-2)\,!} = 36$ combinaisons.

Type	Données	Inconnue (s)	Problème n°
1	a, b	c	1, 5
2	b, c	a	2, 3, 4
3	$a, c-b$ $b, c-a$	b, c a, c	6, 7, 8, 9, 10
4	$c, b-a$	a, b	11
5	$c-a, c-b$	a, b, c	12
6	$a, b+c$ $b, a+c$	b a	13

Nous reviendrons sur la symétrie des données du type 3 dans le problème 7, symétrie que l'on retrouve aussi dans les données du type 6.

On rencontrera aussi dans ce Chapitre 9 d'autres résolutions [3] , comme les suivantes :

[L désigne la longueur du carré inscrit dans le triangle rectangle et D le diamètre du cercle inscrit dans ce même triangle.]

Type	Données	Inconnue(s)	Problème n°
7	$a, a+c=(7/3)\,b$	b, c	14
8	a, b	L	15
9	a, b	D	16

Plus tard, reprenant cette liste, les mathématiciens l'ont enrichie :

- tous les problèmes du Ceyuan haijing [Miroir reflétant l'océan] de LI Zhi (en 1248) tournent autour d'un triangle rectangle particulier,
- 101 des 284 problèmes du Siyuan yujian [Miroir de jade des quatre inconnues] (en 1303) traitent ce sujet,
- il y a, dans le Meishi congshu jiyao (en 1874), par exemple, l'énoncé où l'on donne la surface S du triangle et la somme des longueurs $a+b$ et l'on demande a et b, ...

[3] Se reporter au chapitre « Figures inscrites » pour les problèmes 15 et 16.

1. 2. Le problème 3.

Ce problème énonce le théorème « de Pythagore » : c'est une des figures clés de la technique du *gougu.*

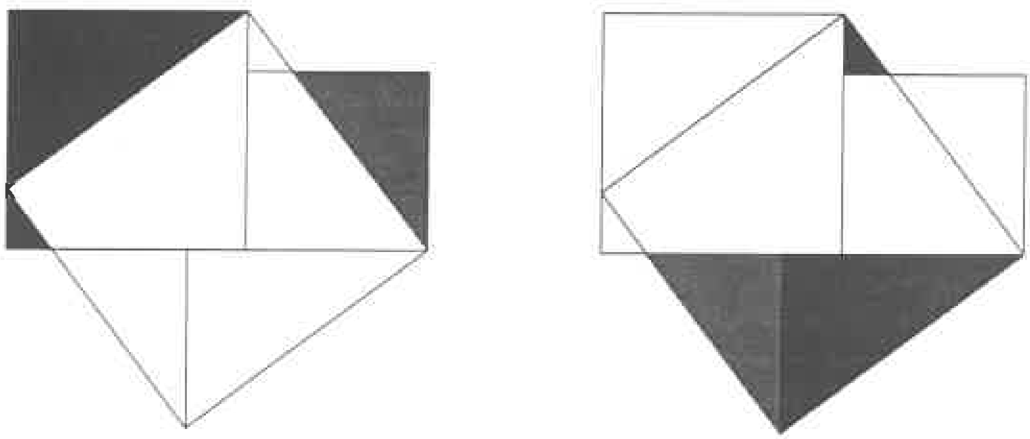
Suppose que le gu *mesure 4* chi *et l'hypoténuse, 5, combien mesure le* gou *?*

L'auteur explique ici la PROCEDURE DU *GOUGU* : « *Ajoute les carrés du* gou *et du* gu, *prends la racine carrée [de la somme], donnant l'hypoténuse. Ou le carré du* gu *est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée*[4] *du reste est le* gou. *De plus, le carré du* gou *est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée du reste est le* gu. »

On donne $b = 4$ *chi* et $c = 5$ *chi* : on calcule $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \underline{3\ chi}$.

LIU Hui justifiait probablement cet énoncé par une figure en couleurs. Il n'a été conservé que le texte seul et, donc, la figure qui l'accompagnait est inconnue. Il n'en est pas moins clair que la démonstration de LIU Hui consiste à reconstituer matériellement le carré de l'hypoténuse en recouvrant celui-ci avec des pièces issues des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Cette démonstration repose sur le principe de « ce qui rentre vaut ce qui sort » (une sorte de « couper coller » de la figure). Dans son commentaire, LIU Hui explique comment prouver l'égalité des aires du carré de l'hypoténuse et de la somme de celles des carrés de la base et du côté.

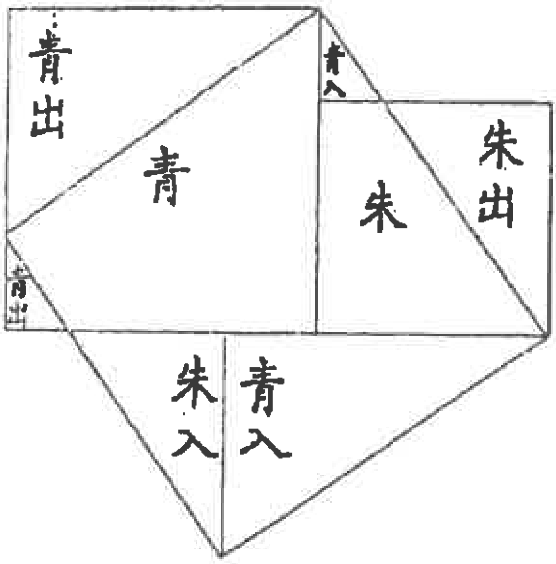
Il existe de nombreuses façons de procéder conformes à cette idée, la figure ci-dessous en montre une (d'après GU Guanguang, Jiushu cungu [Les 9 Chapitres, gardiens de la tradition] en 1892). Elle montre un triangle rectangle et, construits sur les côtés de l'angle droit, les deux carrés. Ils sont appelés *bleu* et *rouge* sur la figure car ils correspondent aux pièces du puzzle qui ont ces couleurs (seules les pièces qui vont être déplacées sont coloriées).

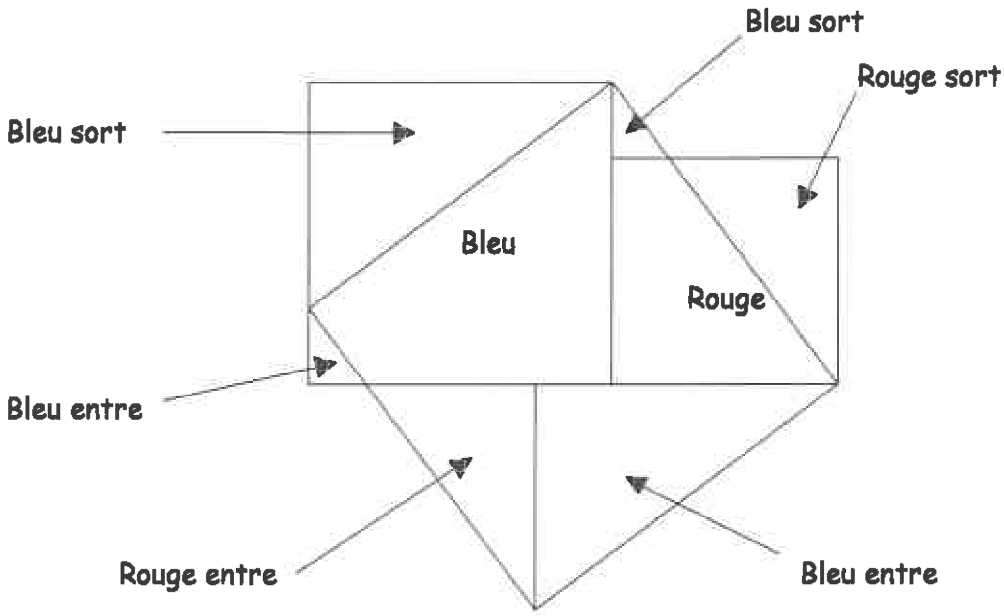


Dans un premier temps, le carré de l'hypoténuse est partiellement recouvert par les carrés *bleu* et *rouge*. Pour montrer que ces deux surfaces carrées recouvrent complètement et exactement le carré de l'hypoténuse (d'après le théorème de Pythagore), il suffit de bouger les pièces comme indiqué sur la figure ci-dessous.

[4] Littéralement : « ouvre le carré »

Traduction de l'illustration du texte chinois[5] *:*





Ainsi, depuis l'époque des Han, les scientifiques chinois connaissaient-ils ce théorème « de Pythagore », d'abord constaté sur une équerre particulière (ou triangle rectangle particulier) (3-4-5) et ensuite appliqué sur une équerre (ou triangle rectangle) quelconque.

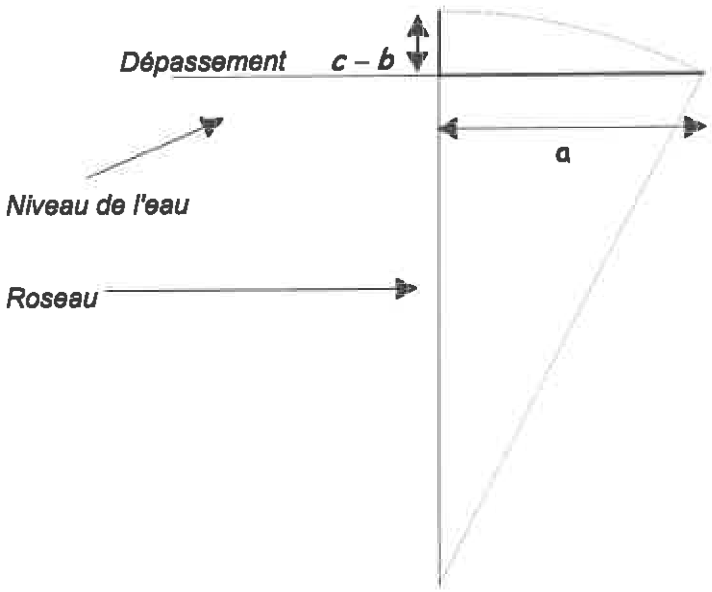
[5] L'illustration est tirée de l'ouvrage anglais de J. Cl. MARTZLOFF, page 297.

2. D'autres problèmes du Chapitre 9 du JZSS.

Dans chacun des problèmes présentés ci-dessous, une figure (qui n'est pas à l'échelle) illustre l'énoncé et, en particulier, met en évidence la donnée de la combinaison de a, b ou c.

2. 1. Le problème 6.

Au centre d'une mare carrée de côté 1 zhang *pousse un roseau qui dépasse l'eau de 1* chi. *On tire sur l'extrémité du roseau en direction de la berge, elle arrive exactement au niveau de l'eau. On demande quelles sont la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.* [6]



L'énoncé donne $a = 10 : 2 = 5$ *chi* et $c - b = 1$ *chi*. On demanderait à nos élèves une résolution semblable à la suivante : « De $c - b = 1$, on tire $c = b + 1$. Avec $a^2 + b^2 = c^2$, il suffit de remplacer les valeurs de $a = 5$ et $c = b + 5$ pour obtenir l'équation du second degré $25 + b^2 = (b + 1)^2$, qui donne rapidement b (et donc c) ». Il y a, dans ce qui vient d'être écrit, tout un passage algébrique que les mathématiciens ne connaissaient pas. La méthode de résolution pour ce problème est la suivante (les lettres entre parenthèses appellent des commentaires que LIU Hui a écrits, ils sont placés après les résultats) :

[6] Ce problème 6 est similaire au problème référencé BM 34568 n° 12 de la civilisation des Séleucides (dynastie hellénistique qui régna en Asie de – 312 à – 64), que les Chinois semblent avoir connue. En voici l'énoncé et sa résolution. [Le calcul hexadécimal (base 60) est de rigueur : $9 \times 9 = 81 = 1 \times 60 + 21$ et est noté 1;21 .] « *Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9. Combien mesure le roseau ? le mur ? Puisque tu ne (les) sais pas, 3 fois 3 : 9 ; 9 fois 9 : 1;21. [Ajoute] 9 à 1;21 : (1;30). [Multiplie] 1;30 [par] 0;30 : 0;45. L'inverse de 3 est 0;20. [Multiplie] 0;20 [par 45] : 15, le roseau [...].* » On traduit l'énoncé par les conditions $a = 9$ et $c - b = 3$, ce qui donne une longueur d'échelle c égale à 15 coudées et une profondeur b égale à 12 coudées.

Procédure : Élève au carré la moitié du côté de la mare (i). *De cela soustrais le carré de 1* chi (ii), *la hauteur au-dessus de l'eau. Divise le reste par deux fois la hauteur au-dessus de l'eau pour obtenir la profondeur de l'eau* (iii). *La somme du résultat et de la hauteur au-dessus de l'eau est la longueur du roseau* (iv).

(i) *Ici prends la moitié du côté de la mare, 5* chi, *comme* gou, *la profondeur de l'eau comme le* gu *et la longueur du roseau comme hypoténuse. Obtiens le* gu *et l'hypoténuse à partir du* gou *et de la différence entre le* gu *et l'hypoténuse. Par conséquent, élève au carré le* gou *pour l'aire du gnomon.* (LIU Hui utilise le fait que le gnomon [7] (c'est-à-dire le carré de côté c privé du carré de côté b) d'aire $c^2 - b^2$ (= a^2 d'après le théorème de Pythagore) a la même aire que le rectangle dont les côtés mesurent $c + b$ et $c - b$.)

(ii) *La hauteur au-dessus de l'eau est la différence entre le* gu *et l'hypoténuse. Soustrais le carré de cette différence de celle de l'aire du gnomon : prends le reste.*

(iii) *Considère comme* gu *la différence entre la largeur du gnomon et la profondeur de l'eau. Par conséquent, construis [un rectangle] avec une largeur de 2* chi, *le double de la hauteur au-dessus de l'eau.* (LIU Hui a prouvé géométriquement la méthode.)

(iv) *Le roseau dépasse l'eau de 1* chi, *alors connaissant la profondeur de l'eau, on les additionne pour avoir la longueur du roseau.*

Nous pouvons donc reformuler et ainsi résoudre le problème comme tel :

$$\text{Profondeur} = b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2\,(c-b)} = \frac{5^2 - 1^2}{2 \times 1} = \underline{12\ chi}$$

$$\text{Longueur du roseau} = c = b + (c - b) = 12\ chi + 1\ chi = \underline{13\ chi}$$

Dans ce problème, il a été trouvé le triplet (5, 12, 13) : c'est un triplet dit « pythagoricien » ; on appelle ainsi la donnée de trois nombres entiers u, v et w vérifiant la relation $u^2 + v^2 = w^2$. On rencontre les huit triplets ci-dessous dans le Chapitre 9, quitte à utiliser une subdivision métrique ou un coefficient multiplicateur commun sur un résultat fractionnaire pour les obtenir :

Triplet	Problème
3, 4, 5	1, 2, 3, 12
5, 12, 13	6, 9, 15
7, 24, 25	4, 11
8, 15, 17	16, 21

Triplet	Problème
20, 21, 29	5, 14
20, 99, 101	8, 10
48, 55, 73	7
60, 91, 109	13

Toutefois, il n'est mentionné nulle part dans le JZSS une étude générale des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire la recherche explicite de leur génération.

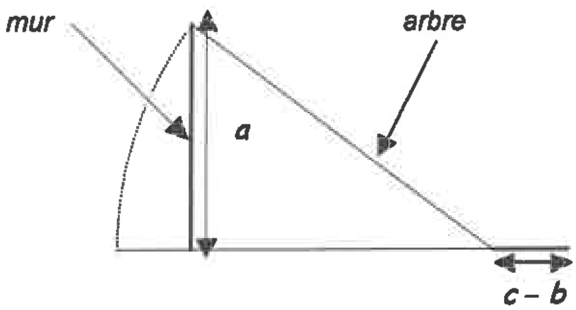
2. 2. Le problème 8.

[7] Voir la figure du gnomon dans le premier chapitre de cette brochure.

L'énoncé suivant donne a et $c - b$, tout comme celui du problème 6, et l'on cherche c. C'est-à-dire que l'on attendrait la même démarche. Sa résolution montre qu'il en est tout autrement : la méthode de résolution de tel problème n'est pas utilisée dans la résolution de tel autre.

Suppose un mur haut de 1 zhang. *Un arbre (ou une perche en bois) s'appuie contre ce mur de telle sorte que son extrémité coïncide avec le haut du mur. Si l'on recule de 1* chi *en tirant l'arbre, celui-ci touche le sol. Combien mesure l'arbre ?*

Procédure : Multiplie 10 chi *par eux-mêmes, divise par le pas en retrait, ajoute le pas en retrait à ce qui a été obtenu et divise le résultat par 2, ce qui est la hauteur de l'arbre.*

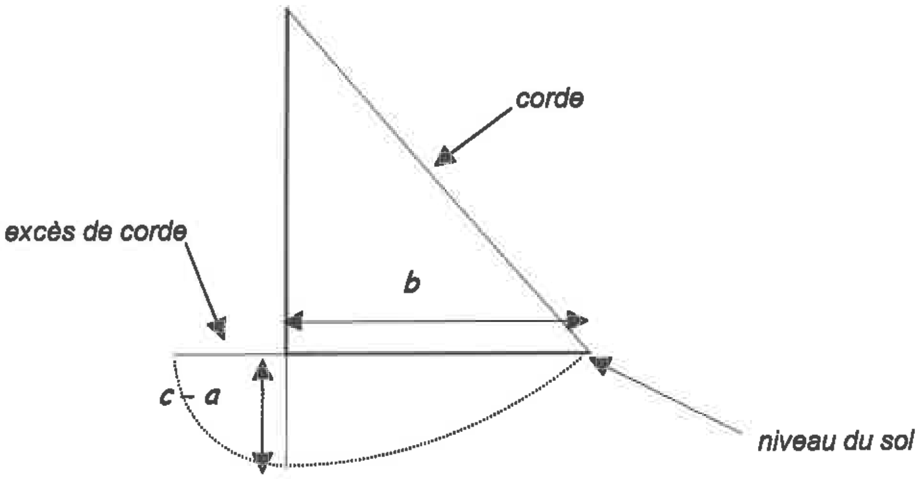


Des données $c - b = 1$ *chi* et $a = 1$ *zhang*, on peut calculer la hauteur cherchée :

$$\text{Hauteur} = c = \frac{\dfrac{a^2}{c-b} + c - b}{2} = \frac{\dfrac{10^2}{1} + 1}{2} = 50 + \frac{1}{2}\ chi = \underline{5\ zhang\ 5\ cun}$$

2. 3. Le problème 7.

Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 chi *la longueur de cet arbre. En tirant la corde à son maximum pour que son extrémité touche juste le sol, on s'écarte exactement de 8* chi *du pied de l'arbre. Quelle est la longueur de la corde ?*



L'énoncé donne $c - a = 3$ *chi* et $b = 8$ *chi*. A priori, si le calculateur sait résoudre le problème correspondant à a et $c - b$, il n'a pas besoin de refaire de nouveaux calculs pour le problème dont les données sont b et $c - a$, puisqu'elles sont symétriques, c'est-à-dire que les deux côtés de l'angle droit jouent le même rôle. Mais, à cette époque chinoise, les choses ne se déroulaient pas de cette façon : en effet, pour un contemporain, les deux côtés de l'angle droit portent, d'un point de vue littéral, des noms différents, et (donc) l'un et l'autre ne sont pas interchangeables. D'où une nouvelle technique pour la résolution : « *Élève au carré la distance depuis le pied (de l'arbre). Divise par la longueur de l'extrémité reposant à terre. Ajoute le résultat à la longueur de l'extrémité. Divise par 2 : c'est la longueur de la corde.* »

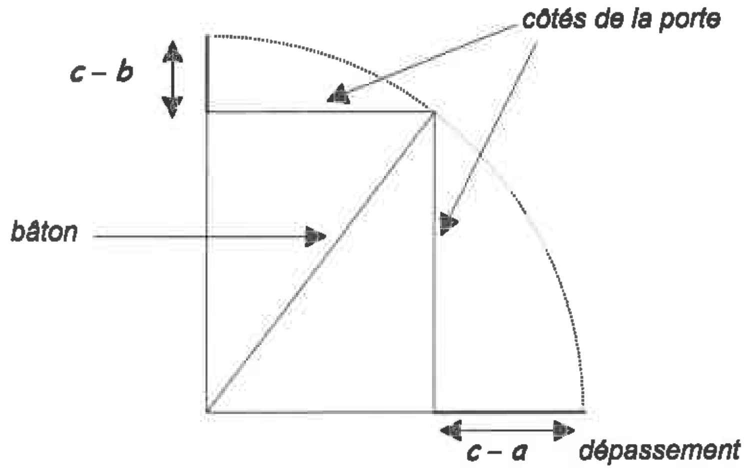
$$\text{Longueur} = c = \frac{\frac{b^2}{c-a} + c - a}{2} = \frac{\frac{64}{3} + 3}{2} = \frac{21 + \frac{1}{3} + 3}{2} = \underline{12 + \frac{1}{6}\ chi}$$ [8]

2. 4. Le problème 12.

Soit une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, un bâton dont on ignore la longueur. On le place en largeur, le dépassement est de 4 chi *; on le place en hauteur, le dépassement est de 2* chi *; on le place en diagonale, le dépassement est nul. On demande combien font la hauteur et la largeur de la porte, ainsi que la longueur du bâton.*

Procédure : Multiplie les deux surplus ensemble ; double et extrais la racine carrée. Ce résultat plus le surplus par rapport à la hauteur est la largeur. Ce résultat plus le surplus par rapport à la largeur est la hauteur. Ce résultat plus les deux surplus est la diagonale de la porte.

Données : $c - a = 4$ *chi* et $c - b = 2$ *chi*



Largeur = $a = \sqrt{2\,(c-a)\,(c-b)} + (c-b) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 2 = \underline{6\ chi}$

Hauteur = $b = \sqrt{2\,(c-a)\,(c-b)} + (c-a) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 4 = \underline{8\ chi}$

Longueur = $c = \sqrt{2\,(c-a)\,(c-b)} + (c-a) + (c-b) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 4 + 2 = \underline{10\ chi}$

On remarquera que c est calculé à partir de $c - a$ et $c - b$ (donnés) et non pas à partir de $c - b$ (donné) et b (calculé) avec $c = (c - b) + b$.

[8] Tout nombre rationnel est écrit comme la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1.

2. 5. Le problème 11

Suppose que la hauteur d'une porte soit 6 chi *8* cun *plus grande que sa largeur et que les coins opposés soient distants de 1* zhang. *Détermine la hauteur et la largeur de la porte.*

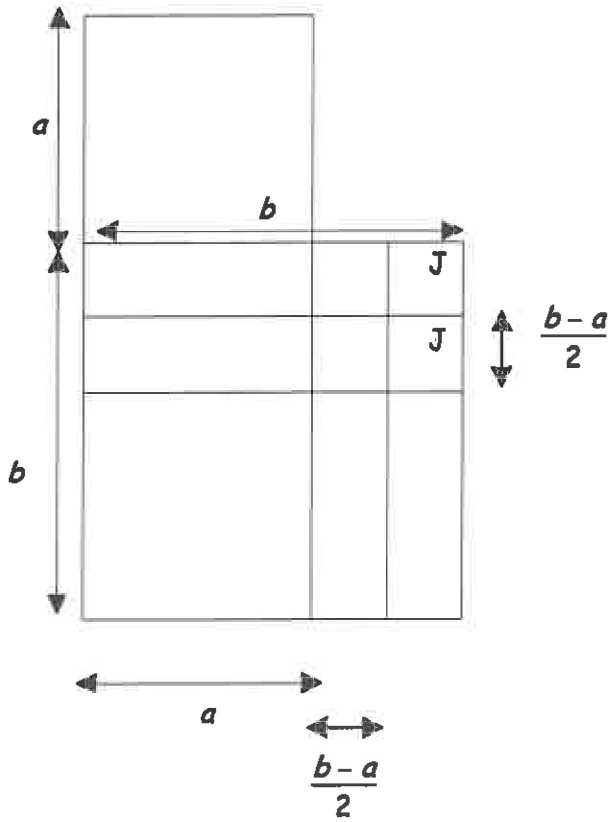
Les données sont $c = 100$ *cun* et $b - a = 68$ *cun*.

La procédure accompagnant le texte est la suivante : « *Multiplie 1* zhang *par lui-même, ce qui donne le dividende. Prends la moitié de ce dont l'un dépasse l'autre* [9] *, multiplie-la par elle-même, double le résultat et soustrais au dividende. Prends la moitié de ce reste et prends-en la racine carrée. Soustrais de ce résultat la moitié du dépassement : cela donne la largeur de la porte. Ajoute la moitié du dépassement : cela donne la longueur de la porte.* »

Ce problème se résout en « posant une figure » plutôt qu'en « posant des équations ». YANG Hui commente (vers 1261) la résolution de la façon suivante :

La figure consiste en 2 carrés construits sur les côtés de l'angle droit de la porte posés (physiquement) l'un sur l'autre (voir figure ci-dessous). Sa surface totale est $a^2 + b^2$, soit c^2 (d'après le théorème de Pythagore).

On observe ensuite que le carré de côté b est découpé en : (1) 4 rectangles de côtés a et $\frac{b-a}{2}$, (2) un carré de côté a et (3) 4 petits carrés ayant chacun pour côté $\frac{b-a}{2}$ la demi différence des côtés des carrés (et dont deux sont appelés *jaunes*).



[9] C'est-à-dire 6 *chi* 8 *cun*.

Chaque morceau du grand carré de côté *b* admet son double dans la figure entière et il y a en plus les deux carrés jaunes. Ceci nous permet de comprendre le raisonnement que fait le mathématicien chinois :

Si l'on ôte du grand carré le gnomon (c'est-à-dire l'équerre) qui le borde sur le dessus et la droite, il reste un petit carré dont, d'une part, les dimensions valent à la fois $a + \frac{b-a}{2}$ [10] et $b - \frac{b-a}{2}$ et dont, d'autre part, l'aire vaut la moitié de l'aire totale des deux carrés c^2 et b^2 diminuée de l'aire des 2 carrés jaunes, soit $2\,(\frac{b-a}{2})^2$. Par conséquent, $\frac{c^2 - 2\,(\frac{b-a}{2})^2}{2}$ est égal à $(a + \frac{b-a}{2})^2$ et à $(b - \frac{b-a}{2})^2$.

On obtient donc ainsi directement la solution du texte original (où sont connus *c* et *b - a*) sans effectuer la moindre résolution d'équation :

$$\text{Largeur} = a = \sqrt{\frac{c^2 - 2\,(\frac{b-a}{2})^2}{2}} - \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{100^2 - 2\,(\frac{68}{2})^2}{2}} - \frac{68}{2} = \underline{28 \textit{ cun}}$$

$$\text{Hauteur} = b = \sqrt{\frac{c^2 - 2\,(\frac{b-a}{2})^2}{2}} + \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{100^2 - 2\,(\frac{68}{2})^2}{2}} + \frac{68}{2} = \underline{96 \textit{ cun}}$$

[10] Il est tentant de simplifier en $\frac{a+b}{2}$, mais cette réduction algébrique est contraire à l'esprit de l'époque… D'autant plus que l'on perdrait la donnée $b - a$.

CALCUL FRACTIONNAIRE. DIVISION.

Résumé.

Très tôt, les mathématiciens chinois ont eu à travailler avec des fractions. Ils ont établi des règles bien précises pour mener à bien leurs calculs : addition, simplification, … Quelques-unes seront exposées à travers des problèmes tirés du Jiu Zhang Suan Shu, Enfin seront présentés les règles *jiugui*, une technique de division.

1. Notion de fraction.

Le mot « fraction » porte avec lui de nombreux sens comme la division, le quotient, la proportionnalité. Dans les mathématiques chinoises, le plus commun est celui qui consiste à diviser une entité en un nombre de parts égales.

Le Jiu Zhang Suan Shu est un ouvrage dans lequel un certain savoir-faire est pré requis : l'utilisateur doit déjà savoir manier l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers. Mais, comme très souvent, les quantités utilisées ne sont pas entières, d'où leur expression en parts de la quantité : c'est pourquoi la quatrième opération usuelle (la division d'entiers) est placée dans le premier Chapitre.

Ainsi « 3/5 [du volume] » sera mentionné comme « 3 des 5 parts [du volume] ». La fraction A/B, de façon plus générale, sera écrite « A *fen zhi* B », soit « A de B parts » puisque l'on prend A parts d'une entité divisée en B parts égales.

De plus, il existe des termes particuliers utilisés uniquement pour certaines fractions simples : 1/4 est représenté par un terme lu *ruo ban* (*la faible moitié*), 1/3 par *shao ban* (*moins que la moitié*), 1/2 par *zhong ban* (*la moyenne moitié*) et 2/3 par *tai ban* (*plus que la moitié*). Il semble que ces expressions, qui apparaissent pour parler plus de quantités approximatives que de fractions précises, notaient à l'origine les graduations de la clepsydre (ses utilisateurs savaient que les mesures du temps obtenues étaient approximatives.)

Les fractions sont aussi associées à la division. En fait, quand une division ne tombe pas juste, le résultat est exprimé sous la forme $a + b/c$, où a est un entier et b/c est la fraction qui reste, avec $b < c$ car b/c représente une fraction de l'unité.

Dans une fraction, le numérateur est appelé « le fils » et le dénominateur, « la mère ». Probablement parce que l'auteur de ces expressions pensait à une mère enceinte et son enfant, soulignant à la fois la différence en taille et le lien intime entre les deux termes. Les numérateurs représentent un certain nombre de parts produites par le dénominateur…

2. Quelques procédures de calcul fractionnaire.

Dans le JZSS, il y a les sept suivantes (citées par ordre d'apparition) :

- la procédure de simplification des parts, *yuefen shu* ;
- la procédure de réunion des parts, *hefen shu* (addition) ;
- la procédure de diminution des parts, *jianfen shu* (soustraction) ;
- la procédure de comparaison des parts, *kefen shu* ;
- la procédure d'équilibrage des parts, *pingfen shu* ;
- la procédure de calcul direct des parts, *jingfen shu* (division) ;
- la procédure de multiplication des parts, *chenfen shu.*

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux procédures suivantes : simplification, réunion et équilibrage des parts.

2. 1. Procédure de simplification des parts *(yuefen shu).*

La procédure se trouve après les exercices 1-5 et 1-6 (et leur réponse).

Cette procédure porte sur la simplification d'une fraction en une fraction irréductible.

Simplifier les parts. Procédure : Quand elles sont divisibles par 2, divise-les par 2. Quand elles ne le sont pas, pose séparément les nombres de la mère et du fils du partage, par le [plus] faible, diminue (kien) [1] *le [plus] fort. De nouveau qu'ils se diminuent et cherche leur égalité* (deng). *Par les nombres égaux, simplifie-les.*

Autrement dit, la technique consiste à essayer de simplifier par 2 le numérateur et le dénominateur puis à effectuer ensuite la série de soustractions alternées caractéristique du très classique algorithme d'Euclide [2] .

Prenons pour premier exemple la simplification de la fraction $\frac{12}{18}$ (problème 1-5) :

On commence par la division par 2 : $12 \div 2 = \underline{6}$ et $18 \div 2 = \underline{9}$.

On continue par les soustractions successives : $9 - 6 = \underline{3}$ et $6 - 3 = \underline{3}$.

En divisant par 3 les nombres 6 et 9, on obtient la fraction $\frac{2}{3}$.

Prenons pour second exemple la simplification de la fraction $\frac{49}{91}$ (problème 1-6).

