Entrée dans l'enseignement supérieur : éclairages en didactique des mathématiques

Ghislaine Gueudet, CREAD, ESPE de Bretagne, France

IREM de Nancy, 3 octobre 2018

Entrée dans l'enseignement supérieur : éclairages en didactique des mathématiques

Contexte et source principale : Enquête du CNESCO sur l'entrée dans l'enseignement supérieur de manière générale (orientation, questions sociologiques, etc.)

Un rapport avec une approche didactique pour les mathématiques (à paraître en 2019, version courte parue en 2018), par Ghislaine Gueudet et Fabrice Vandebrouck

Entrée dans l'enseignement supérieur : éclairages en didactique des mathématiques

Perspective :

Une synthèse de travaux de didactique des mathématiques, en France et à l'international

Travaux souvent centrés sur le début de l'université : les difficultés des étudiants, comment y remédier (moins de travaux sur le secondaire)

Les constats sur les difficultés des élèves et leurs causes ; les propositions de dispositifs de différentes natures ; l'étude de certains thèmes particuliers (nombres réels, fonctions, suites, logique, algèbre linéaire).

Autres références et sources utilisées

Des références synthétiques en anglais

Gueudet, G., & Thomas, M. (2018). The secondary-tertiary transition in mathematics. In Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*.

EMS-Committee of Education (2013). Why is university mathematics difficult for students? Solid findings about the secondary-tertiary transition. *Newsletter of the European Mathematical Society, Issue 90, December 2013,* 46-48, http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2013-12-90.pdf

Une vidéo en français : https://www.lebesgue.fr/fr/video/5min/gueudet

A propos du cas de la France : Mars 2018, une journée organisée par la CFEM. L'enseignement des mathématiques, de l'informatique et de la physique dans la transition lycée-université : continuité ou rupture ?

http://www.cfem.asso.fr/actualites/journees-cfem

Plan

I. Exemples : algèbre linéaire / fonctions
II. Les difficultés rencontrées par les étudiants et leurs causes
III. Les dispositifs pour surmonter ces difficultés

Plan

I. **Exemples : algèbre linéaire / fonctions**

II. Les difficultés rencontrées par les étudiants et leurs causes

III. Les dispositifs pour surmonter ces difficultés

Exemple : l'algèbre linéaire

Un constat international sur les difficultés des étudiants avec ce contenu (qu'il soit ou non enseigné dans le secondaire).

Un éclairage historique (Dorier 1997) :

L'algèbre linéaire a émergé historiquement pour unifier plusieurs domaines : de la résolution d'équations linéaires vers l'élaboration d'une théorie plus générale qui identifie les caractéristiques du linéaire.

Un mouvement vers l'axiomatique ; et la prise en compte de la dimension infinie, problèmes d'analyse fonctionnelle.

L'axiomatique s'impose parce qu'elle permet d'unifier des méthodes.

Exemple : l’algèbre linéaire

Des difficultés liées à l’abstraction, et au fait que l’algèbre linéaire peut difficilement être introduite comme un outil de résolution de problèmes (cf. analyse historique)

Pour les étudiants :

« l’algèbre linéaire n’est qu’un catalogue de notions très abstraites qu’ils n’arrivent pas à se représenter ; de plus ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux.»(Dorier 1997 p.116)

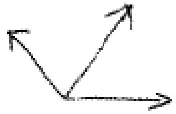
Exemple : l'algèbre linéaire

Autre source de difficultés : nécessité de flexibilité entre différents registres de représentation.

Ecritures algébriques, registre graphique, registre formel, registre des tableaux …

Soient u, v, w, trois vecteurs deux à deux non colinéaires. Peut-on affirmer que la famille {u,v,w} est libre ?

