



# Séminaires des IREM du Grand-Est 2018

## Enseigner les mathématiques à l'Université

*Diffusion des résultats de recherche en didactique des mathématiques dans l'enseignement supérieur*  
*Un défi à relever.*

Viviane Durand-Guerrier  
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,  
CNRS, Université de Montpellier



Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck,  
IMAG 5149 UMR CNRS – Université de Montpellier



# *Introduction*

Des travaux de recherche sur l'enseignement supérieur se développent dès la fin des années soixante-dix, en lien avec le développement des IREM, et parfois des demandes institutionnelles (par exemple à Lyon).

Ils sont à cette époque le plus souvent conduits par des chercheurs ayant une thèse en mathématiques fondamentales ou parfois en logique, et exerçant le plus souvent dans les UFR de mathématiques. Parfois ils/elles continuent à conduire des recherches dans leur domaine initial, mais ce n'est pas toujours le cas.

Avec la mise en place des IUFM puis des ESPE, les recrutements en didactique des mathématiques vont se faire prioritairement dans ces nouvelles institutions, pour lesquelles les besoins de formation concernent l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire. Il devient alors plus difficile de conduire des recherches sur l'enseignement supérieur, et lorsque c'est le cas, les travaux sur la transition lycée-Université sont en général privilégiés.

Des travaux de recherche sur l'enseignement supérieur se développent dès la fin des années soixante-dix, en lien avec le développement des IREM, et parfois des demandes institutionnelles (par exemple à Lyon).

Ils sont à cette époque le plus souvent conduits par des chercheurs ayant une thèse en mathématiques fondamentales ou parfois en logique, et exerçant le plus souvent dans les UFR de mathématiques. Parfois ils/elles continuent à conduire des recherches dans leur domaine initial, mais ce n'est pas toujours le cas.

Il reste aujourd'hui quelques enseignants-chercheurs en didactique des mathématiques en poste dans les UFR/département de mathématiques, mais ils sont peu nombreux:

1 PU (Fabrice Vandebrouck) et 2 MCF (Laurent Vivier et Zoé Mesnil) à Paris Diderot

1 MC à Lyon (Véronique Battie)

1 PU (Viviane Durand-Guerrier) et trois MC à Montpellier (Thomas Hausberger, Simon Modeste et Nicolas Saby).

A Grenoble, il n'y a plus d'enseignant-chercheur en Didactique des Mathématiques dans l'UFR de Mathématiques.

Ceci rend plus difficile à la fois le développement de travaux de recherche sur l'enseignement supérieur, mais aussi la diffusion des résultats de ces travaux.

Les travaux sur l'enseignement supérieur n'ont jamais été interrompus, mais ils sont souvent aujourd'hui le fait de chercheurs relativement isolés, qui peuvent rencontrer des difficultés à partager leurs préoccupations de recherche au sein de leurs équipes de recherche.

Ceci nous a conduit à mettre en place un réseau national de recherche sur l'enseignement supérieur, avec la demande de création d'un GDR CNRS (la demande est en cours pour 2020).

*Un effort de mise en réseau  
des recherches sur l'enseignement supérieur  
en France, en Europe et dans le monde*

# DEMIPS

## Didactique et Epistémologie des Mathématiques et liens Informatique et Physique dans le Supérieur

Un réseau national pour fédérer les recherches en didactique des mathématiques sur l'enseignement supérieur et sur la transition secondaire/supérieur, lutter contre l'isolement de certains chercheurs, soutenir les jeunes chercheurs et favoriser la diffusion des travaux de recherche.

Un soutien du CNRS (INSMI) de 7000 euros dans le cadre de la demande de moyen de l'IMAG UMR CNRS UM 5149 pour une action spéciale en 2017, renouvelée en 2018 : *Animation de la recherche en didactique des mathématiques de l'enseignement supérieur au niveau national et relations avec l'international.*



L'objectif est de renforcer le réseau DEMIPS afin de déposer une demande de GDR en janvier 2019.

Organisation des 3 journées d'études Montpellier, printemps 2017, Paris Novembre 2017, Montpellier Juin 2018 : conférences invitées, tables rondes, présentation des travaux de jeunes chercheurs.

