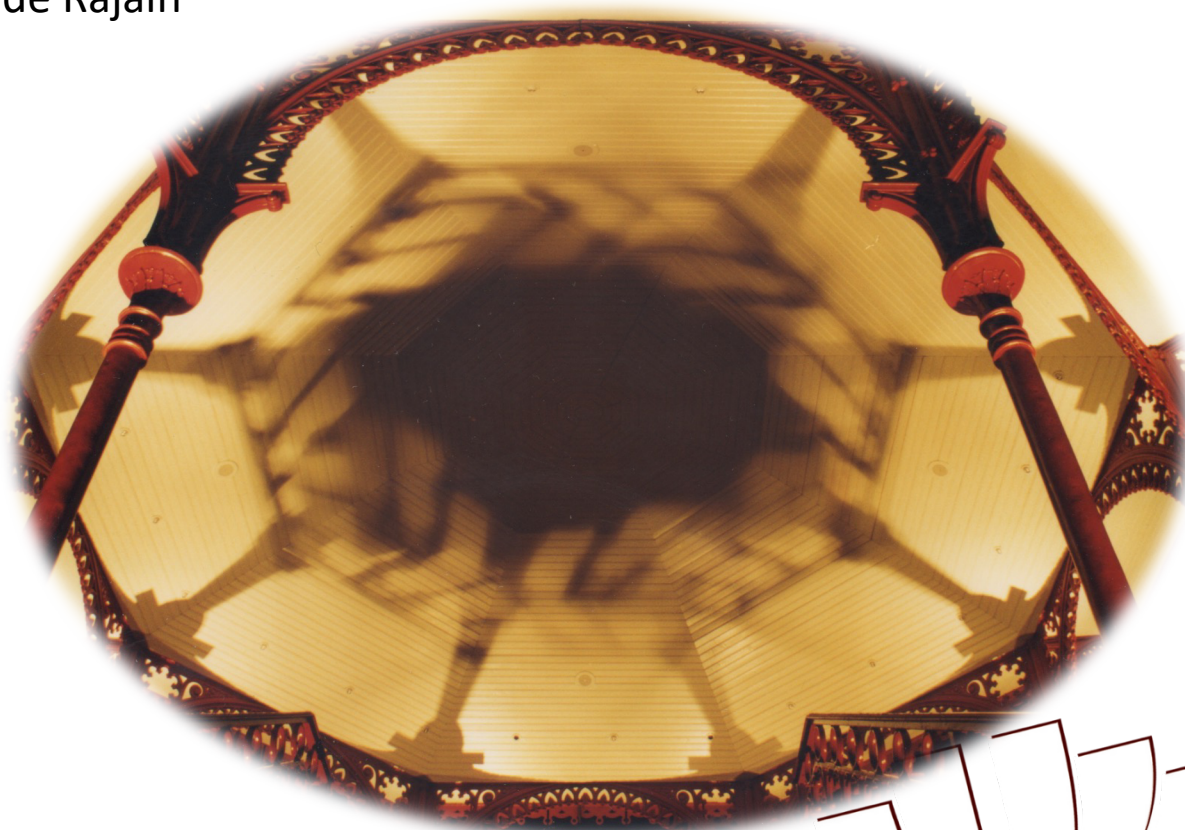


Les ensembles quarrables, la notion d'aire et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$

Claude Rajain



IREM de Reims, 23 rue Clément ADER, 51100 Reims
Achévé le 17 octobre 2024
ISBN : 9782910076184
Impression sur demande
Dépôt légal octobre 2024

Pourquoi cette brochure ?

L'IREM de Reims offre la possibilité aux collègues enseignants, formateurs ou chercheurs de partager, avec la communauté, leur réflexion, leurs travaux ou les résultats de leurs recherches. Pour cela, des groupes de travail peuvent être créés au sein de l'IREM.

Dans le cas présent, il s'agit du travail d'un collègue se plaçant dans la tradition de publication de l'IREM de Reims qui propose, depuis les années 80, des réflexions mathématiques comme à l'occasion des ouvrages « miscellanées » du groupe histoire des mathématiques (disponibles en ligne sur le site de l'IREM de Reims). En partant de textes et d'auteurs anciens, il s'agit de requestionner, avec les mathématiques actuelles, les travaux historiques. De la même façon, Arnaud Gazagnes, dans la brochure sur les abaques, dévoile les mathématiques derrière cet outil.

Ainsi dans cette brochure, Claude Rajain formateur à l'École Normale, puis à l'IUFM et l'ESPE, membre de l'Équipe de Recherche ERMEL, maintenant à la retraite, revient sur les travaux d'Henri Lebesgue en relation avec la notion d'aire. C'est en relisant les travaux de Lebesgue qu'il a remarqué que certaines démonstrations passaient très vite sur certains aspects qui méritaient donc d'être questionnés.

C'est autour du concept d'ensemble quarrable, c'est-à-dire d'ensembles qui peuvent littéralement être transformés de manière à obtenir une surface équivalente à celle d'un carré, que s'articule cette brochure.

Même si les ensembles quarrables n'apparaissent plus dans les programmes d'enseignement du supérieur, nous espérons que ces réflexions, ancrées dans l'approche historique de Lebesgue, pourront vous intéresser.

Je tiens à remercier les deux collègues mathématiciens qui ont accepté la relecture en double aveugle de cette publication.

Bonne lecture

Fabien EMPRIN

Directeur de l'IREM de Reims



Table des matières

Première partie : les domaines quarrables et la notion d'aire.	1
I-Préliminaires	1
I-1 : Inventaires didactiques :	1
I-2 : Préambule théorique :	2
II- Quadrillage et pavés dans le plan.	3
II-1 Définitions.....	4
II-2 : Parties quarrables du plan.	5
III- Les propriétés fondamentales	8
III-1 : la soustraction et la réunion ensemblistes.	8
III-2 : Lien entre domaine et frontière :	11
IV- Des domaines, des surfaces et des Aires.	15
IV-1 : Rectangles, points, segments et polygones.....	15
IV-2 : Déplacements() d'un domaine ou surface.	21
IV-3 : Résultats généraux : isométries et homothéties	24
IV-4 : Où l'on retrouve deux surfaces « bien connues » :	26
IV-5 L'invariance de l'application Aire :	29
Deuxième partie : Relation entre l'Aire et la mesure de Lebesgue.....	34
I- Préambule :	34
II- les définitions et propriétés fondamentales (admises).....	34
III - Les liens avec les ensembles « quarrables ».	36
Annexe n°1 :	41
Annexe n°2 :	41
Annexe n°3 :	42



Première partie : les domaines quarrables et la notion d'aire.

I-Préliminaires

I-1 : Inventaires didactiques :

L'aire relève des notions, plus générales, de grandeur et de mesure. Dans l'enseignement, celles-ci ont, jusqu'en 1970, fait partie intégrante des programmes de l'enseignement primaire et secondaire⁽¹⁾. En effet, elles sont importantes pour des raisons sociales et économiques, les corps de métiers des travaux publics et bâtiments demandant à tous leurs employés des compétences sérieuses sur le mesurage des longueurs, des aires et des volumes.

En revanche : « Les programmes de 1970 vont complètement évacuer le problème des grandeurs : on fixera l'unité et on n'aura plus affaire qu'à des nombres. »⁽²⁾ Pourquoi ?... Il suffit de lire la circulaire du 2 janvier 1970⁽³⁾ : « L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir les techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par "la vie courante", mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques ».

Dans les années qui ont suivi (1980 à 2000), alors que s'opère un retour lent de ces notions dans l'enseignement, les enseignants ont pu constater des difficultés importantes et résistantes chez les élèves. **Depuis, des recherches en didactique⁽⁴⁾ ont montré qu'il était fondamental de remettre en place, à école primaire et collège, un enseignement des grandeurs basé sur des situations robustes.**

Tout particulièrement pour l'école primaire, on consultera les ouvrages écrits par ERMEL au Cycle 3⁽⁵⁾, dans lesquels une partie importante concerne l'apprentissage des longueurs et des aires.

Ces recherches ont montré qu'il est important de faire la distinction entre surface, aire et mesure, ce qui n'a pas toujours été le cas⁽⁶⁾. Concernant ces trois points, on a :

- La surface : Il y a une différence entre la surface physique (champ, terrain, etc...) et surface géométrique qui est une partie (bornée) du plan affine (donc abstraite).

¹ Pour approfondir ce sujet, il est nécessaire de se référer à l'article (qui date mais essentiel) de Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, IREM de Paris-7, « L'aire et la mesure ». L'article est en ligne.

² Voir l'article ci-dessus, à la page 17.

³ Cité dans l'article ci-dessus, page 17 (les programmes du 2 janvier 1970).

⁴ Voir la bibliographie de l'article ci-dessus. Pour le collège on consultera Y. CHEVALLARD : « Les grandeurs en mathématiques au collège ». L'article est en ligne.

⁵ « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes », ERMEL Géométrie Cycle 3, aux Eds Hatier.

⁶ Voir « L'aire et la mesure » ci-dessus, page 31.

- L'aire : c'est un invariant des surfaces, « *deux surfaces ont la même aire si on peut les superposer* ». On perçoit immédiatement l'ambiguïté, car manifestement on ne peut pas superposer deux champs. Même dans le plan affine abstrait, cette relation pose question. Pour décider on peut utiliser, quand c'est pertinent, le « découpage » : si on peut découper S en polygones et les recomposer (par des isométries) pour les superposer à S' , on dira que S et S' ont la même aire⁽⁷⁾.
- La mesure : c'est une application entre l'ensemble des surfaces (réelles ou théoriques) vers l'ensemble des réels. On montre que : $\text{mes}(S) = \text{mes}(S')$, alors S et S' ont la même aire, ou la même étendue. Donc, en résumé, il s'agit de remplacer la surface par un nombre pour simplifier leur comparaison. Mais, tout le problème est de déterminer, sans ambiguïté, la procédure pour définir ce nombre.

C'est Henri LEBESGUE qui, le premier, propose une construction au moyen de quadrillages du plan de plus en plus fins. Dans la suite, on essaiera, *au moyen d'outils mathématiques simples*, de décrire rigoureusement les diverses démonstrations relatives à cette procédure, pour ensuite établir les propriétés qui en relèvent.

On prolongera dans la 2^{ème} partie, par quelques démonstrations relevant du lien entre l'aire et la « grande » théorie, par ailleurs très complexe, qui s'appelle « la mesure de LEBESGUE ».

I-2 : Préambule théorique :

Après ces considérations didactiques, certes succinctes, donnons quelques indications sur le développement théorique à venir.

Pour un ensemble de domaines qui reste à déterminer, à partir d'un pavé de forme carrée, noté C , il s'agit de déterminer une application de cet ensemble vers $\mathbb{R}^+$, $S \rightarrow \text{Aire}_C(S)$, ou $\text{Mes}_C(S)$, qui devra respecter un certain nombre de propriétés.

On démontrera que cette application est indépendante de tous les pavés isométriques à C .

Donc, pour simplifier, on retiendra l'écriture « $\text{Aire}(S)$ ».

Si S est un rectangle que l'on peut recouvrir avec 45 carrés et S' un second par 50 carrés, on dira que « S a une aire plus petite que S' » et on écrira que $\text{Aire}(S) < \text{Aire}(S')$ ⁽⁸⁾. Hélas, toutes les surfaces n'ont pas l'avantage d'avoir une forme aussi simple.

On va donc recouvrir le plan de pavés de plus en plus fins. Pour ces pavés, on peut prendre effectivement, au départ, les carrés de côté 1 (dont C), formés par les droites parallèles aux axes et passant par les points de $\mathbb{Z}^2$, puis :

- Soit, on découpera ces carrés en 2, 4, 8, etc... On utilisera à cet effet, les couples (x, y) , formés par les nombres de la forme $k/2^n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Soit en 10, 100, 1000, etc. donc les points de D^2 : (x, y) , avec x et $y = k/10^i$, $i = 0, 1, \dots$ et $k \in \mathbb{Z}$.

⁷ Consulter « Grandeurs et mesures », Henri PRESSIAT, anciennement IUFM de Tours. Le texte est en ligne.

⁸ En toute rigueur, on devrait écrire (par exemple) : $C\text{-mes}(\text{aire}(S)) = 45$ et lire : « Avec l'unité C , 45 est la mesure de toutes les surfaces qui ont la même aire que S ». La lourdeur des symboles et de l'écriture n'échappera à personne !...

Nous ferons le choix du partage en 2, 4, 8..., sachant que l'on aurait exactement les mêmes résultats en utilisant les subdivisions décimales (celles justement que l'on utilise à l'École). Alors, pour une surface donnée, selon un dénombrement particulier de ces différents pavés, on précisera ainsi, l'idée « d'étendue » du domaine, chaque « petit » pavé dénombré ayant une aire de plus en plus petite.

En utilisant cette procédure, on verra que parmi les domaines, même s'ils sont bornés, certains ne se laissent pas approcher naturellement ... En revanche, pour les « bons » domaines, que l'on nommera « domaines quarrables », au moyen de démonstrations plus ou moins difficiles, nous retrouverons toutes les propriétés (invariance par isométrie, etc...) et des formules de calculs d'aires bien connues des élèves de l'École Primaire ou Collège, voire du Lycée.

Remarques :

1) Le texte s'inspirera des auteurs et des livres suivants :

- **Henri LEBESGUE**, le livre « Sur la mesure des grandeurs », 1975, Eds Blanchard. Certaines des démonstrations s'inspirent des textes développés par ce grand mathématicien, en fait, en les reconstruisant au moyen de la symbolique moderne⁽⁹⁾.
- **François DE MARÇAY**, Département de Mathématiques d'Orsay ; Université Paris-Sud, en ligne⁽¹⁰⁾. *A signaler que les dessins ci-dessous, pour ne pas les reconstruire, proviennent de ce fichier.*
- **Jean GENET**, pour la 2^{ème} partie, « Mesure et Intégration », 1976, Eds Vuibert. Les notions de « clans », « tribus », mesures et propriétés sont tirées de cet ouvrage. Certes c'est un vieux livre, mais c'est le seul sur la mesure encore dans ma bibliothèque !...

2) **Précision** : pour simplifier, on utilisera seulement $\mathbb{R}^2$ dans les démonstrations, sachant que : *l'espace euclidien standard de dimension 2* est $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ étant, lui-même, l'espace vectoriel sous-jacent⁽¹¹⁾. On choisit $O(0,0)$, $i=(1,0)$, $j=(0,1)$, alors $\{O, (i, j)\}$ sera considéré comme le repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$.

3) **Note importante** : il s'agit de démontrer toutes les propriétés de la « quarrabilité » des domaines de $\mathbb{R}^2$, ceci en utilisant le moins d'outils théoriques possibles. Donc, les démonstrations peuvent paraître longues et parfois utiliser une symbolique redondante, mais c'est ce choix qui nous l'impose.

II- Quadrillage et pavés dans le plan.

Préalablement, nous allons définir, rigoureusement, les familles de parties qui vont recouvrir le plan et surtout certains de ses sous-ensembles. Ces parties seront toutes des « pavés » de forme carrée (*car ce recouvrement fait penser au pavage régulier d'un sol*).

⁹ Voir le chapitre « Aires » du livre de H. LEBESGUE « La mesure des grandeurs », de la page 35 à la page 63. Le texte a été numérisé et il est en ligne.

¹⁰ Voir à l'adresse suivante : <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~joel.merker/Enseignement/Multiples-integrales/doubles-integrales.pdf>.

¹¹ Voir pour des précisions : « Géométrie », M. BERGER, Eds Fernand Nathan : tome 1 (page 58, 2.1.9 Définition et page 59, 2.2.1) et tome 2 (page 72, 9.1.2 Remarques)...

II-1 Définitions

Au rang 0, on définit un ensemble de pavés : $Q_0 = \{[m, m+1[\times [p, p+1[\mid (m, p) \in \mathbb{Z}^2\}$
 Pour le pavé C pris au départ, appelé « pavé unité », on a : $C \in Q_0$, $C = [0, 1[\times [0, 1[$.

Pour recouvrir le pavé rectangulaire $D = [0, 3[\times [0, 5[$, il faut $15 = 3 \times 5$ pavés de Q_0 indicés par les couples d'entiers de l'ensemble suivant : $\llbracket 0, 2 \rrbracket \times \llbracket 0, 4 \rrbracket \subset \mathbb{N}^2$, dans lequel il y a bien 15 couples d'indices : (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (2,2), (0,3), (1,3), (2,3), (0,4), (1,4), (2,4), qui correspondent aux 15 pavés $([0, 1[\times [0, 1[; [1, 2[\times [0, 1[; [2, 3[\times [0, 1[; [0, 1[\times [1, 2[; \dots \text{etc})$.

Au rang 1, on définit l'ensemble des pavés : $Q_1 = \left\{ \left[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2} \right[\times \left[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2} \right[\mid (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

Le pavé C est recouvert par 4 carrés de la famille Q_1 (voir dessin ci-dessous).

Pour recouvrir le même pavé $D = [0, 3[\times [0, 5[$, il faut 60 pavés de Q_1 indicés par les couples d'entiers de l'ensemble suivant : $\llbracket 0, 5 \rrbracket \times \llbracket 0, 9 \rrbracket \subset \mathbb{N}^2$, dans lequel il y a bien 60 couples d'indices.

Au passage du rang 0 au rang 1, on a « découpé » chaque pavé du rang 0 en 4.

Au rang 2, on définit cet ensemble de pavés : $Q_2 = \left\{ \left[\frac{m}{2^2}, \frac{m+1}{2^2} \right[\times \left[\frac{p}{2^2}, \frac{p+1}{2^2} \right[\mid (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

Pour recouvrir le même pavé $D = [0, 3[\times [0, 5[$, il faut 240 pavés de Q_2 indicés par les couples d'entiers de l'ensemble suivant : $\llbracket 0, 11 \rrbracket \times \llbracket 0, 19 \rrbracket \subset \mathbb{N}^2$, dans lequel il y a 240

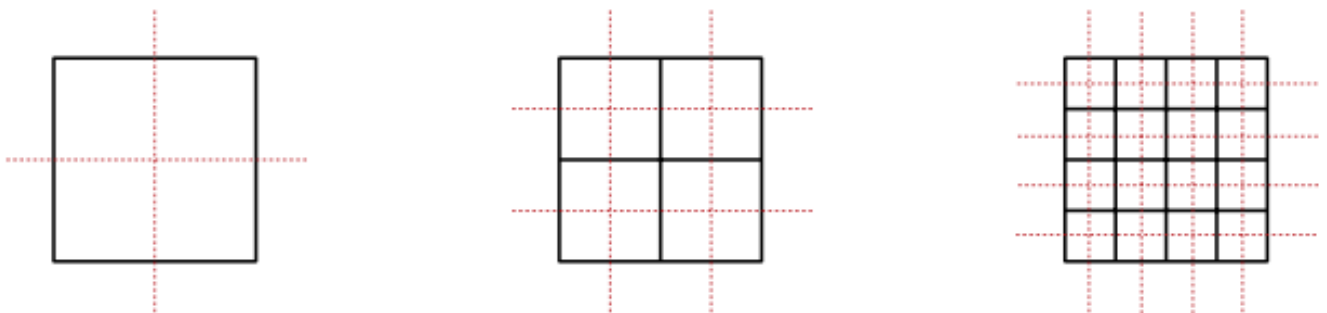


Fig 1 : Ces dessins proviennent du fichier de F. de Marçay.

Le dessin de gauche, trait noir, est un carré de Q_0 (rang 0), c'est en fait le carré unité C. Celui du milieu, trait noir, 4 = $2^2 \times 1$ carrés de Q_1 (rang 1), les traits rouges pointillés, couples d'indices.

Maintenant, passons au cas général :

Au rang k ($k \geq 0$, donné), on définit enfin l'ensemble des pavés :

$$Q_k = \left\{ \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[\mid (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

Enfin, pour recouvrir le même carré $D = [0, 3[\times [0, 5[$, il faut $3.5 \cdot 2^{2k}$ pavés de Q_k indicés par les couples d'entiers de l'ensemble suivant : $\llbracket 0, 3 \cdot 2^k - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 5 \cdot 2^k - 1 \rrbracket \subset \mathbb{N}^2$, dans lequel il y a : $3.5 \cdot 2^{2k}$ couples d'indices.

Notation : Pour $k \geq 0$, on notera $C_k^{m,p} = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[$, $(m, p) \in \mathbb{Z}^2$, un pavé quelconque de la famille Q_k . S'il n'y a aucune ambiguïté et pour simplifier, on pourra noter C_k un de ces pavés.

On a : $\text{Int}(C_k^{m,p}) = \overset{\circ}{C_k^{m,p}} = \left] \frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left] \frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[$, sachant que pour un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, on utilisera indistinctement $\text{int}(D)$ ou $\overset{\circ}{D}$, selon les cas, pour désigner l'intérieur de D .

On peut vérifier que pour chaque famille Q_k , $k \geq 0$:

- Elle est composée de pavés disjoints 2 à 2.
- Ces pavés recouvrent le plan $\mathbb{R}^2$ en entier : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R}^2 = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} C_k^{m,p}$.

Ce recouvrement est une conséquence directe de la propriété suivante :

$\forall u \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n = n(u, k) \in \mathbb{Z}$ (unique) tel que : $\frac{n}{2^k} \leq u < \frac{n+1}{2^k}$ ($n = E(2^k \cdot u)$, $E(.)$ partie entière).

