SUR LES EMPILEMENTS INFINIS DE RADICAUX DE RAMANUJAN À CARNOT

PIERRE LECOMTE

Une idée naturelle pour calculer un empilement infini de radicaux

$$e = \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{\cdots}}}}$$

où les a_i et les b_j sont des nombres réels positifs, est de considérer une suite u d'approximations

$$c_0, \sqrt{a_0 + b_0 c_1}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1 c_2}}, \ldots$$

où les c_k sont des nombres réels, puis de poser

$$e = \lim u$$

Cependant, il faut s'attendre à ce que les suites d'approximations convergentes d'un empilement e ne convergent pas toutes vers a même limite. Et de fait, nous montrons que l'ensemble des limites de ces suites est un intervalle de la forme $[\gamma_0, +\infty]$, où γ_0 est la limite de la suite d'approximations obtenue en annulant tous les nombres c_k. *Fort de ceci, nous convenons de poser $e = \gamma_0$.*

Une formule de Carnot permet de montrer que

$$\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \cos x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Avec $x = \frac{\pi}{2}$, cela donne

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots}}}} = 2$$

On démontre qu'il existe une suite de nombres réels $k \mapsto p_k$ qui décroit strictement vers 1 et, pour chaque k, des fonctions analytiques f définies sur $\mathbf{R}$ tout entier vérifiant

$$f(x)^2 = \frac{1}{p_k}(1 + f(p_k))$$

Ces fonctions donnent les approximations

$$p_k f(\frac{x}{p_k^n}) = \underbrace{\sqrt{p_k + \sqrt{p_k + \cdots + \sqrt{p_k + f(x)}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

de l'empilement

$$\sqrt{p_k + \sqrt{p_k + \sqrt{p_k + \sqrt{\cdots}}}}$$

Elles sont très étonnantes et ne semblent pas être connues. Elles se répartissent en deux suites qui convergent uniformément sur tout compact vers la fonction constante dont la valeur est le nombre d'or !