Par soustractions successives, on obtient :

$$91 - 49 = 42$$

$$49 - 42 = \underline{7}$$

$$42 - 7 = 35$$

$$35 - 7 = 28$$

---

[1] « Soustrais le plus petit au plus grand. »

[2] Voir les Éléments VII-1 et VII-2.

$$28 - 7 = 21$$

$$21 - 7 = 14$$

$$14 - 7 = \underline{7}$$

Étant donné qu'on obtient ainsi deux nombres égaux (le « 7 » de 49 – 42 et celui de 14 – 7), on simplifie la fraction en divisant chacun de ses termes par 7 pour obtenir $\frac{7}{13}$. Ce nombre 7 que l'auteur appelle l'*égal* (*deng*) est le PGCD de 91 et 49.

2. 2. Procédure d'addition des fractions (*hefen shu*).

C'est après les exercices 1-7, 1-8 et 1-9 que se trouve la procédure.

Unir les parts. La procédure dit : les mères en croix les fils. Additionne [les produits] pour faire le dividende. Les mères multipliées entre elles font le diviseur. Le dividende est rapporté au diviseur [3] *. Ce qui ne remplit pas le diviseur, par le diviseur, commande-le. Lorsque les mères sont identiques, que les dividendes se suivent directement.*

« Ce qui ne remplit pas le dénominateur » est le reste de la division du dividende par le diviseur. Le « commander » (*ming*) par le diviseur signifie qu'on l'exprime sous la forme d'une fraction ayant ce reste pour numérateur et le diviseur pour dénominateur. Avoir des « mères identiques » signifie que les dénominateurs sont égaux. Dans ce cas, on additionne directement les numérateurs.

Si nous considérons les deux fractions a/b et c/d, la procédure donnée donne le résultat $(a\,d + b\,c)/(b\,d)$, sans passer par le calcul du plus petit commun des dénominateurs.

Par exemple, dans le problème 1-7, on veut sommer les deux fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$. Le dividende est égal à $5 \times 1 + 3 \times 2 = 11$ et le diviseur est $3 \times 5 = 15$. $11 < 15$: 11 ne remplit pas 15. Le résultat est donné sous la forme $\frac{11}{15}$.

Dans le problème 1-8, on veut sommer les trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{9}$. Le dividende est égal à $2 \times 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 7 = 42 + 36 + 35 = 113$ et le diviseur, $7 \times 9 = 63$. $113 > 63$: 113 remplit 63. Il reste $113 - 63 = 50$. On donne le résultat sous la forme $1 + \frac{50}{63}$.

Le problème 1-9 demande de sommer les quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$.

La procédure permet de sommer un nombre quelconque de fractions. La procédure de soustraction, proposée après les problèmes 1-10 et 1-11 n'est énoncée, comme on peut s'y attendre, que pour la soustraction de deux fractions : présentée de façon semblable, son argument principal est de « *retrancher le [produit] faible au [produit] fort* ».

[3] En d'autres termes, « multiplie les dénominateurs : cela te donnera le dénominateur final puis simplifie la fraction trouvée ».

2. 3. Procédure d'équilibrage des parties (*pingfen shu*).

A partir de plusieurs fractions, on cherche à retrancher à certaines d'elles pour ajouter aux autres, de façon à les rendre toutes égales. Cette procédure est utilisée pour les répartitions dans une distribution.

C'est après les exercices 1-12, 1-13 et 1-14 que se trouve la procédure. Dans un souci de clarté, celle-ci a été découpée en différentes parties et illustrée par une résolution du problème 1-16.

Soit les trois fractions a_1/b_1 , a_2/b_2 et a_3/b_3 . La procédure demande de multiplier chacun des trois numérateurs par les deux autres dénominateurs, pour obtenir le numérateur final, ce qui donne $a_1\ b_2\ b_3$, $a_2\ b_1\ b_3$ et $a_3\ b_1\ b_2$. Le dénominateur final est égal au produit au produit des trois dénominateurs par le nombre de fractions, ce qui donne ici $3\ b_1\ b_2\ b_3$. La valeur moyenne est donc $\frac{a_1\ b_2\ b_3 + a_2\ b_1\ b_3 + a_3\ b_1\ b_2}{3\ b_1\ b_2\ b_3}$. Enfin, pour calculer ce qui doit être ajouté (ou retranché) à la première fraction (et de même pour les deux autres), on calcule la différence $\frac{|\ a_1\ b_2\ b_3 + a_2\ b_1\ b_3 + a_3\ b_1\ b_2 - 3\ b_1\ b_2\ b_3\ |}{3\ b_1\ b_2\ b_3}$.

<u>Problème 1-16.</u>

Soit les fractions $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ *et* $\frac{3}{4}$*. On demande combien retrancher aux [deux] plus grandes et ajouter à la plus petite pour [les] équilibrer.*

Réponse : On retranche 1 [/36] de 2/3, 4 [/36] de 3/4 ; on unit [1/36 et 4/36] pour augmenter 1/2 ; chacune [des fractions] est alors équilibrée à $\frac{23}{36}$[4].

Équilibrer les parts. La procédure dit : Les mères en croix multiplient les fils. La réunion [des produits] donne le dividende d'équilibre. Les mères multipliées entre elles donnent le diviseur.

Fils	Mères	Produits
1	2	12
2	3	16
3	4	18

Le dividende d'équilibre est 12 + 16 + 18 = 46.

Le produit des dénominateurs est 2 × 3 × 4 = 24.

---

[4] $\frac{23}{36} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{3}$: l' « équilibre » correspond à la moyenne.

Par le nombre de rangs, multiplie les [produits] non encore additionnés ; ils forment chacun un diviseur de rang. Par le nombre de rangs, multiplie également le diviseur.

Le nombre de rangs, qui est le nombre de fractions, vaut ici 3.

Les produits non encore additionnés multipliés par 3 sont 36, 48 et 54.

Le diviseur 24 multiplié par 3 donne 72.

Par le dividende d'équilibre diminue les dividendes de rang [qui lui sont supérieurs]. Simplifie les restes. Ils font ce qu'on retranche. Additionne ce qu'on retranche pour [l'] ajouter au [plus] faible [dividende de rang].

Les dividendes de rang 48 et 54 sont diminués de 46 et donnent 2 et 8, qui sont rapportés à 72.

En simplifiant par 2, on obtient les restes 1 et 4, rapportés au diviseur 36 (= 72 ÷ 2). Ces deux restes ont pour somme 4 + 1 = 5.

On l'ajoute au troisième dividende (simplifié aussi par 2, soit 36 ÷ 2 = 18). On obtient 5 + 18 = 23.

Par le diviseur, commande le dividende d'équilibre. Chacune [des fractions] donne l'équilibre.

Le diviseur 72 donne la fraction d'équilibre $\frac{46}{72} = \frac{23}{36}$.

3. La procédure *tong fen*.

La procédure consiste aussi bien à transformer la somme d'un entier et d'une fraction en une seule fraction que réduire plusieurs fractions au même dénominateur. Le mot *tong* signifie « mettre en communication », « complet », « commun », ...

Cette procédure n'est pas, ni dans le Jiu Zhang Suan Shu, ni dans d'autres manuels, considéré au même titre que les autres opérations sur les fractions et il est introduit occasionnellement avec certaines d'entre elles.

Ainsi, à l'occasion des problèmes 1-17 et 1-18 qui amènent la procédure de division de deux fractions (*jing fen shu*), LIU Hui explique cette procédure dans son commentaire :

Par la mère du partage, on multiplie l'entier et on incorpore [au produit] le fils ; en fractionnant l'entier, on a fait des parts du produit ; les parts du produit étaient alors en relation avec le fils. C'est pourquoi on a pu les additionner.

En d'autres termes, $a + \frac{b}{c}$ est transformé en $\frac{a\,c}{c} + \frac{b}{c}$ puis en la fraction $\frac{a\,c + b}{c}$.

L'un des effets de cette procédure est d'exprimer la quantité d'une entité avec une unité plus petite. Par exemple, on sait que 1 *jin* [5] = 16 *liang* alors 1 *jin* 2 *liang* = 18 *liang*.

4. La procédure *shao guang*.

Cette procédure permet de calculer la largeur d'un champ rectangulaire (*fangtian*) lorsque l'on connaît sa longueur et sa surface. Le Chapitre 4 du Jiu Zhang Suan Shu contient ce genre de problèmes.

Tous les champs ont une surface valant 1 *mu*, soit 240 *bu* [carrés] et une largeur valant successivement $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{12}$ *bu*.

Au-delà du simple exercice de calcul fractionnaire (qui se rapporterait au Chapitre 1), on peut y voir deux intentions du rédacteur. La première est de montrer qu'une aire peut être réalisée de plusieurs façons. La seconde est d'introduire le cas où largeur et longueur sont égales, c'est-à-dire d'amener l'extraction d'une racine carrée ; cette opération est littéralement traduite par « ouvrir le carré » [6] . La méthode proposée par le rédacteur explique comment on divise l'unité par une somme de fractions.

Notons au passage que *guang* et *zong* sont très souvent respectivement traduits par « largeur » et « longueur » ; en fait, ces deux termes désignent des longueurs se rapportant à leur orientation : *guang* désigne la direction (horizontale) est-ouest et *zong*, la direction (verticale) nord-sud. Et, de façon assez générale, *zong* est supérieur à *guang*. Cette utilisation des cardinaux est typique de la culture chinoise.

Problème JZSS 4-4.

Soit un champ [rectangulaire] large de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ bu. *On veut un champ de [superficie] 1* mu. *On demande quelle doit en être la longueur.*

Réponse : $105+\frac{15}{137}$ bu.

La procédure dit :

Pose le bu *entier et les mères et les fils des partages. Par la mère du partage le plus inférieur, multiplie partout les fils des partages et le* bu *entier.*

Pose le *bu* entier, les dénominateurs et les numérateurs des fractions. Par le dénominateur de la fraction la plus petite [7] multiplie les numérateurs des fractions et le *bu* entier.

[5] Unité de masse.

[6] Voir le chapitre sur l'extraction d'une racine carrée.

[7] Par conséquent, par le plus grand dénominateur.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 5 \times (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) \div 5 = \frac{1}{5} \times (5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} + \frac{5}{5})$$

Chaque partage, par sa mère divise son fils. Pose le [résultat] à gauche [8] .

Simplifie le membre de droite de l'égalité précédente. Pose le quotient à gauche.

Cela donne : $\frac{1}{5} \times (5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} + 1)$

Mets en communication les partagées et, par les mères des partages, multiplie partout les fils des partages et ceux qui communiquent déjà. Tous [alors] sont mis en communication et identifie-les. Unis-les comme diviseur.

Réduis au même dénominateur les fractions restantes et multiplie tous les numérateurs et les quotients entiers par leurs dénominateurs. Toutes les fractions sont donc réduites au même dénominateur. Le diviseur est la somme des numérateurs.

Cela donne : $\frac{1}{5 \times 4}(20 + \frac{20}{2} + \frac{20}{3} + \frac{20}{4} + 4) = \frac{1}{5 \times 4}(20 + 10 + \frac{20}{3} + 5 + 4)$.

Puis : $\frac{1}{5 \times 4 \times 3}(60 + 30 + 20 + 15 + 12)$

Pose le nombre de bu *que l'on veut, multiplie-le par les parts accumulées du* bu *entier comme dividende. Le dividende est rapporté au diviseur. Tu obtiens les* bu *de la longueur.*

Pose le nombre de *bu* que l'on veut. Multiplié par le multiplicateur du *bu* entier, cela donne est le dividende.

La longueur cherchée est $240 \times (5 \times 4 \times 3) \times \frac{1}{60 + 30 + 20 + 15 + 12} = \frac{14\,400}{137} = 105 + \frac{15}{137}$.

5. Division. Quelques règles.

5. 1. Les *juigui*.

La division a connu beaucoup de techniques dans sa pratique. Nous allons nous attarder sur l'une d'elles, l'utilisation des *jiugui*.

Les règles *jiugui* (qui sont en fait des chants) consistent en de courtes formules correspondant à la division d'un nombre quelconque par un diviseur compris entre 1 et 9. Elles ont

[8] Cela fait référence à la disposition des calculs.

probablement été inventées autour du XI^e^ siècle ; on les trouve dans un ouvrage datant de cette époque, le Zhinan Suanfa.

Les *jiugui* montrent un remarquable sens d'économie et de simplicité ; le calculateur a « seulement » à se les rappeler. Par exemple :

- [Division par 5] *Deux - un font cinq* (parce que 10 ÷ 2 = 5 ou 1 ÷ 2 = 0,5).
- [Division par 3] *Trois - un : trente et un* (parce que la division euclidienne de 10 par 3 donne q = 3 et r = 1, ou encore 10 = 3 × *3* + *1*, d'où le « 31 »).
- [Division par 7] *Sept rencontré : une [unité] élevée* (70 ÷ 7 = 10 ; le 1 qui représente les dizaines est considéré comme « élevé » par rapport aux simples unités.)

Par exemple, dans le cas de la division par 8, il y a huit règles et huit seulement [9] :

Huit un : ajoute 2 dessous ;

Huit deux : ajoute 4 dessous ;

Huit trois : ajoute 6 dessous ;

Huit quatre liés font 5 ;

Huit cinq font 62 ;

Huit six font 74 ;

Huit sept font 86 ;

Huit rencontrés font une [unité] élevée.

5. 2. Exemples d'utilisation.

(Les calculs ont été volontairement découpés, pour plus de clarté.)

- **Division de 272 par 8.**

2	7	2	(1)
	+ 4		
2	11	2	(2)
+ 1	− 8		
3	3	2	(3)
		+ 6	
3	3	8	(4)
	+ 1	− 8	

[9] Ce sont des règles extraites du Suanfa tongzong (1592).

3	*4*		(5)

Détail des différentes étapes :

(1) Le premier chiffre à considérer est 2, le chiffre des centaines. On se reporte à la règle « *Huit deux : ajoute 4 dessous* » (c'est-à-dire dans la colonne suivante) : on ajoute 4 à 7 (le chiffre suivant le 2), ce qui donne 11.

(2) Or 11 = 1 × 8 + 3. On retranche donc 8 à 11 et on ajoute 1 à 2, ce qui donne 3.

(3) Le deuxième chiffre à considérer est un 3. On se reporte à la règle « *Huit trois : ajoute 6 dessous* » : on ajoute 6 à 2, ce qui donne 8.

(4) Le troisième chiffre à considérer est un 8. On se reporte à la règle « *Huit rencontrés font font une [unité] élevée* » : on ajoute une dizaine de cette entité (qui est ici une unité) au quotient.

(5) Le résultat est donné : 34.

- **Division de 552 par 8.**

5	5	2	(1)
6	+ 2		
6	7	2	(2)
	8	+ 6	
6	8	2	(3)
		+ 6	
6	8	8	
	+ 1	– 8	(4)
6	*9*		(5)

Détail des différentes étapes :

(1) Le premier chiffre à prendre en compte est un 5 (celui des centaines). On se reporte à la règle « *Huit cinq font 62* » : on remplace 5 par 62, en mettant le 6 sous ce premier 5 et le 2 sous le second 5.

(2) On additionne ce dernier 5 et 2 : on obtient 7. Sur la ligne est maintenant écrit 672.

(3) Le deuxième chiffre à considérer est un 7. On se reporte à la règle « *Huit sept font 86* » : on remplace comme précédemment 7 par 86 dans les colonnes adéquates puis on ajoute 6 à 2, ce qui donne 8. Sur la ligne est maintenant écrit 688.

(4) Le troisième chiffre à considérer est un 8. On se reporte à la règle « *Huit rencontrés font font une [unité] élevée* » : on ajoute une dizaine de cette entité (qui est ici une unité) au quotient.

(5) Le résultat est donné : 69.

- **Division de 3 072 par 8 (sans découpage) :**

3	0	7	2
3	6	7	2
3	7	11	2
3	8	3	2
3	8	3	8
3	***8***	***4***	

Le résultat est 384.

Cette méthode a d'abord été employée avec un diviseur à un chiffre. Elles ont été étendues aux diviseurs inférieurs ou égaux à 99 avec d'autres chants. Il y a un jeu spécial de règles (*fei gui jue* [10]).

Toutefois les règles générales ne sont pas oubliées : les *jiugui* sont combinées avec les règles de multiplication et de soustraction dans une division.

Le principe de vérification (multiplication dans le sens inverse) s'appelle *huan yuan*, littéralement « restituer l'état initial » [du boulier].

[10] « Formules pour la division rapide ». Un exemple est dans le livre de J.-Cl. MARTZLOFF.

METHODES DE FAUSSES POSITIONS.

Résumé.

Les méthodes de fausses positions consistent à déterminer une ou deux valeurs qui doivent satisfaire à une condition donnée (solution d'une équation du premier degré, solutions d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues, …) en combinant des valeurs supposées et des écarts au résultat trouvés. L'essentiel des problèmes présentés est tiré du Chapitre 7 du Jiu Zhang Suan Shu, entièrement consacré à ce thème.

1. La méthode de fausse position.

1.1. Présentation.

Cette méthode a été utilisée non seulement par les Chinois mais aussi par les Babyloniens (problème de la tablette de Suse, vers 1800 avant JC), les Égyptiens (problème 26 du Papyrus Rhind, vers 1650 avant JC, en Inde (Bhaskara, au XIIe), … Legendre [1] écrit que « l'usage de le Règle de fausse position, est de trouver une chose requise par une supposition autre que la vérité participant néanmoins aux conditions de la chose demandée ». Mais revenons, comme Maitre Pathelin, à nos moutons.

Problème 7-9.

Suppose avoir du grain décortiqué en quantité inconnue dans une cuve de capacité est 10 dou [2] *. Si on remplit à ras bords la cuve, en y ajoutant de petit mil* [3] *, décortiqué ensuite, on a en tout 7* dou *de grain décortiqué. Quelle est la quantité de grain décortiqué initiale ?*

Réponse : 2 dou *5* sheng.

Procédure : Utilise la « procédure de l'excédent et du déficit ». Si la quantité de grain décortiqué originale était 2 dou*, il manquerait 2* sheng*. Si elle était de 3* dou*, il y aurait 2* sheng *de trop.*

---

[1] L'arithmétique en sa perfection mise en pratique selon l'usage des financiers, gens de pratique, banquiers et marchands, traité publié à Paris en 1712.

[2] 1 *dou* de grains pilés donne 6 *sheng* de riz ; 1 *dou* de grains non pilés donne 10 *sheng*.

[3] Le grain décortiqué est dans un rapport de 30 à 50 avec le petit mil.

L'équation traduisant le problème est : $x + \frac{6}{10}(10 - x) = 7$.

Le calculateur va utiliser deux valeurs x_1 et x_2 qu'il a choisies (appelées *fausses positions*), remplacer ces valeurs dans le membre de gauche et regarder la différence avec le membre de droite. Puis en combinant ces étapes, il trouvera x.

Soit, comme il est donné dans la méthode, la première fausse position $x_1 = 2$.

Alors $x_1 + \frac{6}{10}(10 - x_1) = 6 + \frac{8}{10}$ (*dou*).

L'erreur e_1 par rapport à 7 (*dou*) est $e_1 = 6 + \frac{8}{10} - 7 = -\frac{2}{10}$.

C'est-à-dire qu'il manque 2 *sheng* (il y a un **déficit** de 2 *sheng*).

Soit maintenant la seconde fausse position $x_2 = 3$.

Alors $x_2 + \frac{6}{10}(10 - x_2) = 7 + \frac{2}{10}$ (*dou*).

L'erreur e_2 est $e_2 = 7 + \frac{2}{10} - 7 = \frac{2}{10}$.

C'est-à-dire qu'il y a en trop 2 *sheng* (il y a un **excédent** de 2 *sheng*).

La solution du problème est donnée par $x = \frac{x_1 e_2 + x_2 e_1}{e_1 + e_2}$, soit $\frac{20 \times 2 + 30 \times 2}{2 + 2} = 25$ *sheng*, ou encore 2 ***dou*** **5** ***sheng*** (puisque 1 *dou* = 10 *sheng*).

La procédure donnée est en fait une méthode d'interpolation linéaire.

On remarquera que le calculateur n'utilise que des valeurs positives : il dit qu'il manque 2 *sheng* et non pas qu'il y a - 2 *sheng*. Les nombres négatifs ne sont conçus que comme outils de calcul, sans signification concrète, et non comme des nombres à part entière.

Le Chapitre 7 est construit de façon semblable aux autres : la difficulté des exercices est progressive. Dans les huit premiers énoncés, il est demandé au lecteur chinois d'appliquer la formule, la règle, et les deux fausses positions sont données. Il va ensuite avoir à s'interroger sur les trois cas qui pourront apparaître, et que nous allons décrire ci-dessous.

1.2. Procédés de résolution dans le JZSS.

Dans ce qui suit, cette méthode va permettre de trouver non pas la valeur d'une, mais de deux inconnues : ce seront les numérateur et dénominateur de la fraction x.

1.2.1. Un des procédés : *ying buzu*.

(Il y a un excédent (*ying*) et un déficit (*buzu*).)

C'est le cas que nous venons de rencontrer dans la présentation. La méthode est donnée après l'énoncé suivant. Le procédé est énoncé dans l'ouvrage chinois après quatre problèmes introductifs. *Ying buzu* est d'ailleurs le nom de ce Chapitre dans cet ouvrage.

Problème 7-1.

Soit un achat collectif de choses. (Si) chaque homme paye 8, l'excédent [de la somme versée sur le prix des choses] est 3 ; (si) chaque homme paye 7, le déficit est 4. On demande quels sont le nombre des hommes et le prix des choses.

Procédure : Posez les modèles (lü) de ce que l'on paye ; l'excédent et le déficit sont respectivement placés en dessous d'eux. Faites la multiplication en croix avec les modèles de ce que l'on paye et additionnez les (produits) pour faire le dividende. Additionnez l'excédent et le déficit pour faire le diviseur. Quand il y a des fractions, mettez-les[4] *en communication. Posez ensuite les modèles de ce qu'on paye ; par le petit diminuez le grand ; prenez le reste pour simplifier le diviseur et le dividende (précédents). Le dividende (simplifié) fait le prix des choses ; le diviseur (simplifié) fait le nombre des hommes.*

Les modèles de ce que l'on paye sont 8 et 7 et il leur correspond les différences 3 et 4 : on forme donc le tableau (correspondant à la présentation des calculs) :

Prix payé	7	8
Écart	4	3

Le dividende est $7 \times 3 + 4 \times 8 = 53$ et le diviseur est $4 + 3 = 7$.

La différence des modèles est 1 : il n'y a pas lieu de simplifier les deux nombres trouvés précédemment ; le dividende 53 donne le prix des choses et le diviseur 7, celui du nombre d'hommes.

La méthode de fausse position donne, en calculant la somme x à payer pour chaque homme, à la fois le prix P des choses et le nombre N d'hommes :

$$x = \frac{x_1 e_2 + x_2 e_1}{e_1 + e_2} = \frac{P}{N} \quad \text{avec } P = \frac{x_1 e_2 + x_2 e_1}{x_1 - x_2} \text{ et } N = \frac{e_1 + e_2}{x_1 - x_2}$$

Problème 7-2.

Soit un achat collectif de poules. (Si) chaque homme paye 9, l'excédent est 11 ; (si) chaque homme paye 6, le déficit est 16. On demande quels sont le nombre des hommes et le prix des poules.

On trouve, en utilisant le procédé qu'il y a 9 hommes et que le prix des poules est 70. Il y a eu néanmoins une réduction de fraction pour y arriver ($\frac{210}{27} = \frac{70}{9}$).

[4] « Réduisez les fractions au même dénominateur. » Voir le chapitre sur le calcul fractionnaire.

A titre indicatif, voici les autres énoncés [5] de ce chapitre avec cette règle :

Problème 7-3. Soit un achat collectif d'oiseaux. (Si) chaque homme paye 1/2, l'excédent est 4 ; (si) chaque homme paye 1/3, le déficit est 3. On demande quels sont le nombre des hommes et le prix des oiseaux.

Problème 7-4. Soit un achat collectif de bœufs. (Si) 7 familles paient ensemble 190, le déficit est 330 ; (si) 9 familles paient ensemble 270, l'excédent est 30. On demande quels sont le nombre de familles et le prix des bœufs.

Ce type de problème se retrouve dans d'autres ouvrages. Voici le problème 2-28 du Sunzi Suanjing : *Soit des hommes qui volent du taffetas dans un dépôt. On ne sait pas combien ils ont dérobé, mais on a entendu dire que dans la bande, on a partagé le taffetas : (si) chaque homme avait obtenu 6* pi, *il serait resté 6* pi, *(si) chaque homme avait reçu 7* pi, *le déficit aurait été 7* pi. *On demande combien les hommes ont volé de taffetas.* SUNZI donne la solution, après avoir donné la méthode : 13 voleurs et 84 taffetas.

1.2.2. Un des procédés : *liang ying liang buzu.*

(Il y a deux excédents ou deux déficits, les types d'erreurs sont semblables.)

Ce procédé est identique dans son principe à la première méthode mais les opérations d'addition et de soustraction y sont inversées :

*Procédure : Posez les modèles (*liu*) de ce que l'on paye ; les excédents et les déficits sont respectivement placés en dessous d'eux. Faites la multiplication en croix avec les modèles de ce que l'on paye. Par le (plus) petit (produit) diminuez le (plus) grand : le reste fait le diviseur. (Prenez) les deux excédents (ou) les deux déficits ; par le petit diminuez le grand : le reste fait le diviseur. Quand il y a des parts, mettez-les en communication. Posez ensuite les modèles de ce qu'on paye ; par le petit diminuez le grand ; prenez le reste pour simplifier le diviseur et le dividende (précédents). Le dividende (simplifié) fait le prix des choses ; le diviseur (simplifié) fait le nombre des hommes.*

Dans notre langage formaliste, on a : $x = \frac{x_1 e_2 - x_2 e_1}{e_1 - e_2}$.

Cette procédure est donnée après le problème suivant :

Problème 7-5.

Soit un achat collectif d'or. (Si) chaque homme paye 400, l'excédent est 3 400 ; (si) chaque homme paye 300, l'excédent est 100. On demande quels sont le nombre des hommes et le prix de l'or.

On trouve $x = \frac{300 \times 3\,400 - 400 \times 100}{3\,400 - 100} = \frac{980\,000}{3\,300} = \frac{9\,800}{33}$: il y a 33 hommes et le prix de l'or vaut 9 800.

[5] Les solutions respectives sont : Nombre d'hommes : 42 ; prix des oiseaux : 17 // Nombre de familles : 126 ; prix des bœufs : 3 750.

De la même façon, le problème 7-6 est résolu : *Soit un achat collectif de moutons. (Si) chaque homme paye 5, il manque 45 ; (si) chaque homme paye 7, il manque 3. On demande quels sont le nombre des hommes et le prix des moutons.* On trouve qu'il y a 21 hommes et que le prix des moutons est 150.

1.2.3. Le procédé *ying zhe zu bu zu zhe zu.*

(Il y a un excédent ou un déficit ; l'autre erreur est nulle.) C'est le cas, assez improbable, où la solution est découverte par hasard. Malgré cela, il y a quand même une règle !

Procédure « de l'excédent et du juste assez » et « du déficit et du juste assez » : Prenez le nombre de l'excédent (ou) du déficit comme dividende. Posez les modèles de ce qu'on paye ; par le petit, diminuez le grand : le reste fait le diviseur. Le dividende rapporté au diviseur donne les hommes. Pour trouver le prix des choses, par le juste suffisant multipliez le nombre des hommes ; vous obtenez le prix des choses.

Problème 7-7.

Soit un achat collectif de chiens. Si chaque homme paye 5, le déficit est 90 ; si chaque homme paye 50, c'est juste suffisant. On demande le nombre d'hommes et le prix des chiens..

Réponse : 2 hommes ; prix des chiens : 100

Problème 7-8.

Soit un achat collectif de porcs. Si chaque homme paye 100, l'excédent est 100 ; si chaque homme paye 90, c'est juste suffisant. On demande le nombre d'hommes et le prix des porcs.

Réponse : 10 hommes ; prix des porcs : 900

2. La méthode de double fausse position.

Les deux hypothèses effectuées portent non sur les nombres inconnus eux-mêmes mais sur la valeur de leur rapport. Ou les deux nombres inconnus sont simultanément impliqués conjointement dans deux conditions numériques.

Problème 7-18.

9 tiges d'or pèsent le même poids que 11 tiges d'argent. Si on échange entre elles un de leurs tiges, le côté de l'or[6] *pèse 13* liang[7] *de moins que le second. Quels sont le poids d'une tige d'or et d'une tige d'argent ?*

[6] Les huit tiges d'or et la tige d'argent.

[7] L'énoncé, la réponse et la méthode utilisent les unités de poids suivantes :

1 *jin* = 16 *liang* et 1 *liang* = 24 *zhu*

En désignant par x le poids d'une tige d'or et y celui d'une tige d'argent, résoudre le problème revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 9\,x = 11\,y \\ (10\,y + x) = (8\,x + y) + 13 \end{cases}$$

L'idée [8] pour résoudre le problème est de considérer l'une des inconnues comme l'inconnue principale (ce sera ici le poids de la tige d'or), l'autre jouant un rôle secondaire (ce sera alors le poids de la tige d'argent). Au passage, on retrouve un énième calcul de fraction lié à des conversions d'unités.

Si l'or pesait 3 jin *et l'argent* $2 + \frac{5}{11}$ jin [9], *le déficit serait* [10] *49 [onzièmes de* liang*] ; [on pose ces 3 nombres] dans la colonne de droite* [11]. *Si l'or pesait 2* jin *et l'argent* $1 + \frac{7}{11}$ jin, *il y aurait un excédent de 15 [onzièmes de* liang*] ; [on pose ces 3 nombres] dans la colonne de gauche.*

Il est clair que l'auteur a choisi pour valeurs de fausse position 2 et 3 *jin*. Ces deux valeurs ne sont pas complètement choisies au hasard, le poids d'une pièce d'or est justement compris entre ces deux valeurs. Il y a derrière ces données une interpolation linéaire (le système étant linéaire).

Les données sont écrites ainsi :

Poids en *jin* d'une tige d'or	2	3
Poids en *jin* d'une tige d'argent	$1 + \frac{7}{11}$	$2 + \frac{5}{11}$
Écart en *liang* à la seconde condition	15	49

L'auteur achève en multipliant par 11 les poids supposés pour la tige d'argent, afin d'effectuer les produits en croix seulement avec des nombres entiers, et en divisant ensuite par 11 les résultats (il s'agit d'une simple proportionnalité). En effet,

$$\frac{x_1\,(11\,e_2) + x_2\,(11\,e_1)}{(11\,e_1) + (11\,e_2)} = \frac{x_1\,e_2 + x_2\,e_1}{e_1 + e_2} = x$$

---

[8] Le commentaire de LIU Hui est trop long pour être reproduit ici.

[9] En supposant $x_1 = 3$ et en utilisant le fait que $9\,x_1 = 11\,y_1$ (d'après la première condition), le rédacteur déduit que $y_1 = 9 \times \frac{3}{11} = \frac{27}{11} = 2 + \frac{5}{11}$. De même pour $x_2 = 2$, on trouve $y_2 = 1 + \frac{7}{11}$.

[10] 49 et 15 sont trouvées avec les équations initiales, et en faisant attention aux unités.

[11] Cela renvoie aux positions particulières en lesquelles sont placés les nombres pour les calculs.