II-2 : Parties quarrables du plan.

Définition 1-1 : On appellera domaine ou surface, toute partie D bornée du plan $\mathbb{R}^2$, à savoir incluse dans un disque de rayon suffisamment grand ou un rectangle élémentaire suffisamment grand (ce qui est équivalent). On préférera le terme « surface » quand le domaine est connexe.

On définit les ensembles suivants :

$$D_k^{\text{int}} = \{C_k^{m,p} \mid (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } C_k^{m,p} \subset \text{Int}(D)\} \quad \text{et} \quad D_k^{\text{ext}} = \{C_k^{m,p} \in Q_k \mid (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } C_k^{m,p} \cap \bar{D} \neq \emptyset\}$$

Proposition 1-1 : Si D est un domaine, ces deux ensembles sont finis.

Si $D \neq \emptyset$ alors : $\forall k \in \mathbb{N} \quad D_k^{\text{ext}} \neq \emptyset$.

Si $\text{Int}(D) \neq \emptyset$ (intérieur non vide) alors : $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0 \quad D_k^{\text{int}} \neq \emptyset$.

Preuve :

Il y a un nombre fini de carrés $C_k^{m,p}$ dans tout rectangle, donc également dans celui qui contient D .

Donc : $D \neq \emptyset \Rightarrow \bar{D} \neq \emptyset \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists C_k^{m,p} \in Q_k$ t.q. $C_k^{m,p} \cap \bar{D} \neq \emptyset$, puisque les $C_k^{m,p}$ recouvrent $\mathbb{R}^2$.

Si $\text{Int}(D) \neq \emptyset \Rightarrow \exists R$, rectangle ouvert, t.q. $R \subset \text{Int}(D)$, donc : $\exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists (m_0, p_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $C_{k_0}^{m_0, p_0} \subset R \subset \text{Int}(D)$, donc : $\forall k \geq k_0 \quad D_k^{\text{int}} \neq \emptyset$.

Exemples :

- Si $D = \left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq \frac{1}{2} \right\}$ alors : $D_0^{\text{int}} = D_1^{\text{int}} = \emptyset$ mais : $\forall k \geq 2 \quad D_k^{\text{int}} \neq \emptyset$. En effet : $C_0^{0,0} = [0, 1[\times [0, 1[\not\subset \text{Int}(D)$ (ainsi que $[-1, 0[\times [-1, 0[$, etc.), $C_1^{0,0} = \left[0, \frac{1}{2}\right[\times \left[0, \frac{1}{2}\right[\not\subset \text{Int}(D)$ (ainsi que les 3 autres carrés), mais : $C_2^{0,0} = \left[0, \frac{1}{4}\right[\times \left[0, \frac{1}{4}\right[\subset \text{Int}(D)$.

- Pour $D = [M, N]$ pour M et $N \in \mathbb{R}^2$, alors : $\text{Int}(D) = \emptyset$ donc : $\forall k \in \mathbb{N} D_k^{\text{int}} = \emptyset$.
- Si $D = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ qui est un domaine non borné, alors : $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = +\infty$. On exclut, évidemment, de tels domaines.
- En revanche : si $D = [0, r[\times [0, s[$, avec r et $s \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ et $s \geq 1$,
 $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) = (r \cdot 2^k - 1) \times (s \cdot 2^k - 1)$.

$$\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = (r \cdot 2^k - 1) \times (s \cdot 2^k - 1) + ((r \cdot 2^k + 1) + (s \cdot 2^k + 1)) \times 2 - 4 = (r \cdot 2^k + 1) \times (s \cdot 2^k + 1).$$

Voir pour une démonstration : **Annexe n°1**.

Définition 1-2 et proposition : Pour un domaine D et $k \in \mathbb{N}$ fixé, la **Proposition 1-1** permet de définir quatre valeurs :

- D'abord : $n_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{int}})$ et : $n_k^+ = \text{Card}(D_k^{\text{ext}})$,
- Puis : $a_k = \frac{n_k^-}{2^{2 \cdot k}}$ et $b_k = \frac{n_k^+}{2^{2 \cdot k}}$.

Clairement, ces quatre valeurs ont du sens.

On pose, pour D domaine du plan :

$$D_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} C_k \quad \text{et} \quad D_k^+ = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} C_k$$

Voir Figure 2, ci-contre :

Ces deux domaines sont des réunions de pavés,

évidemment 2 à 2 disjoints, de la famille Q_k . D_k^- (s'il est non-vide) et D_k^+ sont des polygones dont les frontières sont composées de segments parallèles aux axes.

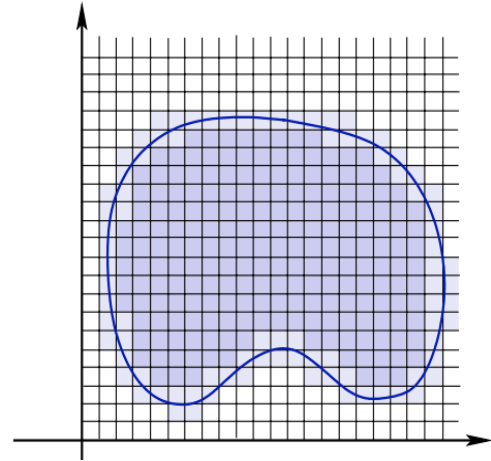


Fig 2 : Ce dessin provient du fichier de

Proposition 1-2 : selon les définitions ci-dessus, on a :

- 1) $\forall k \in \mathbb{N} D_k^- \subset D \subset D_k^+$ (voir exemple ci-dessus, Fig 2).
- 2) $\forall k \in \mathbb{N} 0 \leq a_k \leq b_k$.
- 3) $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, à savoir : $\forall k \in \mathbb{N} 0 \leq a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k \leq b_0$.
- 4) Les deux suites sont donc convergentes et si on pose : $l_D^{\text{int}} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ et $l_D^{\text{ext}} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$,

$$\text{On a : } 0 \leq l_D^{\text{int}} \leq l_D^{\text{ext}}.$$

Preuve :

1) D'après la définition de D_k^- et D_k^+ , on déduit la double inclusion.

2) On a : $\forall k \in \mathbb{N} C_k \in D_k^{\text{int}} \Rightarrow C_k \subset D \Rightarrow C_k \cap \bar{D} = \emptyset \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}} \Rightarrow D_k^{\text{int}} \subset D_k^{\text{ext}}$,

$$\text{Donc : } \forall k \in \mathbb{N} n_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{int}}) \leq \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = n_k^+ \Rightarrow \frac{n_k^-}{2^{2 \cdot k}} \leq \frac{n_k^+}{2^{2 \cdot k}} \Rightarrow 0 \leq a_k \leq b_k.$$

3) Quand on passe du rang k au rang $k+1$, chaque pavé est « coupé » en 4, il y en a donc 4 fois plus de pavés C_{k+1} que C_k dans le polygone D_k^- . Mais au rang $k+1$ on augmente le nombre de pavés qui sont inclus dans $\text{Int}(D)$ (on bouche un peu les

vides), donc on ajoute « un peu » de pavés au polygone D_k^- pour obtenir D_{k+1}^- .

Pour D_{k+1}^{ext} et D_k^{ext} c'est l'inverse...

En conséquence, on a les inégalités : $4 \cdot n_k^- \leq n_{k+1}^-$ et $n_{k+1}^+ \leq 4 \cdot n_k^+$.

En divisant par $2^{2 \cdot k+2}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^{2 \cdot k}} \cdot n_k^- \leq \frac{1}{2^{2 \cdot k+2}} \cdot n_{k+1}^-$ et $\frac{1}{2^{2 \cdot k+2}} \cdot n_{k+1}^+ \leq \frac{1}{2^{2 \cdot k}} \cdot n_k^+$,

Donc, avec : $D_{k+1}^{int} \subset D_{k+1}^{ext}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$.

4) C'est un simple résultat sur les suites décroissantes et croissantes, dites adjacentes, bornées, donc convergentes. L'inégalité sur les limites étant une

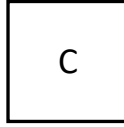
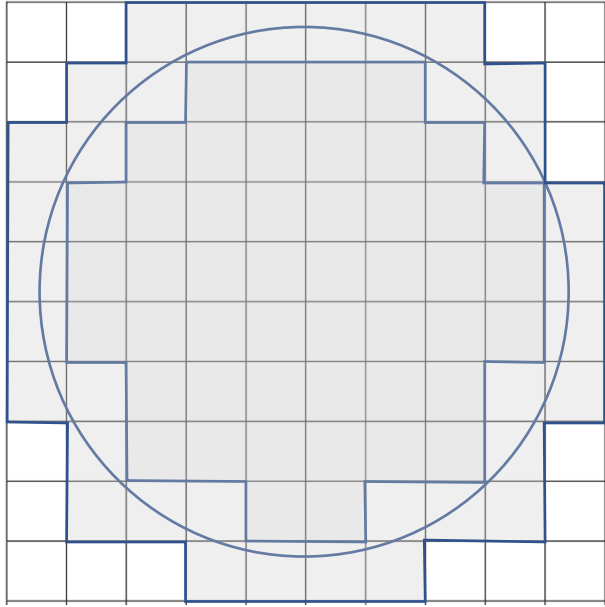


Fig 3 : Le carré (ci-dessus), c.a.d l'unité C , fait partie de la famille de pavés Q_0 .

Donc, le dessin ci-contre montre :

- des carrés de la famille Q_1 et un cercle D .
- les deux polygones : $D_1^{int} \subset D \subset D_1^{ext}$

On a : $n_k^- = \text{Card}(D_k^-) = 48$ et $n_k^+ = \text{Card}(D_k^+) =$

conséquence également bien connue.

Commentaire : Ces deux valeurs positives ou nulles I_D^{int} et I_D^{ext} existent pour tous les domaines D du plan (bornés par hypothèse). Mais deux cas se présentent : les domaines pour lesquels $I_D^{int} = I_D^{ext}$ et ceux pour lesquels $0 \leq I_D^{int} < I_D^{ext}$.

Définition 1-3 : on dit qu'un domaine D ou surface du plan affine est quarrable si : $I_D^{int} = I_D^{ext}$.

On notera : $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des domaines ou surfaces quarrables du plan.

Proposition 1-3 : Un domaine D est quarrable si et seulement si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n_k^+ - n_k^-}{2^{2 \cdot k}} \right) = 0$$

La quantité : $n_k^+ - n_k^-$ correspond au nombre de carrés de rang k qui intersectent la fermeture du domaine D sans être inclus dans l'intérieur du domaine.

A savoir : $n_k^+ - n_k^- = \text{Card}\{C_k \in Q_k | C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \text{ et } C_k \not\subset \text{Int}(D)\}$.

Preuve :

$$\text{On a : } \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_k \leq I_D^{int} \leq I_D^{ext} \leq b_k \Rightarrow 0 \leq I_D^{ext} - I_D^{int} \leq b_k - a_k = \frac{n_k^+ - n_k^-}{2^{2 \cdot k}},$$

Si D est quarrable $\Rightarrow l_D^{\text{int}} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l_D^{\text{ext}} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n_k^+ - n_k^-}{2^{2.k}} \right) = 0$,

Inversement : $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n_k^+ - n_k^-}{2^{2.k}} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \Rightarrow l_D^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}}$.

Enfin, puisque : $D_k^{\text{int}} \subset D_k^{\text{ext}} \Rightarrow n_k^+ - n_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) - \text{Card}(D_k^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}})$,

$$n_k^+ - n_k^- = \text{Card}\{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \text{ et } C_k \not\subset \text{Int}(D)\}.$$

On utilise ici : A et B ensembles finis, si $A \subset B \Rightarrow \text{Card}(B - A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$ ⁽¹²⁾.

Commentaires :

- Peut-on caractériser explicitement les éléments de $\mathcal{O}(R^2)$?...
- $\mathcal{B}_0(R^2)$ étant l'ensemble des parties bornées du plan R^2 . Voir **Annexe n°2**, pour un exemple de domaine D borné et non-quarrable : $D =]0,1[\times]0,1[\cap (R^2 - Q^2)$, donc : $\mathcal{O}(R^2) \not\subset \mathcal{B}_0(R^2)$.

III- Les propriétés fondamentales

III-1 : la soustraction et la réunion ensemblistes.

Proposition 1-4 :

- 1) Si D et P sont quarrables et $P \subset D$, alors : $D - P$ est quarrable.

Et : $l_D^{\text{int}} - l_P^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} - l_P^{\text{ext}} = l_{D-P}^{\text{int}} = l_{D-P}^{\text{ext}}$. Donc : $\text{Aire}(D - P) = \text{Aire}(D) - \text{Aire}(P) \geq 0$.

En particulier : $P \subset D$, alors : $\text{Aire}(P) \leq \text{Aire}(D)$.

- 2) Si D et P sont des domaines quarrables, alors $D \cup P$ et $D \cap P$ sont quarrables,

Et l'on a : $l_{D \cup P}^{\text{int}} = l_{D \cup P}^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}} + l_P^{\text{int}} - l_{D \cap P}^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} + l_P^{\text{ext}} - l_{D \cap P}^{\text{ext}}$.

Donc : $\text{Aire}(D \cup P) = \text{Aire}(D) + \text{Aire}(P) - \text{Aire}(D \cap P)$.

Commentaires :

- 1) Attention, ce n'est pas parce que $P \subset D$ et D quarrable que P est quarrable. Contre-exemple : $D = [0,2] \times [0,2]$ et $P = [0,1] \times [0,1] \cap (R^2 - Q^2)$; $P \subset D$, or P n'est pas quarrable et D l'est !.
- 2) De plus, D et P quarrables et $P \subset D$, il est nécessaire de remarquer que la démonstration de la 1^{ère} assertion, a priori, ne va pas de soi.

En effet, on aimerait bien que : $\forall k \geq 0 \text{ Card}((D - P)_k^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) - \text{Card}(P_k^{\text{ext}})$, en divisant par $2^{2.k}$ et en passant à la limite, on aurait immédiatement la moitié du résultat attendu.

Hélas, on n'a pas, en général cette égalité entre les cardinaux. Voici un contre-exemple : $P = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $D = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors : $P \subset D$, ils sont tous deux quarrables, mais : pour $k = 0 \text{ Card}((D - P)_0^{\text{ext}}) \geq 1$ et $\text{Card}(D_0^{\text{ext}}) = \text{Card}(P_0^{\text{ext}})$, donc pas l'égalité !...

¹² Évidemment, il est nécessaire de préciser que dans cette égalité, les deux signes « - » ne sont pas de même nature.

Il est donc nécessaire de chercher une autre procédure.

Preuve :

Pour le 1) :

On pose : $(D - P)_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k | C_k \subset \text{Int}(D - P)\}$ et $(D - P)_k^{\text{ext}} = \{C_k \in Q_k | C_k \cap \overline{D - P} \neq \emptyset\}$,

Puis : $r_k^- = \text{Card}((D - P)_k^{\text{int}})$ et $r_k^+ = \text{Card}((D - P)_k^{\text{ext}})$ et $n_k^+ = \text{Card}(D_k^{\text{ext}})$,

Et : $n_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{int}})$ et $m_k^- = \text{Card}(P_k^{\text{int}})$ et $m_k^+ = \text{Card}(P_k^{\text{ext}})$,

Enfin : $a_k = \frac{n_k^-}{2^{2.k}}$ et $c_k = \frac{m_k^+}{2^{2.k}}$ et $f_k = \frac{r_k^-}{2^{2.k}}$ et $e_k = \frac{r_k^+}{2^{2.k}}$ et $b_k = \frac{n_k^+}{2^{2.k}}$ et $d_k = \frac{m_k^-}{2^{2.k}}$.

On utilisera des relations suivantes : $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A^c} = (A)^c$,

- $E \subset F$ et $G \cap E \neq \emptyset \Rightarrow G \cap F \neq \emptyset$,
- $A \cap (B \cap C) \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cap C \neq \emptyset$,
- et $B \subset A \Rightarrow \text{Card}(A - B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$ (A et B finis).

Puisque : $P \subset D \Rightarrow \dot{P} \subset P \subset D \subset \overline{D}$ donc : $C_k \in P_k^{\text{int}} \Rightarrow C_k \subset \dot{P} \Rightarrow C_k \cap \overline{D} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}}$,

Donc : $P \subset D \Rightarrow P_k^{\text{int}} \subset D_k^{\text{ext}} \Rightarrow n_k^+ - m_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) - \text{Card}(P_k^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}} - P_k^{\text{int}})$,

Or : $D - P = D \cap P^c$ ($P^c = C_{R^2}P$ pour simplifier),

Donc : $\overline{D - P} = \overline{D \cap P^c} \subset \overline{D} \cap \overline{P^c} = \overline{D} \cap (\dot{P})^c$,

Alors : $C_k \in (D - P)_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \cap (\overline{D - P}) \neq \emptyset \Rightarrow C_k \cap (\overline{D} \cap (\dot{P})^c) \neq \emptyset$,

Donc : $C_k \cap \overline{D} \neq \emptyset$ et $C_k \cap (\dot{P})^c \neq \emptyset \Rightarrow C_k \cap \overline{D} \neq \emptyset$ et $C_k \not\subset \text{Int}(P)$,

Conclusion : $C_k \in (D - P)_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}}$ et $C_k \notin P_k^{\text{int}} \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}} - P_k^{\text{int}}$.

Donc : $(D - P)_k^{\text{ext}} \subset D_k^{\text{ext}} - P_k^{\text{int}} \Rightarrow r_k^+ \leq n_k^+ - m_k^-$,

On a donc : $r_k^- \leq r_k^+ \leq n_k^+ - m_k^-$, la 1^{ère} inégalité étant toujours vérifiée.

Maintenant :

Si on minore cette double inégalité ainsi : $n_k^- - m_k^+ \leq r_k^- \leq r_k^+ \leq n_k^+ - m_k^-$,

Pour $k \geq 0$, si on divise cette triple inégalité par $2^{2.k}$,

On aura : $a_k - c_k \leq f_k \leq e_k \leq b_k - d_k$,

Et si l'on fait tendre k vers l'infini, on obtiendra : $l_D^{\text{int}} - l_P^{\text{ext}} \leq l_{D-P}^{\text{int}} \leq l_{D-P}^{\text{ext}} \leq l_D^{\text{ext}} - l_P^{\text{int}}$.

Puisque P et D sont quarrables :

On a : $l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}}$ et $l_P^{\text{ext}} = l_P^{\text{int}} \Rightarrow l_D^{\text{ext}} - l_P^{\text{int}} = l_D^{\text{int}} - l_P^{\text{ext}} \Rightarrow l_{D-P}^{\text{int}} = l_{D-P}^{\text{ext}}$,

Ce qui prouvera que $D - P$ est quarrable, et en plus : $l_D^{\text{int}} - l_P^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} - l_P^{\text{ext}} = l_{D-P}^{\text{int}} = l_{D-P}^{\text{ext}}$.

Donc : $\text{Aire}(D - P) = \text{Aire}(D) - \text{Aire}(P)$...

Reste donc à démontrer que : $n_k^- - m_k^+ \leq r_k^-$

A savoir : $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) - \text{Card}(P_k^{\text{ext}}) \leq \text{Card}((D - P)_k^{\text{int}})$.

Inutile de chercher si $P_k^{\text{ext}} \subset D_k^{\text{int}}$ et $D_k^{\text{int}} - P_k^{\text{ext}} \subset (D - P)_k^{\text{int}}$, ce n'est pas le cas...

En revanche: $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) - \text{Card}(P_k^{\text{ext}}) \leq \text{Card}((D - P)_k^{\text{int}}) \Leftrightarrow \text{Card}(D_k^{\text{int}}) \leq \text{Card}((D - P)_k^{\text{int}}) + \text{Card}(P_k^{\text{ext}})$.

En utilisant : $\text{Card}(A \cup B) \leq \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$,

On a : $\text{Card}((D - P)_k^{\text{int}} \cup P_k^{\text{ext}}) \leq \text{Card}((D - P)_k^{\text{int}}) + \text{Card}(P_k^{\text{ext}})$.

Nous devons donc démontrer que : $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) \leq \text{Card}((D - P)_k^{\text{int}} \cup P_k^{\text{ext}})$ et on aura le résultat escompté !

Pour cela, il suffit de démontrer que : $D_k^{\text{int}} \subset (D - P)_k^{\text{int}} \cup P_k^{\text{ext}}$.

Soit $C_k \in D_k^{\text{int}} \Rightarrow C_k \subset \dot{D}$, deux cas se présentent : $C_k \cap \bar{P} = \emptyset$ ou $C_k \cap \bar{P} \neq \emptyset$,

Si : $C_k \cap \bar{P} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \in P_k^{\text{ext}}$,

Si : $C_k \cap \bar{P} = \emptyset \Rightarrow C_k \subset \bar{P}^c = \dot{\bar{P}}^c$,

Comme $C_k \subset \dot{D}$, alors : $C_k \subset \dot{D} \cap \dot{\bar{P}}^c = \overline{\dot{D} \cap \bar{P}} = \overline{\dot{D} - P}$,

Donc : $C_k \in (D - P)_k^{\text{int}}$, on a l'inclusion demandée...