Etudiants utilisant le registre graphique



« oui, la famille est libre »

L'enseignement des matrices en TS spécialité mathématiques

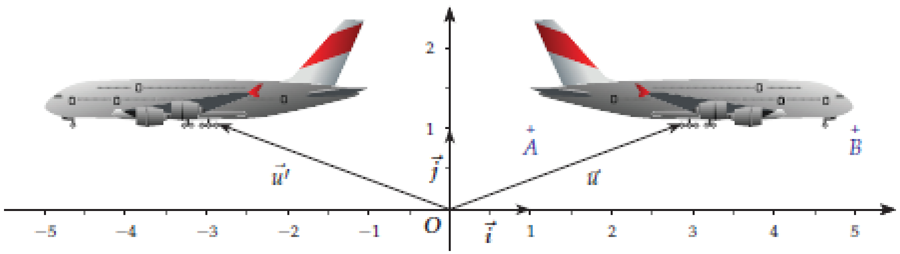
TP 1 Traitement d'image

INFO

A Un peu de réflexions

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser la construction suivante :

- Insérer une image au choix (`Image1` et deux points A et B sont créés).
- Repositionner `Image1` telle que A soit en $(1\,;\,1)$.
- Créer la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Appliquer la matrice M à l'image `Image1` (l'image `Image1'` est créée).



Dans toute la suite, on se place dans un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

2) Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) En déduire que M est la matrice associée à la symétrie d'axe $(O\,;\,\vec{j})$.

3) Déterminer la matrice N associée à la symétrie d'axe $(O\,;\,\vec{i})$. Vérifier avec le logiciel.

4) Déterminer la matrice P associée à la symétrie de centre O. Vérifier avec le logiciel.

5) Exprimer P en fonction de M et N.

L’enseignement des matrices en TS spécialité mathématiques

Exemple : un exercice sur les matrices de symétries

Emploi d’un logiciel de géométrie dynamique, de type « boîte noire »: « appliquer la matrice M à l’image ».

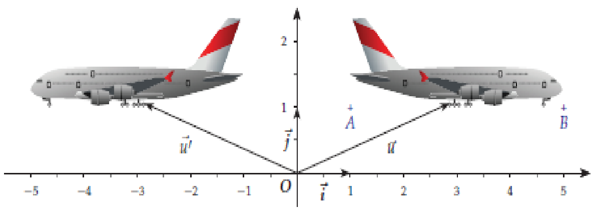
« Déterminer LA matrice associée à la symétrie » : suggère l’existence d’une unique matrice, l’idée de base restant implicite.

Difficile transition avec l’algèbre linéaire…

TP 1 Traitement d’image INFO

A Un peu de réflexions

1) À l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique, réaliser la construction suivante :
- Insérer une image au choix (Image1 et deux points A et B sont créés).
- Repositionner Image1 telle que A soit en $(1\,;\,1)$.
- Créer la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Appliquer la matrice M à l’image Image1 (l’image Image1′ est créée).



Dans toute la suite, on se place dans un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

2) Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b) En déduire que M est la matrice associée à la symétrie d’axe $(O\,;\,\vec{j})$.

3) Déterminer la matrice N associée à la symétrie d’axe $(O\,;\,\vec{i})$. Vérifier avec le logiciel.

4) Déterminer la matrice P associée à la symétrie de centre O. Vérifier avec le logiciel.

5) Exprimer P en fonction de M et N.

Comment surmonter ces difficultés ?

Une situation pour donner du sens à certains concepts élémentaires (Extrait de Dorier, Gueudet, Peltier, Robert, Roditi 2018).

« Combien y a-t-il de carrés magiques d'ordre 3 réels ? »

Une situation à travailler en TD, avec des étudiants au début d'un enseignement d'algèbre linéaire.

Les étudiants doivent avoir rencontré les notions d'espace vectoriel, sous-espace, famille génératrice, base etc.

Recherche par groupes d'exemples de carrés magiques

Mise en commun des exemples

Situation des carrés magiques

Exemples...

Carré de somme 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Carré de somme nulle

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Situation des carrés magiques

Pouvez-vous être sûr de les avoir tous ?

Passage possible par l'ensemble C_0 des carrés de somme nulle.

Idée d'espace vectoriel, de base, de combinaison linéaire (idéalement, émise par certains étudiants)

Etapes, alternant temps de recherche et mise en commun (selon la durée, fin du travail à rédiger hors classe)

Situation des carrés magiques

Montrer que C_0 est un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices 3x3

Montrer que le coefficient central d'un carré de somme nulle vaut 0

En déduire une famille génératrice de C_0 .

On introduit C_1 l'espace engendré par le carré dont tous les élements valent 1.