Poids en *jin* d'une tige d'or	2	3
Poids en onzièmes de *jin* d'une tige d'argent	18	27
Écart en onzièmes de *liang* à la seconde condition	15	49

L'application à ces valeurs de la « procédure de l'excédent et du déficit » donne alors :

Or : $\dfrac{2 \times 49 + 3 \times 15}{15 + 49} = \dfrac{143}{64}$ *jin* = 2 *jin* 3 *liang* 18 *zhu* [12]

Agent : $\dfrac{18 \times 49 + 27 \times 15}{(15 + 49) \times 11} = \dfrac{1\,287}{704} = \dfrac{117}{64}$ *jin* = *1 jin* 13 *liang* 6 *zhu*

Un autre problème de ce type est lu, entre autres, dans le Zhang Qiujian Suanjing [13] ; il s'agit du 3-22 :

Soit un passereau pesant 1 liang *9* zhu *et une hirondelle pesant 1* liang *5* zhu. *Il y a 25 oiseaux, passereaux et hirondelles, qui pèsent ensemble 2* jin *13* zhu. *On demande combien il y a d'hirondelles et de passereaux.*

Réponse : 14 passereaux et 11 hirondelles.

ZHANG Qiujian prend comme valeurs de fausses positions 15 et 12 passereaux (et de facto, respectivement, 10 et 13 hirondelles) : il trouve respectivement un excès de 4 *zhu* et un manque de 8 *zhu*. Les calculs sont présentés ainsi :

Passereaux	12	15
Hirondelles	13	10
Écart	8	4

Il y a donc $\dfrac{12 \times 4 + 15 \times 8}{8 + 4}$ = 14 passereaux et $\dfrac{13 \times 4 + 10 \times 8}{8 + 4}$ = 11 hirondelles.

Dans ce qui précède, les énoncés sont des problèmes linéaires. Cette méthode a donc des limites (notamment dès que l'on aborde le second degré). Pourtant, le mathématicien va contourner cette difficulté en travaillant sur des fonctions linéaires par morceaux, comme nous allons le voir. De plus, apparaissent outre la méthode proprement dite, des sommes de suites arithmétiques, géométriques, ...

---

[12] Comme 1 *jin* = 16 *liang* et 1 *liang* = 24 *zhu*, $\dfrac{143}{64}$ *jin* = $2 + \dfrac{15}{64}$ *jin* = 2 *jin* $\dfrac{15}{64} \times 4$ *liang* = 2 *jin* $\dfrac{15}{4}$ *liang* = 2 *jin* $3 + \dfrac{3}{4}$ *liang* = 2 *jin* 3 *liang* $\dfrac{3}{4} \times 24$ *zhu* = 2 *jin* 3 *liang* 18 *zhu*.

[13] Canon des calculs de Zhang Qiujian, écrit vers la fin du Ve siècle.

Problème 7-20

Soit un mur épais de 5 chi [14] *. Deux rats le percent en sens opposés. Le grand rat en 1 jour a fait 1* chi *; le petit rat en 1 jour a fait également 1* chi. *Le grand rat par jour double (sa pénétration) ; le petit rat par jour (la) diminue de moitié. On demande en combien de jours ils se rencontrent et combien ils ont (alors) creusé.*

Réponse : 2 + $\frac{2}{17}$ *jours ; le grand rat a creusé 3* chi *4 + 12/17* cun, *le petit, 1* chi *5 +* $\frac{5}{17}$ cun.

Méthode : Supposons 2 jours, le déficit (serait) 5 cun *; supposons 3 jours, l'excédent serait 3* chi *7 +* $\frac{1}{2}$ cun.

Commentaire de LIU Hui :

Le grand rat [en effet] double chaque jour [sa pénétration] ; en 2 jours, il creuserait au total 3 *chi*. Le petit rat par jour diminue de moitié (son avance), il creuserait au total 1 *chi* 5 *cun*. Additionnons ce que percerait le grand rat, le total est 4 *chi* 5 *cun*, comparés aux 5 *chi* de l'épaisseur du mur, cela ferait un manque de 5 *cun*. Supposons 3 jours, le grand rat aurait creusé 7 *chi*, le petit rat aurait creusé 1 *chi* 7 + $\frac{1}{2}$ *cun*. Additionnons-les pour diminuer les 5 *chi* de l'épaisseur du mur : il y aurait un reste de 3 *chi* 7 + $\frac{1}{2}$ *cun*. Par la procédure de l'excédent et du déficit, on cherche la solution. [...]

Le nombre de jours au bout desquels les rats se rencontrent est :

$$\frac{2 \text{ jours} \times 37 + \frac{1}{2}\ cun + 3 \text{ jours} \times 5\ cun}{5\ cun + 37 + \frac{1}{2}\ cun} = 2 + \frac{2}{17} \text{ jours}$$

Le problème 7-19 [15] se résout de même en prenant pour fausses positions 15 et 16.

Soit deux chevaux, un bon et un mauvais, qui quittent Chang'an pour se rendre à Qi. La distance entre Chang'an et Qi est de 3 000 li. *Le bon cheval avance de 193* li *le premier jour et, les jours suivants, augmente de 13* li *par jour. Le mauvais cheval avance de 97* li *le premier jour et diminue ensuite son parcours d'un demi* li *par jour. Le bon cheval atteint Qi le premier puis revient sur ses pas et rencontre le mauvais cheval. Après combien de jours les deux chevaux se rencontreront-ils et quelle distance auront-ils alors respectivement parcourue ?*

Réponse : Ils se rencontrent au bout de 15 + $\frac{135}{191}$ *jours ; le bon cheval a parcouru 4 534 +* $\frac{46}{191}$ li *et le mauvais cheval a parcouru 1 465 +* $\frac{145}{191}$ li.

---

[14] 1 *chi* = 10 *cun*

[15] Le lecteur pourra lire Histoire d'algorithmes (op. réf.), pp. 108-110, d'où est tiré le début de la présentation suivante.

Procédure : Suppose 15 jours, il manque 337 + 1/2 li. *Suppose 16 jours, il y a 140* li *en trop. Multiplie en croix l'excédent et le déficit par les nombres supposés et en ajoutant, on obtient le dividende. L'excédent et le déficit font le diviseur. Divise le dividende par le diviseur pour obtenir le nombre de jours. Simplifie le reste par l'égal*[16] *et exprime-le en fraction*[17] .

Le nombre de jours demandé est : $\frac{15 \times 140 + 16 \times 337 + \frac{1}{2}}{337 + \frac{1}{2} + 140} = 15 + \frac{135}{191}$. La solution est comprise entre les deux entiers successifs 15 et 16, ce qui explique l'utilisation de la règle. En fait, les expressions donnant les distances parcourues ne sont pas linéaires mais du second degré (à cause de sommes de suites arithmétiques dont le nombre de termes est l'inconnue x). A cette époque, la résolution des équations algébriques pose des difficultés aux mathématiciens ; la procédure donnée dans ce Chapitre 7 donne une méthode pour obtenir des valeurs approchées des racines. On ne peut donc pas mettre en œuvre la règle, à moins de vouloir une solution approchée [18] . En effet, le mathématicien considère qu'entre deux jours consécutifs, la fonction considérée est linéaire : la fonction est donc transformée en une fonction linéaire par morceaux.

Si tu cherches la distance parcourue par le bon cheval : multiplie 14 par le nombre de li *dont l'allure augmente et prends la moitié du résultat. Ajoute le nombre de* li *parcourus par le bon cheval le premier jour et, en multipliant par 15 jours, tu obtiens le nombre total de* li *parcourus par le bon cheval pour les 15 jours. Multiplie par 15 jours le nombre de* li *dont l'allure augmente, ajoute la distance parcourue par le bon cheval le premier jour, multiplie par ce résultat le numérateur des parts de jours et divise par le dénominateur des parts de jour. Ajoute le résultat à la quantité de* li *du parcours global précédent du bon cheval, d'où le résultat. Simplifie [...]*

Non seulement la procédure indique la méthode de fausse position mais aussi la formule de calcul de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique. Le bon cheval se déplace en parcourant une distance qui varie comme les termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme 193 et de raison 13. Au bout du jour n, il aura parcouru B (n) = n [193 + 13 (n - 1)/2] *li*. Donc B (15) = 4 260 *li* et B (16) = 4 648 *li*.

De même, pour le mauvais cheval, M (n) = n [97 - (1/2) (n - 1)/2] *li*. Donc M (15) = 1 402 + 1/2 *li* et B (16) = 1 492 *li*.

Au bout des x_1 = 15 jours, les deux chevaux ont parcouru au total 5 662 + 1/2 *li*. La distance aller-retour entre Chang'an et Qi étant 6 000 *li*, il y aura un déficit de e_1 = 337 + 1/2 *li*. De même, au bout de x_2 =16 jours, il y aura un excédent de e_2 = 140 *li*. D'où le calcul donné plus haut.

---

[16] Le PGCD.

[17] « On divise ce qui n'est pas épuisé par le nombre égal et on nomme les parts. »

[18] x est la solution positive de l'équation 6,25 x^2 + 283,75 x - 6 000 = 0 et vaut approximativement 15,7 : la solution proposée est du même ordre de grandeur.

SURFACES CIRCULAIRES.
UNE VALEUR APPROCHEE DE PI.

Résumé.

LIU Hui calcule une valeur approchée de π (3,1416) à l'aide d'une duplication de polygones réguliers inscrits et circonscrits dans un cercle.

1. Surfaces circulaires. Cadre du texte de LIU Hui.

Le texte de LIU Hui est en fait son commentaire du problème 1 - 32 du Jiu Zhang Suan Shu. Dans ce chapitre se trouvent des procédures pour calculer des surfaces de champ. Le problème 32 donne celle dans le cas où le champ est circulaire :

Procédure :

Multiplie la moitié de la circonférence par le rayon pour obtenir l'aire du cercle.

Autre procédure : Un quart du produit de la circonférence et du diamètre.

Autre procédure : Un quart du produit de trois fois le carré du diamètre.

Autre procédure : Le carré de la circonférence divisé par 12.

En notant respectivement R, D, C et A le rayon, le diamètre, la circonférence et l'aire du cercle, les règles donnent dans l'ordre :

$A = \frac{C}{2} \times R \qquad A = \frac{1}{4} C \times D \qquad A = \frac{1}{4} \times 3 \times D^2 \qquad A = \frac{C^2}{12}$

ce qui permet de calculer A connaissant C et D.

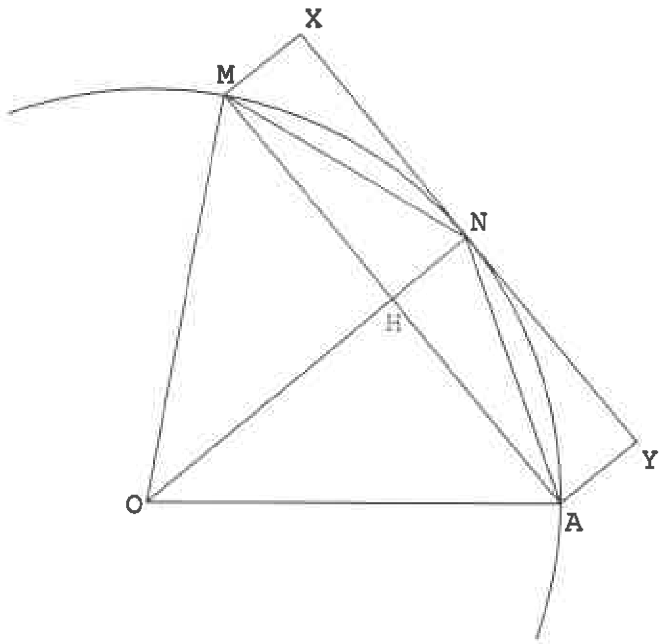
Les deux premières formules soient justes, les deux dernières sont inexactes, les mathématiciens chinois utilisant 3 pour valeur approchée de π ; les troisième et quatrième formules exactes sont respectivement $A = \frac{1}{4} \pi D^2$ et $A = \frac{1}{4\pi} C^2$. LIU Hui savait que 3 était une valeur approchée « arrondie » pratique et s'est attelé à trouver une meilleure approximation. Sa démarche ne fut pas unique : ZU Chongzhi (au V^e siècle) et LI Chunfeng (au VII^e siècle) ont proposé dans leur commentaire respectivement $\frac{355}{113}$ et $\frac{22}{7}$.

Les **unités** de mesures **employées** sont le *chi*, le *cun*, le *fen*, le *li*, le *hao*, le *miao* et le *hu* : la valeur de chacune de ces unités est 10 fois celle de l'unité suivante (1 *chi* = 10 *cun* etc.).

2. Une valeur approchée de π.

2.1 Méthode.

ARCHIMEDE et LIU Hui ont tous les deux utilisé une suite croissante de polygones réguliers pour arriver à leurs fins ; alors qu'ARCHIMEDE a déterminé une approximation du périmètre de la circonférence, LIU Hui va déterminer une approximation de l'aire de ce cercle. De plus, tandis que le premier travaille par encadrements, le second tronque souvent les résultats partiels.



Sur la figure ci-dessus, les lettres A, O, ... ont été ajoutées (pour une lecture « moderne ») à celle faite par LIU Hui ; toutefois, ce dernier n'utilise que la terminologie dans le triangle rectangle. Ainsi, se rapportant à OAH (contenu dans OAN) il appelle AH la base *(gou)*, OH la hauteur *(gu)* et OA l'hypoténuse *(xian)* ; se rapportant à ACH (contenu dans AHN avec le côté [AH] en commun), il appelle NH la *petite*[1] *base*, AH la *petite hauteur* et AN la *petite hypoténuse*.

On notera, pour le polygone régulier à *n* côtés, c_n la longueur du côté, S_n l'aire, a_n la longueur de l'apothème et b_n la longueur du co-apothème.

Sur la figure, on a : $AM = c_n$, $AN = c_{2n}$, $OH = a_n$ et $HN = b_n$.

Pour ses calculs, LIU Hui utilise (sans justification) le fait que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon[2] (ici, 1 *chi*) et les formules suivantes qui découlent du théorème de Pythagore appliqué aux triangles AHO et AHN :

$$a_n = \sqrt{R^2 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2} \qquad c_{2n} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + (R - a_n)^2} \qquad \text{avec } R = \frac{D}{2} = 1 \textit{ chi}$$

Les valeurs écrites dans l'explication du commentaire sont les valeurs approchées calculées par LIU Hui. Ce dernier n'a pas écrit tous ses résultats...

---

[1] L'adjectif « petit » lui sert pour différencier les deux triangles d'une même figure. Le segment qui est la base du premier triangle est la hauteur d'un nouveau triangle.

[2] LIU Hui appelle en fait le rayon le « demi-diamètre ».

Le commentaire de LIU Hui repose sur les calculs successifs de S_6, S_{12}, ..., S_{96} donnés par la relation $S_{2n} = \frac{n}{2} \times c_n \times \frac{D}{2}$. Ce qui correspond bien à la deuxième des quatre formule ci-dessus, puisque la limite en l'infini de $\frac{n}{2} \times c_n$ est $\frac{C}{2}$.

Commençant avec un cercle de diamètre D = 2 *chi*, il calcule par récurrence les apothèmes a_n et donc les longueur c_{2n} des côtés des polygones de 24 (= 2 × 12), 48 et 96 côtés.

Après avoir calculé c_{48}, il calcule S_{96} et en déduit une valeur approchée. Ensuite il calcule de même c_{96} et donne ses résultats sous la forme $S_{96} = 313$ *cun* + $\frac{584}{625}$ *cun* et $S_{192} = 314$ *cun* + $\frac{64}{625}$ *cun* [3]. Puis il encadre π de la façon suivante :

- $100\,\pi > S_{192}$ (100 étant le carré du rayon exprimé en *cun*) ;
- en considérant les polygones réguliers à 96 et 192 côtés, il vient :

$$96\ XY\ HN = 2\,(S_{192} - S_{96})$$

(le disque peut être entièrement couverte par 96 figures polygonales OMXYA)

$$\text{et } S_{96} + 2\,(S_{192} - S_{96}) = S_{192} + (S_{192} - S_{96}) > 100\,\pi.$$

Soit $314 + \frac{64}{625} < 100\,\pi < 314 + \frac{169}{625}$.

Pour des raisons pratiques, il abandonne les fractions et conclut que le rapport de l'aire du disque et l'aire de son carré circonscrit est $\frac{314}{400}$ ou $\frac{157}{200}$.

LIU Hui explique aussi que les modèles correspondants du diamètre et de la circonférence sont égaux à 50 et 157, respectivement. Il ne raisonne pas en termes d'un nombre spécifique (π) mais en couple de nombres proportionnels (l'un se rapportant au diamètre, l'autre à la circonférence), tout comme les anciens mathématiciens chinois. Dans l'ensemble des traités des DCC, il est donné pour valeur du périmètre et du diamètre d'un cercle respectivement 3 et 1. Par exemple, LIU Hui écrivait : « *Le modèle (*lü*) du diamètre étant 1, le modèle du tour extérieur est 3.* »

Toutefois, il propose de meilleurs modèles, obtenus par la méthode du polygone inscrit. Il explique que par duplication répétée de ses côtés, le contour du polygone vient se confondre avec celui du cercle.

[3] Le texte parle de *cun* et non de *cun carré*. Les surfaces ont la même unité de même nom que l'unité de longueur correspondante : par exemple, 1 *bu* peut désigner aussi bien la longueur de 1 *bu* que l'aire du carré de côté 1 *bu*.

2.2 Le texte [4] de LIU Hui.

Problème 1-32.

Suppose un champ de circulaire de 181 bu *de circonférence et de 60* bu *1/3* bu *de diamètre. On demande l'aire du champ.*

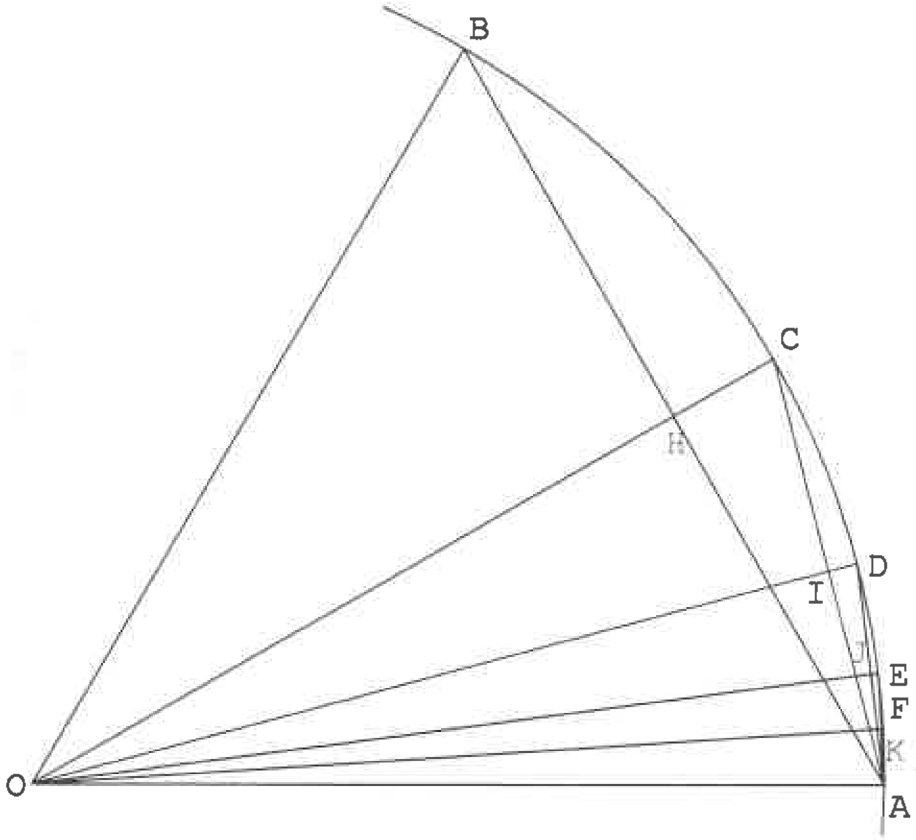
Réponse : 11 mu *90* bu *1/12* bu

LIU Hui insère à cet endroit cette précision : « *Avec ma procédure, l'aire devrait être 10* mu *208* bu *113/314* bu. ». C'est-à-dire qu'il considère $\pi \approx 3{,}14$, comme nous le verrons.

Procédure : La moitié de la circonférence et la moitié du diamètre sont multipliées ; on obtient les bu *du produit* (ji).

Comme à son habitude, Liu Hui commente la procédure. Il donne ensuite sa méthode pour déterminer une valeur approchée de π : elle est l'objet des lignes suivantes. Pour faciliter la lecture et la compréhension de ce texte ancien, celui-ci a été découpé en paragraphes en dessous desquels se trouve leur transcription mathématique moderne.

[...] *Supposons un cercle de diamètre 2 chi et à l'intérieur du cercle un côté* [5] *d'un hexagone. Sa mesure est égale à la moitié du diamètre du cercle, conformément au modèle de diamètre 1, et au modèle du tour extérieur 3. Cela étant, par un côté de l'hexagone, multiplions le demi-diamètre. Multiplions deux fois et sextuplons cela : on obtient la surface du dodécagone.*



[4] Le texte qui suit est tiré de la thèse de R. SCHRIMPF *(op. réf.)* mais néanmoins mis au goût du jour. Le lecteur moderne trouvera une autre traduction dans Histoires d'algorithmes *(op. réf.)*.
[5] Le terme est *mien*, soit la *face*, car on le voit de l'extérieur.

Si on coupe à nouveau cela, multiplions ensuite par un côté du dodécagone le demi-diamètre d'un cercle correspondant au segment circulaire ; multiplions quatre fois et sextuplons cela : on obtient l'aire du 24-gone.

Ce qu'on perd est d'autant plus faible qu'on coupe les polygones plus finement. Coupons-les et coupons à nouveau pour arriver à ce qu'on ne puisse plus couper, alors il y a coïncidence avec le tour du cercle, et il n'y a rien qui soit perdu.

LIU Hui vient d'expliquer que la surface d'un polygone se calcule à partir du demi diamètre du cercle et du côté du polygone. Il va utiliser la procédure du *gougu* [6] .

Procédure de découpage du hexagone en un dodécagone. On pose le diamètre du cercle 2 chi. *On le partage en 2, il fait 1* chi *: c'est le côté de l'hexagone inscrit dans le cercle* [7] *. On prend le demi-diamètre 1* chi *comme hypoténuse, le demi-côté 5* cun *comme base* (gou) [8] *. Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *correspondante* [9] *: avec le carré* (mi) [10] *de la base, 25* cun, *on diminue le carré de l'hypoténuse : il reste 75* cun. *On divise ceci en prenant la racine carrée ; le calcul continue jusqu'aux* miao *et aux* hu. *On recule* (tui) *de nouveau le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale* [11] *. On prend le chiffre de la partie décimale sans nom comme numérateur et 10 comme dénominateur. Par simplification, on a 2 cinquièmes de* hu. *On obtient donc une hauteur de 8* cun *6* fen *6* li *2* miao *5* hu *+ 2/5* hu. *On diminue ceci du demi-diamètre : il reste* [12] *1* cun *3* fen *3* li *9* hao *7* miao *4* hu *+ 3/5* hu *; on l'appelle petite hauteur. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone* [13] *. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 949 193 445* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : c'est le côté du dodécagone.*

$c_6 = OA = 1$ *chi* $= 10$ *cun* $\qquad \frac{c_6}{2} = AH = 5$ *cun*

$a_6^2 = OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 5^2 = 75$ *cun carrés*

$a_6 = OH = 8$ *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu* + 2/5 *hu* = 0, 866 025 4 *chi*

$b_6 = CH = R - OH = 1$ *cun* 3 *fen* 3 *li* 9 *hao* 7 *miao* 4 *hu* + 3/5 *hu* = 0, 133 974 6 *chi*

$c_{12}^2 = AC^2 = AH^2 + HC^2 = 267\ 949\ 193\ 445$ *hu carrés*

Procédure de découpage du dodécagone en un 24-gone. On prend de la même façon le demi-diamètre comme hypoténuse, le demi côté comme base (gou). *Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *lui correspondant. On pose le carré de la petite hypoténuse ci-dessus et on en prend le quart* [14] *: on obtient 66 987 298 361* hu *et une fraction restante que l'on néglige.*

---

[6] Voir le chapitre « La technique du *gougu* » pour la présentation de cette méthode.
[7] OA
[8] AH
[9] BH
[10] Littéralement : « l'étendue » (*mi*) de la base *(gou)*, soit l'aire du carré ayant la base pour côté.
[11] Ces termes se rapportent à la technique d'extraction de racine. Voir le chapitre de la brochure sur ce point.
[12] CH
[13] AC
[14] « *de 4 parties, prends-en 1* »

Le résultat, c'est le carré de la base. On le soustrait au carré de l'hypoténuse ; on divise leur reste en prenant la racine carrée : on obtient une hauteur de 9 cun *6* fen *5* li *9* hao *2* miao *5* hu *4/5* hu. *On diminue ceci du demi-diamètre : il reste 3* fen *4* li *7* miao *4* hou *1/5* hu *: on l'appelle petite base. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 68 148 349 466* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : c'est le côté du 24-gone.*

$\frac{c_{12}}{2} = AI$ $\quad\quad\quad\quad$ $\left(\frac{c_{12}}{2}\right)^2 = AI^2 = 66\,987\,298\,361$ *hu carrés*

$a_{12}{}^2 = OI^2 = OA^2 - AI^2$

$a_{12} = OI = 9$ *cun* 6 *fen* 5 *li* 9 *hao* 2 *miao* 5 *hu* 4/5 *hu* = 0, 965 925 8 *chi*

$b_{12} = ID = R - OI = 3$ *fen* 4 *li* 7 *miao* 4 *hou* 1/5 *hu* = 0, 034 074 2 *chi*

$c_{24}{}^2 = AD^2 = AI^2 + ID^2 = 68\,148\,349\,466$ *hu carrés*

Procédure de découpage du 24-gone en un 48-gone. On prend de la même façon le demi-diamètre comme hypoténuse, le demi côté comme base (gou). *Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *lui correspondant. On pose le carré de la petite hypoténuse ci-dessus et on en prend le quart : on obtient 17 037 087 366* hu *et une fraction restante que l'on néglige. Le résultat, c'est le carré de la base. On le soustrait au carré de l'hypoténuse ; on divise leur reste en prenant la racine carrée : on obtient une hauteur de 9* cun *9* fen *1* li *4* hao *4* miao *4* hu *4/5 de* hu. *On diminue ceci du demi-diamètre : il reste 8 li 5* hao *5* miao *5* hu *1/5 de* hu *: on l'appelle petite base. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 17 110 278 813* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : on obtient 1* cun *3* fen *8* hao *6* hu *et on abandonne les parts restantes : c'est le côté du 48-gone.*

$\frac{c_{24}}{2} = AJ$ $\quad\quad\quad\quad$ $\left(\frac{c_{24}}{2}\right)^2 = AJ^2 = 17\,037\,087\,366$ *hu carrés*

$a_{24}{}^2 = OJ^2 = OA^2 - AJ^2$

$a_{24} = OJ = 9$ *cun* 9 *fen* 1 *li* 4 *hao* 4 *miao* 4 *hu* 4/5 *hu* = 0, 991 444 8 *chi*

$b_{24} = EJ = R - OJ = 8$ *li* 5 *hao* 5 *miao* 5 *hou* 1/5 *hu* = 0, 008 555 2 *chi*

$c_{48}{}^2 = AE^2 = AJ^2 + EJ^2 = 17\,110\,278\,813$ *hu carrés*

$c_{48} = AE = 1$ *cun* 3 *fen* 8 *hao* 6 *hu* = 0, 130 806 *chi*

LIU Hui calcule alors l'aire du polygone double, à 96 côtés :

Par le demi-diamètre de 1 chi, on le multiplie, puis on multiplie le résultat par 24 : on obtient une aire de 3 139 344 000 000 hu. *On la divise par 10 000 000 000 : on obtient une surface de 313* cun *et 584/625* cun. *C'est la surface d'un 96-gone.*

$S_{96} = 24\, c_{48}\, R = 3\,139\,344\,000\,000$ *hu carrés* $= 313 + \frac{584}{625}$ *cun carrés*

Le commentateur continue avec le calcul du côté :

Procédure de découpage du 48-gone en 96-gone. On prend de la même façon le demi-diamètre comme hypoténuse, le demi côté comme base (gou). *Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *lui correspondant. On pose le carré de la petite hypoténuse ci-dessus et on en prend le quart : on obtient 4 277 569 703* hu *et une fraction restante que l'on néglige. Le résultat, c'est le carré de la base. On le soustrait au carré de l'hypoténuse ; on divise leur reste en prenant la racine carrée : on obtient une hauteur de 9* cun *9* fen *7* li *8* hao *5* miao *8* hu *9/10* hu. *On diminue ceci du demi-diamètre : il reste 2* li *1* hao *4* miao *1* hu *1/10* hu *: on l'appelle petite base. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 4 282 154 012* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : on obtient pour la petite hypoténuse 6* fen *5* li *4* hao *3* miao *8* hu *et on abandonne les parts restantes : c'est le côté du 96-gone.*

$\frac{c_{48}}{2} = AK$ $\left(\frac{c_{48}}{2}\right)^2 = AK^2 = 4\,277\,569\,703$ *hu carrés*

$a_{48}^2 = OK^2 = OA^2 - AK^2$

$a_{48} = 9$ *cun* 9 *fen* 7 *li* 8 *hao* 5 *miao* 8 *hu* 9 *dixièmes de hu* = 0, 997 858 9 *chi*

$b_{48} = KF = R - OK =$ *2 li 1 hao 4 miao 1 hu 1 dixième de hu* = 0, 002 141 1 *chi*

$c_{96}^2 = AF^2 = KF^2 + AK^2 = 4\,282\,154\,012$ *hu carrés*

$c_{96} = AF = 6$ *fen* 5 *li* 4 *hao* 3 *miao* 8 *hu* = 0, 065 438 *chi*

Comme précédemment, LIU Hui en déduit l'aire du polygone double :

Par le demi-diamètre de 1 chi, on le multiplie, puis on multiplie le résultat par 48 : on obtient une aire de 3 141 024 000 000 hu. *On la divise par 10 000 000 000 : on obtient une surface de 314* cun *et 64/625* cun. *C'est la surface d'un 96-gone.*

$S_{192} = 48\, c_{96}\, R = 3\,141\,024\,000\,000$ *hu carrés* $= 314 + \frac{64}{625}$ *cun carrés*

Il fait alors remarquer que la différence des deux aires calculées, prise deux fois, et ajoutée à l'aire la plus petite dépasserait celle du cercle. Autrement dit, le 192-gone détermine un minorant et le 96-gone, un majorant.

Par l'aire du 96-gone, on la diminue ; il reste 105/625 cun *: on l'appelle l'aire de la différence. On la double : cela fait 210/625* cun. *Cela donne 96 champs polygonaux extérieurs au 96-gone, c'est-à-dire l'aire totale des produits des flèches par les cordes. On ajoute cette aire à celle du 96-gone : on obtient 314* cun *et 169/625* cun. *On sort alors de l'intérieur du cercle.*

$$314 + \frac{64}{625} < S < 314 + \frac{584}{625} + \frac{210}{625} = 314 + \frac{169}{625}$$

$$S_{96} + 2\,(S_{192} - S_{96}) = S_{192} + (S_{192} - S_{96}) > 100\,\pi$$

LIU Hui détermine la valeur de la circonférence du cercle et donne A = 314 *cun* à partir non pas des bases des polygones, mais de l'aire.

C'est pourquoi on revient à l'aire totale du 192-gone : 314 cun *est pris pour modèle* (lü) *défini de l'aire du cercle et on néglige l'aire restante. Par le demi-diamètre 1* chi, *on divise l'aire du cercle. On double ceci : on obtient 6* chi *2* cun *8* fen *; c'est la valeur de la circonférence.*

LIU Hui aboutit enfin à son modèle *(lü)*, le rapport de la circonférence au demi-diamètre.