En novembre 2017, une table ronde « *Recherche en didactique et la formation des enseignants du supérieur* »

# DEMIPS

*Un réseau qui regroupe actuellement 11 laboratoires*

- IMAG, UMR 5149 (CNRS - Université de Montpellier)
- LIRDEF, EA 3749 (Université de Montpellier)
- LDAR, EA4434 (Université Paris Diderot et Université de Rouen)
- S2HEP, EA4148 (Université Lyon 1)
- IF, UMR 5582 (CNRS - Université Grenoble-Alpes)
- LML, EA 2462 (Université d'Artois)
- CREAD, EA 3875 (Université de Bretagne Occidentale)
- LIM, EA2525 (Université de la Réunion)
- CEREP, EA 4692 (Université de Reims)
- Lab-E3D (Université de Bordeaux)
- LMAP, UMR 5142 (CNRS-Université de Pau et des Pays de l'Adour)

# Cinq groupes de travail

- ***GT1 - Enseignement et apprentissage de l'Analyse à la transition secondaire – supérieur et dans le supérieur – relations avec l'enseignement de la Physique***

Responsables: Patrick Gibel et Fabrice Vandebrouck

- ***GT2 - Enseignement et apprentissage de l'algèbre linéaire et de l'algèbre abstraite, relations avec l'enseignement de la physique et de l'informatique***

Responsables : Thomas Hausberger et Philippe Lautesse

- ***GT3 - : Enseignement de l'Arithmétique, des Mathématiques discrètes et de l'Algorithmique – relations avec l'Informatique*** - Responsables :  
Responsables Antoine Meyer et Simon Modeste

- ***GT4 - Logique, langage, raisonnement, preuves, et apprentissages mathématiques et informatique***

Responsables Virginie Deloustal-Jorrand et Zoé Mesnil

- ***GT5- Etude des pratiques des enseignants du supérieur en Mathématiques et Physique***

Responsable Hussein Sabra et Cécile De Hosson

Un réseau national inscrit dans la dynamique du réseau **INDRUM**  
**International Network for Didactic Research in University**  
**Mathematics**

<https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM>

Principaux objectifs

- elaboration of a scientific program in order to federate existing research in this field in Europe and in the world;
- development and emergence of international collaborations by applying to project calls at all levels (local, regional, European, international);
- reinforcement of the visibility of these research towards researchers in mathematics education and towards the mathematicians community;
- contribution to the development of doctoral programmes in this field.

Le réseau INDRUM a été initié par un groupe d'enseignants chercheurs internationaux en didactique des mathématiques : *Allemagne, Belgique, Canada, Danemark, Espagne, France, Italie, Mexique, Norvège, Royaume Uni, Tunisie, Etats Unis*, en lien avec les groupes de travail sur l'enseignement supérieurs des congrès CERME de l'association ERME, des colloques Espaces Mathématiques Francophones et des congrès ICME.

1<sup>ère</sup> conférence INDRUM à Montpellier du 31 mars au 2 avril 2016 .

2<sup>ème</sup> conférence INDRUM a Kristiansand (Norvège) du 5 au 7 avril 2018.

Troisième conférence prévue en mars 2020 à Bizerte (Tunisie).

Michèle Artigue a donné la conférence d'ouverture d'ouverture à INDRUM 2016: « *Mathematics Education Research at University Level: Achievements and Challenges* » (en ligne sur HAL.)

Elle y souligne les difficultés liés à la diffusion des résultats de la recherche.

The last weakness I would like to mention is the insufficient dissemination of Research results towards the relevant communities or practitioners, and the very limited influence of our research on university teaching practices. Reading recent publications, for instance the three first issues of the new International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, I find nearly the same description of standard university practices at undergraduate level as decades ago. Of course, such difficulties are not specific to the field of university mathematics education, but one could expect that, being themselves researchers, university teachers would be more open to considering research advances and what these can offer them to better understand their students and to improve their teaching practices.

Unfortunately, this does not seem to be the case in general, for many reasons which range from the low institutional value attached to teaching activities, in comparison to research activities at university, to the image of the didactic discipline itself in the mathematics community, in most countries.

However, we have to acknowledge also that making sense of research results in mathematics education, converting them into something useful in practice, is not an easy task. [...]

but this experience [working on networking theories] reinforced my conviction that to overcome the current limitations, we must not think in terms of dissemination of research results, but in terms of collaborative projects, building and negotiating, jointly with mathematicians and other university teachers, problématiques that make sense for all those involved, and meet their respective interests and needs. (Artigue, 1996, p.21)

*Des niches  
pour favoriser  
la diffusion des résultats de la recherche*



La mise en place des CIES pour la formation des moniteurs a été pendant de nombreuses années une niche possible de diffusion des résultats de la recherche en didactique des mathématiques. Les Enseignants chercheurs en didactique des mathématiques travaillant sur l'enseignement supérieur étaient parfois sollicités au delà de leur région d'exercice, car il n'y avait pas toujours localement les forces pour cela (c'est le cas par exemple de Marc Legrand et Denise Grenier)

La « disparition » des CIES en tant que tels et leur remplacement par des formations proposées par les collèges doctoraux a permis dans certains cas de conserver les formations existantes (par exemple à Paris), mais les a affaiblies voire les a fait disparaître dans de nombreuses régions, car seuls les regroupements régionaux permettaient leur viabilité en terme d'effectif.