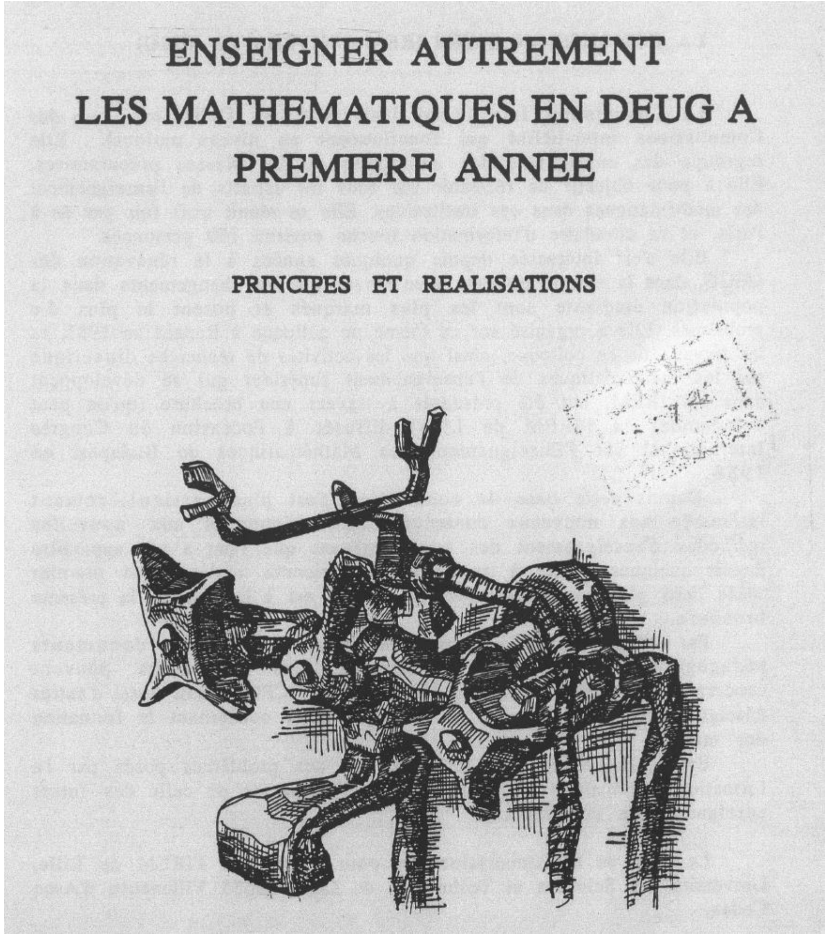
Montrer que C est somme directe de C_0 et C_1 ...

Enseignement expérimental

A plus large échelle, en France

Dans les années 90, un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en DEUG à Lille.

Présenté dans Dorier 1990, et dans la brochure CIIU « Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A », 1990 (avec d'autres enseignements expérimentaux).



Les fonctions

Un contenu très présent au secondaire dès le collège, et au supérieur.

Nécessité aussi de recours (dès le collège) à différents registres de représentation : registre algébrique, tableau de valeurs, registre graphique etc.

Dans le supérieur :

Articulation d'un point de vue local (continuité, dérivabilité en un point, limites…) et d'un point de vue global (ensemble de définition, symétries …).

De l'étude d'une fonction à celle de familles de fonctions, et des exercices théoriques sur des propriétés de fonctions.