Pour le 2) : Les relations utilisées sont :

- $\overline{P \cup Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}$; $\overline{P \cap Q} = \dot{P} \cap \dot{Q}$; $\dot{P} \cup \dot{Q} \subset \overline{P \cap Q}$; $\overline{P \cap Q} \subset \bar{P} \cap \bar{Q}$,
- $A \cup B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

D'abord, on va démontrer : $\forall k \in N \ (P \cup Q)_k^+ = P_k^+ \cup Q_k^+$ et $P_k^- \cup Q_k^- \subset (P \cup Q)_k^-$,

Aussi : $(P \cap Q)_k^+ \subset P_k^+ \cap Q_k^+$ et $(P \cap Q)_k^- = P_k^- \cap Q_k^-$.

- On a : $C_k \in (P \cup Q)_k^+ \Leftrightarrow C_k \cap (\overline{P \cap Q}) = C_k \cap (\bar{P} \cup \bar{Q}) = (C_k \cap \bar{P}) \cup (C_k \cap \bar{Q}) \neq \emptyset$,

$$\Leftrightarrow C_k \cap \bar{P} \neq \emptyset \text{ ou } C_k \cap \bar{Q} \neq \emptyset,$$

$$\Leftrightarrow C_k \in P_k^+ \text{ ou } C_k \in Q_k^+ \Leftrightarrow C_k \in P_k^+ \cup Q_k^+.$$

Donc : $(P \cup Q)_k^+ = P_k^+ \cup Q_k^+$.

- Également : $C_k \in P_k^- \cup Q_k^- \Rightarrow C_k \subset \dot{P} \text{ ou } C_k \subset \dot{Q} \Rightarrow C_k \subset \dot{P} \cup \dot{Q} \subset \overline{P \cap Q}$,

$$\Rightarrow C_k \in (P \cup Q)_k^-.$$

Donc : $P_k^- \cup Q_k^- \subset (P \cup Q)_k^-$.

- Et : $C_k \in (P \cap Q)_k^+ \Rightarrow \emptyset \neq C_k \cap \overline{P \cap Q} \subset C_k \cap \bar{P} \cap \bar{Q} \Rightarrow C_k \cap \bar{P} \neq \emptyset$ et $C_k \cap \bar{Q} \neq \emptyset$,

$$\Rightarrow C_k \in P_k^+ \text{ et } C_k \in Q_k^+ \Rightarrow C_k \in P_k^+ \cap Q_k^+.$$

Donc : $(P \cap Q)_k^+ \subset P_k^+ \cap Q_k^+$.

- Enfin : $C_k \in (P \cap Q)_k^- \Leftrightarrow C_k \subset \overline{P \cap Q} = \dot{P} \cap \dot{Q} \Leftrightarrow C_k \subset \dot{P} \text{ et } C_k \subset \dot{Q} \Leftrightarrow C_k \in P_k^- \text{ et } C_k \in Q_k^-$,

A savoir : $(P \cap Q)_k^- = P_k^- \cap Q_k^-$.

Commentaire : sur 2 relations, on n'a pas forcément les inclusions inverses, en effet :

Si $C_k \in (P \cup Q)_k^- \Rightarrow C_k \subset \overline{P \cap Q}$, or on a seulement $\dot{P} \cup \dot{Q} \subset \overline{P \cap Q}$,

Donc : $C_k \subset \dot{P}$ ou $C_k \subset \dot{Q}$ n'est pas forcément vérifié ! (sauf si $P \cap Q = \emptyset$).

De même : $C_k \in P_k^+ \cap Q_k^+ \Rightarrow C_k \cap \bar{P} \neq \emptyset$ et $C_k \cap \bar{Q} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \cap \bar{P} \cap \bar{Q} \neq \emptyset$,

Hélas, on a seulement : $\overline{P} \cap \overline{Q} \supset \overline{P \cap Q}$, donc : $C_k \cap \overline{P \cap Q} \neq \emptyset$ n'est pas forcément vérifiée.

En passant aux cardinaux, d'abord :

En appliquant les égalités ou inclusions ci-dessus, en particulier : $\text{Card}(P_k^+ \cup Q_k^+) = \text{Card}((P \cup Q)_k^+)$,

$\text{Card}(P_k^+) + \text{Card}(Q_k^+) - \text{Card}(P_k^+ \cap Q_k^+) = \text{Card}(P_k^+ \cup Q_k^+) = \text{Card}((P \cup Q)_k^+)$.

Avec : $(P \cap Q)_k^+ \subset P_k^+ \cap Q_k^+ \Rightarrow \text{Card}((P \cap Q)_k^+) \leq \text{Card}(P_k^+ \cap Q_k^+)$,

On a : $\text{Card}(P_k^+) + \text{Card}(Q_k^+) - \text{Card}((P \cap Q)_k^+) \geq \text{Card}(P_k^+) + \text{Card}(Q_k^+) - \text{Card}(P_k^+ \cap Q_k^+)$,

Donc : **Card(P_k^+) + Card(Q_k^+) - Card($(P \cap Q)_k^+$) $\geq$ Card($(P \cup Q)_k^+$) (1).**

En divisant chaque valeur par $2^{2.k}$ et en passant à la limite⁽¹³⁾,

On a : (1) $\Rightarrow l_P^{\text{ext}} + l_Q^{\text{ext}} - l_{P \cap Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cup Q}^{\text{ext}}$ (2),

Ici en utilisant : $(P \cup Q)_k^- \supset (P_k^- \cup Q_k^-)$ et $(P \cap Q)_k^- = P_k^- \cap Q_k^-$,

$\text{Card}((P \cup Q)_k^-) \geq \text{Card}(P_k^- \cup Q_k^-) = \text{Card}(P_k^-) + \text{Card}(Q_k^-) - \text{Card}(P_k^- \cap Q_k^-)$,

Et donc : **Card($(P \cup Q)_k^-$) $\geq$ Card(P_k^-) + Card(Q_k^-) - Card($(P \cap Q)_k^-$) (3).**

En divisant toutes ces valeurs par $2^{2.k}$ et en passant à la limite,

On a : (3) $\Rightarrow l_{P \cup Q}^{\text{int}} \geq l_P^{\text{int}} + l_Q^{\text{int}} - l_{P \cap Q}^{\text{int}} \Rightarrow l_{P \cap Q}^{\text{int}} \geq l_P^{\text{int}} + l_Q^{\text{int}} - l_{P \cup Q}^{\text{int}}$ (4).

Par hypothèse, P et Q sont quarrables, donc : $l_P^{\text{ext}} = l_P^{\text{int}}$ et $l_Q^{\text{ext}} = l_Q^{\text{int}}$ (5),

On sait que (inégalités toujours vraies) : $l_{P \cup Q}^{\text{int}} \leq l_{P \cup Q}^{\text{ext}}$ (6) et $l_{P \cap Q}^{\text{int}} \leq l_{P \cap Q}^{\text{ext}}$ (7),

On va pouvoir « associer » les relations (2), (4), (5), (6) et (7) :

On a : $l_{P \cup Q}^{\text{int}} \geq l_P^{\text{int}} + l_Q^{\text{int}} - l_{P \cap Q}^{\text{int}} \geq l_P^{\text{int}} + l_Q^{\text{int}} - l_{P \cap Q}^{\text{ext}}$ ((4) + (6)) = $l_P^{\text{ext}} + l_Q^{\text{ext}} - l_{P \cap Q}^{\text{ext}}$ (avec (5)),

Avec (2), on a : $l_P^{\text{ext}} + l_Q^{\text{ext}} - l_{P \cap Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cup Q}^{\text{ext}}$, avec (7) : $l_P^{\text{ext}} + l_Q^{\text{ext}} - l_{P \cap Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cup Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cup Q}^{\text{int}}$,

Donc, on obtient : $l_{P \cup Q}^{\text{int}} \geq l_{P \cup Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cup Q}^{\text{int}} \Rightarrow l_{P \cup Q}^{\text{int}} = l_{P \cup Q}^{\text{ext}}$.

Et, avec (4), (5), (7) et (2):

Avec (4) : $l_{P \cap Q}^{\text{int}} \geq l_P^{\text{int}} + l_Q^{\text{int}} - l_{P \cup Q}^{\text{int}} \geq l_P^{\text{int}} + l_Q^{\text{int}} - l_{P \cup Q}^{\text{ext}}$ (avec (7)) = $l_P^{\text{ext}} + l_Q^{\text{ext}} - l_{P \cup Q}^{\text{ext}}$ (avec (5)),

Avec (2) + (7) : $l_P^{\text{ext}} + l_Q^{\text{ext}} - l_{P \cup Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cap Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cap Q}^{\text{int}}$,

Donc : $l_{P \cap Q}^{\text{int}} \geq l_{P \cap Q}^{\text{ext}} \geq l_{P \cap Q}^{\text{int}} \Rightarrow l_{P \cap Q}^{\text{int}} = l_{P \cap Q}^{\text{ext}}$.

Ce qui fait que : P $\cup$ Q et P $\cap$ Q sont quarrables.

Et l'on a les égalités : $l_{D \cup P}^{\text{int}} = l_{D \cup P}^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}} + l_P^{\text{int}} - l_{D \cap P}^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} + l_P^{\text{ext}} - l_{D \cap P}^{\text{ext}}$.

Conclusion : Aire(P $\cup$ Q) = Aire(P) + Aire(Q) - Aire(P $\cap$ Q)... Cqfd..

III-2 : Lien entre domaine et frontière :

D'abord une définition⁽¹⁴⁾ :

¹³ Si $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n + y_n \geq z_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$ (si les 3 suites convergent, évidemment)

¹⁴ « Topologie générale », Bourbaki, Eds Hermann, TG I.8 (page 8, Définition 11).

Définition 1-4 : Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, on note $\text{Fr}(D)$ la frontière de D , qui est définie ainsi :

$\text{Fr}(D) = \overline{D} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^2} D} = \overline{D} - \dot{D} = \overline{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D}$ (c'est l'ensemble des points du plan à la fois adhérents à D et à son complémentaire, $\text{Fr}(D)$ est donc un fermé).

Commentaires :

- Soit $D = \{M \in \mathbb{R}^2 | d(O, M) < 1\}$ alors : $\overline{D} = \{M \in \mathbb{R}^2 | d(O, M) \leq 1\}$, $D = \dot{D}$ et donc : $\text{Fr}(D) = \{M \in \mathbb{R}^2 | d(O, M) = 1\} = C(0,1)$, c'est le cercle de rayon 1 (centré en O). La frontière est bien une courbe au sens commun du terme (*trace laissée sur une feuille par le déplacement du crayon*).
- Ce n'est pas toujours le cas, exemple : $D = (]0,1[\times]0,1[) \cap (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)$, c'est l'ensemble des points du carré unité de coordonnées irrationnelles, alors : $\text{Fr}(D) = [0,1] \times [0,1]$ (voir **Annexe n°2**).
- Plus généralement : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ une application de classe C^p avec $p \geq 2$ avec $\forall t \in U, Df(t) \neq 0$, et $\exists L > 0$ t. q. f est L -périodique et injective sur $[0, L[$ ⁽¹⁵⁾.

Alors : $C = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) = f(t), t \in [0, L]\}$ est difféomorphe à $C(0,1)$.

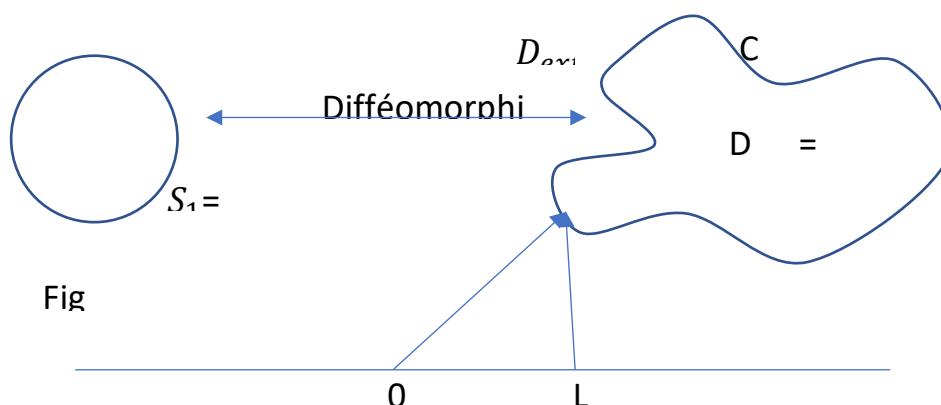
Dans ce cas, il existe 2 ouverts connexes D_{int} , D_{ext} , tels que : $D_{\text{int}} \cup C \cup D_{\text{ext}} = \mathbb{R}^2$, d'intersections vides 2 à 2 (Théorème de Jordan⁽¹⁶⁾).

Donc toute courbe fermée C difféomorphe au cercle, définit un domaine ouvert, borné et connexe $D = D_{\text{int}}$ tel que $\text{Fr}(D) = C$.

Cet exemple montre bien ce qu'est une frontière, surtout que (Théorème du passage des douanes) si $N \in D_{\text{int}}$ et $M \in D_{\text{ext}}$, alors : $[M, N] \cap C \neq \emptyset$, ce qui veut dire que si l'on veut aller de l'intérieur du domaine vers l'extérieur, on est dans l'obligation de passer la frontière (*donc la douane !*).

Intermède :

- Pour la définition de la courbe fermée C , on a la représentation ci-dessous (Fig 4) :



Proposition 1-5 :

¹⁵ Voir définition et théorie : « Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces », M. Berger, Eds PUF, page 353.

¹⁶ Dans le même livre, voir Théorème, page 357.

1) Soit D , une partie du plan, telle que $\dot{D} \neq \emptyset$ et $\bar{D} \neq \mathbb{R}^2$, alors: $\{\dot{D}, \text{Fr}(D), \bar{D}^c\}$ est une partition du plan.

2) Soit C une partie convexe non vide : $C \not\subset \dot{D}$ et $C \not\subset \bar{D}^c \Rightarrow C \cap \text{Fr}(D) \neq \emptyset$.

Preuve :

1) On sait que : $\text{Fr}(D) = \bar{D} - \dot{D} = \bar{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D} = \bar{D} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^2} \dot{D}}$.

- Puisque : $\bar{D} \neq \mathbb{R}^2$, par hypothèse $\Rightarrow \bar{D}^c \neq \emptyset$.

Et si $\text{Fr}(D) = \emptyset \Rightarrow \bar{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D} = \emptyset \Rightarrow \bar{D} \subset \dot{D}$, ce qui est absurde... Chaque élément de la partition est bien non vide.

- $\dot{D} \cup \text{Fr}(D) \cup \bar{D}^c = \mathbb{R}^2$,

En effet : $\dot{D} \cup \text{Fr}(D) = \dot{D} \cup (\bar{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D}) = (\dot{D} \cup \bar{D}) \cap (\dot{D} \cup C_{\mathbb{R}^2} \dot{D})$,

Or : $\dot{D} \cup \bar{D} = \bar{D}$ et $\dot{D} \cup C_{\mathbb{R}^2} \dot{D} = \mathbb{R}^2$, donc : $\dot{D} \cup \text{Fr}(D) = \bar{D}$, d'où le résultat.

- Les parties sont disjointes deux à deux :

$\text{Fr}(D) \cap \dot{D} = \bar{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D} \cap \dot{D} = \emptyset$,

$\text{Fr}(D) \cap \bar{D}^c = \bar{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D} \cap \bar{D}^c = \emptyset$,

Et : $\dot{D} \cap \bar{D}^c = \emptyset$, car : $\dot{D} \subset \bar{D}$.

2) Par hypothèse : $C \not\subset \dot{D}$, on peut donc choisir : $x \in C$ et $x \notin \dot{D}$,

Deux cas se présentent alors, puisque $\{\dot{D}, \text{Fr}(D), \bar{D}^c\}$ est une partition : $x \in \text{Fr}(D)$ ou $x \in \bar{D}^c$,

Si $x \in \text{Fr}(D)$, on a le résultat car alors : $C \cap \text{Fr}(D) \neq \emptyset$.

Donc, on va étudier le cas : $x \in \bar{D}^c$,

De même on choisit $y \in C$ et $y \notin \bar{D}^c$, donc comme ci-dessus, on étudie le cas : $y \in \dot{D}$.

On a d'abord : $[x, y] \subset C$ puisque C est convexe et de plus $x \neq y$, car : $\dot{D} \cap \bar{D}^c = \emptyset$.

On pose :

Soit $C_1 = \{t \in [0,1] \mid x + t.(y - x) \in \bar{D}^c\}$,

Soit $C_2 = \{t \in [0,1] \mid x + t.(y - x) \in \dot{D}\}$,

Alors :

- C_1 et C_2 sont des ouverts de $[0,1]$, car réciproques d'ouverts par une fonction continue : $t \rightarrow x + t.(y - x)$.

- non vides : $0 \in C_1$ car $x \in \bar{D}^c$ donc $C_1 \neq \emptyset$ et $1 \in C_2$ car $y \in \dot{D}$ donc $C_2 \neq \emptyset$.

- Et : $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ car si $t_0 \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow x + t_0.(y-x) \in \dot{D}$ et $\in \bar{D}^c$, ce qui est impossible puisque $\{\dot{D}, \text{Fr}(D), \bar{D}^c\}$ est une partition du plan.

Donc, puisque $[0,1]$ est connexe, forcément : $C_1 \cup C_2 \subsetneq [0,1] \Rightarrow \exists t_1 \in [0,1]$ t.q. $t_1 \notin C_1 \cup C_2 \Leftrightarrow t_1 \notin C_1$ et $t_1 \notin C_2$,

Donc : $x + t_1.(y - x) \notin \dot{D}$ et $x + t_1.(y - x) \notin \bar{D}^c$,

Donc, puisque $\{\dot{D}, \text{Fr}(D), \bar{D}^c\}$ est une partition : $x + t_1.(y - x) \in \text{Fr}(D)$,

Et enfin puisque : $x + t_1.(y - x) \in [x, y] \subset C$,

Cela veut dire : $C \cap \text{Fr}(D) \neq \emptyset$... Cqfd

Voici un théorème important qui montre, d'une autre manière, la pertinence du concept de frontière :

Théorème 1 :

Soit D un domaine quarrable, alors : $\text{Fr}(D)$ est quarrable **et** $l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = 0$.

Inversement, si $\text{Fr}(D)$ est quarrable, deux cas se présentent :

- $l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = 0$ alors D est quarrable

Preuve :

Rappel : $D_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \subset \text{Int}(D)\}$ et $D_k^{\text{ext}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset\}$,

Et : $D_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} C_k$ et $D_k^+ = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} C_k$,

$\text{Fr}(D)_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \subset \text{Int}(\text{Fr}(D))\}$ et $\text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \overline{\text{Fr}(D)} \neq \emptyset\}$.

On pose : $m_k^- = \text{Card}(\text{Fr}(D)_k^{\text{int}})$, $m_k^+ = \text{Card}(\text{Fr}(D)_k^{\text{ext}})$,

Et également: $c_k = \frac{m_k^-}{2^{2 \cdot k}}$ et $d_k = \frac{m_k^+}{2^{2 \cdot k}}$,

On a : $\text{Fr}(D)_k^{\text{int}} \subset \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}}$, donc : $m_k^+ \geq m_k^-$ et $d_k \geq c_k$,

On sait : $\text{Fr}(D) = \bar{D} \cap C_{R^2} \dot{D}$ est fermé, donc : $\text{Fr}(D) = \overline{\text{Fr}(D)}$.

Tout d'abord : $\forall k \in \mathbb{N} \quad D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} = D_k^{\text{ext}}$,

Soit $C_k \in D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{int}}$ ou $C_k \in \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}}$,

Donc, par définition : $C_k \subset \text{Int}(D)$ ou $C_k \cap \overline{\text{Fr}(D)} \neq \emptyset$,

Comme : $\text{Fr}(D) = \overline{\text{Fr}(D)}$, on a : $C_k \cap (\bar{D} \cap C_{R^2} \dot{D}) \neq \emptyset$,

Donc : $C_k \in D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \subset \text{Int}(D)$ ou $C_k \cap \bar{D} \cap C_{R^2} \dot{D} \neq \emptyset$.

Si : $C_k \subset \text{Int}(D) \Rightarrow C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset$ (puisque $\text{Int}(D) \subset \bar{D}$) $\Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}}$,

Et si : $C_k \cap \bar{D} \cap C_{R^2} \dot{D} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}}$,

Donc, on obtient la 1^{ère} inclusion, à savoir : $D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} \subset D_k^{\text{ext}}$.

Inversement : $C_k \in D_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \not\subset \bar{D}^c$,

Il se peut que $C_k \in D_k^{\text{int}}$, auquel cas : $C_k \in D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}}$, pas de problème !

Si : $C_k \notin D_k^{\text{int}}$ alors : $C_k \not\subset \text{Int}(D) = \dot{D}$.

Donc : $C_k \not\subset \dot{D}$ et $C_k \not\subset \bar{D}^c$, comme C_k est un pavé, donc non vide et convexe, on peut appliquer la **Proposition 1-5**, ce qui implique : $C_k \cap \overline{\text{Fr}(D)} = C_k \cap \text{Fr}(D) \neq \emptyset$ (puisque $\text{Fr}(D)$ est fermé).

Donc : $C_k \in D_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \in \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}}$ ou $C_k \in D_k^{\text{int}}$.