Aujourd'hui, à l'heure où l'institution préconise la formation des futurs enseignants-chercheurs, il paraît nécessaire d'inclure dans ces formations les dimensions didactiques qui mettent au cœur de la formation les questions liées à la discipline elle-même, et pas seulement les aspects relevant de la pédagogie universitaire, qui sont certes pertinents mais insuffisants pour nourrir les évolutions nécessaires.

Cet enjeu doit être porté conjointement par les chercheurs en didactique des mathématiques de l'enseignement supérieur, les enseignants de mathématiques dans les UFR de mathématiques, mais aussi dans les IUT, les écoles d'ingénieurs, les classes préparatoires, et les IREM qui sont par excellence un lieu de diffusion des recherches en didactique des mathématiques.

La CFEM qui rassemble toutes les sociétés savantes concernées par l'enseignement des mathématiques a également un rôle à jouer.

## *Des niches pour favoriser la diffusion des résultats de la recherche au niveau local*

- Groupes IREM Liaison Lycée/Université présents dans plusieurs IREM.
- Formation associant enseignants du secondaire et enseignants du supérieur pour travailler les questions de transition
- Module à destination des doctorants (exemple à Montpellier)

Module Doctoral EMU

Enseigner les **M**athématiques en début  
d'**U**niversité

ED I2S - Montpellier

A l'automne 2015, une demande des doctorants du laboratoire IMAG ayant une mission d'enseignement dans le département de mathématiques adressée à l'équipe DEMa d'organiser un module doctoral.

Mise en place bénévolement du module en février 2016 car demande hors délai.

12h de formation massée + 2h de bilan.

## Principales motivations pour cette demande

Absence totale de formation à l'enseignement

Pas de préparation pour faire face aux difficultés mathématiques des étudiants.

Des résultats très décevants aux contrôles malgré un investissement important.

Un public souvent peu engagé dans les apprentissages.

Un absentéisme important des étudiants.

# **Une réponse en appui sur les travaux de recherche de l'équipe DEMa et sur les travaux au sein du groupe GLU de l'IREM de Montpellier**

Des réflexions conduites au sein de l'IREM de Montpellier dans un groupe Liaison Lycée Université depuis 2009.

Malgré la demande tardive, trois membres du groupe GLU ont mis en place un module : « Enseigner les mathématiques en licence ».

12h en janvier 2016 – Une séance de bilan a eu lieu début février.

10 doctorants ont participé aux séances

## Déroulement

**Séance 1** – Atelier *Utiliser les erreurs des étudiants comme leviers pour les apprentissages* en appui sur des travaux d'étudiants

**Séance 2** – Synthèse sur l'atelier, et retour sur la question des relations entre erreurs et apprentissages à partir d'un exemple. Compléments didactiques.

**Séance 3** – A partir de diverses activités, sensibilisation aux difficultés logiques rencontrées par les étudiants – mise en évidence d'implicites non partagés.



***Séance 4 – Atelier*** - Analyse et évaluation de preuves produites par des étudiants de première année. Discussion en petits groupes sur la validité, la recevabilité et les critères utilisés. Mise en évidence de l'intérêt d'un travail en commun pour harmoniser les critères d'évaluation

***Séances 5 et 6*** – Quelques pistes pour favoriser l'engagement des étudiants dans les activités proposées en TD.

# Une évaluation organisée à l'issue du module

*(6 réponses écrites)*

- *Adaptation des contenus* : Tout à fait : 5 – Assez : 1
- *Adaptation de la durée* : tout à fait : 3 – Trop court : 3
- *Adaptation de la forme des séances* (Ateliers, travaux de groupes, discussion collectives) : Tout à fait : 5 – Assez : 1
- *Apport d'éléments de réflexion* en lien avec votre situation : OUI : 6

- *Principaux apports* : La réflexion sur l'erreur : 6 (*outre que c'est le premier thème traité, la question du traitement de l'erreur comme levier pour les apprentissages a été travaillée dans la plupart des séances*).
- *Appréciation de l'entrée dans les questions d'enseignement par les contenus et les difficultés spécifiques à l'enseignement des mathématiques* : Tout à fait : 5
- *Recommanderiez-vous ce module à un autre doctorant enseignant les mathématiques en licence* : OUI : 6

En février 2017, ouverture d'un module doctoral de 20 heures au sein du collège doctoral Languedoc Roussillon - 10 participants, reconduit en février 2018.