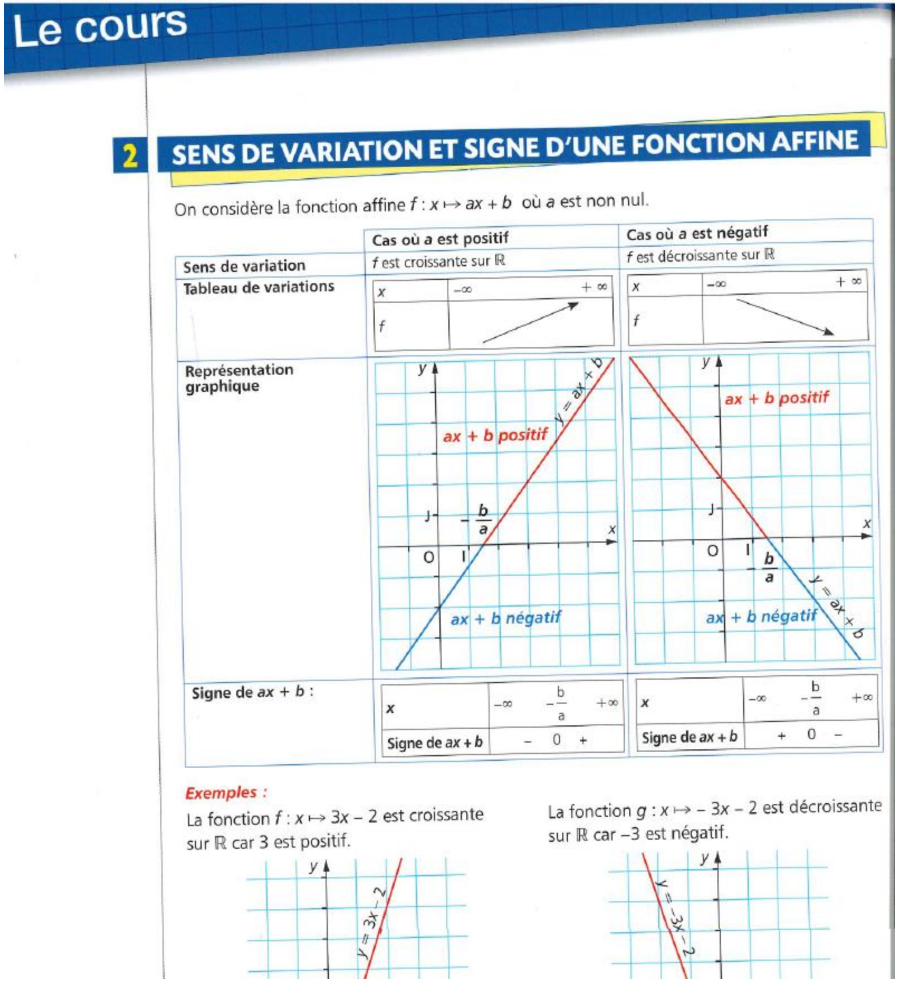
En Seconde

Des propriétés globales évoquées mais peu travaillées :

Domaine de définition, image, parité, périodicité …

Les variations souvent travaillées graphiquement, et peu algébriquement.

Exemple : justification de la variation des fonctions affines rarement pratiquée



Le cours

2 SENS DE VARIATION ET SIGNE D'UNE FONCTION AFFINE

On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ où a est non nul.

	Cas où a est positif	Cas où a est négatif
Sens de variation	f est croissante sur $\mathbb{R}$	f est décroissante sur $\mathbb{R}$
Tableau de variations	x : $-\infty$ … $+\infty$; f : ↗	x : $-\infty$ … $+\infty$; f : ↘
Représentation graphique	$y = ax + b$; $ax + b$ positif ; $-\dfrac{b}{a}$; $ax + b$ négatif ; O, I, J, x, y	$y = ax + b$; $ax + b$ positif ; $-\dfrac{b}{a}$; $ax + b$ négatif ; O, I, J, x, y
Signe de $ax + b$:	x : $-\infty$ $\quad -\dfrac{b}{a}$ $\quad +\infty$; Signe de $ax+b$: $-$ 0 $+$	x : $-\infty$ $\quad -\dfrac{b}{a}$ $\quad +\infty$; Signe de $ax+b$: $+$ 0 $-$

Exemples :

La fonction $f : x \mapsto 3x - 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car 3 est positif.

La fonction $g : x \mapsto -3x - 2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car -3 est négatif.

En Première et Terminale (S et ES)

Introduction en Première d’une perspective locale, mais de façon épisodique :

Nombre dérivé comme limite intuitive ; dérivabilité avant la continuité.

Un travail surtout global et algébrique.

Mais : peu de transformations algébriques pour lever des indéterminations, pour le calcul de limites recours à des règles techniques (« l’exponentielle l’emporte »)

Au baccalauréat série S

Des fonctions dans tous les sujets ; pas d'études de domaine de définition.

Des calculs dans le registre algébrique, mais d'une difficulté limitée :

Calculer des dérivées de fonctions du type exp(kx) ; dans les cas plus délicats la solution est donnée. (cf. sujet TS Antilles Guyane 2018)

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.

Exemple d’un test en début de L1

Exercice. On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = 1 - \dfrac{4}{1-2x}$.

La fonction dérivée de f est $f'(x)$=

Les puissances se codent avec la touche ^. Par exemple x^2 se code x^2.