On multiplie le diamètre par lui-même ; le carré qui a pour coté ce diamètre a pour aire 400 cun *; avec l'aire du cercle, on les réduit mutuellement : l'aire du cercle donne 157 comme modèle* (lü), *l'aire du carré donne 200 comme modèle* (lü). *L'aire du carré étant 200, celle du cercle inscrit est 157. Le modèle* (lü) *du cercle est aussi légèrement trop petit.*

[...] De même, la simplification du diamètre de 2 chi *et de la circonférence 6* chi *2* cun *8* fen *donnent pour circonférence 157 et pour diamètre 50. Ce sont les modèles mis en relation l'un avec l'autre* (xiangyu lü). *Le modèle* (lü) *de la circonférence est encore légèrement trop petit.*

FIGURES INSCRITES.

Résumé.

Un triangle rectangle est donné : on connaît donc les longueurs des côtés de l'angle droit. On cherche à donner la longueur L du côté d'un carré inscrit et la longueur D du diamètre du cercle inscrit dans ce triangle.

Introduction.

Les deux problèmes suivants sont extraits du Chapitre 9 du Jiu Zhang Suan Shu et en sont respectivement les quinzième et seizième. La résolution des problèmes repose sur le principe *chu ru xiang bu* (« principe de rapiéçage ») dont l'énoncé est le suivant :

- si l'on déplace une figure plane, son aire ne varie pas ;
- si l'on coupe une figure en un certain nombre de figures composantes, la somme des aires de ces parties est égale à l'aire de la figure initiale.

1. Calcul de la longueur du côté d'un carré inscrit dans un triangle rectangle.

Dans un triangle rectangle (donné), il est demandé de calculer, en fonction de la longueur des côtés de l'angle droit du triangle, la longueur [1] L du carré inscrit (de telle sorte que l'un de ses sommets soit le sommet de l'angle droit du triangle et les trois autres sommets soient sur les côtés du triangle).

Problème 9-15.

*Supposons que la base (*gou*) soit égale à 5* bu *et la hauteur (*gou*), à 12* bu. *On demande combien mesure le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.*

Réponse : Le côté mesure $3 + \frac{9}{17}$ bu.

Procédure : Le produit du gou *et du* gu *est le dividende, la somme du* gou *et du* gu *est le diviseur. Divise, c'est le côté du carré.*

---

[1] Par souci de cohérence avec les notations du chapitre sur la méthode du *gougu*, la lettre L (initiale de « longueur ») a été préférée à la lettre c (initiale habituelle de « côté »).

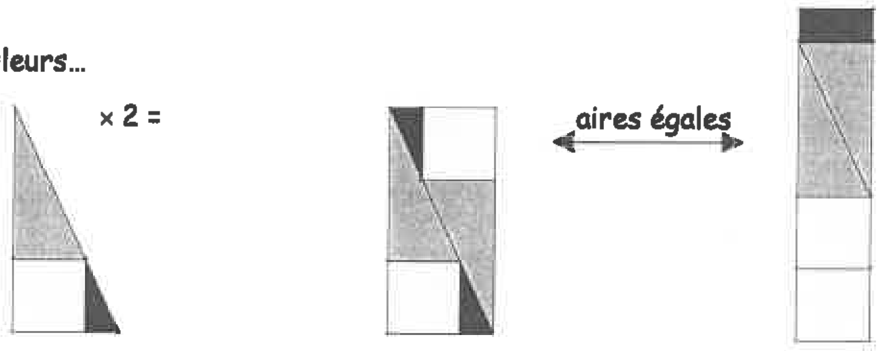
Les commentaires de ce problème qui suivent sont de LIU Hui. Nous devons à un lettré du XVIII^e, LI Huang, la reconstitution des figures manquantes dans son Jiu Zhang Suan Shu Xicao Tushuo. Il en est de même pour le problème 16.

Commentaire de LIU Hui :

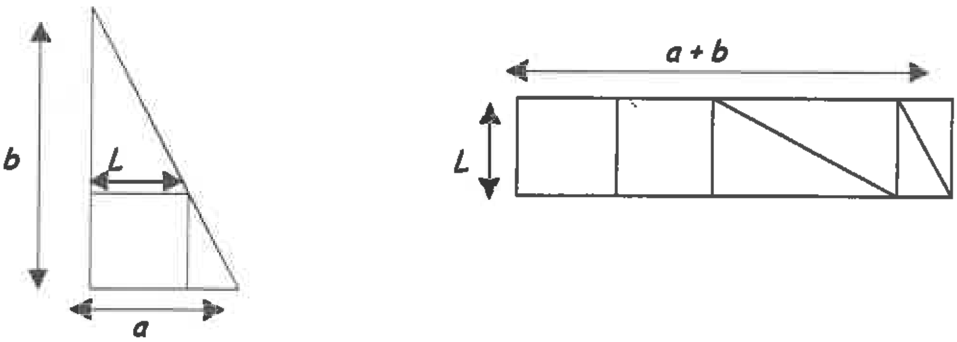
Le produit de la base (gou) par la hauteur (gu) contient 3 paires de figures, rouges, azur et jaunes. Place les figures jaunes au pied et arrange les figures rouges et azur pour en faire des rectangles au sommet, avec le côté du carré jaune central comme largeur et la somme de la base et de la hauteur comme la longueur. C'est pourquoi pour diviseur on additionne la base et la hauteur.

Cela signifie de bouger les pièces rouges, jaunes et azur de telle façon à reconstruire, en prenant une paire de chacune des trois pièces, un rectangle dont la largeur vaille la côté du carré jaune.

Avec des couleurs...



Avec des lettres...



Comme l'indique LIU Hui, la méthode de la solution implique un rectangle dont l'aire peut être décrite de deux façons différentes. Pour cela, il réarrange les pièces résultant d'un découpage de deux exemplaires identiques du triangle donné (comme indiqué sur la figure). Il crée ainsi un rectangle dont l'aire est égale, d'une part, à $a\,b$, puisque ses dimensions sont les longueurs des côtés de l'angle droit, et, d'autre part, à $L\,(a + b)$, puisque ce rectangle a pour largeur L (la longueur du côté du carré) et pour longueur $a + b$.

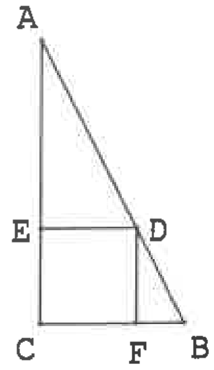
D'où $L = \dfrac{a\,b}{a + b}$.

Il propose aussi une autre preuve, basée sur les triangles semblables, dont l'esprit est le suivant :

Les triangles AED, DFB et ACB sont semblables. Dans le petit triangle rectangle AED construit sur la hauteur *gu* de ACB, AE + ED = AE + EC = *b* et (de même) dans DFB construit sur la base *gou* de ACB, DF + FB = *a*.

Donc on obtient $\frac{L}{a} = \frac{a}{a+b}$ ou $\frac{L}{b} = \frac{b}{a+b}$.

D'où le résultat.



2. Calcul de la longueur du diamètre du cercle inscrit dans un triangle rectangle.

Dans un triangle rectangle (donné), il est demandé de calculer le diamètre D du cercle inscrit (le cercle est tangent à chacun des trois côtes du triangle).

Problème 9-16.

*Suppose que la base (*gou*) vaille 8* bu *et la hauteur (*gu*), 15* bu. *On demande combien mesure le diamètre du cercle inscrit.*

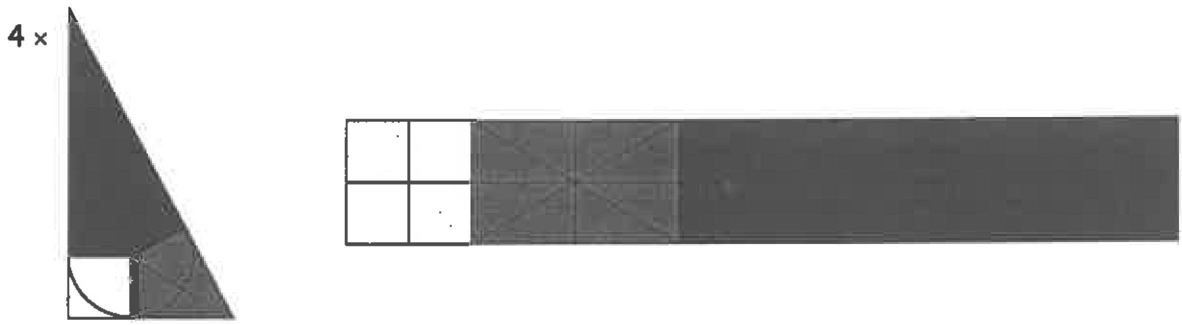
Réponse : 6 bu.

Procédure : 8 bu *est le* gou, *15* bu *est le* gu. *Trouve l'hypoténuse. Ajoute les trois ensemble : c'est le diviseur. Prends le* gou *pour le multiplier avec le* gu. *Double : c'est le dividende. Divise : c'est le diamètre.* [2]

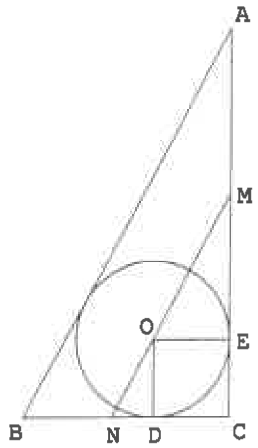
La règle demande de calculer d'abord la longueur de l'hypoténuse : $c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ *bu*

Elle permet alors de calculer le diamètre : $D = \frac{2\,a\,b}{a+b+c} = \frac{2 \times 8 \times 15}{8 + 15 + 17} = 6$ bu

Avec des couleurs...



[2] Le double du produit des longueurs des deux côtés est le quadruple de la moitié de ce produit, qui est exactement l'aire du triangle. Autrement dit, le diamètre du cercle inscrit est égal à 4 fois l'aire du triangle rectangle divisé par son périmètre.



LIU Hui obtient aussi ce résultat avec un raisonnement purement géométrique (avec la similitude de triangles). L'idée est la suivante : (1) Les triangles DNO et EMO sont semblables au triangle *ABC*, (2) chacun d'eux a un côté qui est le rayon du cercle, (3) la somme des longueurs de leurs côtés sont respectivement *a* et *b*, (4) avec des calculs de proportions (basés sur la similitude), on obtient le résultat.

Il construit la droite (MN) qui est la parallèle à l'hypoténuse (AB) passant par le centre O du cercle inscrit.

Soit r le rayon du cercle inscrit.

Par similitude des triangles ABC et OND, on a : $BC :: AC :: AB = ND :: OD :: NO$ soit encore : $a :: b :: c = DN :: r :: ON$.

Or NB = ON. (LIU Hui ne l'a pas démontré.) [3]

Donc $\dfrac{b}{a+b+c} = \dfrac{r}{DN+r+ON} = \dfrac{r}{CN+ON} = \dfrac{r}{CN+NB} = \dfrac{r}{a}$.

Donc $r = \dfrac{a\,b}{a+b+c}$ et $d = 2\,r = \dfrac{2\,a\,b}{a+b+c}$

On notera que LIU Hui propose aussi d'autres relations permettant de calculer D :

$$D = a - (c - b) \quad [4]$$

$$D = b - (c - a)$$

$$D = (b + a) - c$$

ainsi que :

$$D^2 = 2\,(c - a)\,(c - b)$$

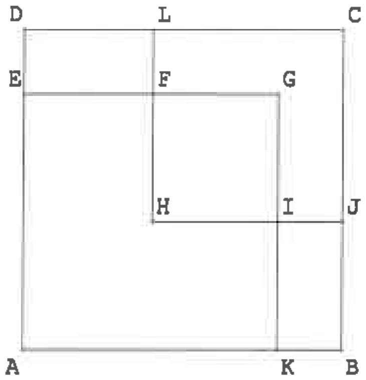
Ce dernier résultat a été montré par Huang Tai Sheng dans son Ce Yuan Hai Jing Zhui *Jie* de la façon suivante :

---

[3] En effet, soit α une mesure de l'angle $\angle OBN$. (OB) est bissectrice de l'angle $\angle ABC$ car O, étant le centre du cercle inscrit, est le point d'intersection des bissectrices. Les droites (MN) et (AB) étant parallèles, on a : $\angle ONC = \angle ABC = 2\,\alpha$. Soit β une mesure de l'angle $\angle BON$. On a les équations (E1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (avec la somme des angles du triangle OBN) et (E2) $2\,\alpha + \gamma = 180°$ (avec l'angle plat $\angle CNB$) qui donnent, en soustrayant (E1) à (E2), $\alpha - \beta = 0$ puis $\alpha = \beta$: le triangle ONB est donc isocèle de sommet N. Donc ON = NB.

[4] Les deux données sont ici a et la différence $c - b$, c'est-à-dire que l'on ne connaît ni c ni b mais seulement leur différence. On pourra se reporter au chapitre sur la technique du *gougu*.

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré avec AB = c ; de plus, AE = b et CJ = a.



On construit le carré FGIH d'aire D^2 (donc FH = D).

De plus, on a : FH = CJ – DE = CJ – (AD – AE) = CJ – (AB – AE) = $a - (c - b)$.

Le carré ABCD est constitué du carré AEGK ajouté au polygone DCBKGE. L'aire de ce dernier est donc égale à $c^2 - b^2$, soit a^2, d'après le théorème de Pythagore.

Cette aire est aussi celle du carré dont une diagonale est [CH].

On a de plus l'égalité des aires des rectangles de diagonales [DF] et [IB].

On utilise aussi le « principe de rapiéçage ».

Finalement, l'aire du carré FGIH est donc égale à l'aire du rectangle de diagonale [DF].

On obtient alors : $D^2 = 2$ DE × EF $= 2\,(c - a)\,(c - b)$.

EXTRACTION DE RACINE CARREE. EQUATIONS QUADRATIQUES.

Résumé.

Ces lignes relatent le procédé de calcul de la racine carrée d'un nombre selon la méthode exposée dans le Chapitre 4 du Jiu Zhang Suan Shu. Le calcul de la racine du nombre 52 225 (problème 12) sera pris comme exemple d'application. Le commentaire de LIU Hui proposera une argumentation géométrique. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à des équations quadratiques.

1. Procédé *kai fang*.

1. 1. Cadre.

Il est vrai que les méthodes d'extraction sont nombreuses, chaque mathématicien semblant avoir sa technique propre. Il vrai aussi que ce qui convient pour l'extraction des racines n-ièmes est aussi valable pour la recherche des racines d'équations polynomiales. Pourtant, l'unité du sujet est présente, tant par le même schéma d'ensemble qu'utilisaient les mathématiciens chinois que par l'homogénéité de la terminologie employée, liant arithmétique et géométrie. La méthode exposée ici sera celle du Chapitre 4 du Jiu Zhang Suan Shu.

Ce Chapitre du Jiu Zhang Suan Shu commence par des problèmes de champs : connaissant leur surface et la longueur d'un côté, il est demandé la longueur de l'autre côté. Il suffit de diviser la surface par la longueur donnée pour avoir le résultat : c'est un « simple » [1] calcul utilisant des fractions. Pourtant, ces problèmes ne sont pas compilés avec les autres du Chapitre 1, qui traite déjà des opérations fondamentales sur les nombres entiers et fractionnaires. C'est que l'idée du mathématicien est autre : mener vers la technique de la racine carrée (ce qui correspond au cas où la longueur et la largeur sont égales, le rectangle est alors un carré). La méthode s'appelle *kai fang*, de *kai*, ouvrir, disséquer, dissocier ou disjoindre et de *fang*, carré. Extraire une racine carrée revient donc à « ouvrir le carré ». On notera, une fois de plus, cette marque indélébile du rapport étroit entre la géométrie et les opérations dans les mathématiques chinoises.

Les résultats donnés sont tous de la forme « côté de *N* » ; autrement dit, on trouvera des résultats du type $5\sqrt{3}$ et non pas $\sqrt{75}$. De plus, lorsqu'un radical intervient dans une expression, tous les autres termes T sont mis sous la forme « côté de T » : dans notre formalisme, on donnerait $T\sqrt{T}$ sous la forme $\sqrt{(T^3)}$.

---

[1] Voir le chapitre traitant de la division.

La méthode d'extraction est complète et correcte ; de plus, les explications géométriques de LIU Hui montrent pourquoi elle est juste (et elles la valident).

La méthode générale est donnée à la suite des exercices 12 à 16 [2]. Il n'y a pas d'application numérique. Même si la compréhension du texte est facilitée par les commentaires (de LIU Hui et d'autres), son abstraction rend sa traduction littérale difficile.

Le Chapitre 4 continue avec des exercices dans lesquels, comme lien géométrique, on donne la surface d'un cercle et l'on demande sa circonférence ; ensuite est présentée l'extraction des racines cubiques, où, ensuite, sur le même principe, il est donné le volume d'une sphère et l'on demande son diamètre.

Qu'il y ait un instrument de calcul pour accompagner les textes mathématiques est un fait indubitable, même si les historiens ne disposent que de pistes sur ce sujet. Ce n'est guère que dans l'ouvrage de Sunzi, au Ve siècle, qu'est attesté l'emploi de baguettes pour représenter les nombres [3] et de certaines techniques de calcul. Néanmoins, au vu des témoignages des différentes époques, il y a une continuité certaine entre les principes de l'utilisation de la surface à calcul (qui a d'ailleurs plusieurs configurations) et le système décimal de position depuis l'époque des Neuf Chapitres.

Pour la clarté de la présentation, les différentes étapes ont été séparées en différents paragraphes. On y trouvera successivement une traduction littérale, la correspondance avec l'étape du calcul (sous forme tabulaire) et un commentaire (en particulier, le calcul « moderne »).

A droite du tableau se trouve la traduction symbolique du cas général. N désigne le nombre dont il faut extraire la racine carrée et $a.\ 10^n + b.\ 10^{n-1} + c.\ 10^{n-2} + \ldots$, cette racine. L'algorithme exposé calcule successivement (1) $N - (a.\ 10^n)^2$, (2) $N - (a.\ 10^n + b.\ 10^{n-1})^2$, (3) $N - (a.\ 10^n + b.\ 10^{n-1} + c.\ 10^{n-2})^2$, et ainsi de suite.

1. 2. Division.

Lors de cette division, les chiffres sont représentés [4] par des baguettes sur une surface à calculer, qui sera transposée sous forme de tableaux. Dans ceux-ci, il y a trois lignes.

Quotient	*shang* [5]
Dividende	*shi*
Diviseur	*fa*

[2] Les racines carrées à calculer sont respectivement celles de 55 225, 25 281, 71 284, 564 752 + $\frac{1}{4}$ et 3 972 150 625.

[3] Voir le chapitre traitant de la numération.

[4] Comme cela était fait à l'époque du Jiu Zhang Suan Shu. Les techniques de division ont varié durant les siècles, notamment à la période Ming (1368-1644) où l'usage du boulier a été largement étendu ; des exemples se trouvent au chapitre « Calcul fractionnaire. Division. ».

[5] Littéralement : « ce qui va être discuté (ou négocié) ».

La première contient les états successifs du quotient (qui est déterminé chiffre après chiffre) ; la deuxième, le dividende puis la suite des restes ; la troisième, les différentes positions du diviseur. Si le reste est non nul et inférieur au diviseur, la surface à calculer montre la configuration suivante :

Quotient Q
Reste R
Diviseur D

Elle donne le résultat $Q + \frac{R}{D}$.

A titre d'exemples, voici la division [6] de 6 561 par 9, puis celle de 1 997 par 23. Pour plus de lisibilité, les chiffres arabes ont été préférés aux baguettes à calculer.

6	5	6	1
	9		

	7		
	2	6	1
		9	

(65 – 7 × 9 = 2)

	7	2	
		8	1
			9

(26 – 2 × 9 = 8)

	7	2	9
			0
			9

(81 – 9 × 9 = 0)

1	9	9	7
	2	3	

		8	
	1	5	7
		2	3

(199 – 8 × 23 = 15)

		8	6
		1	9
		2	3

(157 – 6 × 23 = 19)

Les résultats sont respectivement 729 et $86 + \frac{19}{23}$.

Le diviseur est placé en dessous du dividende. Le diviseur est décalé vers la gauche, le plus possible, de façon à ce que son chiffre le plus à gauche soit sous le chiffre du diviseur qui lui est supérieur ou égal.

La position du diviseur (rétrogradé colonne à colonne à chaque étape) le met en état de multiplicande pour le chiffre correspondant du dividende : il est multiplié par ce chiffre et le produit est retranche du dividende au-dessus. C'est là la clé, appelée « élimination ». L'extraction de racine est alors désignée comme « élimination par ouverture du carré ».

1. 3. Extraction de la racine carrée : Procédé *kai fang*.

[6] La plupart des auteurs désignent par *chu* la division ; pour exprimer la division de A par B, ils utilisent la formule « par B, réduisez A ». Certains font suivre A de l'expression « B *er yi* », soit « B et 1 », c'est-à-dire « faites B parts et prenez-en une ».

__Problème 4-12 du Jiu Zhang Suan Shu__

Soit maintenant une aire de 55 225 bu. *Combien mesure le côté du carré ?*

Réponse : 235 bu.

Remarquons au passage que la dimension est fausse : il faudrait parler de « *bu* carré » et non pas de « *bu* ». Mais ceci n'était pas dans l'esprit alors... Les surfaces ont la même unité d'aire de même nom que l'unité de longueur correspondante : 1 *bu* peut désigner aussi bien la longueur de 1 *bu* que l'aire du carré de côté 1 *bu*. C'est la même idée que l'on trouve dans nos livres du XVI^e^ siècle.

Une extraction étant une opération semblable à une division, prise comme opération de référence, la description de la méthode en utilise le vocabulaire et la présentation. Le nombre N s'appelle toujours *shi* (dividende) et x, sa racine, *shang* (quotient).

Le texte original n'indique pas comment étaient effectués les calculs. On prendra le type suivant de disposition utilisée (à quelques variantes près) par la plupart des mathématiciens post-Han :

Quotient	*Shang*
Dividende	*Shi*
Diviseur	*Fa*
Baguette unité	*jie suan*

Les chiffres de la racine x sont calculés l'un après l'autre et sont placés dans la première ligne. Le nombre N dont on extrait la racine est placé sur la deuxième ligne. Sa valeur va être diminuée à chaque étape. Dans la troisième ligne, un nombre sert de diviseur. Il va servir, comme dans la division, à faire une élimination. Sa valeur numérique varie et est déterminé par les étapes précédentes. Une « baguette unité » se trouve dans la quatrième ligne. Elle sert de pointeur. Sa valeur numérique est invariable mais les places qu'elle occupe successivement indiquent dans le dividende la tranche de nombres avec laquelle on travaille.

Règle d'extraction d'une racine carrée. [7]

Pose l'aire du carré donnée [8] *comme dividende* (shi).

Il s'agit de trouver le nombre x tel que $x^2 = N = 55\ 225$.

Emprunte une baguette unité et déplace-la en sautant une colonne à chaque fois.

On sépare le nombre donné en tranches de deux chiffres (éventuellement un seul, pour la tranche la plus à gauche). Le rôle de cette baguette est de repérer la dernière tranche du

[7] D'après l'article de K. CHEMLA *(op. réf.)*. Dans un souci d'explication, de la méthode, celle-ci été découpée. Il y a divers emplois de polices : sous le *texte chinois*, se trouvent la présentation de la tablette à calculer, la traduction « en français » puis la traduction mathématique.

[8] Littéralement *qi*, « accumulation ».

dividende (découpé en tranches de deux chiffres à partir des unités). Le nombre de ses déplacements donne un ordre de grandeur du résultat. Autrement dit, la « baguette empruntée » est déplacée depuis la position des unités vers la gauche de 10^2 en 10^2 jusqu'à arriver, le plus loin possible, c'est-à-dire en 10^{2n} en ayant alors pour premier chiffre de la racine 10^n. Il y a n sauts : le premier chiffre sera dans la $(n + 1)^{ème}$ colonne en partant de la droite. Il sera en fait placé dans la ligne supérieure de la table.

5	5	2	2	5
.		.		1

→

5	5	2	2	5
.		1		.

→

5	5	2	2	5
1		.		.

5	5	2	2	5	N	Dividende
				1	1	Baguette empruntée

5	5	2	2	5	N	Dividende
1					1	10^{2n}

« Emprunter » une baguette signifie que celle-ci, après usage, sera restituée au groupe de baguettes dont elle est tirée. L'auteur ne dit pas où finit le déplacement de cette baguette, probablement parce qu'il était difficile d'exprimer clairement qu'il faut s'arrêter juste avant de dépasser le dividende (les applications du procédé montrent en effet que la pratique était ainsi). Cette « baguette empruntée » pourrait alors lier unité et nombre représenté (en effet, la notation numérique de 314 et celle de 31 400 ne peuvent pas être distinguées, ce qui n'est pas un problème pour un extraction de racine carrée mais qui le devient pour une extraction de racine cubique).

On s'arrête en dessous du 5 situé le plus à gauche. Dans ce cas, $n = 2$.

Discute ce que l'on obtient.

		2			$a. 10^n$
5	5	2	2	5	N
2					$a. 10^{2n}$
1					10^{2n}

Détermine le premier chiffre de la racine.

L'objet de la discussion est de trouver le plus grand nombre dont le carré est inférieur ou égal au nombre représenté par cette première tranche. Celle-ci ayant au plus deux chiffres, le nombre cherché est inférieur ou égal à 9. Comme la baguette empruntée vaut 10 000, le plus grand nombre dont le carré multiplié par 10 000 est inférieur à 55 225 est 2. Soit x la racine carrée de 55 225. Soit x = 100 a + 10 b

+ c (car n = 2). L'équation à résoudre est x^2 = 55 225. Soit x = 100 x_1. D'où 10 000 x_1^2 = 55 225. Le coefficient de x_1^2 représente la valeur de la baguette unité après déplacement au début de l'opération. En cherchant, par exemple (le texte chinois ne disant pas explicitement comment l'auteur trouve les valeurs 2, 3 et 5), le plus grand carré contenu dans 5, on détermine le premier chiffre de x : a = 2. a est ainsi la partie entière de x_1. On pose alors x_1 = a + y = y + 2 (soit y = x_1 − 2).

Avec la baguette empruntée, multiplie ce premier (chiffre), ce qui te donne le diviseur **(fa)** ***; avec lui, effectue l'élimination*** **(chu).**

		2			$a. 10^n$
1	5	2	2	5	$N - a^2. 10^{2n}$
2					$a. 10^{2n}$
1					10^{2n}

L'élimination consiste à multiplier le diviseur par le premier chiffre de la racine (résultat de la discussion) et à soustraire ce produit du dividende.

Le diviseur est 2 × 10 000, soit 20 000. On multiplie de nouveau 20 000 par 2 ; on obtient 40 000. Soustrait à 52 225, on obtient : 52 225 − 40 000 = 15 225.

La réduction achevée, double le diviseur, ce qui te donne le diviseur fixé **(ding fa).**

		2			$a. 10^n$
1	5	2	2	5	$N - a^2. 10^{2n}$
4					$2\, a. 10^{2n}$
1					10^{2n}

Ce « diviseur fixé » est une première partie du diviseur qui opérera dans la deuxième étape du procédé. Celle partie tire probablement son nom du fait qu'elle est fixée d'avance.

Il vaut ici 2 × 20 000 = 40 000. L'équation en x_1^2 devient : 10 000 $(y + 2)^2$ = 55 225, soit 10 000 y^2 + 40 000 y = 15 225, ce qui correspond bien au tableau.

Si ceci est à nouveau éliminé, réduis le diviseur vers le bas.

		2			$a. 10^n$
1	5	2	2	5	$N - a^2. 10^{2n}$
	4				$2\, a. 10^{2n-1}$
				1	

Le début de la consigne annonce la deuxième étape qui permettra de déterminer le chiffre suivant. L'élimination peut être réitérée de la même façon. On fait reculer le diviseur d'un rang vers la droite, pour le diviser par 10.

$40\ 000 \div 10 = 4\ 000$. Effectuons le nouveau changement de variable $y = y_1 \div 10$ (soit $y_1 = 10\ y$).

Et emprunte de nouveau une baguette et déplace-la comme précédemment.

		2			$a.\ 10^n$
1	5	2	2	5	$N - a^2.\ 10^{2n}$
	4				$2\ a.\ 10^{2n-1}$
		1			$10^{2(n-1)}$

La baguette empruntée est éliminée et une nouvelle est empruntée. Celle-ci est donc déplacée comme la première.

Même si sa position d'arrêt n'est pas précisée, elle peut être située : deux rangs à droite de la position d'arrêt de l'ancienne baguette, comme indiqué. L'équation précédente est transformée en $100\ y_1^2 + 4\ 000\ y_1 = 15\ 225$.

Multiplie ce nouveau quotient par la baguette unité.

		2			$a.\ 10^n$
1	5	2	2	5	$N - a^2.\ 10^{2n}$
	4	3			$(2\ a.\ 10^n + b.\ 10^{n-1})\ 10^{n-1}$
		1			

Il s'agit de déterminer d'abord le deuxième chiffre de la racine.

Quel est le plus grand nombre dont le produit par 4 000 est inférieur ou égal à 15 225 ? Il vaut : <u>b = 3</u>. On multiplie la baguette qui vaut maintenant 100 par 3 : cela donne 300. On pose alors $y_1 = z + 3$.

Et ajoute ce que tu obtiens, comme auxiliaire, au diviseur fixé.

		2	3		$a.\ 10^n + b.\ 10^{n-1}$	Quotient
1	5	2	2	5	$N - a^2.\ 10^{2n}$	Dividende
	4	3			$(2\ a.\ 10^n + b.\ 10^{n-1})\ 10^{n-1}$	Diviseur
		1				En auxiliaire

Le produit du second chiffre par le nombre multiplié par la baguette empruntée est ajouté au diviseur fixé : leur somme est le nouveau diviseur.

Le résultat $100 \times 3 = 300$ est ajouté à 4 000, ce qui donne 4 300.

Avec ce que tu viens de trouver, réduis.

	2	3	
2	3	2	5
4	3		
	1		

$a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1}$

$N - (a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})^2$

$(2\ a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})\ 10^{n-1}$

On multiplie le nouveau diviseur par le deuxième chiffre et on soustrait ce produit du dividende. On inscrit le second chiffre de la racine à la suite du dernier chiffre non nul du diviseur fixé : on prépare ainsi le troisième diviseur. On place de plus le deuxième chiffre, 3, à droite du premier, 2. Ce qui donne 230.

La réduction correspond à 15 225 – 4 300 × 3 = 2 325. Car $230^2 = 200^2 + 30^2 + 2 \times 200 \times 30 = 200^2 + 30 \times (30 + 2 \times 200) = 200^2 + 3 \times 4\,300$. Donc $55\,225 - 230^2 = 55\,225 - 200^2 - 4\,300 \times 3$.

Ajoute au diviseur fixé ce que tu avais trouvé comme auxiliaire.

	2	3	
2	3	2	5
4	6		
	1		

$a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1}$

$N - (a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})^2$

$2\ (a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})\ 10^{n-1}$

2 × 2 300 = 4 600. Ce qui est équivalent au fait de « monter » le deuxième chiffre au diviseur fixé : cela donne 3 + 43 = 46, ce qui donne 4 600.

La dernière ligne algébrique vient de : $(2\ a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})\ 10^{n-1} + b.\ 10^{2n-2}$. L'équation en y_1 donne la nouvelle équation $100\ z^2 + (600 + 4\,000)\ z = 2\,325$. Soit $100\ z^2 + 4\,600\ z = 2\,325$.

Si à nouveau tu élimines, recommence le procédé de la même manière.