On a l'inclusion inverse, d'où l'égalité : $\forall k \in \mathbb{N} \quad D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} = D_k^{\text{ext}}$,

Maintenant, supposons : $\exists C_k \in D_k^{\text{int}} \cap \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} \Rightarrow C_k \subset \dot{D}$ et $C_k \cap \overline{\text{Fr}(D)} = C_k \cap \text{Fr}(D) \neq \emptyset$,

Donc : $C_k \cap (\bar{D} \cap C_{R^2} \dot{D}) = (C_k \cap C_{R^2} \dot{D}) \cap \bar{D} \neq \emptyset \Rightarrow C_k \cap C_{R^2} \dot{D} \neq \emptyset$,

Ce qui est contradictoire avec : $C_k \subset \dot{D}$, donc : $\forall k \in \mathbb{N} \quad D_k^{\text{int}} \cap \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} = \emptyset$.

Passons aux cardinaux :

On sait que : A et B finis, alors : $C = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{Card}(C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

Donc avec : $D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} = D_k^{\text{ext}}$ et $D_k^{\text{int}} \cap \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}} = \emptyset$,

$$\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{int}} \cup \text{Fr}(D)_k^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{int}}) + \text{Card}(\text{Fr}(D)_k^{\text{ext}}),$$

$$\text{Donc : } n_k^+ = n_k^- + m_k^+.$$

$$\text{On a pour finir : } \forall k \in \mathbb{N} \quad n_k^+ - n_k^- = m_k^+ \geq m_k^- \geq 0 \Rightarrow a_k - b_k = d_k \geq c_k \geq 0,$$

$$\text{Maintenant, si } D \text{ est quarrable : } \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k - b_k) = 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = 0,$$

$$\text{Donc : } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = 0, \text{ ce qui veut dire que } \text{Fr}(D) \text{ est quarrable et } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = 0.$$

Inversement : $\text{Fr}(D)$ est quarrable :

$$\text{Alors, 2 cas se présentent : } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = 0 \text{ ou bien : } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} > 0.$$

$$- \text{ Si : } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = 0, \text{ puisque : } \forall k \in \mathbb{N} \quad a_k - b_k = d_k \geq c_k \geq 0,$$

$$\text{Alors : } 0 = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k - b_k) = 0 \Rightarrow l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}},$$

D est bien quarrable.

$$- \text{ Si : } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} > 0$$

$$\text{Voici un exemple : } D =]0,1[\times]0,1[\cap (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2),$$

D est borné et $\bar{D} = [0,1] \times [0,1]$, ce qui implique : $\bar{D} \neq D$, D n'est pas fermé,

Avec $\dot{D} = \emptyset$, ce qui implique : $\text{Fr}(D) = [0,1] \times [0,1]$, donc est quarrable puisque l'on verra à la **Proposition 1-6** qu'un rectangle, ici un carré, est quarrable et que : $l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = 1$.

En revanche, D ne l'est pas !...

Voir : **Annexe n°2** pour la démonstration.

$$\text{Ce cas particulier se généralise : } l_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} > 0 \Rightarrow l_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k > 0,$$

$$\text{Donc, puisque : } \forall k \in \mathbb{N} \quad a_k - b_k = d_k \geq c_k \geq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k - b_k) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k > 0,$$

$$\text{Donc : } \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k - b_k) > 0 \Rightarrow l_D^{\text{ext}} > l_D^{\text{int}}, \text{ donc } D \text{ n'est pas quarrable.}$$

Note : Si D est quarrable, donc on vient de voir que $\text{Fr}(D)$ l'est. Or, comme on a vu (**Proposition 1-4**, ci-dessus), la réunion de deux domaines quarrables est quarrable, donc puisque $\bar{D} = D \cup \text{Fr}(D)$, $\bar{D}$ est quarrable.

Mais encore, $\bar{D} = \text{int}(D) \cup \text{Fr}(D)$, donc on a : $\text{int}(D) = \bar{D} - \text{Fr}(D)$, donc : $\text{int}(D)$ est quarrable (également **Proposition 1-4**, ci-dessus).

Mais en revanche, si $\text{int}(D)$ est quarrable (l'ensemble vide est quarrable), alors D ne l'est pas forcément, comme le montre l'exemple ci-dessus. Mais c'est exceptionnel, car on verra qu'un carré ouvert est quarrable, le même fermé l'est également (et même semi-ouvert), de même pour le cercle ouvert et fermé...

IV- Des domaines, des surfaces et des Aires.

IV-1 : Rectangles, points, segments et polygones.

La démonstration de la proposition suivante, basée sur des exemples, peut paraître fastidieuse (et longue !). Mais c'est un exemple permettant de montrer la difficulté du dénombrement effectif des pavés, quand on veut que celui-ci soit rigoureux.

Proposition 1-6 :

Soit $a > 0$ et $b > 0$, $O(0,0)$, $A(a,0)$, $D(a,b)$, $B(0,b)$ et R le rectangle $OADB$ (les côtés sont parallèles aux axes), tel que : $R = [0, a[\times [0, b[$. Alors R , est quarrable et $l_R^{\text{ext}} = l_R^{\text{int}} = \text{Aire}(R) = a \cdot b$.

Preuve⁽¹⁷⁾:

Rappel : $R_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \subset \dot{R}\}$ et $R_k^{\text{ext}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \bar{R} \neq \emptyset\}$,

Lemme 1: $\forall a \in R, a > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in \mathbb{N}$ tel que: $0 \leq \frac{m_k}{2^k} \leq a < \frac{m_k+1}{2^k}$. De plus : $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{2^k} = a$.

Preuve : $m_k = E(a \cdot 2^k)$, si $E(x)$ est la partie entière du réel x .

La limite est évidente puisque : $\left| a - \frac{m_k}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^k}$.

D'abord, il faut démontrer la propriété (C) suivante :

(C) : si $0 \leq \frac{m_k}{2^k} \leq a < \frac{m_k+1}{2^k}$ et $0 \leq \frac{p_k}{2^k} \leq b < \frac{p_k+1}{2^k}$, alors :

$\exists k_0$ tel que : $\forall k \geq k_0$ $n_k^+ = (m_k + 1) \cdot (p_k + 1)$ et $n_k^- = (m_k - 1) \cdot (p_k - 1) > 0$

Une fois (C) démontrée, la suite est relativement aisée :

Avec : $\forall k \geq k_0, \frac{n_k^+ - n_k^-}{2^{2 \cdot k}} = \frac{(m_k+1) \times (p_k+1) - (m_k-1) \times (p_k-1)}{2^{2 \cdot k}} = \frac{2 \cdot (m_k + p_k)}{2^{2 \cdot k}} = \frac{2}{2^k} \left(\frac{m_k}{2^k} + \frac{p_k}{2^k} \right) \leq \frac{2}{2^k} (a + b),$

Donc, on a : $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k^+ - n_k^-}{2^{2 \cdot k}} = 0$, ce qui veut dire que le rectangle est quarrable.

De plus : $a_k = \frac{n_k^+}{2^{2 \cdot k}} = \frac{(m_k+1) \times (p_k+1)}{2^{2 \cdot k}} = \frac{(m_k+1)}{2^k} \times \frac{(p_k+1)}{2^k},$

Et, d'après le **Lemme 1**: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k+1}{2^k} = a$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k+1}{2^k} = b,$

Alors : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{m_k+1}{2^k} \times \frac{p_k+1}{2^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k+1}{2^k} \times \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k+1}{2^k} = a \times b.$

De même pour b_k évidemment... Donc : $l_R^{\text{int}} = l_R^{\text{ext}} = a \cdot b$.

Démontrons (C), d'abord pour $n_k^- = \text{Card}(R_k^{\text{int}})$:

Soit a et $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0, b > 0$, on pose : $A_{(a,b)} = \{l \in \mathbb{N} \mid 2^l \cdot a \geq 2 \text{ et } 2^l \cdot b \geq 2\}$

Soit : $k_0 = \text{Min } A_{(a,b)} \geq 0$, alors : $A_{(a,b)} = \llbracket k_0, +\infty \rrbracket \subset \mathbb{N}$.

Commençons par un exemple :

Avec : $a = 5 \cdot 10^{-2}$ et $b = 7 \cdot 10^{-3}$, alors: $2^l \cdot a \geq 2$ et $2^l \cdot b \geq 2 \Leftrightarrow l \geq 6$ et $l \geq 9$, donc : $k_0 = 9$

On peut vérifier que : $0 \leq k \leq 8 \Rightarrow R_k^{\text{int}} = \emptyset$. Par exemple pour $k = 8$:

$0 \leq \frac{m_8}{2^8} \leq 5 \cdot 10^{-2} < \frac{m_8+1}{2^8}$ et $0 \leq \frac{p_8}{2^8} \leq 7 \cdot 10^{-3} < \frac{p_8+1}{2^8} \Rightarrow m_8 = 12$ et $p_8 = 1$

Certes : $\left[\frac{1}{2^8}, \frac{2}{2^8} \right[, \dots, \left[\frac{11}{2^8}, \frac{12}{2^8} \right[\subset]0, 0,05[$ mais $\left[\frac{1}{2^8}, \frac{2}{2^8} \right[\not\subset]0, 0,007[\Rightarrow R_8^{\text{int}} = \emptyset,$

Idem si $k = 0, 1, \dots, 7$.

En revanche : pour $k = 9$: $m_9 = 25$ et $p_9 = 3$,

¹⁷ La démonstration qui suit, s'inspire de celle proposée par H. LEBESGUE dans son livre « La mesure des grandeurs », page 37. Voir en ligne. Mais, elle s'en écarte, en raison de la définition des pavés et de leur inclusion potentielle dans l'intérieur de D et non dans D lui-même.

Alors : $\left[\frac{1}{2^9}, \frac{2}{2^9}\right], \dots, \left[\frac{24}{2^9}, \frac{25}{2^9}\right] \subset]0, 5 \cdot 10^{-2}[$ et $\left[\frac{1}{2^9}, \frac{2}{2^9}\right], \left[\frac{2}{2^9}, \frac{3}{2^9}\right] \subset]0, 7 \cdot 10^{-3}[$
 Donc : $\text{Card}(R_9^{\text{int}}) = 24 \times 2 = 48$.

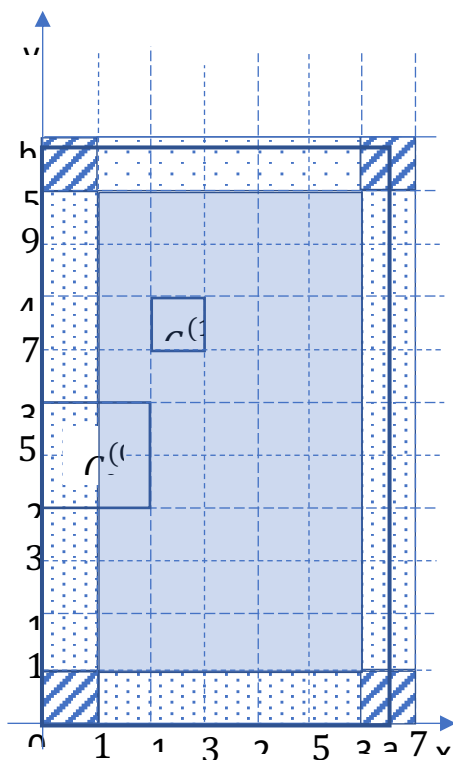


Fig 12 :

Autre exemple, pour a et $b \in \mathbb{R}$, 3

$$< a < \frac{7}{2} \text{ et } 5 < a < \frac{11}{2}$$

Alors : $k_0 = 0$ et si on prend, $k = 1$:

$D = [0, a[\times [0, b[$, ce domaine est représenté par le rectangle aux bords « épais ».

On a visualisé un carré de Q_0 , $C_0^{(0,2)}$, et des carrés de la famille $C_1^{(1,1)}, \dots, C_1^{(1,7)}$

Passons au cas général :

On a : $R_k^{\text{int}} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $C_k^{m,p} \subset]0, a[\times]0, b[$

$$\Leftrightarrow \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que : } \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right] \subset]0, a[\times]0, b[$$

$$\Leftrightarrow \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que : } \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \subset]0, a[\text{ et } \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right] \subset]0, b[,$$

$$\Leftrightarrow \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que : } 0 < m < m+1 \leq a \cdot 2^k \text{ et } 0 < p < p+1 \leq b \cdot 2^k ,$$

b. 2^k ,

$$\Leftrightarrow a \cdot 2^k \geq 2 \text{ et } b \cdot 2^k \geq 2 \Leftrightarrow k \in A_{(a,b)}.$$

Donc : $R_k^{\text{int}} = \emptyset \Leftrightarrow k \notin A_{(a,b)}$

Donc, 2 cas se présentent :

- $k_0 > 0$, alors : $0 \leq k < k_0 \Rightarrow R_k^{\text{int}} = \emptyset$ et $\forall k \geq k_0 R_k^{\text{int}} \neq \emptyset$.
- $k_0 = 0$, alors : $\forall k \geq 0 R_k^{\text{int}} \neq \emptyset$.

Maintenant, soit : $0 \leq \frac{m_k}{2^k} \leq a < \frac{m_k+1}{2^k}$ et $0 \leq \frac{p_k}{2^k} \leq b < \frac{p_k+1}{2^k}$,

Si $k \geq k_0$:

Alors : $\left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right], \dots, \left[\frac{m_k-1}{2^k}, \frac{m_k}{2^k}\right] \subset]0, a[$ et $\left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right], \dots, \left[\frac{p_k-1}{2^k}, \frac{p_k}{2^k}\right] \subset]0, b[$,

Et pas plus, car : $\left[0, \frac{1}{2^k}\right] \not\subset]0, a[$; $\left[\frac{m_k}{2^k}, \frac{m_k+1}{2^k}\right] \not\subset]0, a[$; $\left[0, \frac{1}{2^k}\right] \not\subset]0, b[$; $\left[\frac{p_k}{2^k}, \frac{p_k+1}{2^k}\right] \not\subset]0, b[$,

$$\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\subset]0, a[\Leftrightarrow 1 \leq m \leq m_k - 1 < m_k \leq a \cdot 2^k \text{ et } 1 \leq p \leq p_k - 1 < p_k \leq b \cdot 2^k,$$

Ces inégalités sont possibles que si : $2 \leq a \cdot 2^k$ et $2 \leq b \cdot 2^k$, donc $k \in A_{(a,b)} \Leftrightarrow k \geq k_0$,

Or : $0 \leq m_k \leq a \cdot 2^k < m_k + 1$ et $2 \leq a \cdot 2^k \Rightarrow m_k \geq 2$, idem pour p_k , donc on peut conclure :

Il y a : $(m_k - 1)$ intervalles $\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\subset]0, a[$ et $(p_k - 1)$ intervalles $\left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[\subset]0, b[$,

Donc : $\text{Card}(R_k^{\text{int}}) = (m_k - 1) \times (p_k - 1) > 0$.

Maintenant pour $n_k^+ = \text{Card}(R_k^{\text{ext}})$:

On sait que : $R_k^{\text{ext}} = \{C_k^{m,p} \mid (m,p) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } C_k^{m,p} \cap \bar{R} \neq \emptyset\}$ avec: $\bar{R} = [0, a] \times [0, b]$,

Soit $fR_k = \{C_k^{m,p} \mid (m,p) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } C_k^{m,p} \not\subset \text{Int}(R) \text{ et } C_k^{m,p} \cap \bar{R} \neq \emptyset\}$ (f comme frontière).

Alors : $R_k^{\text{ext}} = R_k^{\text{int}} \cup fR_k$ avec: $R_k^{\text{int}} \cap fR_k = \emptyset$, il suffit donc de déterminer : $\text{Card}(fR_k)$.

Avec : $0 \leq \frac{m_k}{2^k} \leq a < \frac{m_k+1}{2^k}$ et $0 \leq \frac{p_k}{2^k} \leq b < \frac{p_k+1}{2^k}$,

$(m,p) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow [m < 0 \text{ ou } p < 0] \text{ ou } [m = 0 \text{ ou } p = 0] \text{ ou } [1 \leq m < m_k \text{ et } 1 \leq p < p_k] \text{ ou } [m = m_k \text{ ou } p = p_k] \text{ ou } [m_k < m \text{ ou } p_k < p]$.

Remarque : on démontre facilement que si ces 5 conditions sont déclinées en sous-ensembles de $\mathbb{Z}^2$, on obtient un recouvrement de $\mathbb{Z}^2$ (mais pas une partition).

- Immédiatement, on élimine $[1 \leq m < m_k \text{ et } 1 \leq p < p_k]$, car cette propriété permet de définir les éléments de R_k^{int} , voir ci-dessus.
- $[m < 0 \text{ ou } p < 0]$: si $m < 0, m + 1 \leq 0 \Rightarrow \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\cap [0, a] = \emptyset$,
Idem pour p : si $p < 0, p + 1 \leq 0 \Rightarrow \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[\cap [0, b] = \emptyset$,
Donc : $[m < 0 \text{ ou } p < 0] \Rightarrow \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[\cap [0, a] \times [0, b] = \emptyset$,
- $[m = 0 \text{ ou } p = 0] \Rightarrow C_k^{m,p} \cap [0, a] \times [0, b] \neq \emptyset$, en effet :
 $m = 0$: $\left[0, \frac{1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[\cap [0, a] \times [0, b] \neq \emptyset$ pour $0 \leq p \leq p_k$, donc $p_k + 1$ cas,
Ou $p = 0$: $\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left[0, \frac{1}{2^k} \right[\cap [0, a] \times [0, b] \neq \emptyset$ pour $0 \leq m \leq m_k$, donc $m_k + 1$ cas,
- $[m = m_k \text{ ou } p = p_k] \Rightarrow \left[\frac{m_k}{2^k}, \frac{m_k+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p_k}{2^k}, \frac{p_k+1}{2^k} \right[\cap [0, a] \times [0, b] \neq \emptyset$,
Ceci pour $0 \leq p \leq p_k$, donc $p_k + 1$ cas,
Ou : $p = p_k \Rightarrow \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[\times \left[\frac{p_k}{2^k}, \frac{p_k+1}{2^k} \right[\cap [0, a] \times [0, b] \neq \emptyset$,
Ceci, pour $0 \leq m \leq m_k$, donc $m_k + 1$ cas,
- $[m_k < m \text{ ou } p_k < p] \Rightarrow m \geq m_k + 1 \Rightarrow [0, a] \cap \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right[= \emptyset$,
Idem pour $p > p_k \Rightarrow p \geq p_k + 1 \Rightarrow [0, b] \cap \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right[= \emptyset$,

Combien y a-t-il de pavés qui vérifient tous ces cas ? : $((m_k + 1) + (p_k + 1)) \times 2 - 4$

Pourquoi « -4 », parce que les 4 pavés « des coins » sont comptés 2 fois,

A

savoir :

$$\left[0, \frac{1}{2^k}\right] \times \left[0, \frac{1}{2^k}\right] ; \left[0, \frac{1}{2^k}\right] \times \left[\frac{p_k}{2^k}, \frac{p_k+1}{2^k}\right] ; \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m_k+1}{2^k}\right] \times \left[0, \frac{1}{2^k}\right] ; \left[\frac{m_k}{2^k}, \frac{m_k+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{p_k}{2^k}, \frac{p_k+1}{2^k}\right]$$

Par suite : $\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = (m_k - 1) \cdot (p_k - 1) + ((m_k + 1) + (p_k + 1)) \times 2 - 4$,

Donc, au final et par le calcul : $\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = (m_k + 1) \cdot (p_k + 1)$.

Conséquences :

- On a : $R = [0, a[\times [0, b[$, alors : $\text{Aire}(R) = \text{Aire}(\dot{R}) = \text{Aire}(\bar{R}) = a \cdot b$.
Il suffit d'appliquer la **Proposition 1-4**, $\text{Aire}(\text{Fr}(R)) = 0$, $\bar{R} = R \cup \text{Fr}(R)$, $\dot{R} = R - \text{Fr}(R)$.
- Soit un C dont les côtés sont parallèles aux axes et dont la mesure des côtés vaut h , alors : C est quarrable et $\text{Aire}(C) = l_C^{\text{ext}} = l_C^{\text{int}} = h^2$.
- Et donc : $\forall k \in \mathbb{N} \forall C_k \in Q_k, C_k \text{ est quarrable et } \text{Aire}(C_k) = l_{C_k}^{\text{ext}} = l_{C_k}^{\text{int}} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{2^{2 \cdot k}}$,

Proposition 1-7 :

- Un point $\{A\}$ est quarrable et : $l_{\{A\}}^{\text{int}} = l_{\{A\}}^{\text{ext}} = 0$
- Un segment quelconque $[A, B]$ (resp. $]A, B[$) du plan, il est quarrable et : $l_{[A,B]}^{\text{int}} = l_{[A,B]}^{\text{ext}} = 0$ (resp. $l_{]A,B[}^{\text{int}} = l_{]A,B[}^{\text{ext}} = 0$).

Preuve :

Pour le point : d'une part, il est évident qu'aucun carré de Q_k n'est contenu dans $\{A\}$,

Donc : $D_k^{\text{int}} = \emptyset$ et $n_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{int}}) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} a_k = 0 \Rightarrow l_{\{A\}}^{\text{int}} = 0$.

D'autre part : $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists C_k \text{ unique tel que : } A \in C_k \Rightarrow n_k^+ = 1 \Rightarrow b_k = \frac{1}{2^{2 \cdot k}} \Rightarrow l_{\{A\}}^{\text{ext}} = 0 \dots$

Pour le segment : pour l'intérieur on a le même raisonnement que pour le point,

Donc : $D_k^{\text{int}} = \emptyset$ et $n_k^- = \text{Card}(D_k^{\text{int}}) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} a_k = 0 \Rightarrow l_{[A,B]}^{\text{int}} = 0$.