Entrez votre réponse : (étape 2/3)

Envoyer la réponse

Exercice. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = -2x^3 + m\,x^2 + 2m^2\,x + 7.$$

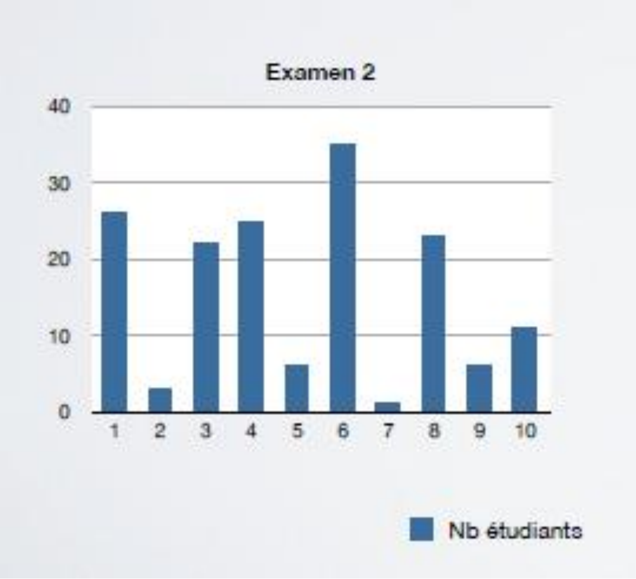
Calculer $f_2(3)$ et le nombre dérivé $f'_3(2)$:

Rennes 1, 2013, M.-P. Lebaud.

Plan licence, test diagnostic avec WIMS

Examen 2 : des exercices sur les fonctions, qui s’écartent des pratiques du lycée

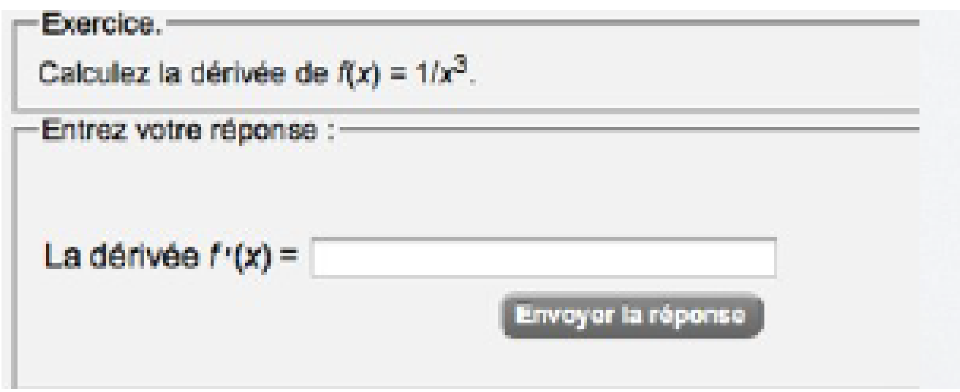
Moyenne 4,56/10

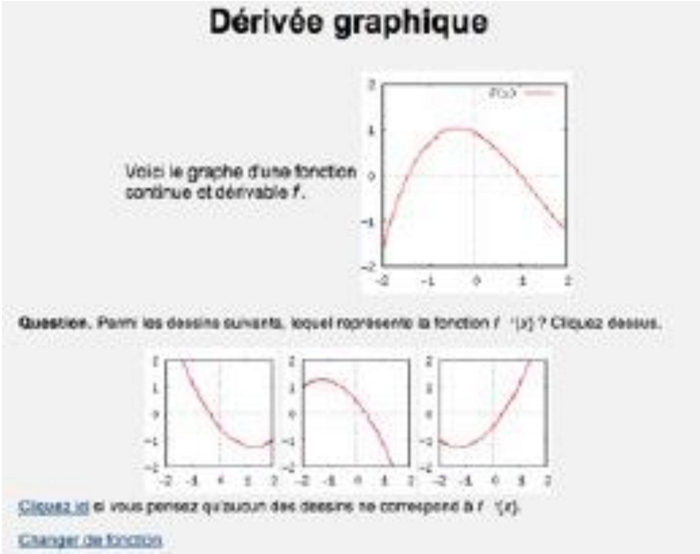


Remédiation avec un travail sur WIMS

En accompagnement d'un enseignement au premier semestre :

- Des exercices WIMS (notamment ceux conçus par un groupe de l'IREM de Rennes) en accès libre. Exercices de calcul, exercices atypiques
- Une classe « contrôle continu » qui donne une des 6 notes de contrôle continu
- Une heure en présence chaque semaine





Plan

I. Exemples

II. Les difficultés rencontrées par les étudiants et leurs causes

   I. Des concepts plus abstraits
   II. La référence aux pratiques des mathématiciens
   III. Les différences institutionnelles
   IV. Institution et pratiques des enseignants
   V. Pratiques des étudiants

III. Les dispositifs pour surmonter ces difficultés

Des concepts plus abstraits

Une explication simple : les étudiants rencontrent des difficultés, parce que ce qu'ils étudient est plus difficile !