	2	3	
2	3	2	5
	4	6	
			1

$a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1}$

$N - (a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})^2$

$2\ (a.\ 10^{n} + b.\ 10^{n-1})\ 10^{n-1}$

L'algorithme est recommencé :

On déplace le nouveau diviseur d'une place vers la droite, ce qui revient à le diviser par 10 : on trouve 460. La baguette empruntée est éliminée. On emprunte une nouvelle baguette, qui se place sous le chiffre des unités de N et vaut donc 1. Le troisième chiffre cherché est 5. On multiplie 5 par la valeur de la baguette, 1, et on ajoute ce produit à 460 : on trouve 465. On soustrait enfin à 2 325 le produit de 465 par 5 : il ne reste rien. Le calcul est terminé : on lit la racine, constituée des chiffres successivement obtenus : 235.

Effectuons enfin le nouveau changement de variable $z = z_1 \div 10$, qui transforme l'équation précédente en $z_1^2 + 460\ z_1 = 15\ 225$. On détermine le dernier chiffre de x : $z_1 = \underline{c = 5}$. Donc $x = 235$.

A ce stade, si la racine n'est pas entière, le calculateur soit continue un calcul plus précis, soit approche le résultat sous forme fractionnaire :

S'il y a un reste, on ne peut pas prendre la racine et il faut diviser le reste[9] *par le côté.*

Si ce dernier dividende, obtenu par réduction du précédent, n'est pas susceptible de commencer un nouveau cycle d'élimination, la racine cherchée est le nombre composé des chiffres précédemment déterminés auquel s'ajoute une fraction dont le numérateur est le dividende restant et pour dénominateur, ce nombre. Le côté représente la partie entière de la racine.

La règle se poursuit.

Si le dividende (shi) *comporte des parts, fais communiquer*[10] *les parts et incorpore les fils : ce résultat est le* ting shi.

Si le dividende a une partie fractionnaire, on somme en réduisant au même dénominateur. Le résultat est appelée *ting shi*. La somme $A + \frac{a}{a'}$ est transformée en $\frac{A\,a' + a}{a'}$.

Alors ouvre-le, jusqu'à la fin. Ouvre sa mère. Divise en retour.

On calcule séparément la racine de ce dernier numérateur et la racine du dénominateur puis on les divise l'une par l'autre : $\sqrt{\frac{A\,a' + a}{a'}} = \frac{\sqrt{A\,a' + a}}{\sqrt{a'}}$

Si tu ne peux ouvrir la mère, multiplie également de nouveau le ting shi. *Puis ouvre cela jusqu'au bout. Fais alors le rapport à la mère et [garde] une part.*

Si le dénominateur n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire si a' n'est pas un carré parfait), multiplie les deux termes de la fraction par celui-ci : $\frac{A\,a' + a}{a'} = \frac{(A\,a' + a)\,a'}{a'^2}$. Le nouveau dénominateur est donc un carré parfait. On extrait donc la racine de ce nouveau dénominateur et on divise le résultat par le dénominateur initial $\sqrt{\frac{A\,a' + a}{a'}} = \frac{\sqrt{(A\,a' + a)\,a'}}{a'}$.

(L'auteur écrit cette division « fais alors le rapport à la mère et [garde] une part ».)

Quelques commentaires de LIU Hui.

[9] Littéralement, « commander » *(ming)*.

[10] Ces termes sont propres au calcul fractionnaire. Dans une fraction, le numérateur est « le fils » et le dénominateur, « la mère ». Voir ce chapitre.

En général, la racine carrée d'une aire devrait, quand elle est élevée au carré, donner l'aire. Le diviseur fixe sans la baguette empruntée donne un résultat trop petit, de même, avec elle, le résultat est trop grand.

LIU Hui a proposé un encadrement de la racine carrée de N au stade où l'on a E pour partie entière de cette racine et R pour reste :

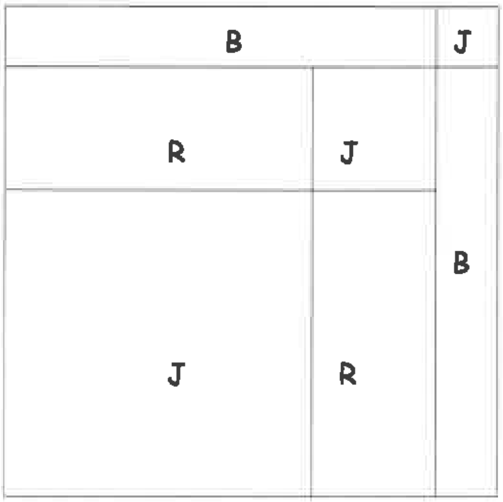
$$E + \frac{R}{2E+1} < \sqrt{N} < E + \frac{R}{2E}$$

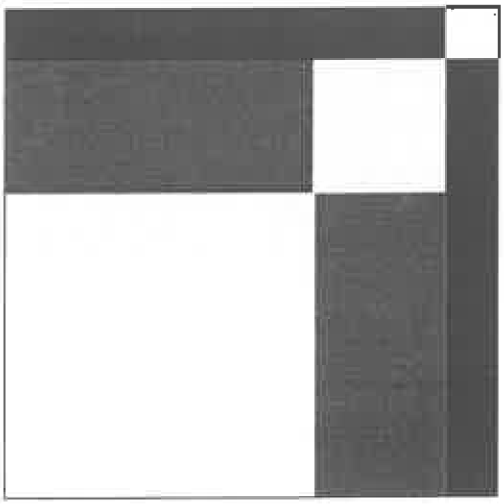
Dans ce cas, la surface à calculer présente la configuration suivante :

Alors aucun de ces résultats ne donne la valeur exacte. L'exprimer par le côté du [carré] dont est donné le dividende est la seule bonne façon. [...] Si on ne peut pas l'exprimer par son côté, on doit continuer à adjoindre le diviseur fixe comme auparavant, trouver les chiffres, avec les chiffres pour numérateur et 10, 100, ... comme dénominateurs.

LIU Hui explique aussi que l'on peut continuer le procédé en cherchant les dixièmes, les centièmes, ... de la racine et continuer jusqu'à la précision voulue [11]. Il construit ainsi la notion de nombre décimal. Du point de vue du calcul, rien ne sépare les entiers des décimaux.

LIU Hui, à travers son commentaire, a justifié cette extraction. Le nombre dont on cherche la racine carré est assimilable à un carré de surface connue (N) et dont on veut connaître le côté (x). Il le découpe en un assemblage de carrés et de rectangles, repérés par leur couleur : jaune (J) *(huang)*, rouge (R) *(zhu)* et bleu (B) *(qing)*. Il montre comment le procédé revient à déterminer de proche en proche les différents éléments de l'assemblage.



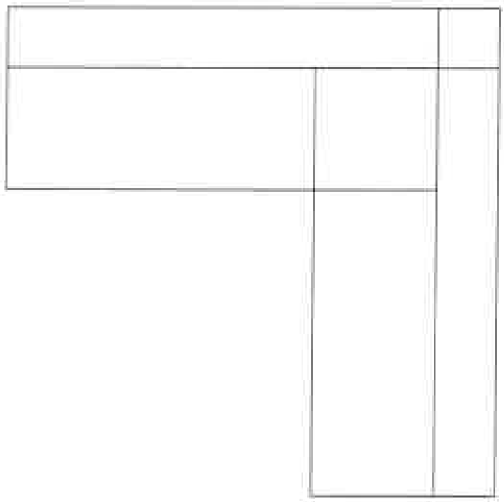


[11] *« Jusqu'à ces petits nombres qui n'ont pas de nom ».*

Estime d'abord le côté du carré jaune. Soustraire à plusieurs reprises le produit du premier chiffre de la racine et de la baguette empruntée signifie soustraire le produit par lui-même du côté du carré jaune au dividende (shi).

Dans un premier temps, il retire du carré d'aire N un grand carré A jaune, d'aire (maximale) correspondant au carré de ($a.\ 10^n$) de la racine. La première discussion permet de déterminer le côté de ce carré.

Il reste une surface $N - (a.10^n)^2$ en forme d'équerre.



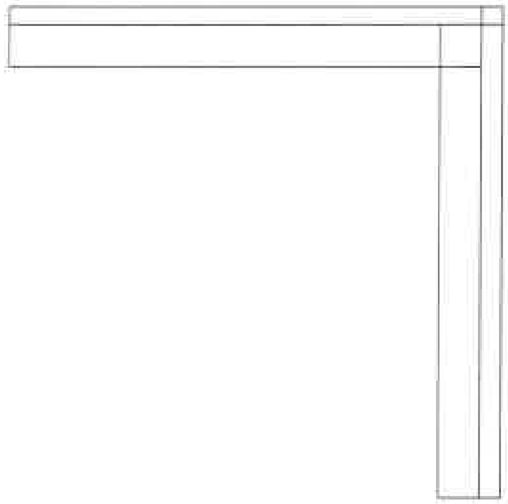
Dans le but de soustraire les deux surfaces rouges, double [...]. Comme précédemment, il s'agit de soustraire le carré jaune entre les deux surfaces rouges.

Il cherche ensuite le petit côté $b.\ 10^{n-1}$ des rectangles égaux, qu'il appelle les surfaces rouges *(zhu mi)*; leur grand côté est $a.10^n$, le côté du carré jaune précédent. Le petit côté est aussi celui du deuxième carré jaune.

La somme des surfaces rouges est égale à $2 \times a.10^n \times b.\ 10^{n-1} = 2.\ 10^{2n-1}.\ a.\ b$, et représente la plus grande partie de l'équerre.

C'est-à-dire, en termes d'inégalité, $2.\ 10^{2n-1}.\ a.\ b \leq N - (a.10^n)^2$, ou $b \leq \dfrac{N - (a.10^n)^2}{2.\ 10^{2n-1}.\ a}$.
Cette inégalité permet de déterminer b sachant que c'est le plus grand entier inférieur ou égal à la fraction (N et a sont connus).

Connaissant alors b, il ôte de l'équerre ces deux rectangles rouges et ce deuxième carré jaune : il utilise un raisonnement identique au précédent sur les deux rectangles bleus et le troisième carré jaune. Et il continue de même.



Les problèmes suivants, numérotés de 13 à 16, demandent respectivement de calculer les racines carrées des nombres 25 281, 71 284, 564 752 + $\frac{1}{4}$ et 3 972 150 625.

2. Problèmes quadratiques.

Dans le Jiu Zhang Suan Shu, on trouve quatre formules pour calculer l'aire A d'un disque, connaissant son diamètre D et sa circonférence C :

$$A = \frac{C}{2}\frac{D}{2} \qquad A = \frac{C\,D}{4} \qquad A = \frac{3}{4}D^2 \qquad A = \frac{1}{12}C^2$$

ce qui permet de calculer C (ou D) connaissant A, via un calcul de racine carrée.

Les deux premières formules soient justes, les deux dernières sont approchées : les mathématiciens chinois utilisaient 3 pour valeur approchée de π. La formule correcte dans le quatrième cas est : $A = \frac{1}{4\,\pi}C^2$.

Les deux premières formules sont équivalentes mais ne proviennent pas des mêmes données : dans l'une connaît, on la moitié de C et celle de D (et l'on calcule leur produit), dans l'autre, on connaît C et D (et l'on divise leur produit par 4).

C'est avec la première formule que LIU Hui a approché π par $\frac{157}{50}$ en utilisant un polygone régulier à 192 côtés inscrit dans un cercle [12] .

*Problème JZSS 4-18 : Règle de l'aire et de la circonférence (*Kaiyuan*).*

Soit une aire circulaire de 300 bu *[carrés]. Quelle est sa circonférence ?*

Réponse : 60 bu.

*Règle de l'aire et de la circonférence (*Kaiyuan*). Pose le nombre donné de* bu *[carrés]. Multiplie-le par 12. Extrais la racine carrée du produit ; cela donne la circonférence.*

---

[12] Voir le chapitre correspondant, « Surfaces circulaires. Une valeur approchée de π. »

A l'aide de la formule $A = \frac{1}{12}C^2$, on calcule la circonférence : $C = \sqrt{300 \times 12} = 60$ *bu.*

Cette réponse est commentée par LIU Hui : « *Avec le rapport de LIU, la circonférence devrait être* $61 + \frac{19}{50}$ ». Réponse qu'il a trouvée avec sa valeur approchée de notre π.

Plus tard, un autre commentateur, LI, proposera $61 + \frac{41}{100}$, valeur trouvée avec $\pi \approx \frac{22}{7}$.

La règle (*Kaiyuan*) est donnée ensuite :

Pose le nombre donné de bu *[carrés]. Multiplie-le par 12. Prends la racine carrée : cela donne la circonférence.*

Là encore, il commente : « *La règle prend un rapport de diamètre 1 à la circonférence 3. [...] Selon le rapport de Liu, l'aire devrait être multipliée par 314 et divisée par 25. Extraire la racine carrée du résultat donne la circonférence. [...]* »

Sa valeur de π est $\frac{157}{50}$ donc $4\pi = \frac{314}{25}$. D'où son résultat.

3. Équations quadratiques.

Certains des problèmes des différents ouvrages font intervenir une inconnue x (à déterminer) et son carré dans une relation du type :

x^2 + *cong fa* x = *shi* $\qquad [x^2 + \alpha x = \beta$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0]$

dans laquelle « *cong fa* » [13] désigne le diviseur du côté, « *shi* », le diviseur et « *fa* » signifie ici [14] « coefficient numérique ».

Par exemple, à la fin de la première étape (la discussion) du calcul de $\sqrt{N}$, on a l'équation quadratique : $x^2 + 2\,a\,10^n\,x = N - (a.\,10^n)^2$

(Remarquons au passage que les équations cubiques, où intervient x^3, ont pour paradigme l'équation : x^3 + *liang fa* x^2 + *fang fa* x = *shi*.)

Il n'y a pas de résolution théorique, comme nous l'entendons avec un calcul de discriminant. Les auteurs indiquent seulement les valeurs du *cong fa* et le *shi*.

De plus, une seule solution est donnée à chaque fois (la solution positive) [15].

3. 1. Premier exemple : le problème de l'équerre.

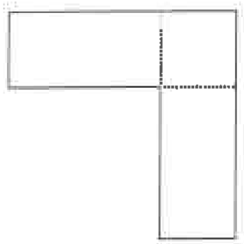
---

[13] Littéralement : « coefficient suivant ».

[14] A l'origine, il signifie « diviseur ».

[15] L'auteur a choisi ses valeurs initiales pour qu'il y en ait une.

Soit une équerre de surface a^2. Elle se décompose en un carré de côté $c - b$ auquel s'ajoutent deux rectangles ayant chacun un côté de longueur *b*. (*a*, *b* et *c* sont liés par la relation $a^2 + b^2 = c^2$.)



Autrement dit, on peut décomposer la surface de l'équerre de la façon suivante :

$$(c - b)^2 + 2\, b\,(c - b) = a^2$$

C'est-à-dire que le nombre $c - b$ est solution de l'équation générique, avec pour valeur respective du *cong fa* et du *shi*, les nombres $2\, b$ et a^2.

3. 2. Second exemple : un problème de ville carrée.

C'est sous la forme générique $x^2 + \alpha\, x = \beta$ que sont introduites dans le Jiu Zhang Suan Shu les équations quadratiques. Le problème 20 du Chapitre 9 de ce livre est le suivant :

Soit une ville carrée dont on ne connaît pas la taille. Au milieu de chaque côté, il y a une porte. A 20 pas de la porte Nord, se trouve un arbre. Si l'on sort par la porte Sud[16] *puis après 14 pas on marche 1 775 pas vers l'Ouest, on voit cet arbre. Combien mesure le côté de la ville ?*

En appelant x la longueur du côté de la ville, le problème revient à résoudre l'équation :

$$x^2 + (14 + 20)\, x = 2\, (20 \times 1\,775)$$

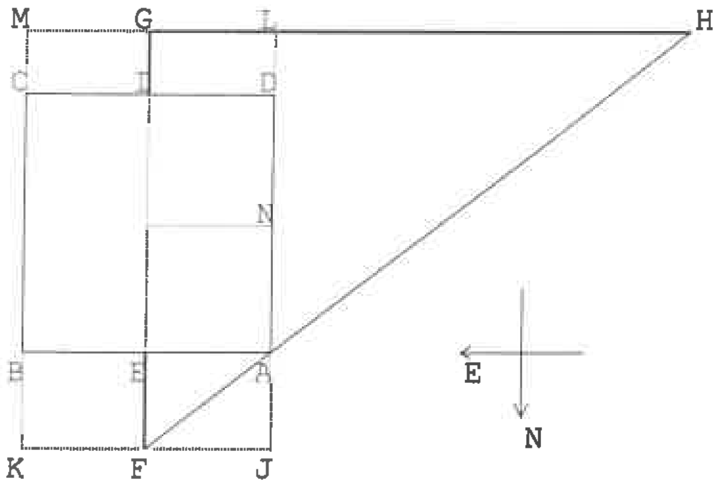
$$(\text{ou encore : } x^2 + 34\, x = 71\,000)$$

La résolution de cette équation, faite dans ce livre, est très semblable à celle que nous connaissons sous le nom de « méthode de Hörner »[17] .

Prends la distance [relative] à la porte Nord et multiplie-la par la distance [relative] à l'Ouest. Double le produit : cela donne le shi. *Prends la somme de la distance des portes Nord et Sud comme coefficient linéaire (*cong fa*). Extrais la racine pour obtenir le côté de la ville.*

[16] Les villes chinoises étaient entourées de remparts ; de la porte Sud, il était impossible de voir un arbre situé à la porte Nord.

[17] En Chine, cette méthode a été mise au point au milieu de XIII^e siècle par QIN Jiushao pour une équation faisant intervenir un polynôme de degré 10.



EF = 20 GI = 14 GH = 1 775

(Sur les cartes chinoises, le Nord est pointé vers le bas.)

Les triangles AEF, FGH et ADH sont semblables.

Donc EF / FG = AE / GH. Donc EF × GH = AE × FG est l'aire de la « moitié Ouest » du rectangle JKML. L'aire de ce dernier est donc 2 × AE × FG.

Soit x la largeur de JKML (la longueur de la ville). La longueur de JKML est 20 + x + 14, soit x + 34 ; son aire est 2 × AE × FG = 2 × 20 × 1 775.

On doit résoudre : $x (x + 34) = 2 \times 20 \times 1\,775$, soit $x^2 + 34\,x = 2 \times 20 \times 1\,775 = 71\,000$.

On ramène la résolution de ce problème à l'extraction d'une racine carrée dont on commencerait le calcul à l'étape suivante :

7	1	0	0	0
			3	4
				1

(1)

7	1	0	0	0
		3	4	0
		1	0	0

(2)

7	1	0	0	0
	3	4	0	0
1	0	0	0	0

(3)

		2		
3	1	0	0	0
	3	6	0	0
1	0	0	0	0

(4)

		2		
3	1	0	0	0
	3	8	0	0
1	0	0	0	0

(5)

		2		
3	1	0	0	0
		3	8	0
		1	0	0

(6)

etc.

PROBLEMES LINEAIRES : SYSTEMES D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A PLUSIEURS INCONNUES. SYSTEMES INDETERMINES.

Résumé.

Le Chapitre 8 du Jiuzhang Suanshu (JZSS), dont le titre peut être traduit par « tableaux carrés », est consacré à des problèmes qui consistent à déterminer plusieurs quantités inconnues liées par des relations linéaires du premier degré. Leur résolution repose, de notre point de vue moderne, sur des systèmes d'équations du premier degré à plusieurs inconnues. Un procédé, la règle *fang cheng shu*, littéralement « procédure (*shu*) des mesures (*cheng*) en carrés (*fang*) », est mis en œuvre pour trouver leur solution. Ce procédé est rencontré dans d'autres ouvrages, comme le Zhang Quijian Suanjing. Parmi les problèmes de ces ouvrages, le calculateur va être amené à travailler avec des différences négatives : un nouveau procédé va être créé. Divers types d'énoncés vont donc être exposés.

Selon LIU Hui, qui a commenté ce Chapitre 8, et en particulier le procédé de résolution, ce dernier est « difficile à expliquer avec des paroles vides » (*kong yan*). C'est pourquoi des applications concrètes ont été mises en scène, comme le premier problème portant sur diverses bottes de céréales dont on cherche les volumes respectifs, connaissant les volumes globaux correspondant à des répartitions particulières.

1. Les bottes de céréales. Procédé *fangcheng*.

Découvrons ce procédé *fang cheng* à travers le premier problème du Chapitre. Les termes *bing* et *dou* sont des unités de volume.

Problème 8-1.

Suppose que nous ayons 3 bottes (bing) *de céréales d'une qualité supérieure, 2 d'une qualité moyenne et 1 d'une qualité inférieure, le tout pour 39* dou *de grains ; suppose que nous ayons aussi 2 bottes de céréales d'une qualité supérieure, 3 d'une qualité moyenne et 1 d'une qualité inférieure, le tout pour 34* dou *de grains ; suppose que nous ayons aussi 1 botte de céréales de qualité supérieure, 2 d'une qualité moyenne et 3 d'une qualité inférieure, le tout pour 26* dou *de grains. Question : combien de* dou *donnent respectivement une botte de céréales de qualité supérieure, moyenne et inférieure ?*

Réponse : 1 botte d'excellente qualité donne 9 dou *1/4 dou ; 1 botte de moyenne qualité donne 4* dou *1/4* dou *; 1 botte de pauvre qualité donne 2* dou *3/4* dou.

Avec nos notations modernes, ce problème se traduit aisément par le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

C'est un système dit « 3 × 3 » (on parle aussi de système carré…). Le chapitre traite des systèmes de m équations à n inconnues. On rencontre 2 types de systèmes :

(1) le système est déterminé (quand $m = n$), il y a huit problèmes avec $n = 2$, six avec $n = 3$, deux avec $n = 4$ et un avec $n = 5$;

(2) le système est indéterminé (quand $m < n$), il y a un seul problème de ce cas.

Le procédé repose sur une méthode d'addition. Littéralement traduite par « procédure des mesures en carrés », l'expression *fangcheng* renvoie aux nombres qui apparaîtront comme coefficients des différentes inconnues des équations de l'énoncé.

La règle de résolution figure ci-dessous et est écrite en italiques ; découpée, elle est éclairée par les calculs successifs.

Tous les problèmes de ce chapitre 8 sont résolus grâce à ce procédé. Par le choix de ses exercices, leur auteur a voulu, d'une part, faire un balayage assez large des situations pratiques rencontrées par la suite par l'élève et, d'autre part, montrer la gamme étendue d'applications dont est susceptible le procédé. LIU Hui écrit au début de son commentaire que « cette méthode est générale ».

Procédure : Pose les 3 bottes de céréales de qualité supérieure, les 2 bottes de céréales de qualité moyenne, la botte de céréales de qualité inférieure et le total de 39 dou *dans le côté droit. Au centre et à gauche, les céréales sont ordonnées comme dans le côté droit.*

La règle demande d'abord une transcription de l'énoncé sous forme d'un tableau. C'est-à-dire que les trois équations sont transcrites en le tableau suivant, comme seraient placées les baguettes sur la surface à calculer :

	(Gauche)	*(Centre)*	*(Droite)*
(Céréales de qualité supérieure)	1	2	3
(Céréales de qualité moyenne)	2	3	2
(Céréales de qualité inférieure)	3	1	1
(Volume de céréales)	26	34	39

Dans cette présentation des données, on remarque que :

- les différentes quantités de céréales (nombre de bottes, *bing*) sont disposées dans la partie supérieure du tableau (ces mesures » formant un « carré ») et les volumes totaux (*dou*) sont dans la partie inférieure ;

- notre langage moderne traduit les données en une équation (linéaire) ; sa représentation dans le Chapitre est une colonne dont le dernier terme (situé en ligne inférieure) est le terme constant de cette équation ;
- la signification et la position des nombres sont très liées (dans ce problème de qualités) : écrire un nombre dans la rangée supérieure informe qu'il est relatif à une botte de qualité supérieure ;
- chacune des cases de la colonne sur laquelle on va appliquer le procédé *fang cheng* est pleine (ici, il y a trois qualités de céréales et trois renseignements sur chacune d'elles).

La méthode de résolution fait sans cesse appel à l'organisation des valeurs de ce tableau. La règle étant itérative, nous ne nous intéresserons qu'à la première étape.

Par les céréales de qualité supérieure de la colonne de droite, multiplier l'ensemble (bian cheng) *de la colonne centrale, puis, avec la colonne de droite, on élimine colonne à colonne* (zhi chu). [1]

On multiplie par 3 (qui est le coefficient supérieur de la colonne de droite) la colonne centrale, qui correspond à la seconde équation du système.

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 34 \end{matrix} \xrightarrow{\times 3} \begin{matrix} 6 \\ 9 \\ 3 \\ 102 \end{matrix}$$

Le calculateur obtient alors le système équivalent : $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 6x + 9y + 3z = 102 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$

Puis il soustrait de cette nouvelle colonne deux fois [2] la troisième colonne :

(Centre)	(Droit)						
6	3		6 – 3 = 3		3 – 3		Élimination
9	2	→	9 – 2 = 7	→	7 – 2	→	5
3	1		3 – 1 = 2		2 – 1		1
102	39		102 – 39 = 63		63 – 39		24

Le calculateur obtient alors le système équivalent : $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$. *Ces calculs reviennent à éliminer l'inconnue x dans la seconde équation.*

[1] Cette soustraction colonne à colonne est effectuée tant que le terme supérieur central n'est pas éliminé (c'est-à-dire nul). L'algorithme repose sur des soustractions répétées.

[2] En fait, autant de fois que le terme supérieur de la colonne centrale.

On peut continuer la règle, par itération.

Pour alléger la rédaction de la résolution, celle-ci est présentée ci-dessous pas à pas :

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

(1)

1	6	3
2	9	2
3	3	1
26	102	39

(2)

1	3	3
2	7	2
3	2	1
26	63	39

(3)

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

(4)

3		3
6	5	2
9	1	1
78	24	39

(5)

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

(6)

Les quatre premières étapes montrent l'élimination du coefficient supérieur de la deuxième colonne (elles reprennent le calcul ci-dessus) ; les étapes (5) et (6) montrent l'élimination du coefficient supérieur de la première colonne.

On recommence, pour éliminer le coefficient supérieur (non nul) de la colonne de gauche, en se servant de la colonne du milieu, sans toucher à la colonne de droite. On fera l'analogie avec la méthode du « pivot de Gauss »...

		3
20	5	2
40	1	1
195	24	39

(7)

		3
15	5	2
39	1	1
171	24	39

(8)

		3
10	5	2
38	1	1
147	24	39

(9)

		3
5	5	2
37	1	1
123	24	39

(10)

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

(11)

L'étape *(11)* montre l'élimination du coefficient supérieur de la première colonne (le premier coefficient non nul).

Le calculateur trouve ainsi le système équivalent suivant : $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$.

Les solutions s'obtiennent assez rapidement :

¤ *Ce qui n'est pas épuisé des céréales de qualité inférieure de la colonne de gauche fait en haut le diviseur* (fa), *le bas fait le dividende* (shi). *Le dividende, c'est le nombre de bottes de céréales de qualité inférieure.*

Le diviseur est 36 et le volume total des bottes de céréales pauvres, 99.

Néanmoins, ces dividende et diviseurs ne sont pas aussitôt intégrés dans un processus de division : c'est à la fin que les trois inconnues seront données à l'aide d'un même diviseur, celui qui vient d'être donné, 36.

¤ *Cherche les céréales de qualité moyenne. Par le diviseur, multiplie le nombre du bas de la colonne centrale et soustrais le nombre des céréales de qualité inférieure. Rapporte le reste au nombre de bottes de céréales moyennes pour obtenir le nombre des céréales de qualité moyenne.*

Le volume total des bottes de céréales de qualité moyenne est $\dfrac{36 \times 24 - 99}{5} = 153$.

¤ *Cherche les céréales de qualité supérieure. Par le diviseur également, multiplie le nombre du bas de la colonne de droite et soustrais les nombres des céréales de qualités moyenne et inférieure [ce dernier pris 2 fois]. Rapporte le reste au nombre de bottes de céréales de qualité supérieure, tu obtiendras le nombre des céréales de qualité supérieure.*

Le volume total des bottes de céréales supérieures est $\dfrac{36 \times 99 - 99 - 153 \times 2}{3} = 333$.

¤ *Rapporte les nombres au diviseur, chacun donne [la mesure d'] une botte en* dou.

La mesure d'une botte de céréales de qualité supérieure est $\dfrac{333}{36} = 9 + \dfrac{1}{4}$, celle d'une botte de céréales de qualité moyenne, $\dfrac{153}{36} = 4 + \dfrac{1}{4}$ et celle d'une botte de céréales de qualité inférieure, $\dfrac{99}{36} = 2 + \dfrac{3}{4}$.

L'algorithme est exposé ; il sera utilisé pour les 17 autres problèmes. C'est ce qu'a voulu son rédacteur. Il n'a pas voulu en effet travailler sur les données numériques particulières de cet énoncé : une simple soustraction des deux dernières équations (c'est-à-dire une soustraction des deux premières colonnes) donne rapidement le nombre z cherché.

On notera l'idée constante dans les mathématiques chinoises de travailler en termes de rapports : cette méthode est telle que chaque colonne est un modèle *(lü*[3] *)*. On essaie autant de modèle que le nombre d'entités de nature différentes.

[3] Les *lü* sont des nombres en tant qu'ils sont définis les uns par rapport aux autres. Ils sont dans le même rapport que la « quantité de ce que l'on a » à la « quantité de ce que l'on cherche ».

Explication du procédé par LIU Hui (extraits de son commentaire) :

L'esprit (yi) *du procédé est de faire que les colonnes faibles diminuent les colonnes fortes. Elles se diminuent d'avant en arrière et d'arrière en avant. Une position de tête* (touwei) *doit être d'abord épuisée* (bi xian jin) [4] .

LIU Hui donne le sens de la procédure : éliminer le nombre qui se trouve à la place supérieure de la colonne, avec des soustractions successives.

Quand il manque un nombre en haut d'une colonne, c'est que cette colonne a perdu également perdu un objet. De fait, élever les modèles [par multiplication] pour qu'ils se retranchent ne nuit pas aux essais des nombres restants. Si on élimine la position de tête, il faut alors en bas le dividende (shi) *d'un objet...*

Il s'interroge ensuite sur cette opération de soustraction sur les colonnes : celles-ci sont-elles toujours valides, après soustraction ? LIU Hui analyse la façon dont les objets en présence sont transformés et mis comparés les uns aux autres. Ensuite, il explique que c'est ce processus de soustraction qui est l'essentiel de la méthode *fangcheng*. En effet, le calculateur cherche à trouver une matrice triangulaire de coefficients : les inconnues seront dès lors calculées les unes après les autres.

Faisons d'abord en sorte que les céréales supérieures de la colonne droite multiplient la colonne centrale dans l'idée d'égaliser et d'homogénéiser. Dire égaliser et homogénéiser (wei) *signifie que les céréales supérieures de la colonne centrale multiplient aussi la colonne de droite.*

Il reste à LIU Hui à montrer qu'il y a nécessairement élimination dans le procédé... Il parle d'homogénéisation et d'égalisation [5] . L'opération qui consiste à multiplier la colonne centrale par le coefficient supérieur de la colonne de droite vise ce couple homogénéisation / égalisation.

Suivant les changements des tablettes, bien qu'on ne parle pas d'égaliser ni d'homogénéiser, on les examine avec l'intention d'égaliser et d'homogénéiser. Cette signification est certaine...

Pourtant, même si l'appel à ce procédé n'est pas explicitement écrit dans les énoncés suivants, le calculateur peut l'utiliser. LIU Hui est clair sur ce point.

Il y a une similitude entre le procédé et nos structures et règles en algèbre linéaire (déterminant, combinaisons linéaires, ...). Il faut cependant veiller à ne pas faire d'anachronisme. On peut [6] se souvenir que les phrases, dans l'écriture chinoise, sont constituées d'idéogrammes (verticalement situés) virtuellement inscrits dans des surfaces isométriques (ou, du moins, telles, selon les canons calligraphiques). De plus, les calculateurs employaient

---

[4] D'autres positions pourraient, par calcul, s'annuler avant cette position de tête mais LIU Hui sait que celle-là va s'annuler et c'est cela qu'il veut.

[5] On ne peut pas ne pas faire un parallélisme avec le calcul fractionnaire. LIU Hui explique dans ses commentaires au premier chapitre du JZSS que « chaque fois que les dénominateurs multiplient un numérateur qui ne leur correspond pas, on appelle cela homogénéiser ; multiplier l'ensemble des dénominateurs les uns par les autres, on appelle cela égaliser. »

[6] Suivant l'idée exposée par R. SCHRIMPF dans sa thèse.

des bâtons pour représenter les chiffres. C'est pourquoi des circonstances ont été favorables à l'invention de ce procédé de « mesures en carré » ; même si, aujourd'hui ni son origine causale ni son origine temporelle ne sont connues.

2. Les poignées de céréales. Procédé *zhengfu.*

Et que se passe-t-il lorsque apparaît une différence négative, comme dans le problème 8-3 ? Dans ce Chapitre 8, ce problème ne sert principalement qu'à exposer le procédé *zhengfu* (conjugué au procédé *fangcheng*). C'est-à-dire que sa présentation est due, au travers des calculs, à la présence de nombres négatifs.

Problème 8-3

*Soit 2 poignées de céréales supérieures, 3 poignées de céréales moyennes et 4 poignées de céréales inférieures ; aucune quantité (*shi*) ne remplit 1* dou. *Les [céréales] supérieures reçoivent des [céréales] moyennes, les [céréales] moyennes reçoivent des [céréales] inférieures, les [céréales] inférieures reçoivent des [céréales] supérieures, chacune [à raison de] 1 poignée et les quantités remplissent chacune 1* dou. *On demande combien (de* dou*) font une poignée de céréales supérieures, de céréales moyennes et de céréales inférieures.*

Réponse : Une poignée de céréales supérieures fait 9/25 dou, *une poignée de céréales moyennes fait 7/25* dou, *une poignée de céréales inférieures fait 4/25* dou.

On écrit le tableau correspondant à l'énoncé :

Céréales supérieures	1		2
Céréales moyennes		3	1
Céréales inférieures	4	1	
Quantité	1	1	1

Ce problème amène, en appliquant la procédure *fangcheng*, à soustraire des nombres à d'autres plus petits : la différence est négative [7] . Comment soustraire 2 de 1 ou 1 de rien ?

Le calculateur a donc besoin d'une nouvelle technique, le procédé *zheng fu shu*, « procédure du positif et du négatif ». Les nombres qualifiés de *zheng* et *fu* se comportent respectivement comme des nombres positifs et négatifs [8] .

Les « noms » renvoient aux signes des nombres ; lorsque les nombres ont « le même nom », c'est qu'ils ont le même signe, sinon, ils sont « de noms différents ». Toutefois, les résultats des problèmes sont des valeurs numériques. Ni positives, ni négatives. Dans le texte, « positif » et « négatif » sont des noms qui affectent les nombres au cours des opé-

[7] Le calculateur a déjà rencontré ces différences négatives dans le Chapitre 7 traitant de la méthode de fausse position et, plus particulièrement, dans le cas *ying buzu* (voir le chapitre correspondant de cette brochure). 7 précède 8...

[8] Ces deux termes ne se rencontrent historiquement que dans ce procédé.

rations. La « procédure du positif et du négatif » *zheng fu shu* explique l'évolution de leur distribution lors de l'élimination entre colonnes ou lors de l'élimination des dividendes (*shi*) qui concluent la résolution.

Rappelons ici que le nombre positif est représenté par une baguette rouge, tandis que le nombre négatif est représenté par une baguette noire. Il y a aussi la possibilité d'utiliser la position oblique des baguettes.

Cette procédure-ci est donnée par LIU Hui dans son commentaire au problème 3. Les énoncés sont concis mais la symétrie des propositions en facilite la mémorisation.

« Procédure du positif et du négatif » (zheng fu shu) :

Les nombres de même nom sont éliminés l'un de l'autre [tong ming xiang chu], *les nombres de noms différents s'augmentent l'un l'autre* [yi ming xiang yi]. *Si le positif n'a pas où entrer, on le rend négatif* [zheng wu ru fu zhi] *; si le négatif n'a pas où entrer, on le rend positif* [fu wu ru zheng zhi].

Autrement dit... La procédure commence par les règles de soustraction. La différence de deux nombres de même signe est égale en valeur absolue à la différence des deux, la différence de deux nombres de signes contraires est égale en valeur absolue à la somme des deux. Enfin, ôter de zéro un nombre quelconque revient à le changer de signe. LIU Hui explique l'expression obscure *wu ru* par : « Ne pas avoir à entrer, c'est ne pas avoir de vis-à-vis ; il n'y a rien que l'on doive diminuer... ». La procédure continue avec les règles d'addition :

Les nombres de noms différents sont éliminés l'un de l'autre [yi ming xiang chu], *les nombres de même nom s'augmentent l'un l'autre* [tong ming xiang yi]. *Si le positif n'a pas où entrer, on le rend positif* [zheng wu ru zheng zhi] *; si le négatif n'a pas où entrer, on le rend négatif* [fu wu ru fu zhi].

Pour être complet, on trouve ailleurs dans le <u>JZSS</u> la règle des signes : *tong ming xiang cheng wei zheng* : [les bâtons de] même nom multipliés mutuellement donnent [un résultat] positif, *yi ming xiang cheng wei fu* : [les bâtons de] noms différents multipliés mutuellement donnent [un résultat] négatif.

正負術 *zheng fu shu*

同名相除	*tong ming xiang chu*	異名相除	*yi ming xiang chu*
異名相益	*yi ming xiang yi*	同名相益	*tong ming xiang yi*
正無入負之	*zheng wu ru fu zhi*	正無入正之	*zheng wu ru zheng*
負無入正之	*fu wu ru zheng zhi*	負無入負之	*fu wu ru fu zhi*

異名相乘爲負 *yi ming xiang cheng wei fu*

同名相乘爲正 *tong ming xiang cheng wei zheng*

Mettons en œuvre, accompagnés de LIU Hui, cette procédure.

[Les noms identiques se diminuent], par le rouge, on diminue le rouge ; par le noir, on diminue le noir. Les colonnes que l'on cherche à diminuer entre elles ont pour règle les posi-

tions de tête. Quand les positions de tête ont des noms différents, il faut utiliser l'article ci-dessous [les noms différents se diminuent].

C'est-à-dire que les colonnes dont les termes supérieurs de même couleur (donc de même signe) sont soustraites terme à terme, tandis que celles dont les termes supérieurs de couleurs différentes (donc de signes contraires) sont ajoutées terme à terme ; dans tous les cas, on obtient finalement une valeur nulle.

Prenons l'exemple suivant, qui éclairera ce procédé : on veut éliminer $3x - 7y = 4$ de $3x + 5y = 2$ et obtenir $12y = -2$. Les deux colonnes correspondantes ont le même terme de tête, 3, *zheng*. On élimine respectivement 3 et 4 de 3 et 2 et -7 augmente 5 (qui donne 12 car le résultat garde la marque d'origine). 3 et -3 sont des nombres dont les noms sont différents ; ils sont soustraits en tant que nombres l'un de l'autre et, du coup, l'élimination entre colonnes se fera. C'est bien cette équation qui produit l'élimination.

Le procédé gagne en application grâce à l'introduction des deux marques *zheng* et *fu*. En effet, il n'y a plus d'obstacle face à une différence négative (opération non faisable) ; le procédé est mené de façon correcte dans un tableau où les nombres sont (seulement) affectés de ces marques.

En reprenant l'exemple, la soustraction de 4 (qui « n'entre pas » dans 2) à 2 donne -2. Lorsqu'il y a à transformer un *zheng* en *fu*, et vice-versa, signifie que pour soustraire un nombre quelconque à zéro (donc dans une place vide), on inscrit dans cette même place ce nombre changé de couleur. L'addition, par contre, conserve ainsi les couleurs.

La résolution du problème 8-3 se fait grâce à cette procédure *zheng fu shu*. LIU Hui ne se consacre qu'au procédé (et ne revient plus sur ce problème). Les calculs successifs (laissés au lecteur de cette époque) mènent bien à la réponse donnée.

Un second type d'énoncé où il intervient est celui dont les données du problème (c'est-à-dire avant tout calcul) demande de distinguer les nombres négatifs et positifs (*fu* et *zheng*).

Par exemple, on trouve dans ce Chapitre le problème 8-8 :

Soit à vendre 2 bœufs et 5 moutons pour acheter 13 porcs, il y a un reste de 1 000 sapèques[9] *. [Si] l'on vend 3 bœufs et 3 porcs pour acheter 9 moutons, les équivalents monétaires s'accordent. [Si] l'on vend 6 moutons et 8 porcs pour acheter 5 bœufs, il manque 600 sapèques. On demande combien coûtent un bœuf, un mouton et un porc.*

Réponse : Un bœuf coûte 1 200 [sapèques], un mouton, 500 et un porc, 300.

Avec nos notations modernes, ce problème se traduit aisément par le système suivant :

$$\begin{cases} 2b + 5m = 13p + 1\,000 \\ 3b + 3p = 9m \\ 6m + 8p = 5b - 600 \end{cases}$$

et le procédé amène le tableau suivant :

[9] Pièces de monnaie.

Bœufs	5	3	2
Moutons	6	9	5
Porcs	8	3	13
Pièces	600		1 000

équivalent au système $\begin{cases} 2\,b + 5\,m - 13\,p = 1\,000 \\ 3\,b - 9\,m + 3\,p = 0 \\ -5\,b + 6\,m + 8\,p = -600 \end{cases}$

(Les nombres soulignés sont négatifs, 5 signifie donc – 5 .)

Le rédacteur du problème donne la méthode :

Le procédé dit : Comme modèle de carré, posez les bœufs, 2, et les moutons, 5, (tous deux) zheng, *les porcs, 13,* fu*; le nombre de pièces restantes,* zheng. *Posez ensuite les bœufs, 3,* zheng, *les moutons, 9,* fu*; les porcs, 3,* zheng. *Posez ensuite les bœufs, 5,* fu, *les moutons, 6,* zheng*; les porcs, 8,* zheng, *les pièces manquantes,* fu. *Par le procédé* zhengfu, *introduisez-les.*

Sans continuer cette explication, il laisse le soin à son élève d'utiliser à la fois les procédures *fangcheng* et *zheng fu shu.*

LIU Hui, face à l'absence d'un terme dans la ligne des différentes valeurs, n'a pas manqué de faire un commentaire :

Dans la colonne du milieu, après la vente des animaux, il y a exactement assez de pièces ; donc on inverse simplement l'achat, la vente est ainsi calculée et c'est tout. C'est pourquoi en bas, il n'y a pas de valeur.

Le terme *shi* désigne dans une grande généralité « production » (d'un point de vue concret) et « dividende » (d'un point de vue formel). Le problème met en évidence que le procédé ne s'applique pas seulement sur les données numériques hors valeurs des *shi* mais aussi à ces dernières. Le sens de ce « *shi* » ne va donc garder que son sens de dividende. Du coup, ces termes liés au *shi* peuvent dorénavant être négatives. C'est ce que commente LIU Hui :

Utilise cette colonne [10] *pour la règle* fangcheng. *Commence par multiplier par 2, le nombre de bœufs, l'ensemble de la colonne du milieu, puis soustrais de cela de façon répétée terme à terme la colonne de droite. A la fin, le dividende* (shi) *d'en dessous est un manque.*

3. Une nouvelle histoire de blé.

Ce problème comporte 5 équations à 5 inconnues.

Problème 8-18.

Soit 8 dou *de chanvre, 7* dou *de blé, 3* dou *de pois, 2* dou *de vesce, 5* dou *de millet valant 140 sapèques ; 7* dou *de chanvre, 6* dou *de blé, 4* dou *de pois, 5* dou *de vesce, 3* dou *de millet*

---

[10] Cette colonne où il ne figure pas le nombre de pièces de monnaie.

valant 128 sapèques ; 3 dou *de chanvre, 5* dou *de blé, 7* dou *de pois, 6* dou *de vesce, 4* dou *de millet valant 116 sapèques ; 2* dou *de chanvre, 5* dou *de blé, 3* dou *de pois, 9* dou *de vesce, 4* dou *de millet valant 112 sapèques ; 1* dou *de chanvre, 3* dou *de blé, 2* dou *de pois, 8* dou *de vesce, 5* dou *de millet valant 95 sapèques. On demande combien vaut un* dou *[de chaque].*

Réponse : 1 dou *de chanvre [vaut] 7 sapèques, 1* dou *de blé [vaut] 4 sapèques, 1* dou *de pois [vaut] 3 sapèques, 1* dou *de vesce [vaut] 5 sapèques, 1* dou *de millet [vaut] 6 sapèques.*

4. Des chevaux et des bœufs.

Le problème 10 du Chapitre 8 introduit, pour la première fois, des nombres fractionnaires dans l'énoncé. Sa solution nécessite la résolution du système $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 50 \\ \frac{2}{3}x + y = 50 \end{cases}$ qui sera transformé en le système $\begin{cases} 2x + y = 100 \\ 2x + 3y = 150 \end{cases}$; les termes de cette transformation sont « diminuer / augmenter ».

L'énoncé suivant, en plus, redouble les termes relatifs à une inconnue.

Problème 8-11.

Soit deux chevaux et un bœuf dont la valeur dépasse 10 000 [sapèques] dans la mesure de la valeur d'un demi cheval ; un cheval et deux bœufs dont la valeur n'atteint la valeur de 10 000 [sapèques] dans la mesure d'un demi bœuf. On demande combien valent un bœuf et un cheval.

Réponse : Un cheval vaut 5 454 + $\frac{6}{11}$ *[sapèques] et un bœuf, 1 818 +* $\frac{2}{11}$ *[sapèques].*

La transformation du système (traduisant le problème) $\begin{cases} 2x + y = 10\,000 + \frac{1}{2}x \\ x + 2y = 10\,000 - \frac{1}{2}y \end{cases}$ en le système $\begin{cases} (2 - \frac{1}{2})x + y = 10\,000 \\ x + (2 + \frac{1}{2})y = 10\,000 \end{cases}$ (addition et soustraction) puis en $\begin{cases} 3x + 2y = 20\,000 \\ 2x + 5y = 20\,000 \end{cases}$ (élimination de coefficients fractionnaires par la transformation de division en multiplication) admet exactement les mêmes termes que ceux du problème précédent.

Cela montre que différentes entités (chevaux et bœufs d'une part et pièces d'autre part, opposés par l'énoncé) vont former un ensemble de données réunies, avant tout calcul, dans une même colonne, insérée dans un tableau [11] dans lequel le procédé *fangcheng* va s'appliquer.

[11] De n colonnes et n + 1 lignes en général.

5. Les trois boursiers : 2 résolutions différentes.

Toutefois, le type du problème n'implique pas forcément, pour le calculateur, le choix du procédé de résolution. Nous allons voir que les deux énoncés semblables suivants (contemporains, pendant le Ve siècle, pendant la dynastie Wei du Nord) ont eu deux méthodes de résolution distinctes. Le premier utilise le procédé *fangcheng*.

5. 1. Dans le problème 3-14 du *Zhang Quijian Suanjing*.

Cet ouvrage, dont on peut traduire le titre par Classique mathématique de Zhang Qiujian, a été rédigé par ZHANG Qiujian ; le procédé est mentionné mais sans aucune explication. Probablement parce que son auteur a estimé le procédé suffisamment connu (le JZSS datant à ce moment d'environ cinq siècles) pour ne pas le décrire à nouveau.

Soit trois hommes, JIA, YI *et* BING [12] *, qui possèdent des pièces de monnaie en quantités inconnues.* JIA *dit : « Ce que j'ai, les deux tiers de* YI *et le tiers de* BING *font au total 100. »* YI *dit : « Ce que j'ai, les deux tiers de* JIA *et la moitié de* BING *font au total 100. »* BING *dit : « Ce que j'ai, les deux tiers de* JIA *et de* YI *font au total 100. » On demande combien de pièces de monnaie possèdent* JIA, YI *et* BING.

Réponse : JIA, *60,* YI, *45 et* BING, *30.*

Le rédacteur utilise le procédé énoncé plus haut pour la résolution ; il se contente de poser les éléments de base nécessaires à l'application de la méthode :

3 JIA, *2* YI, *1* BING *et 300 pièces ; 4* JIA, *6* YI, *3* BING *et 600 pièces ; 2* JIA, *2* YI, *3* BING *et 300 pièces. En suivant le procédé* fangchen, *on obtient le résultat.*

La première condition donne l'égalité $J + \frac{2}{3} Y + \frac{1}{3} B = 100$, qui est équivalente à l'égalité suivante, $3 J + 2 Y + B = 300$, d'où les nombres proposés.

Les calculs sont expliqués par le commentateur LIU Xiaosun (fin du Ve siècle) :

Posez 3 JIA *en haut à droite, 2* YI *au milieu à droite, 1* BING *en bas à droite et 300 pièces en dessous ; posez aussi 4* JIA *en haut au centre, 6* YI *au milieu au centre, 3* BING *en bas au centre et 600 pièces en dessous ; posez encore 2* JIA *en haut à gauche, 2* YI *au milieu à gauche, 3* BING *en bas à gauche et 300 pièces en dessous.*

JIA	2	4	3
YI	2	6	2
BING	3	3	1
Pièces	300	600	300

[12] JIA, YI et BING correspondent à nos A, B et C.

Par le 3 supérieur de la colonne droite multipliez partout la colonne gauche : JIA *donne 6,* YI *donne 6,* BING *donne 9 et les pièces donnent 900.*

Par la colonne droite, diminuez la (colonne gauche) deux fois. Il reste : YI, *2,* BING, *7, les pièces, 300.*

Puis par le 3 supérieur de la colonne droite, multipliez partout la colonne centrale. (Cela) donne : JIA, *12,* YI, *18,* BING, *9, les pièces, 1 800.*

Par la colonne droite multipliée partout par 4, diminuez la (colonne centrale) : il reste YI, *10,* BING, *5, les pièces, 600.*

La colonne gauche avancée d'une position donne YI, *20,* BING, *70, les pièces, 3 000.*

Par la colonne centrale, diminuez la (colonne gauche) deux fois. Le reste donne : BING, *60, pièces de monnaie, 1 800.*

Les tableaux successifs lors de la résolution sont ceux-ci :

6	4	3
6	6	2
9	3	1
900	600	300

	4	3
2	6	2
7	3	1
300	600	300

	12	3
2	18	2
7	9	1
300	1 800	300

		3
2	10	2
7	5	1
300	600	300

		3
20	10	2
70	5	1
3 000	600	300

		3
	10	2
60	5	1
1 800	600	300

La résolution se fait ensuite de façon identique à celle du premier exemple :

Par 60, divisez-les, vous obtenez BING, *30.*

$$1\,800 \div 60 = 30$$

Puis les 600 pièces de la colonne centrale sont diminuées de 150 ; il reste 450. Divisez-les par les 10 de YI *: vous obtenez* YI, *45.*

$$5 \times 30 = 150\ ; \quad 600 - 150 = 450\ ; \quad 450 \div 10 = 45$$

Puis éliminez dans la colonne droite. Les pièces sont diminuées de 120 ; il reste 180. Divisez-les par les 3 de JIA, *vous obtenez* JIA, *60.*

$$1 \times 30 + 2 \times 45 = 120\ ; \quad 300 - 120 = 180\ ; \quad 180 \div 3 = 60$$

Conformément aux questions précédentes.

5. 2. Dans le problème 2-26 du Sunzi Suanjing.

Soit JIA, YI *et* BING, *trois hommes qui possèdent des pièces de monnaie en quantités inconnues.* JIA *dit : « La moitié des pièces que possèdent* YI *et* BING, *par addition à mes piè-*

ces, fait 90. » Yɪ, *à son tour, dit : « La moitié des pièces que possèdent* Jɪᴀ *et* Bɪɴɢ, *par addition à mes pièces, fait 70. »* Bɪɴɢ, *à son tour, dit : « La moitié des pièces que possèdent* Jɪᴀ *et* Yɪ, *par addition à mes pièces, fait 56. » On demande combien de pièces de monnaie possède chacun de ces trois hommes.*

Réponse : Jɪᴀ, *72,* Yɪ, *32,* Bɪɴɢ, *4.*

Une autre méthode, arithmétique, est employée par SUNZI. Il donne les calculs suivants :

Posez d'abord ce que disent les trois hommes en position. Multipliez-le par 3. Chacun fait une accumulation : Jɪᴀ *donne 270,* Yɪ *donne 210 et* Bɪɴɢ *donne 168.*

Jɪᴀ ↔ 270 Yɪ ↔ 210 Bɪɴɢ ↔ 168

Chacun est divisé par moitié.

Jɪᴀ ↔ 270 ÷ 2 = 135 Yɪ ↔ 210 ÷ 2 = 105 Bɪɴɢ ↔ 168 ÷ 2 = 84

Puis posez Jɪᴀ, *90,* Yɪ, *70,* Bɪɴɢ, *56.*

Jɪᴀ ↔ 90 Yɪ ↔ 70 Bɪɴɢ ↔ 56 (données de l'énoncé)

Chacun est divisé par moitié. Par Jɪᴀ *et* Yɪ, *diminuez* Bɪɴɢ. *Par* Jɪᴀ *et* Bɪɴɢ, *diminuez* Yɪ. *Par* Yɪ *et* Bɪɴɢ, *diminuez* Jɪᴀ. *Ainsi chacun donne le nombre original.*

Bɪɴɢ ↔ 84 – (90 ÷ 2) – (70 ÷ 2) = 4 Yɪ ↔ 105 – (90 ÷ 2) – (56 ÷ 2) = 32

Jɪᴀ ↔ 135 – (70 ÷ 2) – (56 ÷ 2) = 72

6. Des bœufs et des moutons. Une autre méthode de Lɪᴜ Hui.

Problème 8-7 du JZSS.

Soit 5 bœufs et 2 moutons valant 10 liang *d'or, 2 bœufs et 5 moutons valant 8* liang *d'or. On demande combien d'or valent un bœuf et un mouton.*

Réponse : Un bœuf vaut 1 + 13/21 liang et un mouton, 20/21.

Méthode : Utilise la règle fangcheng.

Lɪᴜ Hui commente ainsi le problème :

Si la règle d'homogénéisation et d'égalisation est appliquée, le nombre supérieur [dans une colonne] est [le nombre de bœufs], multiplie chaque [colonne toute] entière pour déterminer les colonne de gauche et de droite. Il résulte la colonne de droite suivante : 10 bœufs et 4 moutons valant 20 liang *d'or et la colonne de gauche suivante : 10 bœufs, 25 moutons, valant 40* liang. *Les nombres de bœufs sont égaux, il y a un excès de 20* liang *dû à la différence des 21 moutons. Soustrais la colonne en manque à la colonne en excès, le nombre de bœufs est éliminé mais le nombre de moutons et leur coût est connu. Les réponses sont alors connues.*

Il propose ainsi un autre algorithme dont l'idée importante est l'homogénéisation et l'égalisation. En termes modernes, il propose de transformer le système d'équations $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ en le système équivalent $\begin{cases} a_1 a_2 x + b_1 a_2 y = c_1 a_2 \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \end{cases}$ puis de soustraire la première ligne à ligne.

Ce qui, pour rester en termes de tableau, donne :

$$\begin{array}{|cc|} \hline a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \\ c_2 & c_1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|} \hline A_1 a_2 & a_1 a_2 \\ A_1 b_2 & b_1 a_2 \\ A_1 c_2 & c_1 a_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|} \hline 0 & a_1 a_2 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 & b_1 a_2 \\ a_1 c_2 - c_1 a_2 & c_1 a_2 \\ \hline \end{array}$$

Il utilise donc une combinaison linéaire, c'est-à-dire qu'il multiplie les équations entre lesquelles une élimination doit être faite chacune par le coefficient supérieur de l'autre (a_1 pour la colonne C_2 et a_2 pour la colonne C_1) : les coefficients supérieurs sont égalisée et les coefficients, homogénéisés. Puis il y soustraction.

Son commentaire finit par : « *Étends d'un petit [tableau] à un grand, [la méthode] est inchangée.* » Il montre que sa méthode peut être appliquée à des problèmes incluant plus d'inconnues.

Ceci dit, face au problème 13 de ce Chapitre où figurent 5 équations et 6 inconnues, il semblerait qu'il ait établi que cette méthode serait un cas d'espèce particulier. Pour la résolution de ce problème, il invite à s'exprimer en terme de rapports (c'est-à-dire écrire cinq solutions en fonction de la sixième) [13] *. Les systèmes dégénérés ne sont pas traités en tant que tels.*

7. Le problème (indéterminé) « des cent volailles ».

7. 1. Deux problèmes indéterminés.

La mise en équation donne un système de m équations à n inconnues (avec $m < n$) ; ici, $m = 2$ et $n = 4$ (le nombre des différents bambous (ou plumes) et leur prix).

7.1.1. Problème JZSS 2-43.

Soit à payer 576 pièces (qian) *pour acheter 78 bambous. On veut les régler en grands et petits bambous. On demande combien on obtient de chaque sorte.*

Réponse : 48 bambous à 7 pièces et 30 bambous à 8 pièces.

La méthode de résolution est donnée à la suite du problème 43 :

[13] Autrement dit, x :: y :: z :: u :: v :: w = 265 :: 191 :: 148 :: 129 :: 76 :: 721. La solution proposée avec le problème est x = 265, y = 191, etc.

Pose ce que l'on achète pour faire le diviseur ; par ce qui règle, multiplie le nombre de pièces comme dividende. Le dividende est rapporté au diviseur ; ce qui ne remplit pas le diviseur en retour, comme dividende, diminue le diviseur. Le diviseur est vil, le dividende est noble.

Ce à quoi LIU Hui ajoute son commentaire :

On paye 576 pièces et on achète 78 bambous ; par division, les pièces donnent 7 ; le reste du dividende donne 30. Cela fait 30 bambous auxquels on peut de nouveau ajouter une pièce. Alors effectivement le nombre du reste du dividende, c'est le nombre des nobles. C'est pourquoi on dit : « le dividende, ce sont les nobles ». Au départ, on prend 78 bambous comme diviseur. Maintenant par les nobles on les diminue, le reste, on voit que c'est le nombre des vils. C'est pourquoi on dit : « le diviseur, ce sont les vils ».

Ce qu'on traduit avec les données numériques par :

$576 = 7 \times 78 + 30$ (en fait, $576/78 = 7 + 30/78$).

Ce nombre 30 est le nombre de pièces qui resteraient si chaque bambou coûtait 7 pièces, c'est aussi le nombre de pièces coûtant $7 + 1 = 8$ pièces chacune, soit :

$7 \times (78 - 30) + 8 \times 30 = 7 \times 48 + 8 \times 30$

7.1.2. Problème <u>JZSS</u> 2-44.

Soit à payer 620 pièces de monnaie pour acheter 2 100 plumes. On veut les régler en [plumes] viles et nobles. On demande combien [on obtient] de chaque [sorte].

Réponse : 1 140 plumes à 3 plumes pour 1 pièce et 960 plumes à 4 plumes pour 1 pièce.

Dans le même esprit que précédemment, la méthode est la suivante :

$2\,100 = 620 \times 3 + 240 = (620 - 240) \times 3 + 240 \times 4 = 380 \times 3 + 240 \times 4$

380 pièces servent donc à acheter des plumes coûtant 1 pièce les 3 plumes et 240 pièces à acheter des plumes coûtant 1 pièce les 4 plumes.

7.2. Le « problème des cent volailles ».

Dans le premier problème, le nombre de pièces (576) est supérieur au nombre d'objets achetés (78), tandis que dans le second, le nombre de pièces (620) est supérieur au nombre d'objets achetés (2 100). Le problème suivante situe entre les deux : le nombre de pièces est égal au nombre d'objets achetés, 100.

C'est sous nom, donné par l'historien belge L. VAN HEE, qu'est connu ce problème (dit « des cent volailles ») qui a traversé les différentes cultures : on le trouve [14] de façon semblable avec ZHANG Qiujian, ALCUIN (vers 735-804), SRIDHARACARYA (vers 850-950) et ABU KAMIL (vers 900), où le nombre de solutions est variable chez leurs auteurs (de 1, particulière, à l'ensemble complet).

Son énoncé, dans le <u>Zhang Qiujian Suanjing</u>, est suivant :

[14] Voir les livres de J.-Cl. MARTZLOFF pour les énoncés.

Problème 3-28.

Le prix d'un coq est 5 qian *(sapèques) ; celui d'une poule est 3* qian *et le prix de 3 poussins est 3* qian. *Si, pour 100* qian, *on achète 100 volailles, combien y a-t-il de coqs, de poules et de poussins ?*

Réponse : 4 coqs valant 20 qian, *18 poules valant 54* qian *et 78 poussins valant 26* qian. *Autre réponse : 8 coqs valant 40* qian, *11 poules valant 33* qian *et 81 poussins valant 27* qian. *Autre réponse : 12 coqs valant 60* qian, *4 poules valant 12* qian *et 84 poussins valant 28* qian.

Le traité indique comment passer d'une solution à une autre : « *Les coqs chaque [fois] sont augmentés de 4 ; les poules chaque [fois] sont diminuées de 7 ; les poussins chaque [fois] sont augmentés de 3. C'est le résultat.* »

Avec nos notations modernes, ce problème se traduit aisément par le système suivant :

$$\begin{cases} 5\,x + 3\,y + \frac{1}{3}\,z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

On suppose, d'après l'énoncé, qu'aucune de ces trois valeurs n'est nulle. La seconde équation donne $z = 100 - x - y$. En remplaçant cette valeur dans la première équation, il vient (après réduction) $7\,x + 4\,y = 100$. D'où $y = 25 - \frac{7}{4}\,x$. Or y est un entier naturel. On en déduit que x est un multiple de 4 et s'écrit $x = 4\,k$. De là, $y = 25 - 7\,k$ et $z = 75 + 3\,k$. Le nombre y étant entier naturel (bis), il vient $k = 1, 2$ ou 3. Zhang Qiujian a donné toutes les solutions possibles (non nulles), soit $(x, y, z) = (4, 18, 78), (8, 11, 81)$ ou $(12, 4, 84)$.

Pourtant, ces trois résultats ont été pendant longtemps difficiles à prouver par les mathématiciens. Leurs approches qu'ils voulaient rationnelles n'avaient pas trop de sens. Ainsi, vers 570, ZHEN Luan commentait le deuxième solution : « *Posez les 100* qian *sur le sol. Par 9 comme diviseur, divisez-les. Vous obtenez le nombre des poules. Ce qui n'est pas épuisé*[15] *en retour diminue le diviseur inférieur : [cela] fait le nombre de coqs. Par ailleurs, disposez le nombre de volailles 100 sur le sol. Éliminez les nombres des coqs et des poules : le reste, c'est les poussins.* » Ce n'est guère qu'en 1861 qu'un mathématicien chinois résout correctement ce problème.

Cette résolution n'est pas la plus pertinente pour apprécier les procédés de raisonnement dans les mathématiques chinoises, à part, probablement, accentuer leurs limites. Ce problème est beaucoup plus intéressant par le fait qu'il a été traité ailleurs, avec un énoncé semblable ; cela concerne ceux qui travaillent sur une histoire comparée des mathématiques.

Dans la seconde section du Sunzi Suanjing (vers 470), on trouve un autre type d'équations indéterminées : « *On a des objets, en nombre inconnu. Si on les compte par 3, il en reste 2 ; si on les compte par 5, il en reste 3 ; si on les compte par 7, il en reste 2. Combien y a-t-il d'objets . Réponse : 23.* » C'est que l'on appelle des congruences (du premier degré).

C'est le début de raisonnements qui aboutiront à un grand résultat algébrique, le « Théorème des restes chinois »...

---

[15] C'est-à-dire le reste de la division.

UN CALCUL DE VOLUME.

Résumé.

Pour déterminer le volume d'un tronc de pyramide, celui-ci est découpé en solides particuliers dont on a auparavant calculé le volume.

1. « Discussion des travaux publics ».

Ainsi se nomme le cinquième des neuf chapitres du Jiu Zhang Suan Shu : des problèmes liés à la réalité des travaux publiques (en particulier des charges de travail dans des travaux de terrassement) sont insérés dans cet opus mathématique. Ce n'est pas une incongruité : il y est question de calcul de volumes pour différents solides. On y rencontre vingt-et-un types de solides, même si le JZSS ne donnent aucune explication sur ces volumes. Leur forme, de type « polyèdre » (rempart (*cheng*), douve (*qian*), canal (*qu*), ...) ou de type « à base circulaire » (cylindre (*baodao*), cône (*zhui*), ...) est explicitée par la procédure à chaque problème et par le commentaire de LUI Hui. Ces volumes correspondent à des travaux de terrassement effectués aussi bien au-dessous qu'au-dessous de la surface terrestre.

2. Trois solides *(qi)* élémentaires et décomposition d'un cube.

Le problème 5-19 du Jiu Zhang Suan Shu énonce que le volume d'un cube (*li fang*, « carré droit ») est égal au cube de son côté (arête).

Les problèmes 5-8 et 5-27, entre autres, reposent sur l'utilisation d'un prisme droit à base rectangulaire. Son volume est donné, correctement, par le produit de ses trois dimensions. Suivant que l'on effectue sur ce prisme des coupes obliques ou verticales, on obtient trois différents types de solides *(qi)* : le *qiandu*, le *yangma* et le *bienoa*.

- Le *qiandu* est un prisme droit dont la base est un triangle rectangle. Il est obtenu par section d'un prisme droit suivant un plan diagonal ou, autrement dit, par section d'un parallélépipède rectangle suivant un plan passant par deux de ses arêtes opposées.

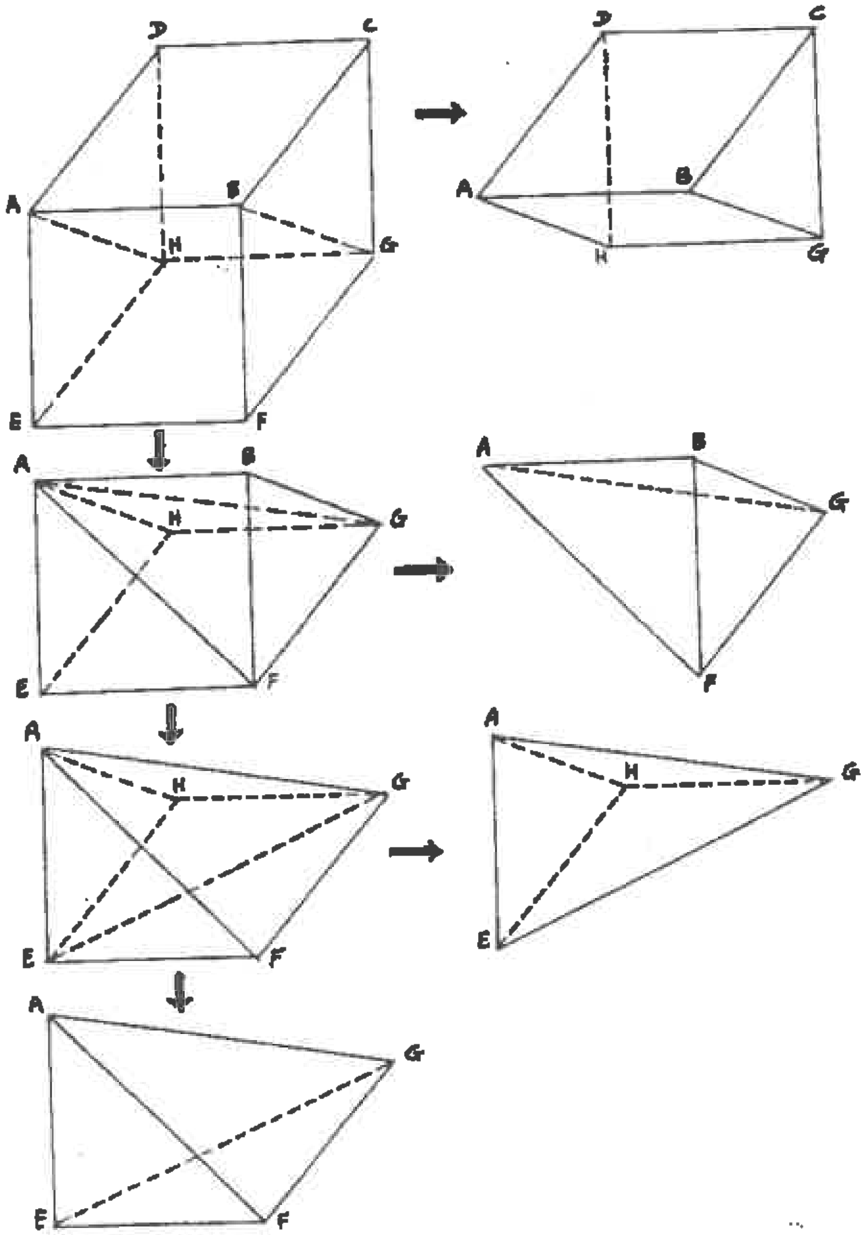
Dans la figure ci-dessous [1], le prisme ABCDEFGH coupé selon le plan ABGH donne deux *qiandu*, dont ADHBCG. Par exemple, par section oblique, un cube donne deux *qiandu*.

- Le *yangma* est une pyramide quadrangulaire à angle droit ou, autrement dit, une pyramide rectangulaire dont une face est un triangle rectangle.
- Le *bienao* est un tétraèdre dont les faces sont des triangles rectangles.

[1] Les dessins de ce chapitre sont tirés de la thèse de R. SCHRIMPF.

En effectuant une section oblique suivant le plan AFG, le *qiandu* AEFBGH donne le *yangma* AEFGH et le *bienao* ABGF.

La procédure du problème 5-14 explique comment calculer le volume du *qiandu* : « *La largueur et la longueur sont multipliées entre elles ; par la hauteur, on les multiplie ; on divise*[2] *le résultat par 2.* ». Autrement dit, V = AB AH HD/2 *(voir figure).*



La procédure du problème 5-15 explique comment calculer le volume du *yangma* : « *La largueur et la longueur sont multipliées entre elles ; par la hauteur, on les multiplie ; on divise le résultat par 3.* » Autrement dit, V = EF EH EA/3.

[2] « *De 2 (parts), (on en prend) 1.* » De même, dans deux méthodes suivantes, « *de 3 (parts), (on en prend) 1* » et « *de 6 (parts), (on en prend) 1* ».

La procédure du problème 5-16 explique comment calculer le volume du *bienao* : « *La largueur et la longueur sont multipliées entre elles ; par la hauteur, on les multiplie ; on divise le résultat par 6.* » Autrement dit, V = EF EG EA/6.

La décomposition du cube rentre en jeu ; on se reportera aux figures précédentes.

LIU Hui a cherché, dans son commentaire, à expliquer ces trois résultats (du moins à les valider à l'aide d'un cas particulier). Les notations sont bien sûr modernes.

Soit le cube [3] ABCDEFGH.

Soit la coupe oblique selon le plan diagonal ABGH. Par celle-ci, le cube donne deux *qiandu* (ABGHCD et ABGHEF).

Soit la coupe oblique selon le plan AFG. Par celle-ci, ce dernier *qiandu* donne un *yangma* (AEFGH) et un *bienuan* (ABGF). De même avec l'autre *qiandu.*

Soit la coupe oblique selon le plan vertical AEG. Par celle-ci, ce *yangma* donne deux *bienao* (AEGH et AEFG), semblables au *bienao* ABGF.

D'où les trois égalités suivantes :

1 cube *(li fang)* = 2 *qiandu*

1 *qiandu* = 1 *yangma* + 1 *bienao*

1 *yangma* = 2 *bienao*

En combinant ces trois égalités, on a :

1 cube = 2 *qiandu* = 3 *yangma* = 6 *bienao*

Ce qui donne les résultats donnés par les méthodes écrites plus haut. Il semblerait que ce soit ainsi qu'ont été construits les résultats des procédures.

A la lumière de ce qui vient d'être écrit, pour calculer le volume d'un solide, le mathématicien chinois va travailler selon les étapes suivantes :

- il décompose le solide en une combinaison de pièces prises parmi les quatre élémentaires précédentes (cube, *qiandu*, *yangma* et *bienao*), sans aucun travail numérique de volume ;
- il construit un ou plusieurs parallélépipèdes (ou cubes) de telle sorte que les effectifs précédents soient multiples, avec le même facteur, des effectifs de pièces qu'un objet standard possède ;
- ainsi, à partir des volumes de ce(s) parallélépipède(s), et des relations entre ces multiples, on déduit le volume cherché.

Cette méthode n'est en fait valable sur des solides standard et aucunement sur des solides quelconques. Par exemple, prenons un *chutong*, qui est un tronc de pyramide dont les deux faces parallèles sont des rectangles. Il fournit, comme nous l'avons vu précédemment,

[3] Le terme *li fang* (cube) désigne de façon générale un parallélépipède rectangle.

quatre *yangma* mais on ne pourra jamais en assembler trois pour en faire un parallélépipède. LIU Hui avait vu ce point.

Le problème suivant, où il est question d'un pavillon carré *(fang ting)*[4] , va nous permettre d'illustrer la méthode décrite.

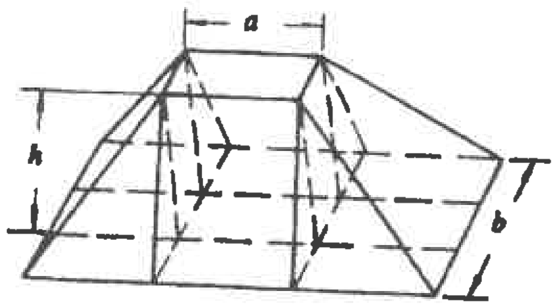
<u>*Problème 5-10.*</u>

Maintenant, un pavillon carré a pour côté de section basse 5 zhang [5] *, un côté de section haute de 4* zhang *et une hauteur de 5* zhang. *Quel est son volume ?*

Réponse : 101 666 chi *+ 2/3* chi.

La procédure est donnée :

« *Multiplie le côté de section basse par le côté de section haute*[6] *; multiplie par elles-mêmes chacune des deux longueurs et additionne les produits ; multiplie la somme par la hauteur et divise par 3.* »



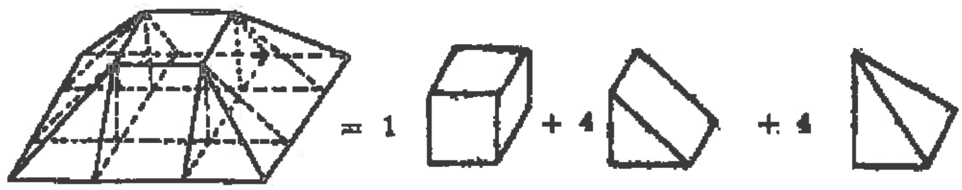
En termes modernes, si l'on note respectivement par *a, b* et *h* la longueur du côté de la section basse, celle de la section haute et la hauteur, le volume V est donné par :

$$V = \frac{(a\,b + a^2 + b^2)\,h}{3}$$

Dans cet exemple, on a (mesures en *zhang*) : $a = 4$, $b = 5$ et $h = 5$. (D'où le résultat.)

Dans son commentaire, LIU Hui introduit un *fang ting* particulier :

« *Supposons un* fang ting *de côté de section haute de 1* chi, *un côté de section basse de 3* chi *et une hauteur de 1* chi. *Celui-ci est constitué de pièces (*qi*). Au centre, un cube ; aux quatre faces, des* qiandu *au nombre de 4 ; aux 4 angles, des* yangma *au nombre de 4.* »



[4] C'est-à-dire une pyramide à base carrée dont l'illustration suit.

[5] 1 *zhang* (unité de longueur) = 10 *chi.*

[6] Ou, autrement dit, « multiplie les côtés des carrés inférieur et supérieur ».

Il décompose ce pavillon de la façon suivante (il est vu de dessus) :

Y	*Q*	*Y*
Q	*C*	*Q*
Y	*Q*	*Y*

Il obtient ainsi 1 cube, 4 *qiandu* et 4 *yangma*.

Maintenant, il cherche d'où proviennent les différents produits donnés dans la méthode.

« *Les côtés de section basse et haute, multipliés entre eux, font 3* chi *[carrés]. Par la hauteur, on les multiplie ; on obtient un volume de 3* chi *[cubiques]. Ceci représente le cube central pris 1 fois et les* qiandu *des quatre côtés pris chacun 1 fois.* »

Cette dernière phrase provient du raisonnement suivant. Si le cube a pour arête 1 [*chi*], alors le volume du cube est 1 et celui du *qiandu*, $\frac{1}{2}$. Donc le volume de 4 *qiandu* est $4 \times \frac{1}{2} = 2$. Le volume de l'ensemble du cube et des quatre *qiandu* est donc $1 + 2 = 3$.

Il continue :

« *Le côté de la section basse multiplié par elle-même fait 9 ; en multipliant ce résultat par la hauteur, on a 9 chi [cubiques]. Cela correspond à 1 cube, les* qiandu *des 4 faces, chacun 2 fois et les* yangma *des 4 angles, chacun 3 fois. Le côté de la section haute multiplié par la hauteur donne 1, qui représente le volume du cube central pris 1 fois.* »

En effet, $1 + 4 \times (2 \times \frac{1}{2}) + 4 \times (3 \times \frac{1}{3}) = 9$.

Il explique enfin la division par 3 :

« *Maintenant, la somme de tous ces volumes vaut le* fang ting, *chaque pièce étant prise trois fois . C'est pourquoi il faut diviser par 3 et cela donne le volume en* chi *[cubiques]. Le nombre total de pièces utilisées est 27 : 3 cubes, 12* qiandu *et 12* yangma, *avec lesquels on peut construire 3 troncs de pyramide. [...]* »

En effet, tous les volumes additionnés valent 3 cubes + 3 × 4 *qiandu* + 3 × 4 *yangma*, soit (en factorisant) 3 × (1 cube + 4 *qiandu* + 4 *yangma*), soit 3 *fang ting*. Il faut donc bien diviser par 3 le volume obtenu pour avoir le volume du tronc.

LIU Hui donne pour finir une autre façon de trouver le volume :

« *D'une autre façon, multiplie par elle-même la différence des côtés des sections ; multiplie par la hauteur ; divise par 3 : cela donne quatre* yangma. *Multiplie les deux côtés des sections ensemble puis ce résultat par la hauteur : cela donne le cube central et les quatre* qiandu *des quatre faces. Additionne ces deux produits : cela donne le volume du* fang ting. »

Autrement dit, $V = \frac{(a-b)^2 h}{3} + a\,b\,h$.

UN PROBLEME DE RESTES ET SA RESOLUTION PAR QIN JIUSHAO AU XIII^e^.

Résumé.

Les calculs en astronomie ont donné lieu très probablement à la naissance des congruences. QIN Jiushao, au XIII^e^ siècle, résolut (ou, du moins, trouva une solution à) un problème de répartition de grains, basé sur un système de congruences. On s'intéressera à la résolution complète d'une équation avec congruence, faites dans son Shushu Jiuzhang.

1. Des problèmes de restes.

1.1. Une origine possible du « théorème des restes chinois ».

Selon les textes dont disposent les historiens, une source de ce type de problème (de restes) pourrait être d'ordre astronomique. En effet, pour être plus précis, l'un des thèmes centraux dans la construction d'un calendrier est la détermination de l'origine de certaines périodes cycliques comme l'année, le mois ou l' (artificiel) cycle de 60 jours [1] . Cette « recherche inverse de l'origine » est une difficulté longtemps rencontrée [2] .

Le problème général pour dresser un calendrier est l'incommensurabilité entre les révolutions solaires (par année et par jour) et le mois lunaire. Ainsi interviennent le nombre de jours écoulés entre un moment donné et le début des cycles annuel, lunaire ou sexagésimal en cours. En posant x le nombre de jours entre le début commun des cycles d'un instant pendant lequel n_1 jours du cycle annuel (désigné par A), n_2 jours du cycle du mois lunaire (L) et n_3 jours du cycle sexagésimal (S) se sont écoulés depuis le dernier commencement de ces cycles, le problème s'énonce ainsi : $x \equiv n_1 \pmod A \equiv n_2 \pmod L \equiv n_3 \pmod S$.

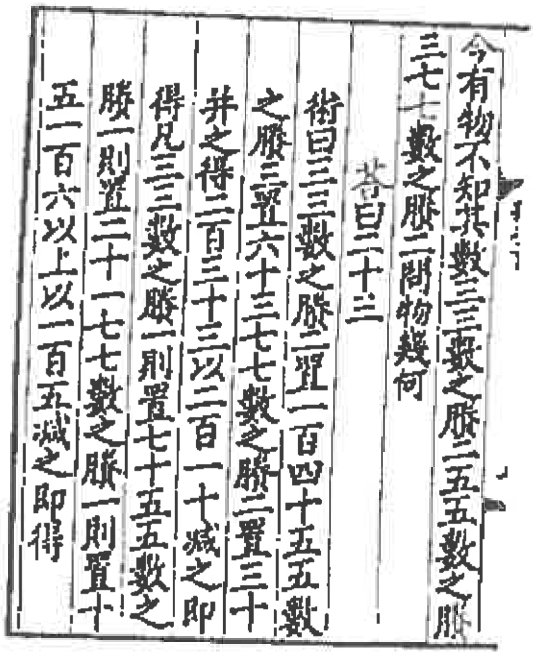
[1] L'année chinoise était divisée en 24 périodes de 15 jours. Ce cycle de 60 jours provient de la combinaison d'un cycle de 10 jours et d'un cycle de 12 jours (le plus petit commun multiple de 10 et 12 étant 60). Le premier cycle définit les *dix troncs célestes (tian gan)* ; le second, les *douze rameaux terrestres (dizhu).* L'usage de cette méthode remonterait à Huangdi, l'Empereur Jaune, dont le règne légendaire aurait débuté en - 2697. Depuis notre VI^e^ siècle, est associé à chaque rameau terrestre un des douze animaux du zodiaque : rat, bœuf, tigre, dragon, ... Pour déterminer un élément du cycle, on note un élément du tronc suivi d'un des rameaux. Pour le compte des années, les Chinois utilisaient les années de règne de leurs empereurs et le cycle de 60 était utilisé pour contrôler. Par exemple, la première année du règne Tianhan de l'empereur Wudi correspond à notre année - 100 ; pour désigner l'année - 99, on parlera de la deuxième année de ce règne. Depuis 1949, on n'utilise plus en Chine officiellement que les millésimes grégoriens.

[2] Cette recherche remonte à la période des Han (– 206, 220).

La façon dont les auteurs chinois (tout comme ceux d'autres civilisations, au Moyen Age) traitent ce problème des restes n'apporte rien sur leur raisonnement arithmétique. Toutefois, les solutions sont expliquées par des règles, non justifiées, et sont correctes.

1.2. Du « problème de Sunzi »...

Dans le troisième chapitre du Sunzi suanjing [3] (datant sans doute de l'époque des Six Dynasties (de 220 à 589)), on trouve [4] le problème suivant, appelé traditionnellement « problème de SUNZI » ; c'est le plus ancien problème de restes (ou, dit de façon moderne, de congruence) dont nous ayons la trace. Comme dans tout manuel mathématique ancien, il est donné l'énoncé, sa réponse puis sa règle de résolution (sans justification).


今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
并之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得

·Problème de Sunzi, reproduit dans la Collection Tianlu linlang (1932).

Problème 3-26 du Sunzi suanjing.

Suppose que l'on ait un nombre inconnu d'objets. S'ils sont comptés par 3, il en reste 2, s'ils sont comptés par 5, il en reste 3 et s'ils sont comptés par 7, il en reste 2. Combien d'objets y a-t-il ?

Réponse : 23.

---

[3] Littéralement : Classique mathématique de Sunzi. Ce mathématicien, dont on ignore beaucoup, voire s'il a réellement existé, comme Pythagore en Occident, n'est pas à confondre avec un général du même nom (« en français ») qui a écrit L'art de la guerre.

[4] Le texte original est perdu ; la version existante est composée d'extraits inclus dans la grande encyclopédie Yongle dadian [Grande Encyclopédie de la période de règne Yongle] (1407). Cette même encyclopédie contient aussi le Shushu Jiuzhang de QIN Quishao : c'est pour cette raison principale qu'on le connaît.

Procédure : S'ils sont comptés par 3, il en reste 2 : soit 140. S'ils sont comptés par 5, il en reste 3 : soit 63. S'ils sont comptés par 7, il en reste 2 : soit 30. Prends la somme de ces trois nombres pour obtenir 233. Soustrais 210 de ce total ; cela donne la réponse.

Il s'agit donc de déterminer le plus petit entier positif N tel que :

$$N = 3\,x + 2 = 5\,y + 3 = 7\,z + 2, \text{ ou encore } N \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7.$$

La valeur de N cherchée est $70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 210$.

La seconde partie de la méthode indique comment trouver N lorsque les restes (pourvu que les modules soient 3, 5 et 7) sont a, b et c :

En général : Pour chaque unité restante en comptant par 3, soit[5] *70. Pour chaque unité restante en comptant par 5, soit 21. Pour chaque unité restante en comptant par 7, soit 15. Si [la somme obtenue ainsi] vaut 106 ou plus, soustrais 105 pour obtenir la réponse.*

On calcule $N = 70\,a + 21\,b + 15\,c - 105\,n$. La méthode de résolution, explicitée ci-dessus, est appelée « soustraction de 105 » (d'où le n), 105 étant le plus petit commun multiple des trois modules donnés, 3, 5 et 7. Par la suite, ce type de problème sera différemment nommé[6] : « méthode secrète du prince de Qin pour compter ses soldats », « méthode de découpage des tubes », « procédure de la grande expansion de recherche de l'unité », …

Le petit poème suivant, correspondant au calcul « $((2 \times 70) + (3 \times 21) + (2 \times 15)) - 105 - 105 = 23$ » a été écrit entre les dynasties Han et Ming et servait de moyen mnémotechnique pour la méthode :

« Trois septuagénaires dans la même famille ? Rare ! | Cinq pruniers avec vingt-et-un branches en fleurs | Sept mariés en parfaite harmonie ? | [C'est] précisément le milieu du mois ! | Cent cinq soustrait ? Et voilà le résultat ! »

Petites explications… Les trois septuagénaires se rapportent aux nombres 70 et 3 du premier regroupement. De même, les cinq pruniers avec vingt-et-un branches se rapportent aux nombres 21 et 5. Le troisième vers parle du nombre 7. Le quatrième vers parle indirectement du nombre 15 : le « milieu du mois » fait allusion à la date de la fête de mariage ayant lieu le quinzième jour du mois lunaire et ce jour-là, les filles mariées retournent chez leurs parents leur rendre hommage. La suite se comprend sans peine.

1.3. … au problème de QIN Jiushao.

Ce problème des restes connaît son apogée en Chine avec QIN Jiushao, à travers son Shushu Jiuzhang [Le livre des nombres en neuf chapitres], en 1247.

Celui-ci résout des congruences du premier degré par une méthode qu'il appelle *dayan qiu yi shu [procédure de la grande expansion pour la recherche de l'unité]*, tout en se contentant d'une seule solution, la plus petite valeur positive. Il ne prétend pas être l'auteur de sa

[5] $70 = 2 \times 5 \times 7$; $21 = 3 \times 7$; $15 = 3 \times 5$. 21 (respectivement 15) a été choisi parce qu'il est congru à 1 modulo 5 (respectivement 7) et à 0 modulo 3 et 7 (respectivement 3 et 5). 35 est congru à 0 modulo 5 et 7 mais pas à 1 modulo 3 ; c'est pourquoi il est pris $2 \times 35 = 70$, qui convient, quant aux congruences. On s'approche de l'équation du paragraphe 3…

[6] D'après le livre de YABUUTI *(op. réf.)*.

règle *dayan* [7] mais l'avoir apprise par les travaux sur les calendriers. Dans son introduction, QIN Jiushao écrit : « Toutefois, la méthode *dayan* n'est pas contenue dans le Jiuzhang [8] car, pour l'instant, personne n'a été capable de la tirer [d'autres procédures]. Ceux qui construisent les calendriers en ont fait une utilisation considérable tout en affinant leurs méthodes » [9] . Un problème ayant pour thème une répartition de grains sera traité dans le paragraphe 4. Toutefois, il nous faut aborder auparavant les paragraphes 2 et 3. Dans cette même introduction, il fait mention des calendriers *dayan li* et *huangji li* [10] . Il est possible que QIN Jiushao relie le problème du calendrier avec le problème de SUNZI, bien que ne le mentionnant pas, contrairement à la plupart des mathématiciens de son époque. De plus, QIN Jiushao ne semble pas avoir été intéressé par les problèmes de calendrier en tant que tels : ils n'ont été pour lui qu'une source d'inspiration. En effet, seul un de ses dix problèmes de restes (le deuxième) traite de calendrier ; les neuf autres traitent de divination, finances, logistique militaire, architecture et travaux d'excavation. La question de l'origine de cette méthode *dayan* reste ouverte... La règle de QIN Jiushao permet de résoudre le problème des restes sous sa forme la plus générale, ce qui présente une formidable avancée.

QIN Jiushao n'a cependant pas été le seul à se pencher sur ce problème. En Chine, le mathématicien YANG Hui en 1275 (soit près de huit siècles plus tard) écrit un ouvrage [11] contenant cinq versions d'un même problème de restes. Nous pouvons citer, hors de Chine, en Inde BRAHMAGUPTA (vers 625) et BHASKARA (au XII^e^ siècle), en Occident, Léonard de Pise (FIBONACCI) [12] et, dans la civilisation arabe, IBN AL HAYTHAM (965, 1040) [13] . Il n'y aura plus guère de travaux dans ces civilisations sur ce thème après le XIII^e^ siècle ; le monde attendra le XV^e^ siècle pour voir naître de nouveaux travaux puis viendront ceux de LAGRANGE, EULER et GAUSS.

---

[7] Joseph NEEDHAM (dans l'ouvrage référencé de LIBBRECHT) donne l'explication de ce terme : « Au cours du temps, les méthodes sur les problèmes indéterminés prirent le nom de *dayan shu*, dérivée d'une obscure phrase dans le Yijing [Livre des mutations] affirmant que le « nombre de la grande expansion » est 50. [...] La raison de l'adoption de ce terme technique est assez claire. Dans la méthode classique de consultation des oracles que le Yijing décrit [...], l'une des 50 tiges ou baguettes est mise de côté avant que les 49 soient divisées en deux tas aléatoires symbolisant le *ying* et le *yang*. Il était très naturel, par conséquent, que les mathématiciens, cherchant les restes de l'un par des divisions continues, se soient rappelés de cela. »

[8] Nom abrégé d'un ouvrage fondamental dans les mathématiques chinoises, le Jiuzhang Suanshu.

[9] Il prétend donc qu'une source de ce type de problèmes se trouve dans les problèmes chronologiques.

[10] Le *dayan li [Calendrier de la grande expansion]* a été construit par le moine YIXING en - 727, le *huangji li [Calendrier du faîte impérial]*, par LIU Zhou au milieu du VI^e^ siècle.

[11] Xugu zhaiqi suanga [Continuation d'un choix de méthodes mathématiques anciennes curieuses].

[12] L'un de ses énoncés dans son Liber Abaci (1202) est très similaire à celui de SUNZI. Il s'agit de résoudre $N \equiv 2 \pmod 3$, $N \equiv 3 \pmod 5$, $N \equiv 4 \pmod 7$.

[13] Il résout le problème $x \equiv 1 \pmod{m_i}$ et $x \equiv 0 \pmod p$, avec p premier et $1 < m_i < p$.

2. Recherche de modules premiers entre eux.

Nous allons exhiber la méthode [14] de QIN Jiushao à l'aide du problème 1-3 du Shushu Jiuzhang, dans lequel il faut chercher les modules réduits de 54, 57, 75 et 72, soit des modules premiers entre eux deux à deux (ou encore : PGCD (m_i, m_j) = 1 pour tous $i \neq j$) [15] .

- Le procédé commence par trouver le PGCD de ces quatre nombres, soit 3, calculé par soustractions successives.

  Par exemple, calculons PGCD (57, 72) :

72 – 57 = 15	15 – 12 = 3
57 – 15 = 42	12 – 3 = 9
42 – 15 = 27	9 – 3 = 6
27 – 15 = 12	6 – 3 = 3

Le résultat 3 est apparu au moins deux fois donc PGCD (57, 72) = 3. (On comprend ainsi pourquoi les mathématiciens chinois appelèrent très tôt le PGCD « l'égal », *deng*.)

- Puis les trois plus grands nombres sont divisés par ce PGCD.

  (54, 57, 75, 72) est remplacé par (54, 19, 25, 24).

- La réduction est suivie par la recherche du PGCD des nouveaux nombres en étudiant successivement tous les couples de nombres dont le premier élément est 24 puis 25 puis 19.

  Lorsque PGCD (m, n) = $d \neq 1$, le couple est remplacé par (m, $\frac{n}{d}$).

  PGCD (24, 25) = 1 PGCD (24, 19) = 1 PGCD (24, 54) = 6

  (24, 54) est remplacé par (24, 9) puis (54, 19, 25, 24), par (9, 19, 25, 24).

- Ensuite, chaque couple obtenu (p, q) est revu et une autre manipulation est faite : si PGCD (p, q) = $D \neq 1$, le couple est remplacé par ($\frac{p}{D}$, $q\,D$).

  PGCD (25, 19) = 1 PGCD (25, 9) = 1 PGCD (24, 19) = 1 PGCD (24, 9) = 3

---

[14] D'après les ouvrages de J. Cl. MARTZLOFF.

[15] La résolution de ce problème demande de trouver en fait un nombre N vérifiant : N ≡ 0 (mod 54) ≡ 0 (mod 57) ≡ 51 (mod 75) ≡ 18 (mod 72).

A titre d'exemple, voici les étapes successives pour 300, 240 et 180 (ces nombres sont énoncés dans le problème 6 de ce même chapitre).

- 300 240 180
- 300 4 3
- 100 4 9
- 25 16 9

Ceci écrit, il faut signaler que QIN Jiushao distingue 4 types de nombres : les nombres entiers *(yuanshu)*, les nombres décimaux *(shoushu)*, les nombres fractionnaires *(tongshu)* et les multiples des puissances de 10 *(fushu)*. Pour chaque type, il y a une règle qui amène à travailler sur des nombres entiers. Voici les étapes successives dans le cas des trois nombres[1] $365 + \frac{1}{4}$, $29 + \frac{499}{940}$ et 60 :

- $365 + \frac{1}{4} = \frac{1\,461}{4}$ $\quad 29 + \frac{499}{940} = \frac{27\,759}{940}$ $\quad 60 = \frac{60}{1}$
- $\frac{1\,461 \times 940 \times 1}{940 \times 4 \times 1}$ $\quad \frac{27\,759 \times 4 \times 1}{940 \times 4 \times 1}$ $\quad \frac{60 \times 940 \times 4}{940 \times 4 \times 1}$
- 1 373 340 111 036 225 600
- PGCD (1 373 340, 111 036, 225 600) = 12
- $\frac{1\,373\,340}{12} = 114\,445$ $\quad \frac{111\,036}{12} = 9\,253$ $\quad 225\,600$

Le mathématicien travaille alors avec les trois nombres 114 445, 9 253 et 225 600.

3. Résolution d'une équation avec congruence.

3.1. Présentation de la méthode.

L'équation générique à résoudre est : $a\,x \equiv 1 \pmod{m}$, avec a et m donnés.

QIN Jiushao appelle « surplus » *(qi)* le coefficient a et « mère de l'expansion » *(yanmu)* le coefficient m. Le terme de « surplus » est utilisé parce que a est un reste modulo m. Le terme *yanmu* rappelle que nous sommes dans le domaine de travail de la règle *dayan*. Le terme de « mère » *(mu)* est issu du calcul fractionnaire [2] . Les mathématiciens ont voulu exprimer le fait que les calculs de restes ont un lien avec les calculs de fraction. Pourtant,

[1] QIN Jiushao utilise les données du *Sifen li [Calendrier au quart]*, datant d'avant la dynastie des Han (donc avant - 206), où l'année compte 365 jours 1/4 (ce quart explique le nom du titre), le mois, 29 jours 499/940 et le cycle sexagésimal est utilisé.

[2] Voir le chapitre « Fraction. Division. ».

même si les érudits chinois ne s'en sont pas aperçus, la méthode résolutoire de QIN Jiushao correspond à la détermination sous forme de fractions continues de $\frac{m}{a}$ [3].

La partie I ci-dessous est en fait ce que nous nommons « algorithme d'Euclide ». Cet algorithme apparaît déjà dans le *Jiuzhang Suanshu* sous la forme de « soustractions alternées ». Les notations sont celles de VINOGRADOV [4].

Ce type de solution correspond à ce qui est expliqué dans pratiquement tout livre de théorie des nombres élémentaire. Une chose est toutefois essentielle à voir : QIN Jiushao ne connaît pas la notion de nombres premiers et il procède **uniquement** à l'aide de cet algorithme d'Euclide (ou des généralisations et variantes de celui-ci) mais jamais par décompositions d'un nombre en un produit de nombres premiers [5]. Il n'en demeure pas moins que sa démarche est la même que celle qui repose sur les fractions continues. Cependant, QIN Jiushao ne travaille qu'avec des nombres positifs : c'est pourquoi il donne deux résultats, suivant que le nombre de divisions dans son algorithme d'Euclide est pair ou non.

Selon l'historien QIAN Baocong, QIN Jiushao résout [6] le problème ainsi :

Partie I	Partie II	Partie III
$m = a\,q_1 + r_2$	$P_0 = 1$	• si n est impair,
$a = r_2\,q_2 + r_3$	$P_1 = q_1$	$x = P_{n-1}$,
$r_2 = r_3\,q_3 + r_4$	$P_2 = q_2 P_1 + P_0$	• si n est pair,
...	$P_3 = q_3 P_2 + P_1$	$x = (r_{n-1} - 1)\,P_{n-1} + P_{n-2}$
$r_{n-2} = r_{n-1}\,q_{n-1} + r_n$	...	
(avec $r_n = 1$ *et* $q_n = r_{n-1}$*)*	$P_{n-1} = q_{n-1} P_{n-2} + P_{n-3}$	
	(et $P_n = m$*)*	

La solution x ainsi obtenue est **la plus petite solution positive.**

3.2. Application à une équation particulière.

QIN Jiushao résout l'équation $\boxed{377\,873\,x \equiv 1 \pmod{499\,067}}$.

[3] Cette détermination implique, d'une part, la recherche du PGCD de a et de m par la méthode des soustractions alternées et, d'autre part, la détermination d'une solution positive de l'équation $a\,x - m\,y = 1$ (équivalente à l'équation $a\,x \equiv 1 \pmod{m}$).

[4] Elements of Number Theory, VINOGRADOV, I. M., New York : Dover, 1954. Cité dans l'ouvrage anglais de J.-Cl. MARTZLOFF.

[5] On ne traitera donc pas des conditions algébriques modernes (de facto anachroniques) comme (1) *a* et *m* sont premiers entre eux ou (2) le cas $m \equiv 1 \pmod{a}$ ...

[6] Les étapes suivantes se prêtent très bien à un travail sur tableur... Il y a néanmoins des cas pathologiques comme ceux de la note précédente qui demanderont un approfondissement !

Le tableau ci-dessous donne les calculs successifs de la résolution. *(Les différents calculs des trois parties ont été regroupés.)*

S	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
q_s		1	3	8	2	12	3	1	1	6	12
r_s			121 194	14 291	6 866	559	158	85	73	12	1
P_s	1	1	4	33	70	873	2 689	3 562	6 251	41 068	499 067

On a $r_s = 1$ pour $s = 10$ et 10 est pair.

La solution est $x = (r_9 - 1)\,P_9 + P_8 = (12 - 1) \times 41\,068 + 6\,251 = \mathbf{457\,999}$.

4. Résolution d'un système de congruences.

On va s'intéresser maintenant à la complète résolution par QIN Jiushao du problème 2-1 du Shushu Jiuzhang :

Suppose que nous ayons trois paysans de première classe. Les productions respectives de leurs rizières[7] *sont toutes égales entre elles (on le constate en se servant de la mesure de capacité (*hu*)). Sachant que A (*JIA*) a vendu son riz au marché officiel de sa propre préfecture, sachant aussi (qu'après cela) il lui en est resté 3* dou *2* sheng[8] *, que B (*YI*) a vendu son riz aux villageois d'Anji*[9] *et (en fin de compte) il lui en est resté 7* dou, *C (*BING*) a vendu son riz à un intermédiaire de Pingjiang et il lui en est resté 3* dou, *on demande quelle était la quantité initiale de riz que possédait chacun des paysans et quelle quantité chacun d'entre eux a vendue. (Nota :) Le* hu *du pavillon de Wensi vaut 83* sheng, *celui d'Anji, 110 et celui de Pingjiang, 135.*

Réponse. Quantité totale de riz : 738 dan *à répartir entre 3 hommes soit 246* dan *chacun. Quantité de riz vendue par A : 296* dan, *par B : 223* dan, *par C : 182* dan.

Avec nos notations modernes, QIN Jiushao cherche à trouver la plus petite solution du système $\begin{cases} x \equiv 32 \pmod{83} \\ x \equiv 70 \pmod{110} \\ x \equiv 30 \pmod{135} \end{cases}$, où x est le volume de riz en *sheng* de chaque paysan.

---

[7] Le riz est cultivé dans la Chine du Sud (région chinoise la plus ensoleillée et humide) tandis que le blé et le millet sont cultivés dans la Chine du Nord (où les régions sont plus sèches). Les villes citées après se placent dans des provinces du Sud.

[8] Unités utilisées : 1 *dou* = 10 *sheng* (mesure de capacité – boisseau) et 1 *dan* = 10 *dou*.

[9] Anji est une préfecture de la province Zhejiang, Pingjiang est une préfecture de le province Hunan. Le pavillon de Wensi (*wensi yuan*) est une agence gouvernementale sous les Song, où les ouvriers eunuques produisent de la joaillerie, des brocarts, ..., pour l'Empereur et ses femmes.

QIN Jiushao présente sa méthode ainsi [10] :

Utiliser la méthode dayan *:*

- *Poser les modules des administrations locales en tant que nombres primordiaux.*

Yuanshu Nombres primordiaux y_i	83	110	135

- *Joindre tout d'abord les nombres par 2 et chercher leur égal commun.*

QIN Jiushao calcule le PGCD de ces trois nombres et trouve 1.

- *Comme on ne peut pas simplifier ces nombres en une seule fois, on les simplifie séparément : (donc) on cherche les égaux deux à deux, en chaîne. Simplifier les impairs et non les pairs* [11] *. Obtenir ainsi les mères déterminées. [...]*

C'est la réduction des modules. Il calcule PGCD (83, 110), PGCD (83, 135) et PGCD (110, 135) par soustractions successives (voir le paragraphe 2) et trouve :

PGCD (83, 110) = PGCD (83, 135) = 1

PGCD (110, 135) = 5. $135 \div 5 = 27$

Il remplace donc (110, 135) par (110, 27) et obtient un triplet d'entiers premiers entre eux, (83, 110, 27).

Dingmu Mères déterminées m_i	83	110	27

- *Le produit de ces mères donne la mère du développement.*

Il calcule le produit des m_i : $83 \times 110 \times 27 = 246\,510$

Yanmu Mère du développement M	246 510

- *Les produits mutuels donnent les nombres du développement.*

$110 \times 27 = 2\,970$ $83 \times 27 = 2\,241$ $83 \times 110 = 9\,130$

Yanshu Nombres du développement M_i	2 970	2 241	9 130

[10] Les trois valeurs numériques, placées à côté de la terminologie, correspondent à chacune des trois équations. On se ramène au système lorsqu'il n'y a qu'une valeur écrite. Un calcul est présenté lorsque cela éclaire la méthode.

[11] Le sens des termes « pair » et « impair » présente un très difficile problème. LIBBRECHT *(op. cit.)* pense que le premier signifie que tous les nombres sont divisibles par le même facteur.

- ***Ce qui remplit les mères déterminées, le supprimer.***

  Il réduit modulo m_i , c'est-à-dire qu'il calcule le reste de la division de M_i par m_i .

Qishu Nombres excédentaires N_i	65	41	4

- ***Chercher les unités. En déduire les modules multiplicatifs.***

  Il résout (voir le paragraphe 3) les équations $N_i\, x \equiv 1 \pmod{m_i}$ où l'inconnue est μ_i .

  Résolvons, par exemple, l'équation $65\, x \equiv 1 \pmod{83}$ [12] .

$83 = 1 \times 65 + 18$

$65 = 3 \times 18 + 11$

$18 = 1 \times 11 + 7$

$11 = 1 \times 7 + 4$

$7 = 1 \times 4 + 3$

$4 = 3 \times 1 + 1$

Ce qui donne le tableau suivant :

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
q_i		1	3	1	1	1	1	3
r_i			18	11	7	4	3	1
P_i	1	1	4	5	9	14	23	83

On a $r_n = 1$ pour $n = 7$ et 7 est impair : $x = P_6 = 23$.

La présentation des calculs se fait de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{cc} P_0 & a \\ & m \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} P_0 & a \\ P_1 & r_2 \\ & q_1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} & q_2 \\ P_2 & r_2 \\ P_1 & r_1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} P_2 & r_2 \\ P_3 & r_3 \\ & q_3 \end{array}} \quad \ldots \quad \boxed{\begin{array}{cc} & q_n \\ P_n = m & r_n = 1 \\ P_{n-1} & r_{n-1} \end{array}}$$

Dans le cas de notre équation, on obtient les sept présentations successives suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 65 \\ & 83 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 65 \\ 1 & 18 \\ & 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} & 3 \\ 4 & 11 \\ 1 & 18 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} 4 & 11 \\ 5 & 7 \\ & 1 \end{array}}$$

[12] On pourra faire le lien entre les différents termes q_i et les termes de la décomposition en fraction continue de 83/65 = (1, 3, 1, 1, 1, 3).

	1
9	4
5	7

9	4
14	3
	1

	1
23	1
14	3

Cheng lü Nombres multiplicatifs μ_i	23	51	7

- *Multiplier ceux-ci par les nombres du développement pour en faire les nombres utiles.*

  2 970 × 23 = 68 310   2 241 × 51 = 114 291   9 130 × 7 = 63 910

Yongshu Nombres utiles $F_i = M_i \mu_i$	68 310	114 291	63 910

- *Multiplier les restes de riz par les nombres qui leur correspondent.*

  32 × 68 310 = 2 185 920   70 × 114 291 = 8 000 370   30 × 63 910 = 1 917 300

Yu Restes initiaux r_i	32	70	30

Zong Totaux $T_i = F_i r_i$	2 185 920	8 000 370	1 917 300

- *Ajouter les résultats.*

  2 185 920 + 8 000 370 + 1 917 300 = 121 035 590

Zongshu[2] Somme S des T_i	121 035 590

- *Ce qui remplit la mère du développement, l'éliminer.*

  Il réduit cette somme modulo M (par additions répétées) :

  121 035 590 = 49 × 246 510 + 24 600

- *Cela donne les parts de riz (toutes égales entre elles) : fois le nombre d'hommes, donne la quantité totale de riz.*

  D'où la solution du système donnée dans le texte : <u>x = **24 600**</u>.

Un autre problème, résolu de la même façon : le problème Shushu Jiuzhang 1-6.

Une section militaire gagne un combat. A 5 heures, ils envoyèrent trois messagers rapides à la capitale, où ils arrivèrent pour annoncer la nouvelle. A arriva le premier à 17 heures, B arriva quelques jours plus tard à 14 heures et C arriva en dernier, aujourd'hui à 9 heures. Selon leurs déclarations, A parcourut 300 li *par jour, B, 240 et C, 180. Trouve le nombre de* li *de la section à la capitale et le nombre de jours nécessaires à chaque messager.*

Chaque « jour ouvrage » se situe entre 5 h et 17 h. *A* parcourut donc la distance en un nombre entier de « jours ouvrables ». *B* parcourut cette même distance en un nombre entier de jours plus 14 - 5 = 9 heures, pendant lesquelles il avança à la vitesse de 240/12 = 20 *li* par heure, ce qui donne un excédent de 20 × 9 = 180 *li*. De même, *C*, fit un excédent de 60 *li*. La distance D est donc telle que D ≡ 0 (mod 300), D ≡ 180 (mod 240) et D ≡ 60 (mod 180).

Yuanshu	300	240	180
Dingmu	25	16	9
Yanmu		3 600	
Yanshu	144	225	400
Qishu	19	1	4
Cheng lü	4	1	7
Yongshu	576	225	2 800
Yu	0	180	60
Zong	0	40 500	168 000
Zongshu		208 500	
Réduction	208 500 =	57 × 3 600	+ 3 300

D'où la solution du système : *D* = 3 300 *li*.

A nécessita $\frac{3\,300}{300}$ = 11 jours, *B*, $\frac{3\,300}{240} = 13 + \frac{3}{4}$ jours et *C*, $\frac{3\,300}{180} = 18 + \frac{1}{3}$ jours

Épilogue.

Quelques siècles plus tard, on trouvera dans les livres d'arithmétique le théorème suivant, appelé, à juste titre, « théorème des restes chinois »...

Soit *k* entiers positifs, $m_1, m_2, \ldots, m_k$, premiers entre eux.

Alors le système de congruences *(S)* $x \equiv r_i \pmod{m_i}$ avec $i = 1, 2, \ldots, k$ admet une unique solution modulo M avec $M = m_1 m_2 \ldots m_k$.

Soit $M_1, M_2, \ldots, M_k$ tels que $M = m_1 M_1 = m_2 M_2 = \ldots = m_k M_k$.

Puisque m_i et M_i sont premiers entre eux, on peut trouver *k* entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tels que $M_1 \mu_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$, $M_2 \mu_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$, ... $M_k \mu_k \equiv 1 \pmod{m_k}$ et la solution générale de *(S)* est : $x = M_1 \mu_1 r_1 + M_2 \mu_2 r_2 + \ldots + M_k \mu_k r_k \pmod{M}$.

Résumé de la résolution du système.

$$\begin{cases} x \equiv 32 \pmod{83} \\ x \equiv 70 \pmod{110} \\ x \equiv 30 \pmod{135} \end{cases}$$

Terminologie	Valeurs numériques			Remarques
Yuanshu Nombres primordiaux y_i	83	110	135	Modules
Dingmu Mères déterminées m_i	83	110	27	Modules m_i premiers 2 à 2
Yanmu Mère du développement M	246 510			M = produit des m_i
Yanshu Nombres du développ. M_i	2 970	2 241	9 130	$M_i = \frac{M}{m_i}$
Qishu Nombres excédentaires N_i	65	41	4	N_i = reste de la division de M_i par m_i
Cheng lü Nombres multiplicatifs μ_i	23	51	7	Les μ_i sont les plus petites solutions positives des équations $N_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$
Yongshu Nombres utiles F_i	68 310	114 291	63 910	$F_i = M_i \mu_i$
Yu Restes r_i	32	70	30	Restes initiaux r_i
Zong Totaux T_i	2 185 920	8 000 370	1 917 300	$T_i = F_i r_i$
Zongshu Somme S	121 035 590			Somme des T_i
Réduction	121 035 590 = 49 × 246 510 + 24 600			Réduction de S modulo M

D'où la solution du système donnée dans le texte : x = **24 600.**

CHRONOLOGIE CHINOISE.

XIA	XXI^{e} - XVI^{e} siècle avant JC
SHANG	XVI^{e} - fin XI^{e} siècle avant JC
ZHOU	
Zhou occidentaux	fin XI^{e} siècle - 771 avant JC
Zhou orientaux	771 - 722 avant JC
Epoque des Printemps et Automnes	722 - 481 avant JC
Epoque des Royaumes combattants	453 - 222 avant JC
QIN	221 - 206 avant JC
HAN	
Han Occidentaux	206 avant JC - 9 après JC
Interrègne de Wang Mang/*Xin*	9 - 23
Han Orientaux	25 - 220
TROIS ROYAUMES (Wei, Wu et Shu)	
Au Nord, WEI	221 - 263
A l'Ouest, SHU	200 - 265
Au Sud-Est, WU	222 - 265
JIN OCCIDENTAUX	265 - 317
DYNASTIES DU SUD ET DU NORD	317 - 589
SUI	581 - 618
TANG	618 - 907
CINQ DYNASTIES ET DIX ROYAUMES	907 - 960
SONG	
Song du Nord	960 - 1127
Song du Sud	1227 - 1279
YUAN	1279 - 1368
MING	1368 - 1644
QING	1644 - 1911

BIBLIOGRAPHIE.

(Textes et ouvrages en langues occidentales)

BARBIN, E., *Démonstration grecque et démonstration chinoise : une opposition entre le discursif et le visuel*, in L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes, Actes du Colloque, 3-7 novembre 1997, I.U.F.M. de La Réunion, pp 329-347, 1998

CHABERT et al., *Autour des méthodes de fausses positions*, in Histoire d'algorithmes, Belin.

CHEMLA, K., Étude du livre « Reflets des mesures du cercle sur la mer » de Li Ye, Thèse, Paris XIII, 1982

CHEMLA, K., *Résonances entre démonstration et procédure, Remarques sur le commentaire de Liu Hui (III^e siècle) aux* Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques *(I^{er} siècle)*, in Extrême-Orient – Extrême-Occident, Cahiers de recherches comparatives, n° 14, pp. 91-129, 1992

CHEMLA, K., *Different concepts of equations in The Nine Chapters on Mathematical Procedures and in the Commentary on it by Liu Hui (3rd Century)*, in Historia Scientiarum, Vol. 4 2, 1994

CHEMLA, K., *Nombres, opérations et équations en divers fonctionnements*, Mémoires de l'Institut des Hautes Études Chinoises, Volume XXXV, Collège de France, 1994

CHEMLA, K., *Les problèmes comme champ d'interprétation des algorithmes dans les Neuf Chapitres sur les Procédures mathématiques et leurs commentaires*, in Oriens - Occidens, n° 3, 2000

COTTERELL, A., La Chine des Empereurs, Gallimard, 1994

CULLEN, C., Astronomy and Mathematics in Ancient China : the *Zhou Bi Suan Jing*, Collection Needham Research Institute Studies - 1, Cambridge University Press, Avril 1996.

GRANET, M., La civilisation chinoise, Coll. « L'évolution de l'humanité », Albin Michel, 1968

KANGSHEN, S., CROSSLEY, J., LUN, A., The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion and Commentary, Oxford University Press, 1999

LIBBRECHT, U., *The Chinese* Ta-yen *Rule : a Comparative Study*, Orientalia Lovaniensa (Louvain), 1972

LIU, D., *Nombres et outils de calcul et expressions mathématiques en Chine ancienne*, in L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes, Actes du Colloque, 3-7 novembre 1997, I.U.F.M. de La Réunion, pp 161-177, 1998

MARTZLOFF, J.Cl., Recherches sur l'œuvre mathématique de Mei Wending (1633-1721), Mémoires de l'Institut des Hautes Études Chinoises, Volume XVI, Collège de France, 1989

MARTZLOFF, J.Cl., Histoire des mathématiques chinoises, Masson, 1983

MARTZLOFF, J.Cl., *Exemples de démonstration en mathématiques chinoises*, in Actes du 7ème Colloque Inter IREM, Besançon 89, pp 346-365, 1989

MARTZLOFF, J.Cl., A History of Chinese Mathematics, Springer, 1997

MIKAMI, Y., The developpment of mathematics in China and Japan, Chelsea Publishry Compagny New York, 1913

NEEDHAM, J., La science chinoise et l'Occident, Ed. du Seuil, 1973

SCHRIMPF, R., La collection mathématique Souan King Che Chou, Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VIIe siècle de notre ère, Thèse, Rennes, 1963

SELLIER, J., Atlas des peuples d'Asie méridionale et orientale, Ed. La Découverte, 2001

STEENS, E., Dictionnaire de la civilisation chinoise, Ed. du Rocher, 1996

YABUUTI, K., Une histoire des mathématiques chinoises, Belin Sciences, 2000

YAMASAKI, Y., History of instrumental Multiplication and Division in China - from the Reckoning-blocks to the Abacus

La Chine, Collection « Monde et Voyages » dirigée par D. MOREAU, Larousse, 1979

Vient de paraître :

CHEMLA , K., GUO, S., Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires, Ed. Dunod, 2004

Table comparative Pinyin – EFEO.

Pinyin	EFEO
a	a
ai	ngai
an	ngan
ang	ngang
ao	ngao
ba	pa
bai	pai
ban	pan
bang	pang
bao	pao
bei	pei
ben	pen
beng	peng
bi	pi
bian	pien
biao	piao
bie	pie
bin	pin
bing	ping
bo	po
bu	pou
ca	ts'a
cai	ts'ai
can	ts'an
cang	ts'ang
cao	ts'ao
ce	ts'ö
cen	ts'en
ceng	ts'eng
cha	tch'a
chai	tch'ai
chan	tch'an
chang	tch'ang
chao	tch'ao
che	tch'ö
chen	tch'en
cheng	tch'eng
chi	tch'e
chong	tch'ong
chou	tch'eou
chu	tch'ou
chuai	tch'ouai
chuan	tch'ouan
chuang	tch'ouang
chui	tch'ouei
chun	tch'ouen
chuo	tch'ouo
ci	ts'eu
cong	ts'ung
cou	ts'eou
cu	ts'ou
cuan	ts'ouan
cui	ts'ouei
cun	ts'ouen
cuo	ts'o
da	ta
dai	tai
dan	tan
dang	tang
dao	tao
de	tö
dei	tei
den	ten
deng	teng
di	ti
dian	tien
diao	tiao
die	tie
ding	ting
diu	tieou
dong	tong
dou	teou
du	tou
duan	touan
dui	touei
dun	touen
duo	to
e	ngo
ei	ei
en	ngen
eng	ngeng
er	eul
fa	fa
fan	fan
fang	fang
fei	fei
fen	fen
feng	fong
fo	fo
fou	feou
fu	fou
ga	ka
gai	kai
gan	kan
gang	kang
gao	kao
ge	ko, kö
gei	kei
gen	ken
geng	keng
gong	kong
gou	keou
gu	kou
gua	koua
guai	kouai
guan	kouan
guang	kouang
gui	kouei
gun	kouen
guo	kouo
ha	ha
hai	hai
han	han
hang	hang
hao	hao
he	ho, hö
hei	hei
hen	hen
heng	heng
hong	hong
hou	heou
hu	hou
hua	houa
huai	houai
huan	houan
huang	houang
hui	houei
hun	houen
huo	houo
ji	ki, tsi
jia	kia
jian	kien, tsien
jiang	kiang, tsiang
jiao	kiao, tsiao
jie	kiai, kie, tsie
jin	kin, tsin
jing	king, tsing
jiong	kiong
jiu	kieou, tsieou
ju	kiu, tsiu
juan	kiuan, tsiuan
jue	kio, kiue, tsio, tsiue
jun	kiun, tsiun
ka	k'a
kai	k'ai
kan	k'an
kang	k'ang
kao	k'ao
ke	k'o, k'ö
ken	k'en
keng	k'eng
kong	k'ong
kou	k'eou
ku	k'ou
kua	k'oua
kuai	k'ouai
kuan	k'ouan
kuang	k'ouang
kui	k'ouei
kun	k'ouen
kuo	k'ouo
la	la
lai	lai
lan	lan
lang	lang
lao	lao
le	lö
lei	lei
leng	leng
li	li
lia	lia
lian	lien
liang	leang
liao	leao
lie	lie
lin	lin
ling	ling
liu	liu
long	long
lou	leou
lu	lou
lü	liu
luan	louan
lüe	liue, lio
lun	louen
luo	lo, loue
ma	ma
mai	mai
man	man
mang	mang
mao	mao
me	mö
mei	mei
men	men
meng	mong
mi	mi
mian	mien
miao	miao
mie	mie
min	min
ming	ming
miu	mieou
mo	moio, mo
mou	meou
mu	mou
na	na
nai	nai
nan	nan
nang	nang
nao	nao
ne	ne
nei	nei
nen	nen
neng	neng

ni	ni
nian	nien
niang	niang
niao	niao
nie	nie
nin	nin
ning	ning
niu	nieou
nong	nong
nou	neou
nu	nou
nü	niu
nuan	nouan
nüe	nio
nuo	no
o	ngo
ou	ngeou
pa	p'a
pai	p'ai
pan	p'an
pang	p'ang
pao	p'ao
pei	p'ei
pen	p'en
peng	p'eng
pi	p'i
pian	p'ien
piao	p'iao
pie	p'ie
pin	p'in
ping	p'ing
po	p'o
pou	p'eou
pu	p'ou
qi	k'i, ts'i
qia	k'ia
qian	k'ien, ts'ien
qiang	k'iang, ts'iang
qiao	k'iao, ts'iao
qie	k'iai, k'ie, ts'ie
qin	k'in, ts'in
qing	k'ing, ts'ing
qiong	k'iong
qiu	k'ieou, ts'ieou
qu	k'iu, ts'iu
quan	k'iuan, ts'iuan
que	k'io, k'iue, ts'io, ts'iue
qun	k'iun, ts'iun
ran	jan
rang	jang
rao	jao
re	jö
ren	jen
reng	jeng
ri	je
rong	jong
rou	jeou
ru	jou
rua	joua
ruan	jouan
rui	jouei
run	jouen
ruo	jo
sa	sa
sai	sai
san	san
sang	sang
sao	sao
se	sö
sen	sen
seng	seng
sha	cha
shai	chai
shan	chan
shang	chang
shao	chao
she	chö
shei	chei
shen	chen
sheng	cheng
shi	che
shou	cheou
shu	chou
shua	choua
shuai	chouai
shuan	chouan
shuang	chouang
shui	chouei
shun	chouen
shuo	chouo, cho
si	sseu
song	song
sou	seou
su	sou
suan	souan
sui	souei
sun	souen
suo	so
ta	t'a
tai	t'ai
tan	t'an
tang	t'ang
tao	t'ao
te	t'ö
tei	t'ei
teng	t'eng
ti	t'i
tian	t'ien
tiao	t'iao
tie	t'ie
ting	t'ing
tong	t'ong
tou	t'eou
tu	t'ou
tuan	t'ouan
tui	t'ouei
tun	t'ouen
tuo	t'o
wa	wa
wai	wai
wan	wan
wang	wang
wei	wei
wen	wen
weng	wong
wo	wo
wu	wou
xi	hi, si
xia	hia
xian	hien, sian
xiang	hiang, siang
xiao	hiao, siao
xie	hiai, hie, sie
xin	hin, sin
xing	hing, sing
xiong	hiong
xiu	hieou, sieou
xu	hiu, siu
xuan	hiuan, siuan
xue	hiue, siue
xun	hiun, siun
ya	ya
yan	yen
yang	yang
yao	yao
ye	ye
yi	yi
yin	yin
ying	ying
yong	yong
you	yeou
yu	yu
yuan	yuan
yue	yue
yun	yun
za	tsa
zai	tsai
zan	tsan
zang	tsang
zao	tsao
ze	tsö
zei	tsei
zen	tsen
zeng	tseng
zha	tcha
zhai	tchai
zhan	tchan
zhang	tchang
zhao	tchao
zhe	tchö
zhei	tchei
zhen	tchen
zheng	tcheng
zhi	tche
zhong	tchong
zhou	tcheou
zhu	tchou
zhua	tchoua
zhuai	tchouai
zhuan	tchouan
zhuang	tchouang
zhui	tchouei
zhun	tchouen
zhuo	tcho, tchouo
zi	tseu
zong	tsong
zou	tseou
zu	tsou
zuan	tsouan
zui	tsouei
zun	tsouen
zuo	tso

QUELQUES UNITES RENCONTREES.

Les équivalents entre les unités chinoises et les nôtres ont varié d'une époque à l'autre ; celles de la fin de la période des Han postérieurs ont été choisies comme référence [1] pour la longueur et la surface, celles des Song - Yuan pour le poids et le volume.

Il est à noter que l'on trouve dans des textes des « *chi* » au lieu de « *chi* carrés ». Les surfaces ont la même unité d'aire de même nom que l'unité de longueur correspondante : 1 *bu* peut désigner aussi bien la longueur de 1 *bu* que l'aire du carré de côté 1 *bu*.

- **Valeurs de quelques unités (référencées alphabétiquement).**

Mesure	Unité	Traduction	Valeur
LONGUEUR	*bu*	pas	1, 382 4 m
	chi	pied	23, 04 cm
	cun	pouce	2, 304 cm
	fen	ligne	0, 203 4 cm
	li	li	474, 72 m
	zhang	toise	2, 304 m
POIDS	*jin*	livre	596, 8 g
	liang	once	37,3 g
	qian	sapèque	3,73 g
	zhu	grain de millet	1,55 g
SURFACE	*mu*	acre	4, 586 47 a
VOLUME	*dan*	setier	94, 88 l
	dou	boisseau	948, 8 l
	sheng	pinte	0, 948 8 l

- **Relations entre les unités.**

LONGUEUR. [2]

1 *zhang* = 10 *chi* = 10^2 *cun* = 10^3 *fen* = 10^4 *li* = 10^5 *hao* = 10^6 *miao* = 10^7 *hu*

1 *li* = 300 *bu* 1 *bu* = 6 *chi*

AIRE.

1 *mu* = 240 *bu* 1 *qing* = 100 *mu*

VOLUME.

1 *dou* = 10 *sheng* 1 *hu* = 10 *dou*

POIDS.

1 *jin* = 16 *liang* 1 *liang* = 24 *zhu*

[1] Valeurs proposées dans l'ouvrage de YABUUTI Kiyosi *(op. cit.)*.

[2] Dans le Jiu Zhang Suan Shu, seules les trois premières unités sont utilisées. Les autres sont utilisées par LIU Hui dans son travail sur π (commentaire du problème 1-32).

ISBN : 2-910076-12-1

Publication de l'Institut de Recherche en Mathématiques de Reims
23, rue Clément Ader
BP 175
51685 Reims Cedex
Tél./Fax : 03 26 77 99 48
irem@univ-reims.fr