Pour les carreaux qui intersectent le segment :

Il existe un rectangle $R=MNPQ$, donc les côtés sont parallèles aux axes, tels que A et B appartiennent respectivement à un côté (comme le dessin ci-contre l'indique).

Soit n_k^+ le nombre de carrés de rang k qui intersectent le segment, N_k^- le nombre

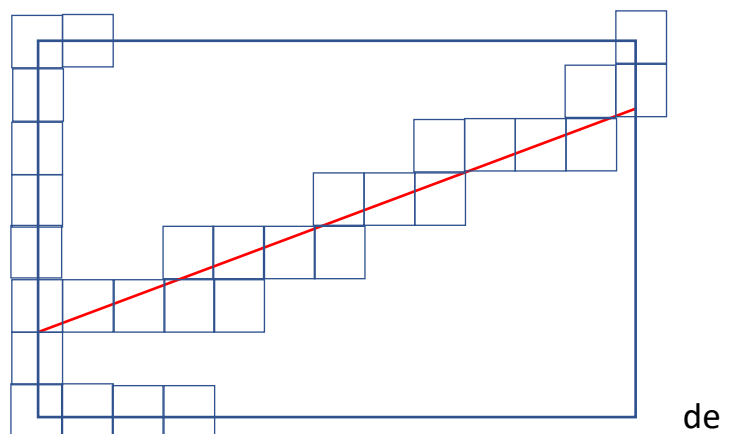


Fig 8 : un rectangle posé sur un

carrés contenus dans le rectangle et N_k^+ le nombre de carrés qui intersectent le rectangle.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N} \ 0 \leq n_k^+ \leq N_k^+ - N_k^-$

Cette inégalité exprime simplement qu'il y a moins de carrés, de rang k , qui intersectent le segment que de carrés qui se situent sur la frontière du rectangle R , ce qui paraît évident, sur le dessin ci-contre :

En conséquence : $0 \leq \frac{n_k^+}{2^{2.k}} \leq \frac{N_k^+ - N_k^-}{2^{2.k}} \Rightarrow$ puisque R est quarrable, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k^+}{2^{2.k}} = 0 \Rightarrow l_{[A,B]}^{\text{ext}} = 0$.

Commentaire : ce dernier résultat permet de mettre en évidence la différence entre Aire et Longueur, car pour un segment, son Aire est nulle... mais sa longueur est strictement positive (si $A \neq B$).

Traditionnellement, un polytope est une intersection d'intérieur non-vide de demi-plans⁽¹⁸⁾. Nous appellerons polygone une réunion finie de polytopes, son intérieur est non vide, il est connexe et évidemment pas forcément convexe.

Soit P un polygone, alors il existe $n+1$ points $A_1, \dots, A_{n+1}$ tels que :

$A_1 = A_{n+1}$ et $\text{Fr}(P) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} [A_i, A_{i+1}]$, les A_i pour $1 \leq i \leq n$ étant les sommets du polygone⁽¹⁹⁾.

Proposition 1-8 : Soit un polygone P , alors il est quarrable.

Preuve :

Soit P est un polygone à n côtés, donc n sommets,

Donc : $\text{Fr}(P) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} [A_i, A_{i+1}]$, l'intersection de 2 côtés étant, au plus, un point,

On a : $l_{\text{Fr}(P)}^{\text{int}} = l_{\text{Fr}(P)}^{\text{ext}} \leq \sum_{i=1}^{i=n} l_{[A_i, A_{i+1}]}^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{i=n} l_{[A_i, A_{i+1}]}^{\text{ext}} = 0$, d'après la **Proposition 1-4**,

A savoir : $l_{\text{Fr}(P)}^{\text{int}} = l_{\text{Fr}(P)}^{\text{ext}} = 0$, donc P est quarrable,

Donc : $\text{Aire}(P) = l_P^{\text{int}} = l_P^{\text{ext}}$. Cqfd !

Note : on pourra calculer explicitement $\text{Aire}(P)$, mais pas avant de connaître l'aire du triangle, car tout polytope est une réunion de triangles⁽²⁰⁾.

Puisque l'on sait que les polygones sont quarrables, peut-on approximer un domaine par des polygones de plus en plus proches ?...

Proposition 1-9 : soit D un domaine borné, sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

D est quarrable, si et seulement si : il existe $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites de polygones, tels que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \subset D \subset Q_n$,

¹⁸ Voir définition dans « Géométrie », M. Berger, Eds F. Nathan, Tome 3, page 81.

¹⁹ Dans le livre ci-dessus on a, page 89 : $\text{Fr}(P) = \bigcup_i \text{Face}_i(P)$. Dans notre cas $d=2$ (d dimension de l'espace), $\text{Face}_i(P)$ est une partie (bornée, fermée) d'une droite ($d-1=1$), d'où un segment $[A_i, A_{i+1}]$...

²⁰ Voir « Géométrie », M. Berger, Tome 3, page 94, Proposition 12.2.3 (dans le cas $d=2$).

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} l_{Q_n - P_n}^{\text{int}} = \lim_{k \rightarrow \infty} l_{Q_n - P_n}^{\text{ext}} = 0.$$

Dans ce cas, on a alors : $l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{P_n}^{\text{ext}} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{P_n}^{\text{int}} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{Q_n}^{\text{ext}} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{Q_n}^{\text{int}}$.

$$\text{Donc : Aire}(D) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Aire}(Q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Aire}(P_n)$$

Commentaire : Cette proposition laisse entendre que D est quarrable dans le cas où l'on peut approcher et seulement dans ce cas, le domaine par une suite de polygones, les uns inclus dans D , les autres contenant D , d'une manière aussi proche que l'on veut.

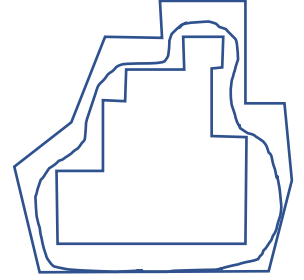


Fig 9 : une surface

Preuve :

Si D est quarrable :

Il suffit de poser : $P_k = D_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} C_k$ et $Q_k = D_k^+ = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} C_k$,

Avec : $D_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \subset \text{Int}(D)\}$ et $D_k^{\text{ext}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset\}$,

Alors on a bien, par définition, la double inclusion,

Or : $D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \text{ et } C_k \not\subset \text{Int}(D)\}$,

De plus : $Q_k - P_k = D_k^+ - D_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}}} C_k$,

$\text{Card} \{C_k \in Q_k \mid C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \text{ et } C_k \not\subset \text{Int}(D)\} = n_k^+ - n_k^-$,

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}, l_{Q_k - P_k}^{\text{int}} = l_{Q_k - P_k}^{\text{ext}} = b_k - a_k$, d'où le résultat.

Inversement, si on part de l'hypothèse :

Il existe $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites de polygones, tels que :

- $P_n \subset D \subset Q_n$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{Q_n - P_n}^{\text{int}} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{Q_n - P_n}^{\text{ext}} = 0$.

D'après : $P_n \subset D \subset Q_n$ on a : $l_{P_n}^{\text{int}} \leq l_D^{\text{int}} \leq l_{Q_n}^{\text{int}}$ et $l_{P_n}^{\text{ext}} \leq l_D^{\text{ext}} \leq l_{Q_n}^{\text{ext}}$,

Avec : $l_{P_k}^{\text{ext}} = l_{P_k}^{\text{int}}$ et $l_{Q_k}^{\text{ext}} = l_{Q_k}^{\text{int}}$, car P_k et Q_k sont quarrables, ce sont des polygones,

Or, d'après la **Proposition 1-4** : $l_{Q_k - P_k}^{\text{ext}} = l_{Q_k - P_k}^{\text{int}} = l_{Q_k}^{\text{ext}} - l_{P_k}^{\text{ext}} = l_{Q_k}^{\text{int}} - l_{P_k}^{\text{int}}$,

Donc : $0 \leq l_D^{\text{ext}} - l_D^{\text{int}} \leq l_{Q_k}^{\text{ext}} - l_{P_k}^{\text{ext}} = l_{Q_k}^{\text{int}} - l_{P_k}^{\text{int}} = l_{Q_k - P_k}^{\text{ext}} = l_{Q_k - P_k}^{\text{int}}$,

Ceci car : $a \leq c \leq b$ et $a \leq c' \leq b$ et $c' \leq c \Rightarrow 0 \leq c - c' \leq b - a$,

Donc : $l_D^{\text{ext}} - l_D^{\text{int}} = 0$, c'est-à-dire : $l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}}$... Donc, D est quarrable... Cqfd !

IV-2 : Déplacements⁽²¹⁾ d'un domaine ou surface.

Proposition 1-10 : Soit D un domaine quarrable (borné) de $\mathbb{R}^2$ et T une translation de $\mathbb{R}^2$ (de vecteur $\vec{u}$), alors $T(D)$ est quarrable et $l_{T(D)}^{\text{ext}} = l_{T(D)}^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}}$. Donc : $\text{Aire}(T(D)) = \text{Aire}(D)$.

²¹ On appelle déplacements du plan toutes isométries qui conservent les angles orientés : translation, rotation...

Preuve :

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}$ D_k^- et D_k^+ sont des polygones composés de n_k^- et n_k^+ pavés C_k , donc $T(D_k^-)$ et $T(D_k^+)$ sont des polygones composés du même nombre de pavés $C'_k = T(C_k)$, hélas ils n'appartiennent pas forcément à la famille Q_k (sauf, parfois, si les coordonnées du vecteur translation sont entières).

Mais, on le sait, ce sont des carrés dont les côtés sont parallèles aux axes et disjoints 2 à 2 (évident car la translation conserve cette propriété) et dont les côtés ont les mêmes mesures que C_k , et l'on a donc : $l_{C'_k}^{\text{ext}} = l_{C'_k}^{\text{int}} = (\frac{1}{2^k})^2 = \frac{1}{2^{2.k}}$ (il suffit d'appliquer la **Proposition 1-6**, voir conséquence sur le fait que ce carré C'_k est quarrable).

De plus : $T(D_k^-) \subset T(D) \subset T(D_k^+)$.

On a : $l_{T(D_k^+)}^{\text{ext}} = n_k^+ \cdot \frac{1}{2^{2.k}} = a_k$ et $l_{T(D_k^-)}^{\text{int}} = n_k^- \cdot \frac{1}{2^{2.k}} = b_k$,

Ces égalités proviennent du fait que $T(D_k^+)$ (resp. $T(D_k^-)$) est composé de n_k^+ (resp. n_k^-) pavés qui sont disjoints, il suffit alors d'appliquer la **Proposition 1-4** (réunion disjointe de pavés),

On a donc : $b_k \leq l_{T(D)}^{\text{int}} \leq l_{T(D)}^{\text{ext}} \leq a_k$,

Donc, puisque D est quarrable : $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = l_{T(D)}^{\text{ext}} = l_{T(D)}^{\text{int}} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}} \dots$

Conséquence :

Soit $b > a$ et $c > d$, $C(a,d)$, $F(b,d)$, $G(b,c)$ et $H(a,c)$ et Q le rectangle EFGH (les côtés sont parallèles aux axes), tel que : $Q = [a, b[\times [d, c[$, alors : Q est quarrable et $l_Q^{\text{ext}} = l_Q^{\text{int}} = (b - a) \cdot (c - d)$.

En effet : ce rectangle est le translaté du rectangle de mêmes dimensions, mais dont le sommet C est à l'origine du repère : $Q = T(R)$, R étant alors le rectangle dont les sommets seront : $O(0,0)$, $B(b-a,0)$, $C(b-a, c-d)$ $D(c-d, 0)$. En appliquant la **Proposition 1-6** on a le résultat.

Proposition 1-11 :

Soit C un carré dont les côtés ne sont pas parallèles aux axes, si les côtés ont pour mesure h , alors C est quarrable et $l_C^{\text{ext}} = l_C^{\text{int}} = h^2$.

Preuve :

Sur la Figure 10, ci-dessous :

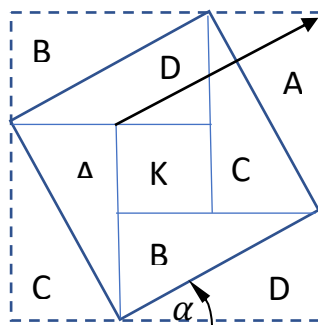


Fig 10

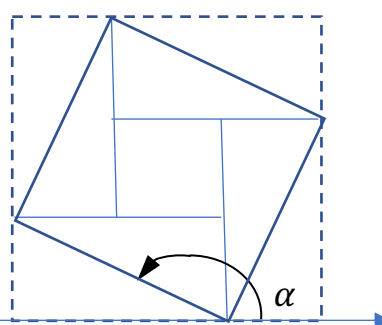


Fig 11

Soit h la longueur du côté du carré du départ C (en gras sur les figures ci-dessus),
 Soit E le carré qui enveloppe C (en pointillés sur les figures ci-dessus), ses côtés sont parallèles aux axes.

Soit A, B, C, D les 4 triangles rectangles et A' le triangle issu de A par une translation (sur la Figure 10, la flèche noire est le vecteur d'une de ces translations). On obtient également les triangles B', C', D' , respectivement issus de B, C, D par une translation.

Les figures $A' \cup C$ (resp. $C' \cup A, B' \cup D, D' \cup B$), sont des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes.

La figure K est un carré dont les côtés sont parallèles aux axes.

Note : Quelle est la différence entre la Figure 10 et 11 ? L'angle α varie de 0 à π ,

La figure 10, correspond à : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, (pour $0, \frac{\pi}{2}$ et π le carré C « revient » parallèle aux axes),

Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, Le carré K disparaît (voir ci-dessous pourquoi), il reste seulement les 4 triangles rectangles A, B, C, D . Mais, le raisonnement ci-après fonctionne encore,

La figure 11, correspond à : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, le raisonnement ci-dessous sera identique.

Passons à la démonstration : Figure 10, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

Les côtés des triangles rectangles mesurent : $h \cdot \cos(\alpha)$ et $h \cdot \sin(\alpha)$.

A' issu de A par la translation $T : A' = T(A)$, alors d'après la **Proposition 1-10** : $I_A^{\text{ext}} = I_A^{\text{int}} = I_{A'}^{\text{ext}} = I_{A'}^{\text{int}}$.

$A' \cup C, C' \cup A, B' \cup D, D' \cup B$ sont des rectangles dont les côtés respectifs mesurent également : $h \cdot \cos(\alpha)$ et $h \cdot \sin(\alpha)$.

Les côtés de K mesurent : $h \cdot \cos(\alpha) - h \cdot \sin(\alpha) = h \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))$.

Puisque les côtés de K sont parallèles aux axes, on a : $I_K^{\text{ext}} = I_K^{\text{int}} = h^2 \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2$.

Précision : d'où la disparition du carré K pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, car : $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Précision encore : sur la Figure 11, les valeurs des mesures des côtés sont inversées pour les triangles, mais restent identiques pour K et E .

Avec les **Propositions 1-4 et 1-6** (sur la réunion des domaines et le rectangle, côtés parallèles aux axes),

On a : $h^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = I_{A' \cup C}^{\text{ext}} = I_{A'}^{\text{ext}} + I_C^{\text{ext}} = I_A^{\text{ext}} + I_C^{\text{ext}} = I_{A \cup C}^{\text{ext}}$ (idem pour $I_{A' \cup C}^{\text{int}}$).

Précision : il est nécessaire de noter que $A' \cap C$ n'est pas vide, mais est un segment $[U, V]$, dont on sait (**Proposition 1-7**), que : $I_{[U, V]}^{\text{ext}} = I_{[U, V]}^{\text{int}} = 0$, donc les égalités de la **Proposition 1-4** s'appliquent.

De même on a : $h^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = I_{D' \cup B}^{\text{ext}} = I_{D'}^{\text{ext}} + I_B^{\text{ext}}$ (idem pour $I_{D' \cup B}^{\text{int}}$).

Donc : $I_C^{\text{ext}} = (I_A^{\text{ext}} + I_C^{\text{ext}}) + (I_B^{\text{ext}} + I_D^{\text{ext}}) + I_K^{\text{ext}} = 2 \cdot h^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + h^2 \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2$.

Après application de formules et réductions, on a : $I_C^{\text{ext}} = I_C^{\text{int}} = h^2$.

On a les mêmes calculs et résultats à partir de la Figure 11.

D'où le résultat final... Cqfd...

IV-3 : Résultats généraux : isométries et homothéties

Proposition 1-12 :

Si Φ est une isométrie du plan et D est quarrable, alors :

$\Phi(D)$ est quarrable et : $l_{\Phi(D)}^{\text{ext}} = l_{\Phi(D)}^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}}$. Donc : Aire($\Phi(D)$) = Aire(D).

Commentaires, ce que l'on sait déjà :

- Les carrés sont quarrables, que leurs côtés soient parallèles aux axes, ou pas. Donc, quand on a un carré et que l'on applique une rotation, le carré « image » est aussi quarrable et son aire est calculable (**Proposition 1-11**).

- Pour la translation, qui est une isométrie, on a également le résultat annoncé.

On va voir que c'est encore vrai pour toutes les isométries du plan.

Preuve :

Lemme 2 :

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, qui vérifient la propriété suivante :

$$F \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \left[\forall D \subset \mathbb{R}^2 \ D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow F(D) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \text{ et } l_{F(P)}^{\text{ext}} = l_{F(P)}^{\text{int}} = l_P^{\text{ext}} = l_P^{\text{int}} \right]$$

On remarque que : $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car évidemment : $Id_{\mathbb{R}^2} \in \mathcal{A}$, mais également toutes les translations (**Proposition 1-10**).

Alors si h et g $\in \mathcal{A} \Rightarrow h \circ g \in \mathcal{A}$:

Preuve :

Si P est quarrable et g $\in \mathcal{A}$, alors : D = g(P) est quarrable et : $l_{g(P)}^{\text{ext}} = l_{g(P)}^{\text{int}} = l_P^{\text{ext}} = l_P^{\text{int}}$

Également, si h $\in \mathcal{A}$: h(D) est quarrable et : $l_{h(D)}^{\text{ext}} = l_{h(D)}^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}}$,

$$\text{Donc : } \begin{aligned} l_{h(g(P))}^{\text{ext}} &= l_{h(g(P))}^{\text{ext}} = l_{h(D)}^{\text{ext}} = l_D^{\text{ext}} = l_{g(P)}^{\text{ext}} = l_P^{\text{ext}} \\ l_{h(g(P))}^{\text{int}} &= l_{h(g(P))}^{\text{int}} = l_{h(D)}^{\text{int}} = l_D^{\text{int}} = l_{g(P)}^{\text{int}} = l_P^{\text{int}} \end{aligned}$$

Par hypothèse on a : $l_P^{\text{ext}} = l_P^{\text{int}} \Rightarrow h(g(P))$ est quarrable et $l_{h(g(P))}^{\text{ext}} = l_{h(g(P))}^{\text{int}} = l_P^{\text{ext}} = l_P^{\text{int}}$

On conclut que : h o g $\in \mathcal{A}$.

On sait que toute isométrie du plan est la composée d'au plus 3 réflexions (symétries orthogonales) :

Donc : $\forall \Phi \in \text{Is}(\mathbb{R}^2) \exists \Delta_i \ i=1,2,3 \ 3 \text{ droites du plan, telles que : } \Phi = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$ (au plus, certaines pouvant se réduire à l'identité). Voir démonstration à l'**Annexe n°3**.

On va démontrer que : $\forall \Delta$, droite du plan, $s_{\Delta} \in \mathcal{A}$.

Donc, grâce au **Lemme 2** : $\text{Is}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{A}$, ce qui correspond au résultat demandé.

Preuve :

Soit Δ une droite du plan et s = s_{Δ} la symétrie orthogonale de droite Δ .

Soit D un domaine borné et s(D) le symétrique de D,

Notation : $k \in \mathbb{N}$, D_k^{int} et D_k^{ext} les ensembles des pavés associés à D et $s(D)_k^{\text{int}}$ et $s(D)_k^{\text{ext}}$ l'ensemble des pavés associés à $s(D)$. On a : $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) = n_k^-$ et $\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = n_k^+$.

Or : $\forall k \in \mathbb{N} \ C_k \in Q_k$ mais : $s(C_k) \notin Q_k$, donc : $s(C_k)$ n'appartient ni à $s(D)_k^{\text{int}}$, ni à $s(D)_k^{\text{ext}}$.

En revanche, on peut affirmer que $s(C_k)$ reste un pavé, en raison du fait que s est une isométrie. Donc, avec la **Proposition 1-11**, $s(C_k)$, qui est un pavé aux côtés de même longueur que C_k , est quarrable.

Et : $l_{s(C_k)}^{\text{ext}} = l_{s(C_k)}^{\text{int}} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{2^{2k}}$, l'isométrie conservant les longueurs (et les angles).

Donc, on peut noter : $S_k^{\text{int}} = \{s(C_k) | C_k \in D_k^{\text{int}}\}$ et $S_k^{\text{ext}} = \{s(C_k) | C_k \in D_k^{\text{ext}}\}$,

Alors, s étant une bijection : $\text{Card}(S_k^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{int}}) = n_k^-$ et $\text{Card}(S_k^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = n_k^+$,

Posons : $P_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} s(C_k) = s(\bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} (C_k)) = s(D_k^-)$,

De même : $P_k^+ = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} s(C_k) = s(\bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} (C_k)) = s(D_k^+)$,

Alors : P_k^- et P_k^+ sont deux polygones. Ils sont tous les deux quarrables, d'après la **Proposition 1-8**.