Plutôt que une fonction, une famille de fonctions, des ensembles de fonctions…

Perspective psychologique (anglo-saxonne) : Advanced Mathematical Thinking (Tall, 1991).

En France, des analyses de la nature des savoirs à enseigner.

Les notions Formalisatrices, Unificatrices, Généralisatrices et Simplificatrices (FUGS Robert, 1998) engendrent des difficultés spécifiques.

Une référence aux pratiques des mathématiciens

Concernant la résolution de problèmes, le raisonnement, la démonstration…

Les mathématiciens ont un répertoire de situations, de modes de raisonnements, dont les étudiants ne disposent pas.

Le langage mathématique, ses symboles, ses implicites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a-b & b \end{pmatrix}$$

Exemple de Bardini et Pierce 2018 : le symbole – a trois sens différents.

Des cultures institutionnelles différentes

L'institution influence l'activité de ses membres à tous les niveaux : depuis le niveau général du travail personnel, de la manière de travailler son cours, jusqu'à celui de contenus mathématiques particuliers.

Pour des contenus a priori semblables, les approches dans le secondaire et dans le supérieur peuvent être très différentes.

Dans le secondaire, généralement les aspects techniques sont plus travaillés, et pas toujours reliés à une théorie (définitions, théorèmes).

Dans le supérieur la partie théorique prend plus d'importance.

Une tension, au niveau des attentes à l'université

Parfois on observe un écart important entre ce qui est enseigné et ce qui est effectivement évalué (Gueudet & Lebaud 2008).

Exemple, sur la résolution d'équations du second degré dans **C**, sujet d'examen

1) Calculer les racines carrées de 3+4i.

2) Résoudre dans C l'équation $z^2 +3iz-3-i=0$.

Les étudiants orientent plutôt leur travail vers ce qui est évalué…

Le cas particulier des non-spécialistes

Les mathématiques sont enseignées dans de nombreuses filières : en biologie, économie, pour de futurs ingénieurs.

Des études dans différents pays identifient les mathématiques comme la première cause d'abandon en première année dans ces filières (en Allemagne Heublein, 2014, au Danemark, Søgaard Larsen, 2013)

Les mathématiques enseignées dans les cours de mathématiques sont très peu réinvesties dans les cours des autres disciplines.

Le curriculum mathématique n'est pas toujours adapté aux besoins des professions visées.

L’institution et les pratiques des enseignants du supérieur

Une accélération du « temps didactique » : beaucoup de contenus nouveaux en peu de temps.

En France, fonctionnement avec polycopié et feuilles d’exercices : une grande stabilité des contenus, en dépit parfois de changements de programme importants dans le secondaire.

Un usage des technologies limité à certains enseignements spécifiques à l’université, alors qu’il est très développé au lycée…

A propos des pratiques des enseignants du supérieur

Une sur-estimation des connaissances des étudiants.

Déficit dans les compétences numériques et algébriques des étudiants, qui ne sont pas toujours prises en compte (ex., un exercice de développements limités)

2) $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)}$

$= \left(x - \dfrac{x^3}{3!}\right)\left(1 - \dfrac{2!}{x^2} + \dfrac{4!}{x^4}\right)$

A propos des pratiques des étudiants

Des difficultés dans la prise de notes (Lew et al. 2016).

Le professeur expose oralement certains aspects qu'il considère très importants.

La plupart des étudiants ne les prennent pas en note, et ne les citent pas si on leur demande ce qui était important.

Les enseignants considèrent les démonstrations comme des supports pour apprendre des démarches. Mais souvent les étudiants ne travaillent pas les démonstrations du cours.

Des difficultés à solliciter le professeur, qui peut sembler difficilement accessible ; plus de travail en groupe avec d'autres étudiants (mais pas toujours de lieu possible).

Plan

I. Exemples

II. Les difficultés rencontrées par les étudiants et leurs causes

III. Les dispositifs pour surmonter ces difficultés

  I. Faire découvrir l'université aux élèves de lycée
  II. Dispositifs d'aide aux étudiants
  III. Enseignements expérimentaux
  IV. Formation des enseignants du supérieur

Les dispositifs/actions pour surmonter ces difficultés

La recherche des causes des difficultés des étudiants amène à formuler des propositions pour l'enseignement (souvent à l'université).

Depuis une petite expérience sur quelques heures à tout un cursus modifié (aucune expérience à large échelle en France actuellement…)

Pour des références récentes en France, voir les présentations faites à la journée organisée par la CFEM

http://www.cfem.asso.fr/actualites/journees-cfem

Faire découvrir l'université aux élèves de lycée

En France, exemple des stages mathC2+ organisés par l'association Animath

A Rennes, en 2018, accueil de 56 élèves de seconde à l'ENS de Rennes sur 3 jours. Activités :
- défis mathématiques (jeux pour faire connaissance)
- travaux de groupes sur un sujet de type « recherche », en mathématiques ou informatique
- visite de l'ENS Rennes (salle de réalité virtuelle, imprimantes 3D…)
- temps de réflexion sur la place des mathématiques dans la société
- rencontre avec des professionnels…

Des dispositifs d’aide à l’université

Au Royaume-Uni, les Mathematics Support Centers: des lieux où les étudiants vont travailler, sur la base du volontariat (Lawson & Croft, 2018).

Des tuteurs peuvent les aider, ils ont accès à des ressources.

En Belgique, « l’opération tremplin » à Namur. Des plages d’emploi du temps réservés pour des compléments / remédiation demandés par les étudiants, via un délégué (de Vleeschouwer, 2008)

En France, vers des L0 ???

Des enseignements expérimentaux

Enseignements de type « résolution de problèmes » ou « démarche d'investigation » dans de nombreux pays

Exemple en Finlande :

Les étudiants reçoivent en premier lieu des problèmes à résoudre (entre 15 et 20 problèmes par semaine), avec des apports mathématiques sous forme de documents écrits. Chaque semaine, 2 à 3 heures de cours magistral, mais 20h de « drop-in sessions », c'est-à-dire que les enseignants assurent une permanence de tutorat dans une salle. Le travail écrit des étudiants est relevé et corrigé chaque semaine pour un ou deux des problèmes.

But : impliquer activement les étudiants

Des enseignements expérimentaux

- Parcours d'Etude et de Recherche
- A partir d'une « question génératrice »
- Exemple : « Comment améliorer la répartition des vélos, dans le système *Bicing* à Barcelone ? » (Barquero 2018)
- Les étudiants effectuent des recherches sur Internet, des recherches mathématiques, ils proposent des sous-questions.
- L'enseignant fait le tri des sous-questions, et les apports mathématiques nécessaires (5 semaines, 2 fois 2h par semaine).

Des expériences avec des ressources numériques

Emploi de WIMS (cadre du « plan licence », Lebaud 2010)

Des exercices en ligne qui permettent de faire un diagnostic en début d'année, et de proposer des compléments à certains étudiants.

Un MOOC sur la plate-forme France Université Numérique : « préparation à l'enseignement supérieur »

Dans d'autres pays : expériences de « bridging courses » en ligne, de classes inversées (pas d'impact clairement identifié)

Formation des enseignants du supérieur

Pour que les institutions différentes se connaissent mieux

A Bordeaux, échanges lycée / université.

Dans de nombreux pays, pas de formation, ou une formation pédagogique générale (comment utiliser le numérique dans son enseignement etc.) ?

En Norvège, centre MatRIC, propose des formations pour les enseignants de mathématiques de l'université, sous forme d'ateliers qui permettent l'étude des questions professionnelles qu'ils se posent.

Conclusions

La transition secondaire-supérieur, un problème ancien…

Des évolutions récentes :

Une généralisation de l'enseignement des mathématiques pour les non-spécialistes, qui nécessite des travaux spécifiques (projet DEMIPS).

Plus de dispositifs expérimentaux à large échelle.

Une perspective de formation des enseignants du supérieur. Est-il possible de dépasser la formation pédagogique, quel appui sur les recherches en didactique?