Nous avons reproposé le module pour 2019 et envisageons de l'ouvrir aux nouveaux EC en mathématiques ou aux nouveaux enseignants chercheurs d'autres domaines ayant à enseigner les mathématiques.

*Des niches pour favoriser  
la diffusion des résultats de la recherche  
au niveau National*

## La CIU, commission Inter Irem Université

« La commission Inter-IREM Université regroupe une dizaine de personnes, enseignants de lycées et universitaires. Les participants sont des enseignants ou enseignants-chercheurs de mathématiques qui essayent d'investir leurs diverses compétences au niveau de l'enseignement. Ces compétences vont de la pratique du terrain jusqu'à la recherche en mathématiques ou en didactique. Il s'agit d'une des grandes richesses de cette commission que de pouvoir se faire rencontrer des collègues de ces horizons divers » (présentation de la commission sur le portail des IREM).

## La CIU, commission Inter Irem Université

Une publication très largement diffusé en 1990 : *Enseigner les mathématiques en DEUG Autrement*. Cette brochure est en cours de numérisation.

Des interventions régulières dans les groupes de travail sur l'enseignement supérieur des congrès ICME et des congrès EMF pour présenter à un public large les travaux en cours.

Un colloque en mai 2013 autour des nouveaux programmes de mathématiques et de Physique (mis en place en 2009) et publication des actes du colloque.

Une brochure autour du concept de limites (suites, fonctions) publiée en 2017, rendant compte d'un travail au long cours.

Une contribution au dispositif <https://www.faq2sciences.fr>

Plus d'informations sont disponibles sur le portail des IREM

## Des actions en cours d'élaboration en appui sur DEMIPS

Un groupe de travail sur *la formation des enseignants du supérieur* adossé au réseau DEMIPS pour mutualiser ce qui se fait dans les différentes universités et réfléchir collectivement au développement d'action de formation. Ce projet est porté par Hussein Sabra et Véronique Battie

Projet d'une journée de formation en DDM couplée à la journée biannuelle d'accueil des nouveaux EC organisée par la SMF et la SMAI – la proposition a été soumise à la commission enseignement de la SMF par Cécile Ouvrier-Bufferet, membre de cette commission.

Il s'agira de proposer des ateliers d'initiation à l'enseignement supérieur s'appuyant sur les résultats des recherches et sur les expériences conduites dans les universités impliquées dans le réseau.



## Des actions en cours d'élaboration en appui sur DEMIPS

Projet de création d'une épi revue d'interface DEMES (Didactique et Epistémologie des mathématiques pour l'Enseignement supérieur)(classification AMS 97-XX Mathematics Education) avec pour objet d'étude les mathématiques de l'enseignement supérieur et les phénomènes liés à leur enseignement-apprentissage. Le projet est porté par Thomas Hausberger.

La revue EpiDEMES vise la constitution d'une base documentaire pour la formation initiale et continue des enseignants du supérieur.

Les articles publiés seront rédigés en français ou en anglais.

Le choix de publier via la plateforme Episciences vise à favoriser la visibilité et la diffusion des travaux à la communauté des enseignants de mathématiques du supérieur.

*Un exemple de recherche en cours*  
*Questions pour la formation*  
*Faut-il enseigner la complétude ?*

Des recherches sont en cours depuis plusieurs années sur le concept de complétude et donnent lieu à des collaborations internationales (France- Canada – Chili – Tunisie - Italie)

*Des constats partagés*

Les étudiants arrivant à l'université ont des connaissances très peu assurées sur les nombres, en particulier sur les nombres réels.

Ils ne sont pas préparés à comprendre ce que signifie le fait d'être un corps ordonné complet pour l'ensemble des nombres réels.

A l'issue des premiers cours d'analyse, le concept de borne supérieure est peu maîtrisé et sa pertinence pour conduire certaines preuves en analyse n'est pas reconnue par les étudiants.

La notion d'expansion décimale illimitée reste vague pour de nombreux étudiants en début d'université, en lien avec la distinction infini potentiel/infini actuel

Il faut noter que ceci reste vrai pour un certain nombre d'étudiants titulaires d'une licence de mathématiques préparant le CAPES de mathématiques.

*Une hypothèse de recherche* : comprendre le concept de complétude est nécessaire pour une appropriation adéquate des principaux concepts et théorème de l'analyse. Ceci nécessite d'avoir identifié que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{D}$  sont des ensembles incomplets du point de vue de l'ordre (autrement dit ne sont pas des ensembles continus).