Puisqu'ils sont formés de pavés disjoints 2 à 2, on appliquera la **Proposition 1-4**, à savoir la réunion ensembliste de tous ces pavés, avec la propriété de la symétrie, à savoir : $s(A \cup B) = s(A) \cup s(B)$ et $A \cap B = \emptyset \implies s(A) \cap s(B) = \emptyset$,

On aura : $l_{P_k^-}^{\text{int}} = l_{P_k^+}^{\text{ext}} = n_k^+ \times \frac{1}{2^{2k}} = b_k = \text{Aire}(P_k^+)$,

Et : $l_{P_k^-}^{\text{ext}} = l_{P_k^+}^{\text{int}} = n_k^- \times \frac{1}{2^{2k}} = a_k = \text{Aire}(P_k^-)$,

Or : $D_k^- \subset D \subset D_k^+ \implies s(D_k^-) = P_k^- \subset s(D) \subset P_k^+ = s(D_k^+)$.

On a, d'après encore la **Proposition 1-4** : $a_k = \text{Aire}(P_k^-) \leq l_{s(D)}^- \leq l_{s(D)}^+ \leq \text{Aire}(P_k^+) = b_k$,

Comme D est quarrable, par hypothèse : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l_D^{\text{int}}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = l_D^{\text{ext}}$ et $l_D^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}}$,

On a : $l_D^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}} = l_{s(D)}^- = l_{s(D)}^+ \dots$ Cqfd

Conséquence : Soit R un rectangle quelconque, alors il est issu par une isométrie d'un rectangle de même dimension, dont les côtés sont parallèles aux axes comme celui de la **Proposition 1-6**. En appliquant la **Proposition 1-12** ci-dessus, on a : $\text{Aire}(R) = a.b$ (si a et b sont les longueurs des côtés).

Proposition 1-13 : Si $h = h(\Omega, r)$ est une homothétie du plan, de centre Ω et de rapport $r > 0$, si D est un domaine quarrable, alors : $h(D) = H(\Omega, r)(D)$ est également quarrable et : $l_{h(D)}^{\text{ext}} = l_{h(D)}^{\text{int}} = r^2 \cdot l_D^{\text{ext}} = r^2 \cdot l_D^{\text{int}}$. Donc : $\text{Aire}(h(D)) = r^2 \cdot \text{Aire}(D)$.

Preuve :

C'est la même preuve que la **Proposition 1-12**, mais avec un agrandissement des pavés.

Soit : $h = h(\Omega, r)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

Soit D un domaine borné et $h(D)$ l'homothétique de D .

Notation : $k \in \mathbb{N}$, D_k^{int} et D_k^{ext} les ensembles des pavés associés à D et $h(D)_k^{\text{int}}$ et $h(D)_k^{\text{ext}}$ l'ensemble des pavés associés à $h(D)$. On a : $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) = n_k^-$ et $\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = n_k^+$.

Or : $\forall k \in \mathbb{N} \ C_k \in Q_k$ on a : $h(C_k) \notin Q_k$, donc : $h(C_k)$ n'appartient ni a $H(D)_k^{\text{int}}$, ni a $H(D)_k^{\text{ext}}$.

En revanche, on peut affirmer que $h(C_k)$ reste un pavé, en raison du fait que h est une homothétie.

Mais, les côtés du pavé valent : $\frac{r}{2^k}$, il est quarrable.

Et : $l_{h(C_k)}^{\text{ext}} = l_{h(C_k)}^{\text{int}} = (\frac{r}{2^k})^2 = \frac{r^2}{2^{2.k}}$, l'homothétie conserve la forme des pavés, il suffit d'appliquer à ce pavé la **Proposition 1-11**, sur l'Aire du pavé non forcément parallèle aux axes.

Donc, on peut poser : $H_k^{\text{int}} = \{h(C_k) | C_k \in D_k^{\text{int}}\}$ et $H_k^{\text{ext}} = \{h(C_k) | C_k \in D_k^{\text{ext}}\}$,

Alors, h étant une bijection : $\text{Card}(H_k^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{int}}) = n_k^-$ et $\text{Card}(H_k^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = n_k^+$,

Posons : $H_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} h(C_k) = h(\bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} (C_k)) = h(D_k^-)$,

De même : $H_k^+ = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} h(C_k) = h(\bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} (C_k)) = h(D_k^+)$,

Alors : H_k^- et H_k^+ sont deux polygones, ils sont tous les deux quarrables, d'après la **Proposition 1-8**.

Puisqu'ils sont formés de pavés disjoints 2 à 2, on appliquera la **Proposition 1-4**, à savoir la réunion ensembliste de tous ces pavés, avec la propriété de l'homothétie, c'est-à-dire : $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$ et $A \cap B = \emptyset \Rightarrow h(A) \cap h(B) = \emptyset$,

On aura : $l_{H_k^+}^{\text{int}} = l_{H_k^+}^{\text{ext}} = n_k^+ \times \frac{r^2}{2^{2.k}} = r^2 \times n_k^+ \times \frac{1}{2^{2.k}} = r^2 \times b_k = \text{Aire}(H_k^+)$,

Et : $l_{H_k^-}^{\text{int}} = l_{H_k^-}^{\text{ext}} = n_k^- \times \frac{r^2}{2^{2.k}} = r^2 \times n_k^- \times \frac{1}{2^{2.k}} = r^2 \times a_k = \text{Aire}(H_k^-)$,

Or : $D_k^- \subset D \subset D_k^+ \Rightarrow H(D_k^-) = H_k^- \subset H(D) \subset H_k^+ = h(D_k^+)$.

On a, d'après encore la **Proposition 1-4** : $r^2 \times a_k = \text{Aire}(H_k^-) \leq l_{h(D)}^- \leq l_{h(D)}^+ \leq \text{Aire}(H_k^+) = r^2 \times b_k$,

Comme D est quarrable, par hypothèse : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = l_D^{\text{int}}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = l_D^{\text{ext}}$ et $l_D^{\text{int}} = l_D^{\text{ext}}$,

Donc : $r^2 \times l_D^{\text{int}} = r^2 \times l_D^{\text{int}} = l_{h(D)}^- = l_{h(D)}^+ \dots \text{Aire}(h(D)) = r^2 \times \text{Aire}(D) \dots \text{Cqfd}$

IV-4 : Où l'on retrouve deux surfaces « bien connues » :

Un triangle T est quarrable et $\text{Aire}(T) = \frac{a.b}{2}$,

si R est le rectangle, dont les côtés mesurent a et b , et dont un côté coïncide avec le plus grand côté du triangle ($[A, B]$) et le côté opposé contenant le 3^{ème} sommet (C). On en déduira la formule du calcul de l'aire du triangle !

Momentanément et pour faciliter l'écriture, on écrira : « $\text{Aire}(\cdot) = \lambda(\cdot)$ ».

On a : $R = T_1 \cup T_2 \cup T_1' \cup T_2'$.

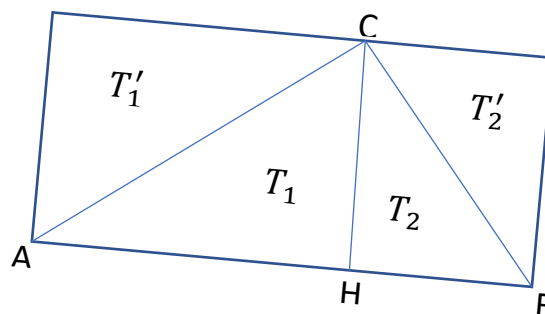


Fig 12 · un triangle avec le

Or : T'_1 est l'image de T_1 (resp. T'_2 est l'image de T_2) par une symétrie centrale (ou une rotation).

Donc : $\lambda(T_1) = \lambda(T'_1)$, resp. $\lambda(T_2) = \lambda(T'_2)$,

Note : Si l'on veut prouver le résultat correctement, ce n'est pas si facile, tout simplement parce que les intersections des différents domaines ne sont pas vides...

Par exemple : $T'_1 \cap T_1 = [A, C]$ et $T'_2 \cap T_2 = [B, C]$

On a, d'après la **Proposition 1-4**: $\lambda(R) = \lambda(T_1 \cup T'_1) + \lambda(T_2 \cup T'_2) - \lambda[(T_1 \cup T'_1) \cap (T_2 \cup T'_2)]$

Or : $(T_1 \cup T'_1) \cap (T_2 \cup T'_2) = (T_1 \cap T_2) \cup (T_1 \cap T'_2) \cup (T_2 \cap T'_1) \cup (T'_1 \cap T'_2) = [H, C] \cup \{C\} \cup \{C\} \cup \{C\} = [H, C]$, donc : $\lambda(R) = \lambda(T_1 \cup T'_1) + \lambda(T_2 \cup T'_2)$.

Mais aussi : $\lambda(T_1 \cup T'_1) = \lambda(T_1) + \lambda(T'_1) - \lambda(T_1 \cap T'_1) = \lambda(T_1) + \lambda(T'_1) - \lambda([A, C]) = \lambda(T_1) + \lambda(T'_1) = 2 \cdot \lambda(T_1)$.

De même : $\lambda(T_2 \cup T'_2) = \lambda(T_2) + \lambda(T'_2) = 2 \cdot \lambda(T_2)$.

Donc : $\lambda(R) = 2 \cdot (\lambda(T_1) + \lambda(T_2)) = 2 \cdot (\lambda(T_1 \cup T_2)) + \lambda(T_1 \cap T_2) = 2 \cdot (\lambda(T_1 \cup T_2) + \lambda([H, C]))$.

Conclusion : $a.b = \lambda(R) = 2 \cdot (\lambda(T_1 \cup T_2)) = 2 \cdot \lambda(T) \dots$

Note : en fait, si on oublie les intersections qui sont des segments et qui sont d'aire nulle, la démonstration est très simple. Ce n'est que la mathématisation d'actions que les élèves font couramment (découpage, avec des ciseaux, sur du papier). Mais, la différence est que l'intersection de deux triangles est un segment (par exemple : T_1 et T'_1), donc d'aire nulle, qui n'apparaît pas dans un découpage réel.

Sur le disque $D = D(O, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, M) \leq r\}$, d étant la distance euclidienne naturelle.

Et $C = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, M) = r\}$.

D'abord, soit P_n le polygone régulier inscrit à n côtés ($n \geq 3$) dont les sommets sont sur le cercle C , alors si $l(P_n)$ est la longueur de la frontière de P_n , cette suite est croissante et bornée supérieurement, donc convergente. On pose $\lim_{n \rightarrow \infty} l(P_n) = l(C)$ la longueur du périmètre du cercle.

En utilisant Thalès et Pythagore, on montre facilement que si P_1 et P_2 sont

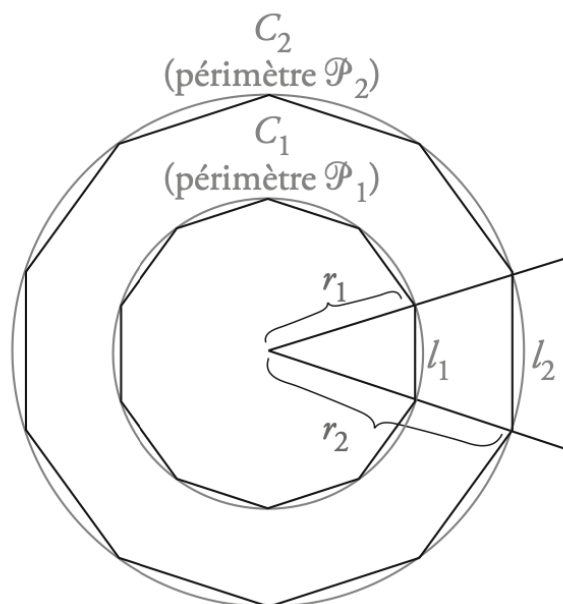


Fig 13 : deux cercles

2 polygones⁽²²⁾ réguliers inscrits dans deux cercles concentriques de rayons r_1 et r_2 , alors : $\frac{l(P_2)}{l(P_1)} = \frac{r_2}{r_1}$,

Donc : $\exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \frac{l(P_2)}{2.r_2} = \frac{l(P_1)}{2.r_1} = c$.

Pour r donné et $\forall n \in \mathbb{N} \frac{l(P_n)}{2.r} = c$, en passant à la limite : $\frac{l(C)}{2.r} = c$.

Cette constante est connue sous le nom de « pi » et se symbolise par π . Elle se calcule par approximation, elle se fait plus ou moins rapidement en fonction de la procédure choisie⁽²³⁾.

On sait, par la **Proposition 1-8**, que P_n est quarrable !.

Pour $n \geq 3$, on sait que P_n est composé de n triangles isocèles OAB , A et B étant 2 sommets consécutifs de la frontière de P_n et situés sur C , $mes(\widehat{AOB}) = \frac{2.\pi}{n}$ (pour $n = 3$, P_3 est un triangle équilatéral).

$Aire(P_n) = n.Aire(OAB)$ (on néglige les intersections !)...

Après avoir défini les 2 fonctions $\sin$ et $\cos$ ⁽²⁴⁾, on a : $Aire(OAB) =$

$$r. \cos\left(\frac{\pi}{n}\right). 2. r. \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \frac{1}{2} = r^2. \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

$$\text{Donc : } Aire(P_n) = r^2. n. \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}. r^2. n. \sin\left(\frac{2.\pi}{n}\right), \quad (\sin(2.\alpha) = 2.\sin(\alpha).\cos(\alpha)).$$

Soit la suite des polygones Q_n circonscrits au cercle (les côtés de sa frontière sont tangents au cercle C). On a : $Aire(Q_n) = r^2. n. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (même raisonnement que pour P_n , voir Fig 14, ci-dessus).

$$\text{On a : } \forall n \geq 3, P_n \subset C \subset Q_n \text{ avec : } Aire(Q_n - P_n) = r^2. n. \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{1}{2}. \sin\left(\frac{2.\pi}{n}\right) \right) \quad (1)$$

On sait que : $\lim_{n \rightarrow \infty} n. \sin\left(\frac{2.\pi}{n}\right) = 2. \pi$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$ ⁽²⁵⁾.

Donc, la suite (1) ci-dessus converge vers 0.

Il suffit d'appliquer la **Proposition 1-9**: D est quarrable et en plus, on obtient, pour terminer: $\lim_{n \rightarrow \infty} Aire(Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Aire(P_n) = \pi. r^2 \dots$

On peut donc considérer que D est quarrable et l'on a : **$Aire(D) = \pi. r^2$** .

Remarque : le disque ouvert $\dot{D}$ est quarrable et on a : **$Aire(\dot{D}) = \pi. r^2$** .

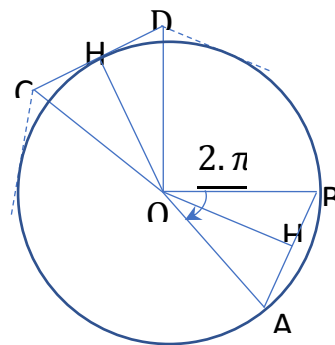


Fig 14 : $Aire(P_n) = n . Aire(OAB) = \frac{1}{2}.r^2.n.\sin(\frac{2.\pi}{n})$.

²² Cette figure 13 est tirée du livre de J.P. Delahaye : « Le fascinant nombre π », page 8, Eds Pour la science, ou sur Internet : <https://excerpts.numilog.com/books/9782410014457.pdf>

²³ Pour s'en faire une idée exhaustive, lire « Le fascinant nombre π », de la page 10 à la page 22.

²⁴ Définition à l'ancienne, comme propriétés dans le triangle rectangle : relations entre les côtés et les angles, l'unité d'angle étant le radian : $\sin(\alpha) = \frac{HB}{OB}$, $\cos(\alpha) = \frac{OH}{OB}$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{H'D}{OH'}$.

²⁵ On démontre que (α en radian) : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$, ainsi que : $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\beta} = 1$. Il suffit de poser : $\alpha = \frac{2.\pi}{n}$ et $\beta = \frac{\pi}{n}$.

IV-5 L'invariance de l'application Aire :

Dans toute cette 1^{ère} partie, on a choisi un pavé de forme carrée, que l'on a noté C , puis on a construit les familles $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. On peut même définir le repère $(O, (i, j))$ à partir de ce carré (les vecteurs i et j « s'appuyant » sur 2 côtés du pavé C , O étant un de ses sommets, le repère est alors orthonormé, à savoir : $\|i\| = \|j\| = 1$).

On a défini rigoureusement l'application : $\mathcal{C}(R^2) \rightarrow R^+ ; D \rightarrow \text{Aire}_C(D)$.

Nous allons supposer, de nouveau, que cette application dépend du pavé C , c'est pour cette raison que l'on notera dans ce paragraphe : $\text{Aire}_C(D)$.

Question : que se passe-t-il si on choisit un autre pavé de forme carrée, noté C' , et que l'on reproduit la procédure ci-dessus décrite ? Deux cas se présentent alors :

- C et C' sont des pavés isométriques et de forme carrée.
- C et C' , sont des pavés qui ne sont pas isométriques mais toujours de forme carrée.

Tout d'abord : F étant une isométrie, une homothétie ou la composée des deux, on sait que : $\forall A \text{ et } B \subset R^2 : F(A) \subset F(B) \Leftrightarrow A \subset B, F(A) \cap F(B) = F(A \cap B), F(\bar{A}) = \overline{F(A)}, F(\dot{A}) = \dot{F(A)}$.

Ensuite ⁽²⁶⁾ : C et C' sont isométriques, soit Φ l'isométrie telle que : $C' = \Phi(C)$, on construit donc les familles $\{Q'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui « s'appuient » sur le pavé C' .

Soit D un domaine quarrable, on pose : $\Delta = \Phi(D)$ ⁽²⁷⁾.

Il est clair que : $\forall (m, p) \in Z^2 \exists (r, s) \in Z^2$ tel que : $C_k^{mp} = \Phi(C_k^{rs}), C_k^{mp} \in Q'_k$ et $C_k^{rs} \in Q_k$.

Soit : $\{C'_k \in Q'_k | C'_k \subset \dot{\Delta}\} = \Delta_k'^{\text{int}}$ et $\{C_k \in Q_k | C_k \subset \dot{D}\} = D_k^{\text{int}}$,

Et : $\{C'_k \in Q'_k | C'_k \cap \bar{\Delta} \neq \emptyset\} = \Delta_k'^{\text{ext}}$ et $\{C_k \in Q_k | C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset\} = D_k^{\text{ext}}$,

Alors, soit : $C_k^{mp} \in \Delta_k'^{\text{int}} \Rightarrow C_k^{mp} \subset \dot{\Delta} \Rightarrow C_k^{mp} = \Phi(C_k^{rs}) \subset \dot{\Phi(D)} = \Phi(\dot{D}) \Rightarrow C_k^{rs} \subset \dot{D}$,

Donc : $\forall C_k^{mp} \in \Delta_k'^{\text{int}} \exists C_k^{rs} \in D_k^{\text{int}}$ t.q $C_k^{mp} = \Phi(C_k^{rs})$. Il est facile de voir que l'inverse est vrai.

Également : $C_k^{mp} \cap \bar{\Delta} \neq \emptyset \Rightarrow \Phi(C_k^{rs}) \cap \overline{\Phi(D)} = \Phi(C_k^{rs}) \cap \Phi(\bar{D}) = \Phi(C_k^{rs} \cap \bar{D}) \neq \emptyset$,

Donc : $C_k^{rs} \cap \bar{D} \neq \emptyset$, donc : $\forall C_k^{mp} \in \Delta_k'^{\text{ext}} \exists C_k^{rs} \in D_k^{\text{ext}}$ t.q $C_k^{mp} = \Phi(C_k^{rs})$, et inversement.

Donc, on a : $\text{Card}(\Delta_k'^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{int}})$ et $\text{Card}(\Delta_k'^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}})$.

De plus : $\forall k \in \mathbb{N}$, les pavés C'_k et C_k sont des carrés, les côtés mesurent $\frac{1}{2^k}$, donc leur aire est : $\frac{1}{2^{2.k}}$.

²⁶ En fait, la démonstration ci-dessus est la copie de celle qui est dans le livre : « La mesure des grandeurs », H. Lebesgue, page 43. Elle est juste rédigée au moyen de la symbolique moderne.

²⁷ Il est nécessaire de noter que les quadrillages ne sont pas superposés, ni les droites les définissant parallèles. De plus Δ et D peuvent être « éloignés » l'un de l'autre (il suffit d'imaginer que Φ soit une translation suivie d'une rotation).

En conséquence : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{2.k}} \cdot \text{Card}(\Delta_k^{\text{int}}) \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{2.k}} \cdot \text{Card}(D_k^{\text{int}}) \right) \Rightarrow I_D^{\text{int}} = I_\Delta^{\text{int}}.$

Et : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{2.k}} \cdot \text{Card}(\Delta_k^{\text{ext}}) \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{2.k}} \cdot \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) \right) \Rightarrow I_D^{\text{ext}} = I_\Delta^{\text{ext}}.$

Puisque D est quarrable, avec C : $I_D^{\text{int}} = I_D^{\text{ext}} \Rightarrow I_\Delta^{\text{int}} = I_\Delta^{\text{ext}}$ et donc $\Delta = \Phi(D)$ est quarrable avec C'.

Donc : $I_D^{\text{int}} = I_D^{\text{ext}} = I_\Delta^{\text{int}} = I_\Delta^{\text{ext}} \Rightarrow \text{Aire}_C(D) = \text{Aire}_{C'}(\Phi(D)).$

Puisque $\Delta = \Phi(D)$ est quarrable avec C', on peut appliquer la **Proposition 1-12** avec $\Phi' = \Phi^{-1}$ (qui est aussi une isométrie) et avec C', à savoir : $\text{Aire}_{C'}(\Delta) = \text{Aire}_{C'}(\Phi'(\Delta)).$

De plus, pour le domaine D : $\Phi'(\Delta) = \Phi^{-1}(\Phi(D)) = D.$

Conclusion : $\text{Aire}_C(D) = \text{Aire}_{C'}(D)...$

Maintenant si C et C' ne sont pas isométriques, on passe de C à C' par une isométrie suivie d'une homothétie : $C' = F(C) = H(O', r) \circ \Phi(C)$, avec $r > 0$ et O' le centre de H qui est un sommet du pavé $\Phi(C)$.

En s'appuyant sur C', on peut construire la famille $\{Q'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Attention : si $r \neq 1$, les pavés de Q'_k , $\forall k \geq 0$, sont « plus grands ou plus petits » que les pavés de Q_k , de même évidemment que C et C' (mais dans la même proportion).

Soit D un domaine quarrable, on pose : $\Delta = F(D) = H(O', r) \circ \Phi(D)$,

On peut développer la même démonstration que ci-dessus.

Et l'on a : $\text{Card}(\Delta_k^{\text{int}}) = \text{Card}(D_k^{\text{int}})$ et $\text{Card}(\Delta_k^{\text{ext}}) = \text{Card}(D_k^{\text{ext}}).$

Mais : $\forall k \geq 0$, d'une part, C_k est un carré dont les côtés ont pour dimensions, par rapport à C : $\frac{1}{2^k}$, son aire par rapport à C est $\frac{1}{2^{2.k}}$. D'autre part, C'_k est un carré dont les côtés ont pour dimensions, par rapport à C' : $\frac{1}{2^k}$ (par rapport à C : $\frac{r}{2^k}$), donc son aire par rapport à C' est : $\frac{1}{2^{2.k}}$ (*rien de paradoxal, car c'est le jeu des unités...*).

Donc : $\frac{\text{Card}(\Delta_k^{\text{int}})}{2^{2.k}} = \frac{\text{Card}(D_k^{\text{int}})}{2^{2.k}}$ et $\frac{\text{Card}(\Delta_k^{\text{ext}})}{2^{2.k}} = \frac{\text{Card}(D_k^{\text{ext}})}{2^{2.k}}$, donc : $I_\Delta^{\text{int}} = I_D^{\text{int}}$ et $I_\Delta^{\text{ext}} = I_D^{\text{ext}}.$

Puisque D est quarrable, avec C : $I_D^{\text{int}} = I_D^{\text{ext}} \Rightarrow I_\Delta^{\text{int}} = I_\Delta^{\text{ext}}$ et donc $\Delta = F(D)$ est quarrable avec C'.

Et en plus : $I_D^{\text{int}} = I_D^{\text{ext}} = I_\Delta^{\text{int}} = I_\Delta^{\text{ext}} \Rightarrow \text{Aire}_C(D) = \text{Aire}_{C'}(\Delta).$

Puisque Δ est quarrable avec C', on va pouvoir appliquer la **Proposition 1-13** d'abord, puis la **Proposition 1-12** ensuite. En effet, avec $F = H(O', r) \circ \Phi$ et avec l'unité C', on a :

$\text{Aire}_{C'}(\Delta) = \text{Aire}_{C'}(F(D)) = \text{Aire}_{C'}((H(O', r) \circ \Phi)(D)) = \text{Aire}_{C'}(H(O', r)(\Phi(D))) = r^2 \cdot \text{Aire}_{C'}(\Phi(D)) = r^2 \cdot \text{Aire}_C(D).$

Conclusion : $\text{Aire}_C(D) = r^2 \cdot \text{Aire}_{C'}(D).$

Commentaire : $r > 0$ étant le rapport d'homothétie entre les côtés respectifs de C et C', on peut considérer que cela correspond à un changement d'unités de longueur dans le plan, donc :

L'application Aire ne dépend que de l'unité de longueur que l'on se donne, a priori⁽²⁸⁾.
 Par exemple : si C' est le carré de 1cm de côté et C le carré de 1mm de côté, on a : $\text{Aire}_C(D) = 639 = 100 \cdot \text{Aire}_{C'}(D) = 100 \times 6,39$ ($r = 10$).

²⁸ On peut imaginer que si l'on choisit C et C' , deux pavés dans le plan, on détermine deux ensembles des quarrables : $\mathcal{Q}_C(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{Q}_{C'}(\mathbb{R}^2)$. Il sera facile de démontrer que : $\mathcal{Q}_C(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Q}_{C'}(\mathbb{R}^2)$, même si C et C' ne sont pas isométriques.

Résumé :

Nous allons synthétiser tous ces résultats dans la proposition et définition suivantes :

Théorème 2 et Définition : Pour un pavé unité, choisi a priori, il existe une application de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}^+$: $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$; $D \rightarrow \text{Aire}(D) = l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}}$, que l'on nommera « aire de... » et qui vérifie :

- 1) $\emptyset$ est évidemment quarrable et $\text{Aire}(\emptyset) = 0$.
- 2) Si D est quarrable et $D' \subset D$ quarrable, alors $D - D'$ est quarrable et $\text{Aire}(D') \leq \text{Aire}(D)$,
Avec en plus : $\text{Aire}(D - D') = \text{Aire}(D) - \text{Aire}(D')$ (notation : $D - D' = C_D D'$, par simplicité).
- 3) Si P et Q sont quarrables, alors $P \cup Q$ et $P \cap Q$ sont quarrables, et l'on a : $\text{Aire}(P \cup Q) = \text{Aire}(P) + \text{Aire}(Q) - \text{Aire}(P \cap Q)$.
- 4) Si $\{A_k\}_{k \in [1,n]}$ est une famille finie de domaines quarrables disjoints 2 à 2, on a :

$$\text{Aire}\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \text{Aire}(A_k)$$

- 5) Si $\{A_k\}_{k \in [1,n]}$ est une famille finie de domaines quarrables (pas forcément disjoints 2 à 2), on a :

$$\text{Aire}\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \text{Aire}(A_k)$$

- 6) Si Φ est une isométrie du plan et D est quarrable, alors : $\Phi(D)$ est quarrable, Et : $\text{Aire}(\Phi(D)) = \text{Aire}(D)$.
- 7) Si $h = h(\Omega, r)$ est une homothétie du plan, de centre Ω et de rapport $r > 0$, si D est un domaine quarrable, alors : $h(D) = H(\Omega, r)(D)$ est également quarrable et : $\text{Aire}(h(D)) = r^2 \cdot \text{Aire}(D)$.
- 8) L'application $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$; $D \rightarrow \text{Aire}(D)$ ne dépend que de l'unité de longueur que l'on s'est donnée dans le plan.
- 9) Enfin : $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \not\subset \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$, donc il existe des domaines de $\mathbb{R}^2$ bornés et non quarrables.

Preuve :

- L'unicité est démontrée au paragraphe **IV-5**.
- La propriété 1) est évidente : avec $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$, donc : $\text{Aire}(P \cup \emptyset) = \text{Aire}(P) + \text{Aire}(\emptyset) = \text{Aire}(P) \Rightarrow \text{Aire}(\emptyset) = 0$.
- 2) et 3) : c'est la **Proposition 1-4**.
- 4) et 5) : Ces 2 propositions se démontrent facilement par récurrence en utilisant la **Proposition 1-4**.
- 6) est la Proposition 1-12.
- 7) est la Proposition 1-13.
- 8) C'est le paragraphe **IV-5**.

- 9) C'est démontré à l'**Annexe 2**...

Deuxième partie : Relation entre l'Aire et la mesure de Lebesgue.

I- Préambule :

La « mesure de Lebesgue » permet de mesurer quasiment tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, l'axiome du choix étant nécessaire pour en construire un de non-mesurable⁽²⁹⁾.

Mais, cette performance se fait au prix d'une construction complexe qui demande des démonstrations longues et parfois très difficiles⁽³⁰⁾. En revanche, la « quarrabilité » est de nature assez simple, elle est tirée d'expériences à la portée des élèves de l'école primaire (découpage, déplacement, superposition, ...). Étant donnée la propriété de cette mesure, les domaines quarrables de $\mathbb{R}^2$ ont toutes les chances d'être Lebesgue-mesurables, la question est : « *Peut-on le démontrer, sans entrer dans la complexité de la théorie* ».

C'est cette question que nous allons « survoler »!...

Précision : nous ne pouvons pas échapper aux définitions et théorèmes essentiels sur l'existence des tribus et des mesures. Seuls quelques-uns, nécessaires à la compréhension de la théorie, seront transcrits et admis, au paragraphe suivant.

II- les définitions et propriétés fondamentales (admises).

Définition 2-1 : « clan » dans le plan $\mathbb{R}^2$:

On appelle clan de parties de $\mathbb{R}^2$ tout sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ tel que ($\mathcal{C} \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$) :

- $A \text{ et } B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$.
- $A \text{ et } B \in \mathcal{C} \Rightarrow C_A B \in \mathcal{C}$. (on notera dans la suite $C_A B = A - B$).

Conséquences :

- $\emptyset \in \mathcal{C}$, en effet $\emptyset = C_A A$, ce qui est possible puisque $\mathcal{C}$ est non vide.
- Cette propriété est vérifiée pour l'ensemble des parties quarrables du plan, donc : $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ est un clan.
- Plus généralement, toute intersection finie et toute réunion finie d'éléments de $\mathcal{C}$ appartiennent à $\mathcal{C}$: $\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in [1, n] A_k \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{k=n} A_k \in \mathcal{C}$ et $\bigcap_{k=1}^{k=n} A_k \in \mathcal{C}$,

Ce qui est donc le cas pour les parties quarrables du plan.

Définition 2-2 : « tribu » dans le plan $\mathbb{R}^2$:

On appelle tribu de parties de $\mathbb{R}^2$ tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ tel que ($\mathcal{T} \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$) :

- D'abord $\mathcal{T}$ est un clan,
- En plus, on a : si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite infinie de parties de $\mathcal{T}$, alors : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Conséquence : si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite infinie de parties de $\mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ (passage aux complémentaires).

²⁹ Axiome du choix : si $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ est une famille d'ensembles non-vides, il existe une application $c : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$, telle que $\forall i \in I c(A_i) \in A_i$. Si on n'utilise pas cet axiome (controversé par ailleurs) dans la théorie des ensembles (ZF), on démontre que l'on ne peut pas construire de sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}$) non-mesurable (voir J. Genet, les Commentaires, bas de la page 69).

³⁰ C'est celle-ci qui est complètement développée dans le livre : « Mesure et Intégration », J. Genet, Eds Vuibert (1976). Mais également : « Intégration », N. Bourbaki, le texte est en ligne (353 pages)...

Proposition 2-1 : tribu engendrée :

- 1) Soit $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ une famille de tribus sur $\mathbb{R}^2$, alors : $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est également une tribu (non vide puisque : $\forall i \in I \ \emptyset \in \mathcal{T}_i$).
- 2) D'après le 1) ci-dessus, si $\Omega \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$, alors il existe une plus petite tribu contenant Ω . On la note $\mathcal{T}(\Omega)$ et elle se nomme : tribu engendrée par Ω .

Caractérisations de Ω :

- Ω peut être un clan : si $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des parties quarrables du plan $\mathbb{R}^2$, ce clan engendre une tribu que l'on va noter : $\mathcal{T}(\mathcal{A}(\mathbb{R}^2))$.
- Ω peut être une topologie: si $T_{\mathbb{R}^2}$ est la topologie naturelle sur $\mathbb{R}^2$ (celle qui est engendrée par l'ensemble des rectangles ouverts), on obtient une tribu engendrée par cette topologie, que l'on notera $\mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$ et que l'on nommera tribu borélienne sur le plan $\mathbb{R}^2$.

Définition 2-3 : Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on dit qu'elle est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$,

Si : $\forall a \in \mathbb{R} \ f^{-1}] -\infty, a] \in \mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$.

Ou bien, ce qui est équivalent : $\forall U$, ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$, à savoir : $f^{-1}(T_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$, si $T_{\mathbb{R}}$ est la topologie naturelle sur $\mathbb{R}$ ⁽³¹⁾.

Maintenant, la mesure de Borel :

Proposition 2-2 : Sur $\mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$ il existe une mesure L (unique), dite mesure de Borel qui vérifie : pour tout rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ rectangle fermé (ou ouvert, ou semi-fermé) : $L(R) = (b-a) \times (d-c)$.

Preuve :

Admis car la démonstration est longue et difficile. Cette proposition correspond à un point central de la théorie de la mesure, elle est démontrée dans tous les livres « Mesure et Intégration »⁽³²⁾.

Définition 2-4 : On dit qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est négligeable pour la mesure de Borel, si : $\exists B \in \mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$, tel que : $L(B) = 0$ et $N \subset B$.

On note $\mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ négligeables pour la mesure de Borel. On remarque que des ensembles négligeables peuvent ne pas être dans $\mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$.

³¹ Définition sur « Mesure et intégration », Jean **Genet**, Eds Vuibert, page 85 et 86, Définition et Théorème 1, également : Théorème 1 page 91 (l'équivalence ne pose pas de problème).

³² Voir : Jean **Genet**, « Mesure et intégration », Eds Vuibert ; 1976. Théorème 3 (de Hahn), page 34 (pour le prolongement d'une mesure), et pages 63 et 64 (pour la définition de la mesure de Borel).

Proposition 2-3 et Définition : on construit l'ensemble : $\widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$, à savoir :

$A \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(T_{R^2})$ et $\exists N \in \mathcal{N}(R^2)$ tels que : $A = B \cup N$ (la décomposition n'étant pas unique)⁽³³⁾.

Cet ensemble est une tribu, elle est appelée tribu complétée.

On définit alors l'application :

$\hat{L}: \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \rightarrow R^+$ telle que : $A = B \cup N \Rightarrow \hat{L}(A) = L(B)$ (l'égalité étant indépendante de la décomposition de A) : $\hat{L}$ est une mesure sur $\widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$ appelée **mesure de Lebesgue**.

Note : $\mathcal{B}(T_{R^2}) \subsetneq \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$ et il est évident qu'un ensemble négligeable pour la mesure de Borel, l'est pour la mesure de Lebesgue.

Encore une définition qui nous sera utile :

Définition 2-5 :

1) On définit la fonction indicatrice :

$C \subset R^2, C \neq \emptyset, 1_C: R^2 \rightarrow \{0,1\}: \forall M(x,y) \in R^2 \quad 1_C(M) = 1 \Leftrightarrow M \in C$ et $1_C(M) = 0 \Leftrightarrow M \in C_{R^2}C$.

2) Soit $f: R^2 \rightarrow R$ est continue presque partout si $N = \{M(x,y) \in R^2 | f \text{ est discontinue au point } M\}$ est un ensemble négligeable, pour la tribu $\widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$.

III - Les liens avec les ensembles « quarrables ».

On choisit $D \in \mathcal{C}(R^2)$, on va démontrer :

- 1) Que $\text{Fr}(D)$ est un ensemble négligeable, pour la mesure de Lebesgue.
- 2) Que $\text{Fr}(D) = \{M \in R^2 | 1_D \text{ est discontinue au point } M\}$.
- 3) Que La fonction 1_D est continue presque partout sur R^2 .
- 4) Que 1_D est une fonction mesurable pour $\widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$.
- 5) Donc, que $D \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$.

On aura ainsi démontré que : $\mathcal{C}(R^2) \subset \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$.

- 6) Il restera à voir que : $\forall D \in \mathcal{C}(R^2), \hat{L}(D) = \text{Aire}(D)$.

Proposition 2-4 : Soit D un domaine quarrable de R^2 , alors $\text{Fr}(D)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Preuve :

On sait que si D est quarrable, alors $\text{Fr}(D)$ est quarrable et : $I_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = I_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = 0$ (**Théorème 1**).

Il faut démontrer que : $\exists B \in \mathcal{B}_{R^2}(T)$ tel que : $\text{Fr}(D) \subset B$ et $\hat{L}(B) = L(B) = 0$

Rappel : $D_k^{\text{int}} = \{C_k \in Q_k | C_k \subset \text{Int}(D)\}$ et $D_k^{\text{ext}} = \{C_k \in Q_k | C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset\}$

Soit $M \in \text{Fr}(D) \Rightarrow M \in \bar{D}$ et $M \notin \dot{D}$.

³³ Voir J. Genet, « Mesure et intégration », pages 58 à 61, Théorème 1. La définition demande : $B \Delta N = (B - N) \cup (N - B)$, mais, il est démontré que l'on peut remplacer $B \Delta N$ par $B \cup N$ (bas de la page 59, égalité des 2 tribus).

Pour $k \geq 1$, $\exists C_k \in Q_k$ tel que : $M \in C_k \Rightarrow M \in \bar{D} \cap C_k \Rightarrow C_k \in D_k^{\text{ext}}$,

Mais : $M \notin \dot{D} \Rightarrow C_k \not\subset \dot{D} \Rightarrow C_k \notin D_k^{\text{int}}$, donc : $C_k \in D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}}$

On pose : $A_k = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}}} C_k$, alors : $M \in A_k$,

Donc : $\text{Fr}(D) \subset A_k$

Soit : $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_k$, alors : $\text{Fr}(D) \subset B$, puisque : $\forall k \in \mathbb{N}^* \text{Fr}(D) \subset A_k$,

Soit la famille : $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

Elle est décroissante, en effet : soit $M \in A_{k+1} \Rightarrow \exists C_{k+1} \in D_{k+1}^{\text{ext}} - D_{k+1}^{\text{int}}$ t. q. $M \in C_{k+1}$,

alors : $C_{k+1} \in D_{k+1}^{\text{ext}} \Rightarrow \bar{D} \cap C_{k+1} \neq \emptyset$, et : $C_k \notin D_{k+1}^{\text{int}} \Rightarrow C_{k+1} \not\subset \dot{D}$.

Par définition des carreaux et le passage du rang k au rang $k+1$:

On a : $\exists C'_k \in Q_k$ t. q. $C_{k+1} \subset C'_k$ et tel que : $M \in C'_k$.

Alors : $C'_k \cap \bar{D} \supset \bar{D} \cap C_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow C'_k \in D_k^{\text{ext}}$ et si $C'_k \subset \dot{D} \Rightarrow C_{k+1} \subset \dot{D}$ ce qui est contraire à la définition de C_{k+1} , donc : $C'_k \not\subset \dot{D} \Rightarrow C'_k \notin D_k^{\text{int}} \Rightarrow C'_k \in D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}}$,

Comme : $M \in C'_k \Rightarrow M \in \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}}} C_k = A_k \Rightarrow A_{k+1} \subset A_k \dots$ Cqfd

$\forall k \in \mathbb{N} A_k \in \mathcal{B}(T_{R^2})$: puisque, évidemment, A_k est une réunion (finie) de pavés semi-ouverts disjoints. Donc : $B \in \mathcal{B}(T_{R^2})$ (définition de la tribu).

$\forall k \in \mathbb{N} \hat{L}(A_k) = L(A_k) = b_k - a_k < +\infty$.

En effet : on sait (**Proposition 1-3**) que $\text{Card}(D_k^{\text{ext}} - D_k^{\text{int}}) = n_k^+ - n_k^-$,

Donc : $\hat{L}(A_k) = L(A_k) = (n_k^+ - n_k^-) \cdot L(C_k)$ (les C_k forment une partition finie, ils sont disjoints 2 à 2, d'où l'égalité précédente).

Par la définition de la mesure de Borel, on a : $L(C_k) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{2 \cdot k}}$ (la mesure est définie sur les pavés, semi-ouverts, comme produit des longueurs des côtés, d'où cette égalité).

Donc : $\hat{L}(A_k) = L(A_k) = (n_k^+ - n_k^-) \cdot \frac{1}{2^{2 \cdot k}} = b_k - a_k$ (**Proposition 1-2 et éfinition**).

On peut appliquer un théorème⁽³⁴⁾ sur les mesures et les intersections dénombrables :

$\hat{L}(B) = \hat{L}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{L}(A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = 0$, puisque D est quarrable, on

applique la **Proposition 1-3**.

Donc $\text{Fr}(D) \subset B$ est bien négligeable.

Proposition 2-5 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$, soit 1_D la fonction caractéristique de D .

Alors : $\text{Fr}(D) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid 1_D \text{ est discontinue au point } M\}$ (cette égalité est vraie dans le cas général).

Preuve :

On a, par définition : $\text{Fr}(D) = \bar{D} \cap C_{R^2} \dot{D} \Rightarrow C_{R^2} \text{Fr}(D) = C_{R^2} \bar{D} \cup \dot{D} = \overline{C_{R^2} \bar{D}} \cup \dot{D}$,

$M \in C_{R^2} \text{Fr}(D) \Rightarrow M \in \dot{D}$ ou $M \in \overline{C_{R^2} \bar{D}}$.

Si $M \in \dot{D} \Rightarrow \exists W$ ouvert, tel que : $M \in W \subset \dot{D} \subset D \Rightarrow \forall N \in W \ 1_D(N) = 1$,

Donc 1_D est continue au point M (car elle est constante autour de ce point).

Si $M \in \overline{C_{R^2} \bar{D}} \Rightarrow \exists W'$ ouvert, tel que : $M \in W' \subset \overline{C_{R^2} \bar{D}} \subset C_{R^2} D \Rightarrow \forall N \in W' \ 1_D(N) = 0$,

Donc 1_D est continue au point M (idem).

³⁴ Voir J. Genet, « Mesure et intégration », Théorème 1 (ii), page 39 : Ce Théorème est exact pour toute mesure positive, donc pas seulement pour $\hat{L}$ et $\forall k \in \mathbb{N} A_k$ appartenant à un clan ou une tribu, ce qui est le cas. Une hypothèse supplémentaire est demandée dans le Théorème : $\exists k_0$ t. q. $\hat{L}(A_{k_0}) < +\infty$, ce qui est manifestement le cas.

Inversement :

Si : 1_D est continue au point M : $1_D(M) = 0$ ou bien $1_D(M) = 1$,

Si : $1_D(M) = 0$, on prend $V =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $W = 1_D^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,

Donc : $M \in W = 1_D^{-1}(V) \subset C_{\mathbb{R}^2}D \Rightarrow M \in \widehat{C_{\mathbb{R}^2}D}$.

Si : $1_D(M) = 1$, on prend $V' =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, $W' = 1_D^{-1}(V')$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,

Alors : $M \in W' = 1_D^{-1}(V') \subset D \Rightarrow M \in \dot{D}$.

Donc : $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid 1_D \text{ est continue au point } M\} = \widehat{C_{\mathbb{R}^2}D} \cup \dot{D} = C_{\mathbb{R}^2}\text{Fr}(D)$,

Donc : $\text{Fr}(D) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid 1_D \text{ est discontinue au point } M\}$.

On peut en conclure : dans le cas où $D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ la fonction 1_D est, selon la définition, continue presque partout ; puisque l'ensemble de ses points de discontinuité, qui est $\text{Fr}(D)$, est négligeable pour $\mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$. (**Proposition 2-4**, ci-dessus).

Proposition 2-6 : Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si elle est continue presque partout (**Définition 2-5**), alors elle est mesurable pour $\mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$.

Donc : si $D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ alors : 1_D étant continue presque partout, est mesurable pour $\mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$.

Preuve :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, il faut montrer que $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$. Posons : $V = f^{-1}(U)$,

- Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $V \in \mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$, donc : $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$, c'est fait !
- Si V n'est pas un ouvert : $V \neq \dot{V} \Rightarrow V - \dot{V} \neq \emptyset$ (ceci dans $\mathbb{R}^2$)

Soit $M \in V - \dot{V}$ et $u = f(M)$, il est clair que $u \in U$,

Comme U est un ouvert : $\exists W$, ouvert de $\mathbb{R}$, tel que : $u \in W \subset U \Rightarrow M \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(U) = V$.

Maintenant, supposons que $f^{-1}(W)$ soit un ouvert, de $\mathbb{R}^2$, forcément : $f^{-1}(W) \subset \dot{V}$, car $\forall x \in f^{-1}(W) \subset V$, qui est un ouvert par hypothèse : $\exists O$, ouvert de $\mathbb{R}$, t.q. $x \in O \subset f^{-1}(W) \subset V \Rightarrow x \in \dot{V}$.

Donc : $M \in \dot{V}$, ce qui est contraire au choix de M , donc $f^{-1}(W)$ n'est pas un ouvert.

On peut en conclure que f n'est pas continue en M ,

Donc : $M \in N = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ est discontinue au point } M\}$,

Donc, on peut écrire que dans $\mathbb{R}^2$: $V = \dot{V} \cup (V \cap N)$, en effet :

- $\dot{V} \cup (V \cap N) \subset V$ est évident,
- $V \subset \dot{V} \cup (V \cap N)$: c'est la démonstration ci-dessus, $M \in V$ et $M \notin \dot{V} \Rightarrow M \in N$.

Or :

- $\dot{V} \in \mathcal{B}(T_{\mathbb{R}^2})$, puisque c'est un ouvert,
- $V \cap N \subset N$, donc c'est un négligeable (tout sous-ensemble d'un négligeable est un négligeable),
- Donc : $V = f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$.

Nous avons le résultat recherché !...

Proposition 2-7 : Si $D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, puisque 1_D est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$., alors : $D \in \mathcal{B}(\widehat{T_{\mathbb{R}^2}})$.

Preuve :

1_D est mesurable, donc (Définition) : $1_D^{-1}] - \infty, 0] \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$,

Or : $C_{R^2} D = 1_D^{-1}] - \infty, 0] \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \Rightarrow D \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$ (Définition de la tribu et $R^2 \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$, Cqfd.

On peut conclure : $\mathcal{C}(R^2) \subset \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{C}(R^2)) \subset \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$.

Proposition 2-8 : Alors : $\forall D \in \mathcal{C}(R^2)$, on a : $\hat{L}(D) = \text{Aire}(D)$.

Preuve :

$D \in \mathcal{C}(R^2) \Rightarrow D \in \mathcal{N}(\mathcal{C}(R^2)) \subset \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \Rightarrow L(D)$ existe.

Maintenant, évaluons $L(D)$, à savoir avec la mesure de Borel : si R est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes :

- D'une part, d'après la définition de la mesure de Borel, on a : $L(R) = a.b$,
- D'autre part, pour l'aire on a démontré (**Proposition 1-6**) que : $\text{Aire}(R) = a.b$,
D'où l'égalité demandée $L(R) = \text{Aire}(R) = a.b$ et a et b sont les longueurs des côtés.

On sait que (**Proposition 1-2**) : $\forall k \in \mathbb{N} D_k^- \subset D \subset D_k^+$ et aussi : $a_k = \frac{n_k^+}{2^{2.k}}$ et $b_k = \frac{n_k^-}{2^{2.k}}$

Avec : $D_k^- = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{int}}} C_k$ et $D_k^+ = \bigcup_{C_k \in D_k^{\text{ext}}} C_k$, les pavés étant disjoints 2 à 2.

On a également : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = l_D^{\text{ext}} = l_D^{\text{int}} = \text{Aire}(D)$.

Avec l'inclusion $\mathcal{N}(\mathcal{C}(R^2)) \subset \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \forall k \in \mathbb{N} D_k^-$ et $D_k^+ \in \mathcal{B}_{R^2}(T)$, $L(D_k^-)$ et $L(D_k^+)$ existent,
Et on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N} D_k^- \subset D \subset D_k^+ \Rightarrow L(D_k^-) \leq L(D) \leq L(D_k^+)$ (définition d'une mesure),
Mais, il est facile de constater, avec la définition de la mesure de Borel,

On sait que $C_k \in Q_k$, ce sont des pavés (donc des carrés), dont les côtés mesurent : $\frac{1}{2^k}$,

Ces pavés sont semi-ouverts, donc : $\forall k \in \mathbb{N} C_k \in \mathcal{B}(T_{R^2})$,

Donc, d'après ci-dessus sur les rectangles, on a : $L(C_k) = (\frac{1}{2^k})^2 = \frac{1}{2^{2.k}}$,

Puis, comme les pavés sont disjoints, avec la définition de la mesure,

On a l'égalité : $a_k = \frac{n_k^+}{2^{2.k}} = n_k^+ \cdot \frac{1}{2^{2.k}} = n_k^+ \cdot L(C_k) = L(D_k^+)$ (1).

Idem pour : $b_k = L(D_k^-)$, avec : $L(D_k^-) \leq L(D) \leq L(D_k^+)$.

Donc : $L(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \text{Aire}(D)$. Cqfd !

Pour la mesure de Lebesgue, définie sur : $\widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$

$D \in \mathcal{C}(R^2) \Rightarrow D \in \mathcal{N}(\mathcal{C}(R^2)) \subset \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})}$ donc : $D = D \cup \emptyset \Rightarrow \hat{L}(D) = L(D) = \text{Aire}(D)$.

Remarque et rappel : $A \in \widehat{\mathcal{B}(T_{R^2})} \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(T_{R^2}) \exists N$ négligeable, $A = B \cup N$

Mais on a : $A = B_1 \cup N_1 = B_2 \cup N_2$ alors : $\hat{L}(A) = L(B_1) = L(B_2)$ (c'est-à-dire que $\hat{L}(A)$ ne dépend pas de la décomposition), donc, puisque $D \in \mathcal{B}(T_{R^2})$, on peut écrire : $D = D' \cup N = D \cup \emptyset$,

Donc : $\hat{L}(D) = L(D) = L(D')$.

A la suite de cette proposition, on peut conclure :

- Avec des outils mathématiques relativement simples, on a démontré que tous les domaines quarrables étaient Lebesgue-mesurables.
- Donc, la mesure de Lebesgue est un prolongement de la mesure des aires !... La notion de « quarrabilité », notion assez « simple », peut se prolonger en une théorie générale, complexe, qui permet de mesurer beaucoup plus d'ensembles et ainsi, ensuite, généraliser sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ « l'intégrale de Riemann » par ce que l'on appelle « l'intégrale de Lebesgue »⁽³⁵⁾.

Note : Ce résultat peut être considéré comme une montée sur l'échelle de Jacob, comme il est écrit dans l'introduction du livre « Géométrie vivante », de M. BERGER, Eds Cassini » (916 pages), page 1, où il dit : « *Ce sont ces notions conceptuelles construites chacune « au-dessus » de la précédente et permettant de s'élever dans l'abstraction, qu'illustre, avec ses barreaux, l'image de l'échelle de Jacob* ».

³⁵ Voir J. GENET, page 127, Chapitre 5, « Intégrale de Lebesgue abstraite, fonctions intégrales ». On construit des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (donc de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$) non Riemann-intégrables mais qui sont Lebesgue-intégrables, d'où l'idée de généralisation...

Annexe n°1 :

Soit le domaine (très) particulier : $D = [0, r[\times]0, s[$;

Avec : $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$; $s \geq 1$; $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 0$, soit : $0 \leq \frac{n_k}{2^k} \leq r < \frac{n_k+1}{2^k}$; $0 \leq \frac{p_k}{2^k} \leq s < \frac{p_k+1}{2^k}$,

alors : $\Leftrightarrow 0 \leq n_k \leq r \cdot 2^k < n_k + 1$ et $0 \leq p_k \leq s \cdot 2^k < p_k + 1$.

Donc, puisque r et $s \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq n_k = r \cdot 2^k$ et $0 \leq p_k = s \cdot 2^k$.

Précision : $r \geq 1 \Rightarrow \forall k \geq 0, n_k = r \cdot 2^k \geq 2^k \geq 1$, idem pour p_k .

$\dot{D} =]0, r[\times]0, s[$; $\bar{D} = [0, r] \times [0, s]$.

Si on se reporte à la démonstration de la **Proposition 1-6**, on retrouvera les mêmes étapes.

Dans cette proposition on a : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, ici, juste: $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$.

Donc : $\text{Card}(D_k^{\text{int}}) = (n_k - 1) \times (p_k - 1) = (r \cdot 2^k - 1) \cdot (s \cdot 2^k - 1)$

Et : $\text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = (n_k - 1) \times (p_k - 1) + ((n_k + 1) + (p_k + 1)) \times 2 - 4 = (n_k + 1) \times (p_k + 1) = (r \cdot 2^k + 1) \cdot (s \cdot 2^k + 1)$.

Annexe n°2 :

Soit : $U =]0, 1[\times]0, 1[$ et $D = U \cap (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)$:

On a : $\dot{D} = \overline{]0, 1[\times]0, 1[} \cap (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2) = \overline{]0, 1[\times]0, 1[} \cap \overline{(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)} = \emptyset$ car $\overline{(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)} = \emptyset$

Car tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ contient des couples de rationnels, donc ne peut pas être inclus dans $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$.

Donc : $C_k \subset \dot{D}$ est impossible, d'où: $D_k^{\text{int}} = \emptyset \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} a_k = 0$, d'où : $l_D^{\text{int}} = 0$.

Maintenant :

On va montrer que : $[0, 1] \times [0, 1] \subset \bar{D} = \overline{]0, 1[\times]0, 1[} \cap (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2) \subset [0, 1] \times [0, 1]$.

C'est-à-dire : $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1] = \bar{U}$.

Pour l'inclusion de droite, on applique les propriétés : $(\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B})$ et $\overline{\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$.

Pour celle de gauche on va montrer que pour tous les points (x, y) du pavé fermé, il existe une suite de points dans le carré et de coordonnées irrationnelles qui convergent vers ce point. Pour ceci, il suffit d'appliquer le Lemme suivant :

Lemme 3 : soit a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors : $\exists \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (irrationnel) tel que : $a < \alpha < b$.

Preuve : on sait qu'il existe un rationnel r tel que : $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$, il suffit de poser $\alpha = r \cdot \sqrt{2}$.

Soit x tel que $0 < x \leq 1$ et $n_0 > \frac{1}{x} > 0$ alors :

Pour $\forall n \geq n_0$ il suffit de choisir $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que: $0 < x - \frac{1}{n} < x_n < x \leq 1$

Pour 0, il suffit de choisir $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que: $0 < x_n < \frac{1}{n}$

Idem pour y ...

Donc : $\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \exists (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ et } 0 < x_n < 1 \text{ et } 0 < y_n < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y).$

Donc : $(x, y) \in \overline{]0,1[\times]0,1[} \cap (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2).$

Donc : $\text{Fr}(D) = \bar{D} - \dot{D} = \bar{D} \cap C_{\mathbb{R}^2} \dot{D} = ([0,1] \times [0,1]) \cap \mathbb{R}^2 = [0,1] \times [0,1].$

On perçoit immédiatement que D n'est pas quarrable, en effet, on a deux possibilités pour le démontrer :

- $I_{\text{Fr}(D)}^{\text{int}} = I_{\text{Fr}(D)}^{\text{ext}} = 1$, donc d'après le **Théorème 1**, D n'est pas quarrable.
- Ou bien : $\forall k \in \mathbb{N} \text{ si } C_k \cap \bar{D} \neq \emptyset \Leftrightarrow C_k \cap ([0,1] \times [0,1]) \neq \emptyset$, puisque : $\bar{D} = \bar{U}$.

Donc : $\forall k \in \mathbb{N} \ C_k \in D_k^{\text{ext}} \Leftrightarrow C_k \in \bar{U}_k^{\text{ext}}$ puisque $\bar{U} = [0,1] \times [0,1].$

Or, il est facile de calculer que : $\text{Card}(\bar{U}_k^{\text{ext}}) = 2^{2.k}.$

Donc : $a_k = \frac{\text{Card}(D_k^{\text{ext}})}{2^{2.k}} = \frac{\text{Card}(\bar{U}_k^{\text{ext}})}{2^{2.k}} = 1 \Rightarrow I_D^{\text{ext}} = 1.$

Enfin : $\dot{D} = \emptyset \Rightarrow D_k^{\text{int}} = \emptyset \Rightarrow \text{Card}(D_k^{\text{ext}}) = 0 \Rightarrow I_D^{\text{int}} = 0.$

Donc : $0 = I_D^{\text{int}} < I_D^{\text{ext}} = 1$, donc D n'est pas quarrable !...

Annexe n°3 :

Définition ⁽³⁶⁾: Soit d la distance Euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on dit que f est une isométrie si : $\forall M \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall N \in \mathbb{R}^2 \ d(f(M), f(N)) = d(M, N).$

On appelle point fixe pour toute application f , un point M tel que $f(M) = M$

On note $\mathcal{F}(f) \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points fixes de f .

La symétrie axiale est la seule qui nous importe pour ce que nous voulons faire : Δ une droite, alors : $M' = s_{\Delta}(M) \neq M \Leftrightarrow \Delta$ est la médiatrice de $[M, M']$ et $s_{\Delta}(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$.

Alors, s_{Δ} est une bijection et de plus elle vérifie : $s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, $\mathcal{F}(s_{\Delta}) = \Delta$ et c'est une isométrie (on peut le démontrer directement en utilisant le produit scalaire du plan affine euclidien).

Proposition : Soit f une isométrie du plan, 4 cas se présentent :

- 1) Si f admet au moins 3 points fixes non alignés, $\mathcal{F}(f) \supset \{A, B, C\} \Rightarrow f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $\mathcal{F}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$
- 2) Si f admet au moins deux points fixes distincts, $\mathcal{F}(f) \supset \{A, B\} \Rightarrow f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ ou f est une symétrie axiale, et $\mathcal{F}(f) = (A, B) = \Delta$ (droite passant par A et B), $f = s_{\Delta}$.
- 3) Si f a un seul point fixe et $\mathcal{F}(f) = \{A\} \Rightarrow f$ est la composée de 2 symétries axiales dont les axes se coupent en A .
- 4) Si f n'a aucun point fixe $\Rightarrow f$ est la composée de 3 symétries axiales.

Ces 4 cas sont les seuls qui peuvent être envisagés, donc :

³⁶ Je reproduis cette démonstration, car elle est jolie, rapide, efficace et convaincante. Voir sur Internet : <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/geometrie/isometries11-12.pdf>

Toute isométrie du plan, distincte de l'identité, est la composée de 1, 2 ou 3 symétries orthogonales, au plus. A savoir : $\forall f \in \text{Is}(\mathbb{R}^2) - \{\text{Id}_{\mathbb{R}^2}\} \exists \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 3 droites du plan, au plus, telles que $f = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$.

Preuve :

- 1) Si f admet au moins 3 points fixes non alignés, $\mathcal{F}(f) \supset \{A, B, C\}$. On a : $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$. Soit $M \in \mathbb{R}^2$ quelconque, on suppose que : $f(M) = M' \neq M$. Soit Δ la médiatrice de $[M, M']$,

Puisque f est une isométrie : $d(f(A), f(M)) = d(A, M') = d(A, M)$, $d(f(B), f(M)) = d(B, M') = d(B, M)$ et $d(f(C), f(M)) = d(C, M') = d(C, M)$.

Alors : $A, B, C \in \Delta$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc : $f(M) = M \Rightarrow f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

- 2) Si f admet deux points fixes distincts au moins, $\mathcal{F}(f) \supset \{A, B\}$: $f(A) = A$, $f(B) = B$.

On suppose que $f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, alors : $\exists C$ t. q. $C' = f(C) \neq C$. Soit Δ la médiatrice de $[C, C']$. Or, f étant une isométrie on a : $d(f(A), f(C)) = d(A, C') = d(A, C)$ et $d(f(B), f(C)) = d(B, C') = d(B, C)$, donc : A et $B \in \Delta$, donc : $\Delta = (A, B)$.

Soit la symétrie orthogonale s_{Δ} , on a : $s_{\Delta}(C) = C'$.

Soit : $s_{\Delta} \circ f$, on a : $s_{\Delta} \circ f(A) = s_{\Delta}(A) = A$, $s_{\Delta} \circ f(B) = s_{\Delta}(B) = B$, $s_{\Delta} \circ f(C) = s_{\Delta}(C') = C$,
Donc : l'isométrie $s_{\Delta} \circ f$ a trois points fixes (au moins), on applique 1) : $s_{\Delta} \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$
Donc : $f = s_{\Delta}$ (puisque $s_{\Delta}^{-1} = s_{\Delta}$).

Remarque : tous les autres points fixes sont sur Δ , donc : $\mathcal{F}(f) = \Delta = (A, B)$; en effet, si $\exists D \notin \Delta$ t. q. $f(D) = D$, alors, il y en aurait au moins 3 points fixes, donc on reviendrait au cas 1) : $f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

- 3) Si f admet un point fixe au moins, $\mathcal{F}(f) \supset \{A\}$: $f(A) = A$

On suppose que $f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, alors : $\exists C$ t. q. $C' = f(C) \neq C$. Évidemment : $C \neq A$.

Soit Δ la médiatrice de $[C, C']$ et soit la symétrie orthogonale s_{Δ} , on a : $s_{\Delta}(C) = C'$.

Or, f étant une isométrie : $d(f(A), f(C)) = d(A, C) = d(A, C')$, donc : $A \in \Delta \Rightarrow s_{\Delta}(A) = A$.

Alors, soit : $s_{\Delta} \circ f$, on a : $s_{\Delta} \circ f(A) = s_{\Delta}(A) = A$, $s_{\Delta} \circ f(C) = s_{\Delta}(C') = C$.

Donc, $s_{\Delta} \circ f$ a deux points fixes, donc on est ramené au cas 2) : $\exists \Delta'$ tel que : $s_{\Delta} \circ f = s_{\Delta'}$,

En pour, on a : $s_{\Delta} \circ f(A) = s_{\Delta}(A) = A = s_{\Delta'}(A) \Rightarrow A \in \Delta'$

Donc : $f = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$ (puisque $s_{\Delta}^{-1} = s_{\Delta}$) et $\{A\} = \Delta \cap \Delta'$, donc f a un seul point fixe.

- 4) Si f n'admet aucun point fixe, forcément : $f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, alors : $\exists C$ t. q. $C' = f(C) \neq C$.

Soit Δ la médiatrice de $[C, C']$, donc : $s_{\Delta} \circ f(C) = s_{\Delta}(C') = C$

En conséquence : $s_{\Delta} \circ f$ a un point fixe et on se ramène au cas 3) : $\exists \Delta_1, \Delta_2$ t. q. $s_{\Delta} \circ f = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$,

Donc : $f = s_{\Delta} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$.