Une question de recherche – quelles activités peut-on proposer en début d'université pour permettre aux étudiants de comprendre que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{D}$ , bien que denses en eux-mêmes ne sont pas complets du point de vue de l'ordre (autrement dit ne sont pas des ensembles continus).

Un premier travail – identifier des problèmes susceptibles de permettre de mettre en débat ces questions avec les étudiants. Une étude épistémologique orientée vers le théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano, Cauchy), ou le théorème de convergence pour les suites ou les fonctions monotones bornées (Dedekind), ou des suites de Cauchy de rationnels.

On peut aussi penser à des problèmes de points fixes pour des fonctions monotones.

## Un problème de point fixe pour travailler sur l'incomplétude de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ .

On considère une application  $f$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ , où  $n$  est un naturel non nul. On suppose  $f$  croissante ; montrer qu'il existe un entier  $k$  tel que  $f(k) = k$  ;  $k$  est appelé point fixe.

Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec  $f$  croissante:

- $f: \mathbb{D} \cap [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \cap [0, 1]$   $\mathbb{D}$  est l'ensemble des décimaux
- $f: \mathbb{Q} \cap [0, 1] \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$   $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des rationnels
- $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

ou tout autre généralisation

Le travail d'élèves de 1<sup>er</sup> S dans le cadre de Maths en Jeans est analysé dans Pontille et al. (1996). Celui d'étudiants préparant le CAPES dans Durand-Guerrier (2008)

Il faut ensuite envisager une organisation didactique de l'activité des étudiants permettant de réaliser le potentiel des problèmes identifiés (autrement dit passer des situations mathématiques aux situations didactiques) en appui sur une analyse a priori mathématique. On peut être amené dans le cadre de l'analyse a priori à replacer le problème dans un cadre plus général (par exemple la théorie des treillis si on s'intéresse à la borne supérieure).

Dans le cadre de la recherche, on peut tester la situation en contexte « laboratoire » (étudiants volontaires hors classe), ou en contexte « expérimental » (cours avec un ou plusieurs enseignants volontaires et un chercheur observateur)

Une fois ceci stabilisé, se pose la question *délicate* de ce qui peut être implémenté dans le cadre de l'enseignement ordinaire.

Des exemples de questions qui peuvent se poser

Est-ce que l'hypothèse de recherche sur la nécessité de conduire un travail dans  $Q$  afin de faire émerger son incomplétude du point de vue de l'ordre est partagé par les membres de l'équipe pédagogique ? Une réponse positive semble être une condition minimale pour une possible implémentation.

Si oui, est-ce que la ou les versions de la complétude qui ont été retenues par les chercheurs sont en adéquation avec le point de vue habituellement développé dans le cours ou non (par exemple si le choix habituel est de donner l'axiome de la borne supérieure pour la complétude, mais que la proposition des chercheurs tend à favoriser l'introduction de la propriété des suites adjacentes pour caractériser la complétude) et est-ce que cela est considéré comme un point fort ou non (dans les deux cas).



Si le principe d'envisager une implémentation est acté, il est nécessaire de retravailler les séquences élaborées dans le cadre de la recherche, avec les enseignants concernés, tout en veillant à préserver les enjeux d'apprentissage (ici  $Q$  est un ensemble dense en lui même, non continu du point de vue de l'ordre, dans lequel un certain nombre de théorèmes d'existence ne peuvent pas être prouvés, du fait de cette incomplétude).

La question de l'évaluation des effets des activités proposées sur le processus de conceptualisation en analyse est également une question délicate, et nécessiterait de travailler dans la durée sur des cohortes d'étudiants.

*Conclusion*

Il y a aujourd'hui des nouvelles dynamiques nationales et internationales dans les recherches en didactique des mathématiques du supérieur. Un enjeu fort est celui de l'impact des résultats de ces recherches sur les pratiques effectives des enseignants du supérieur pour faire face à deux défis:

- Les taux d'échecs des étudiants dans les cours de mathématiques en particulier dans les premiers cycles, et ce quelques soient les filières.
- Les difficultés en mathématiques des futurs professeurs de mathématiques, en particulier la très grande difficulté à faire les liens entre les mathématiques enseignées dans le secondaire et les mathématiques étudiées à l'université.

Ces défis ne peuvent être relevé que dans le cadre de collaboration entre les différents acteurs. Les IREM ont un rôle central à jouer dans ce processus.

Merci pour votre attention

[viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr](mailto:viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr)