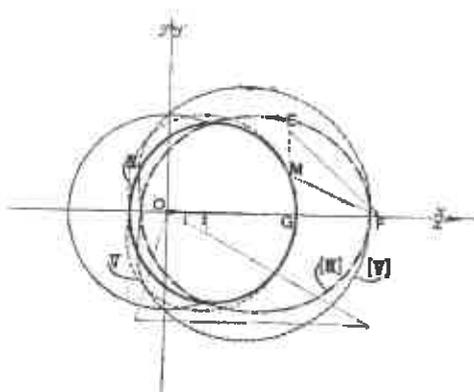




ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE DANS LE SECONDAIRE



Liège : 15, 16, 17 Mai 2003.

Actes du colloque Inter-Irem Géométrie

Préface

C'est avec un grand plaisir que j'ai inauguré ce colloque inter-IREM à Liège. En effet, c'est la première fois qu'un tel colloque se déroule dans un IREM de notre réseau international, hors de France.

Il existe actuellement, en plus des 27 IREM français, 18 IREM à l'étranger : Amérique Centrale (6), Argentine (2), Belgique-Luxembourg (2), Bolivie, Brésil, Maroc, Pérou (4), Sénégal.

Le modèle des IREM français est apprécié par nos collègues étrangers. Je me permets de rappeler les points importants spécifiques à la structure "IREM" :

- Les recherches, relatives à l'enseignement, sont effectuées conjointement par des collègues du supérieur et du secondaire.
- Les deux missions essentielles d'un IREM sont la recherche pédagogique et la formation continue des enseignants, ces deux missions étant réalisées en étroite collaboration.
- Aucun enseignant ne travaille à temps complet dans un IREM.

Je tiens à remercier les organisateurs de ce colloque, et plus particulièrement les membres de la Commission Géométrie, et Jacques Navez, Directeur de l'IREM de Liège-Luxembourg. J'adresse également mes remerciements à Jacques Bair, Président du Conseil Scientifique de l'IREM de Liège-Luxembourg, pour sa très forte contribution à la création de cet IREM, et pour sa précieuse collaboration scientifique.

André ANTIBI
Membre du Bureau de l'ADIREM*
chargé des relations internationales.

*Assemblée des Directeurs d'IREM.

Avant Propos

Le colloque Inter IREM de Géométrie de Bussang (1998) fut, après celui de Bayonne (1996) le dernier colloque organisé par la commission Inter IREM de Géométrie. Depuis, la commission a participé aux colloques Inter IREM premier cycle de Lille (juin 1999) et de Montpellier (2001), à la demande des organisateurs, mais elle n'a pas trouvé les moyens financiers, ni les ressources en son sein, après de nombreux départs, d'assurer l'organisation pleine et entière d'un colloque.

Fallait-il fermer la porte ?

Pourtant tous les débats pédagogiques en cours montraient, dès le début des années 2000, l'importance et l'actualité de la Géométrie. Les rencontres avec de jeunes collègues, parfois lors des colloques premier cycle, posaient plus de questions que de réponses.

Rigueur ? Raisonnement ? Heuristique ? Doit-on enseigner la Géométrie plane, indépendamment de la Géométrie de l'espace ? Peut-on prouver à l'aide de mouvements ? La Géométrie est-elle une Science expérimentale ? Pourquoi l'a-t-on cru dépassée ? Quel rôle joue-t-elle dans les mathématiques vivantes ?

Il nous a paru important de ne pas laisser de côté tous les débats que nous avions sur ces sujets et donc de diffuser nos travaux. Quoi de mieux qu'un colloque, aboutissant sur la rédaction d'actes, pour réaliser cette tâche ?

C'est ainsi que nous[†] avons proposé à Jacques NAVEZ (Directeur de l'IREM de Liège-Luxembourg) d'organiser un colloque à Liège.

Jacques Navez a, sans hésiter, accepté la lourde charge de cette organisation. La gageure était grande puisque l'IREM de Belgique et du Luxembourg était nouvellement créé !

C'est pourquoi la commission le remercie, ainsi qu'Emmanuelle Rouy, de

[†]La commission Inter IREM de Géométrie était constituée, pour l'année 2002-2003, de : BKOUCHE Rudolf, CARRAL Michel, COLMEZ François, CORTIER Jean-Philippe, DESTADNVILLE Bernard, GERVAISE Thierry, NAVEZ Jacques, PLANE Henry, SINEGRE Luc, VIGIER Noelle.

l'accueil chaleureux réservé aux participants et de l'excellent déroulement de ce colloque.

Nous remercions aussi André ANTIBI et l'ADIREM pour leur soutien moral et financier. Nous remercions enfin Luc SINEGRE pour la mise en forme de ces actes.

Pour la mémoire des IREM il fallait garder de ce colloque une trace. Vous pourrez juger à la lecture de ces actes de la diversité et de la richesse des interventions. Puisse-t-elle montrer l'importance de l'enseignement de la Géométrie et la variété des thèmes abordés. Ces textes ne s'adressent donc pas à ceux qui considèrent la Géométrie comme la partie "Langues Anciennes" de l'édifice mathématique...

Mais ces actes ne pourront refléter complètement la richesse des débats ainsi que l'atmosphère de travail et d'échange lors des ateliers. Notre souhait est que leur lecture ouvre des perspectives de réflexion aux professeurs de collèges et de lycées, aux formateurs des IREM et des IUFM et qu'elle suscite d'autres travaux en Géométrie.

Il faudrait aussi que de tels colloques bénéficient au sein des rectorats et du ministère d'un soutien plus important permettant une participation plus large des collègues, en particulier des plus jeunes, ceux qui sont fraîchement sortis des IUFM.

Les échanges effectués lors de tels rassemblements sont favorables à une confrontation des expériences et des pratiques qui ne peuvent qu'être bénéfiques à l'enseignement des mathématiques, Science en mouvement.

Pour finir citons Jean-Pierre KAHANE :

Il faut enseigner les mathématiques parce qu'elles sont belles et utiles.

Pour la commission Inter IREM de Géométrie

Jean-Philippe CORTIER.

1

Géométrie vectorielle.

*Michel Ballieu et Marie-France Guissard
CREM, Nivelles.*

Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas la voie d'accès la plus courte aux belles constructions de la géométrie. C'est pourquoi je pense qu'en ce qui concerne la géométrie, nous avons besoin d'une autre analyse encore qui soit clairement géométrique ou linéaire et qui exprime directement les *situations* comme l'algèbre exprime directement les *grandeurs*.

G. W. LEIBNIZ

Le dernier volet – qui vise la tranche d'âge de 15 à 18 ans – de la recherche du CREM sur la linéarité concerne la géométrie vectorielle. Il n'y a pas si longtemps, l'algèbre linéaire s'enseignait dans le plus pur schéma axiomatique, sans donner la moindre place à l'intuition. C'est dans l'esprit de la réforme des « mathématiques modernes » que s'inscrivait cette manière d'enseigner. Nous savons aujourd'hui qu'elle n'a pas produit les résultats escomptés. Cet échec a entraîné le retrait quasi complet de l'algèbre linéaire du cursus de l'école secondaire. L'enseignement de cette discipline est ainsi reporté en première année des études supérieures, où le manque de temps et parfois l'absence de souci pédagogique ne procurent pas aux étudiants une meilleure approche de cette matière difficile.

Au CREM, nous pensons qu'il est indispensable de travailler la géométrie vectorielle à partir de quinze, seize ans, en développant des formes d'intuition, des images mentales et la conscience de la performance de l'outil vectoriel pour résoudre des problèmes de géométrie.

Nous proposons donc des séquences d'apprentissage qui, dans un premier temps, sont conçues de manière à favoriser l'intuition. Les activités conduisent à la mise en place de la notion de composantes d'un vecteur ; elles abordent les opérations élémentaires sur les vecteurs dans un contexte riche de sens concret.

Après ce démarrage en douceur, les élèves sont confrontés à la résolution de problèmes qui exploitent de manière très profonde le concept de combinaison linéaire.

Nous avons retrouvé dans les textes originaux, qui témoignent de l'émergence de la notion de vecteur, la préoccupation majeure qui a guidé notre démarche, à savoir : décrire simplement un déplacement, c'est-à-dire une grandeur d'une autre espèce qu'un nombre réel, en fait quelque chose qui possède à la fois une direction, un sens et une longueur. ARGAND les appelle *lignes en direction* ou *lignes dirigées*, TAIT les nomme *vecteurs*, BELLAVITIS et LAISANT les désignent par le terme *droites*.

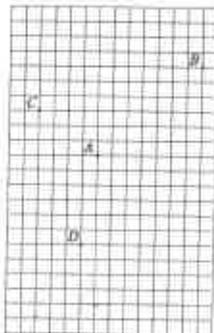
Nous allons maintenant préciser quelque peu le travail dans les classes. Au fil de leur parcours scolaire, les élèves ont calculé d'abord avec des nombres, ensuite avec des lettres qui représentent des nombres. Nous leur proposons de découvrir un nouveau mode de calcul qui permettra de traduire des problèmes géométriques sous forme algébrique. Il est donc prudent, avant de se lancer dans cette nouveauté, de faire le point sur leur connaissance des propriétés des opérations sur les réels.

On présente ensuite un plan de l'Ensanche à Barcelone et on pose quelques questions.



- Comment indiquer le chemin qui mène d'un point quelconque de cette ville à un autre ?
- Ce chemin est-il unique ?
- Y a-t-il plusieurs chemins de même longueur ?
- Y a-t-il des chemins plus courts que les autres ?

On fournit une feuille comme ci-contre, qui schématise un plan de la ville et on demande de décrire quelques déplacements sur ce quadrillage, par exemple le déplacement AB , le déplacement BC , ... Au départ, les élèves utilisent quatre symboles qui peuvent être h , b , d , g (haut, bas, droite, gauche). Le nombre de ces symboles peut être réduit à deux si on oriente les deux directions, ce qui provoque l'apparition de nombres négatifs. Enfin, moyennant une convention, un déplacement peut être caractérisé par un couple de réels dans une matrice colonne. Nous avons choisi de disposer les couples sous forme de colonnes pour préparer le vecteur colonne du calcul matriciel et pour éviter la confusion avec les couples de coordonnées. De plus, les différentes opérations sur les couples, qui se font terme à terme, apparaissent plus clairement dans cette disposition où les termes correspondant sont sur une même ligne.

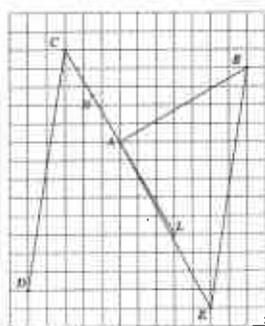


Une activité similaire est alors proposée sur une feuille munie d'un réseau de parallélogrammes, puis de triangles. Le travail sur les réseaux triangulaires, où trois directions semblent privilégiées, permet de faire progresser considérablement toute une série d'intuitions. Même si on ne prononce pas des expressions comme *dépendance linéaire*, *indépendance linéaire*, *famille libre*, *famille génératrice*, les élèves perçoivent que, dès qu'on se donne deux déplacements de directions différentes, ils engendrent tous les déplacements du plan. De plus, l'activité montre clairement que les deux déplacements « de base » déterminent univoquement les composantes des déplacements mais que ces composantes sont différentes chaque fois que l'on change de base. On comprend aussi qu'il est possible de calculer les composantes des déplacements dans une nouvelle base dès qu'on connaît les composantes de ces déplacements dans l'ancienne et les composantes des déplacements de l'ancienne base dans la nouvelle.

La mise en relation, dès le départ, des déplacements du plan et de leurs composantes, permet de travailler à la fois l'aspect géométrique et le calcul sur les composantes dans la construction des opérations sur les vecteurs.

La somme des déplacements est abordée dans un premier cas où l'origine

du second déplacement coïncide avec l'extrémité du premier. Si après le déplacement AB noté $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, on effectue le déplacement BC noté $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$, les élèves s'accordent à dire que l'on a effectué le déplacement AC . On leur demande alors si une relation existe entre les trois couples de nombres associés aux déplacements AB , BC et AC . Ils observent que les composantes du déplacement AC s'obtiennent par une addition terme à terme de celles de AB et de BC , ce qui incite à parler d'addition de déplacements.



Avant d'aborder le deuxième cas où l'origine du second déplacement ne coïncide plus avec l'extrémité du premier, les élèves sont invités à dessiner sur un quadrillage un déplacement quelconque, par exemple, $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ils le placeront évidemment à des endroits différents de la feuille et prendront ainsi conscience qu'un couple détermine la direction du déplacement, son sens et sa longueur mais ne donne aucune indication sur sa position. Il apparaît ainsi qu'un même déplacement peut être dessiné en une infinité d'endroits dans le plan et qu'on peut choisir parmi toutes ces possibilités celle qui convient le mieux à chaque situation. On demande alors d'effectuer $AB + CD$, qui donne AE .

Une question telle que « Quel est le déplacement CL qui, en partant de C mène deux fois plus loin que CA dans la même direction et le même sens ? » permettra de définir la multiplication d'un déplacement par un nombre, à la fois sur le graphique et sur les composantes, par utilisation du théorème de THALES.

Il faut bien entendu que les élèves soient conscients du fait que $CL = k \cdot CA$ donne une condition d'alignement des points A , C et L . C'est par le biais des multiples des déplacements par des scalaires fractionnaires que l'on se dégage des nœuds du quadrillage.

Des exercices de fixation sont proposés. Leur intérêt est non seulement de faire manipuler les opérations qui viennent d'être définies, mais surtout de dégager petit à petit les propriétés du calcul vectoriel.

Les expériences effectuées en classe ont montré à quel point les idées ont

foisonné tout au long de cet ensemble d'activités. Si bien que le besoin de faire le point et de rassembler de manière claire les résultats obtenus, s'est fait sentir impérieusement. Les élèves élaborent une première synthèse, en termes de déplacements du plan, puis une autre, de nature plus théorique, reprenant la structure d'espace vectoriel.

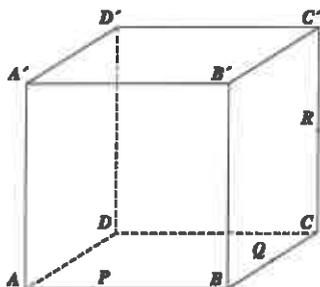
La séquence d'apprentissage se généralise aisément à l'espace. Avec des étudiants dont la tournure d'esprit accepte plus facilement l'abstraction, il est possible de reconnaître la même structure dans des ensembles de polynômes, dans l'ensemble des suites arithmétiques, ...

Le problème de situer un point sur un quadrillage est latent depuis le moment où l'on a demandé de dessiner un déplacement donné par ses composantes. Chaque élève reçoit une feuille A4 recouverte d'un quadrillage. L'un d'entre eux a la consigne de placer un point A sur un noeud du quadrillage et, sans montrer sa feuille, de communiquer des renseignements à ses condisciples pour que chacun puisse placer le point A exactement au même endroit de la feuille. Cette courte activité préalable est destinée à faire prendre conscience du fait que, pour déterminer la position d'un point, en plus des deux vecteurs « de base », il faut une origine. Après avoir fait le lien entre composantes d'un vecteur et coordonnées de ses extrémités, la classe est prête à résoudre des problèmes d'alignement, de parallélisme et de centres de gravité.

On traitera aussi des questions d'incidence comme, par exemple, la détermination d'une section plane dans un cube.

Construire la section du cube par le plan PQR , où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A , Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$ et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. On demande ensuite de déterminer les coordonnées de tous les sommets de cette section, après avoir choisi un repère approprié.

Dessiner la vraie grandeur de la section. Reporter la section sur un développement de cube.



Une telle activité permet d'allier plusieurs facettes d'un même problème :

- la construction de la section par géométrie synthétique ;
- la détermination de la position exacte de chaque sommet de la section sur chacune des arêtes par géométrie vectorielle ;
- la détermination de la vraie grandeur de la section par calcul des longueurs de côtés et des amplitudes des angles (par produit scalaire) ;
- la construction d'un développement du cube avec découpe de la section.

Il est également possible d'aborder vectoriellement les transformations du plan et de l'espace.

Dans certaines sections de sixième année, le programme des cours prévoit d'enseigner les nombres complexes. Il nous a paru opportun de mettre en évidence la corrélation très étroite qui, dès le départ allie les concepts de nombres complexes et de vecteurs. Quelques extraits de textes de TAIT, BELLAVITIS et LAISANT sont très clairs à ce sujet. Lorsqu'on tente de remonter aux origines des vecteurs, on se heurte inévitablement au souci qu'avaient les mathématiciens de l'époque de donner un sens aux quantités imaginaires. Cela débouche sur la représentation géométrique des complexes et sur leur généralisation à quatre dimensions, les quaternions. Par exemple, BELLAVITIS définit un produit de vecteurs qui n'est rien d'autre que le produit de deux complexes considérés dans leur représentation géométrique.

La lecture de ces textes fait comprendre pourquoi on peut avantageusement utiliser les nombres complexes comme outil de démonstration en géométrie. Certains problèmes où interviennent des transformations du plan, notamment des rotations, trouvent, par ces complexes, une solution élégante et plus courte que celle fournie par le calcul matriciel. Dans ce contexte, nous présentons, pour quelques applications, une confrontation des méthodes de résolution par la géométrie vectorielle, par les nombres complexes, par la géométrie synthétique. Il nous paraît de loin préférable d'exercer les élèves au calcul avec les nombres complexes dans des situations géométriques significatives plutôt que de leur soumettre des listes de calculs vides de sens.

Les deux derniers chapitres de cette partie destinée aux élèves de quinze à dix-huit ans rattachent l'idée de vecteur à celle de *grandeur vectorielle* en physique. On y traite d'abord de problèmes simples d'équilibre de solides dans un champ de pesanteur uniforme, ce qui mobilise les centres de gravité. On étudie ensuite les conditions d'équilibre d'un point soumis à des forces, matière qui permet d'introduire la règle du parallélogramme. Cette même loi est reprise dans le contexte de la composition des vitesses pour des mouvements uniformes et uniformément accélérés.

L'ouvrage se termine par un chapitre qui propose une synthèse de l'en-

semble, qui dégage la structure linéaire dans ses divers avatars de la maternelle jusqu'à dix-huit ans.

Le lecteur désireux d'en savoir plus peut consulter l'ouvrage *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*, CREM, 2002. Le texte de ce rapport de recherche est entièrement téléchargeable sur le site <http://www.agers.cfwb.be>

Centre de Recherche sur l'Enseignement des
Mathématiques
rue Émile Vandervelde 5 B1400 Nivelles (Belgique)
+32 (0)67 212527 crem@sec.cfwb.be
<http://www.profor.be/crem/index.htm>

2

Le cube en famille

Guy Noël, Université de Liège.

2.1 Introduction.

L'utilisation de logiciels de dessin, et en particulier la réalisation de dessins animés ou animables, permet et amène aussi une plus grande structuration des concepts mathématiques rencontrés.

Nous utilisons ici les mots « structure » et « structuration » dans un sens assez informel et plus large que celui qu'on rencontre par exemple dans le traité de Bourbaki. Structurer un ensemble de connaissances, c'est établir des connexions entre elles, ainsi qu'avec d'autres connaissances déjà établies antérieurement. C'est aussi procéder à des classifications, distinguer des caractéristiques de certains sous-ensembles, etc.

Nous inspirant des idées développées par Richard Palais¹, nous voulons ici attirer l'attention sur l'utilité, pour étudier et structurer une famille d'objets, de commencer par paramétriser cette famille. Si le choix de la paramétrisation est adapté aux propriétés que l'on veut étudier², on pointe alors les objets ayant des propriétés particulières en considérant les valeurs extrêmes des paramètres.

Dans un article antérieur³, nous avons illustré l'idée qui vient d'être esquissée en considérant la famille des triangles et une famille de pavages du plan ayant un groupe d'isométries bien déterminés. Nous nous intéresserons ci-dessous à la famille des polyèdres convexes ayant le même groupe de rotations que le cube et dont les sommets constituent une seule

¹R. Palais, *The Visualisation of Mathematics : Towards a Mathematical Exploration*, Notices of the A. M. S., 46, 6, 647-658, (1999)

²Comme le montrent les paradoxes de Bertrand en probabilités, choisir une paramétrisation parmi d'autres peut se révéler délicat.

³G. Noël, *Structures, géométrie et informatique, de 7 à 77 ans*, à paraître dans *Mathématique et Pédagogie*.

orbite pour ce groupe. Nous tenons à la disposition des lecteurs intéressés un petit logiciel qui d'explorer la famille des polyèdres convexes dans l'esprit de cet article.

2.2 Rappels et notations.

- La première rotation du cube est évidemment l'application identique.
- Un cube admet trois axes de rotation d'ordre 4 : ses médianes
Nous désignons la rotation d'angle 90° autour de l'axe Z , ainsi que sa matrice, par la notation M_Z .

$$M_Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



figure 1

- Un cube admet quatre axes de rotation d'ordre 3 : ses diagonales.
Nous désignons la rotation d'angle 120° autour de la diagonale qui passe par le sommet $[1\ 1\ 1]$, ainsi que sa matrice par la notation D_1 .

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

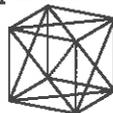


figure 2

- Un cube admet six axes de rotation d'ordre 2 : les droites joignant les milieux d'arêtes opposées.

La matrice de la rotation représentée ci-contre n'est pas difficile à calculer directement. Il est tout aussi facile de remarquer que cette rotation est aussi la composée de D_1 et M_Z , de sorte que sa matrice est le produit matriciel $M_Z \cdot D_1$.

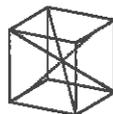


figure 3

On sait que le groupe des rotations du cube comprend 24 éléments : l'application identique, neuf rotations dont l'axe est d'ordre 4, huit rotations dont l'axe est d'ordre 3 et six rotations dont l'axe est d'ordre 2. Les rotations M_Z et D_1 constituent une partie génératrice de ce groupe. Nous n'utiliserons donc que les matrices M_Z et D_1 .

2.3 L'orbite d'un point.

Puisque le groupe des rotations comprend 24 éléments, l'orbite d'un point est constituée de 24 points, dont certains peuvent être confondus. (L'orbite d'un sommet du cube ne comporte que 8 points, celle d'un sommet de l'octaèdre en comporte 6 et celle d'un sommet du cuboctaèdre 12.)

Nous pouvons structurer comme suit l'orbite d'un point par le groupe G_O du cube :

1. Nous partons d'un point $P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Nous appliquons à ce point trois fois la rotation M_Z . Nous déterminons ainsi un carré de sommets

$$P_0, \quad P_1 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

3. Nous appliquons deux fois au carré $P = P_0P_1P_2P_3$ la rotation D_1 . Nous obtenons deux carrés supplémentaires, nous les notons Q et R ($Q_i = D_1(P_i)$ et $R_i = D_1(Q_i)$) :

$$Q_0 = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

et

$$R_0 = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Puisque, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $Q_i = D_1(P_i)$, $R_i = D_1(Q_i)$ et $P_i = D_1(R_i)$, chacun des triangles $P_iQ_iR_i$ est équilatéral.

À ce stade, le dessin se présente comme suit :

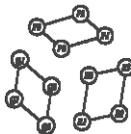


figure 4

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$M_Z(Q_1) = R_0 \quad M_Z(Q_2) = R_1 \quad M_Z(Q_3) = R_2 \quad M_Z(Q_0) = R_3$$

De sorte que M_Z applique le carré Q sur le carré R .

4. Nous avons trouvé 12 points de l'orbite de P_0 , qui peut en contenir jusqu'à 24. Pour trouver des points supplémentaires, appliquons la rotation M_Z au carré R . Par analogie avec les formules ci-dessus, nous poserons

$$M_Z(R_1) = S_0 \quad M_Z(R_2) = S_1 \quad M_Z(R_3) = S_2 \quad M_Z(R_0) = S_3$$

De même, nous appliquons la rotation M_Z au carré $S = S_0S_1S_2S_3$ en posant

$$M_Z(S_1) = T_0 \quad M_Z(S_2) = T_1 \quad M_Z(S_3) = T_2 \quad M_Z(S_0) = T_3$$

Vu que $M_Z(Q) = R$, il est inutile d'appliquer M_Z à T : le résultat ne peut être que Q .

Nous trouvons donc huit points supplémentaires de l'orbite, répartis en deux carrés S et T :

$$S_0 = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ -x \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ x \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} -z \\ x \\ -y \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} -z \\ -x \\ y \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} -z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

et la figure comporte à présent cinq carrés :

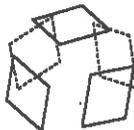


figure 5

5. Il nous manque encore quatre points de l'orbite. Ces points ne peuvent être obtenus qu'en appliquant la rotation D_1 à l'un des carrés S ou T . Or D_1 applique le carré S sur le carré T . Par exemple, $D_1(S_0) = T_2$. Par contre les quatre points obtenus en appliquant D_1 aux points T_i ne figurent pas encore dans l'orbite. Ils constituent les sommets d'un sixième carré noté U . Nous posons donc

$$U_0 = D_1(T_0) \quad U_1 = D_1(T_1) \quad U_2 = D_1(T_2) \quad U_3 = D_1(T_3)$$

De façon précise :

$$U_0 = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$$

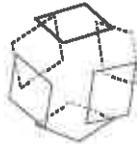


figure 6

Le graphe suivant représente l'orbite du point P_0 , les flèches en traits pleins relèvent de la rotation M_x , et les flèches en traits tirés de la rotation D_1 .

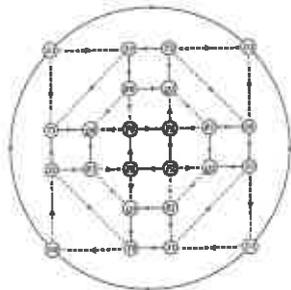


figure 7

2.4 paramétrisation

Nous venons de déterminer l'orbite par le groupe des rotations du cube d'un point quelconque de l'espace. Nous nous intéresserons dans la suite à l'enveloppe convexe de cette orbite. Les polyèdres ainsi obtenus constitueront la « famille du cube », étant bien entendu que nous nous limitons aux polyèdres *convexes* et *homogènes*, ce dernier terme signifiant que les sommets des polyèdres considérés constituent une seule orbite pour le groupe des rotations du cube.

La première chose à réaliser est de déterminer le « domaine de paramétrisation de la famille du cube ». Ici aussi, il y a des sous-entendus : nous ne considérons pas comme différents des polyèdres directement semblables : ce sont des « formes de polyèdres » qui nous intéressent.

Pour atteindre notre objectif, nous allons travailler en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Dans ces formules, θ est l'angle entre le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et l'axe Z , angle que nous nommerons la « colatitude », et φ est l'angle entre la projection de ce vecteur sur le plan XY et l'axe X . Nous le nommerons la longitude. r est le rayon de la sphère circonscrite au polyèdre. Nous choisissons tout simplement $r = 1$.

A priori, θ peut varier entre 0 et π , et φ entre 0 et 2π .

L'orbite d'un point peut être engendrée par n'importe lequel de ses points. Cette propriété nous permet de limiter le domaine de variation des paramètres θ et φ .

Par exemple, les quatre points P_0, P_1, P_2 et P_3 ont la même colatitude puis que les trois derniers sont images du premier par des rotations d'axe Z . L'un d'entre eux a certainement une longitude comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2}$ exclu). C'est celui-là que nous appelons P_0 . Comme précédemment, les coordonnées de P_0 sont simplement notées x, y et z .

La première contrainte affectant les paramètres θ et φ est donc $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Il en résulte $\cos \varphi \geq 0$ et $\sin \varphi \geq 0$. Donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Ainsi, P_0 est dans le premier octant. Les seuls autres points de l'orbite dans le premier octant sont Q_0 et R_0 .

De même, nous pouvons supposer que P_0 est un des points de l'orbite dont la colatitude est minimum. Autrement dit, aucun point de l'orbite ne peut être strictement plus haut que P_0 . Exprimons cette condition analytiquement.

Vu les symétries de l'orbite, il suffit que P_0 soit plus haut que Q_0 et R_0 . La hauteur de P_0 est $z = \cos \theta$, celles de Q_0 et R_0 sont respectivement x et y . Clairement les conditions à satisfaire par P_0 sont donc

$$z \geq x \quad \text{et} \quad z \geq y$$

Dans le cas $x \geq y$, c'est-à-dire si $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ la condition à satisfaire est $\cos \theta \geq \sin \theta \cos \varphi$. Et si $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, la condition est $\cos \theta \geq \sin \theta \sin \varphi$.

Ainsi, le domaine de variation des paramètres θ et φ est limité par les conditions

$$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\cos \varphi} & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\sin \varphi} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Par exemple, pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, θ peut varier de 0 à $\arctg \sqrt{2}$. Si $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \arctg \sqrt{2}$, alors on a $P_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'orbite ne comporte que 8

points distincts : les sommets d'un cube.

Pour $\theta = 0$, la valeur de φ importe peu : le point P_0 est en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans

ce cas, l'orbite est constituée des sommets d'un octaèdre.

Aux autres points du domaine de paramétrisation correspondent d'autres formes de polyèdres, que nous étudierons au paragraphe suivant. Retenons déjà l'allure du domaine de paramétrisation de la famille du cube, et la position du cube et de l'octaèdre dans ce domaine :

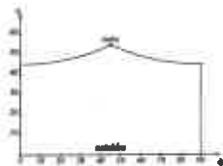


figure 8

2.5 La famille du cube

Maintenant que nous avons paramétrisé la famille du cube, nous pouvons étudier les polyèdres (convexes) qui la constituent. Chaque membre de la famille est l'enveloppe convexe d'une orbite. Nous devons déterminer les faces de cette enveloppe.

Il est d'abord clair que le carré $P = P_0P_1P_2P_3$ est une face du polyèdre, puisque les quatre sommets de ce carré sont les sommets de hauteur maximum de celui-ci. De plus, le polyèdre admettant le même groupe de rotations que le cube, les rotations M_x et D_1 appliquent une face sur une face. Les carrés Q, R, S, T et U , obtenus précédemment et représentés à la figure 6 sont donc aussi des faces.

Sur la figure 7, on peut lire que les 24 points de l'orbite se répartissent en 8 triangles équilatéraux associés à la rotation D_1 . Ces huit triangles sont dans des plans perpendiculaires à l'axe de D_1 , donc parallèles entre eux. Deux de ces triangles — les plus éloignés de l'origine — sont nécessairement des faces. La distance à l'origine du plan d'un de ces triangles est la distance du barycentre de ce triangle à l'origine. On calcule donc les huit vecteurs $\frac{1}{3}(P_0 + Q_0 + R_0), \dots, \frac{1}{3}(S_2 + T_0 + U_0)$, puis les normes de ces huit vecteurs. On dresse ainsi le tableau suivant, où les distances sont toutes données à un facteur $\frac{\sqrt{3}}{3}$ près :

Triangle	$P_0Q_0R_0$	$P_1Q_1R_1$	$P_2Q_2R_2$	$P_3Q_3R_3$	$S_0T_0U_0$	$S_1T_1U_1$	$S_2T_2U_2$	$S_3T_3U_3$
Distance à O	$ x + y + z $	$ -x + y + z $	$ -x - y + z $	$ x - y + z $	$ x + y - z $	$ -x + y - z $	$ -x - y - z $	$ x - y - z $

Compte tenu de ce que les trois nombres x, y et z sont positifs, et des inégalités $z \geq x, x \geq y$, on voit que les valeurs extrêmes de ce tableau sont $x + y + z$ et $-x - y - z$. Ainsi les triangles $P_0Q_0R_0$ et $S_1T_1U_1$ sont des faces

du polyèdre perpendiculaires à l'axe de la rotation D_1 . En appliquant la rotation M_Z à ces deux faces, et en itérant l'opération deux fois, on trouve six nouvelles faces triangulaires perpendiculaires aux autres diagonales du cube. Ce sont, d'après la figure 7, les triangles équilatéraux $P_1R_3S_3$, $P_2S_2T_2$, $P_3T_1Q_1$ et $T_0Q_3U_3$, $Q_3R_1U_1$, $R_2S_0U_0$.

Dessignons la situation actuelle :

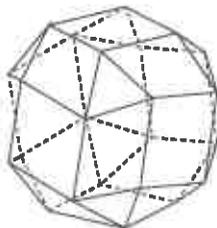


figure 9

Notre travail n'est pas terminé : la figure précédente montre 14 faces du polyèdre, six carrés et huit triangles équilatéraux. Dans certains cas particuliers, par exemple le cube ou l'octaèdre, on a trouvé ainsi toutes les faces du polyèdre. On constate même qu'il arrive à des faces de disparaître : le cube n'a que des faces carrées, l'octaèdre n'a que des faces triangulaires. Mais dans le cas général, il nous manque encore des faces.

En effet, dans un polyèdre, tout sommet doit appartenir à au moins trois faces ! Or, sauf cas particuliers, les points appartenant à l'orbite appartiennent exactement à une des faces carrées et à une des faces triangulaires.

En examinant la figure 9, on pourrait cependant croire que le polyèdre est complet. On constate en effet que des quadrilatères sont apparus en plus des carrés et des triangles équilatéraux. Ces quadrilatères « empruntent » deux côtés opposés à des carrés et les deux autres côtés opposés à des triangles équilatéraux. Ils sont au nombre de 12 : les six carrés ont ensemble 24 arêtes, les huit triangles équilatéraux en ont autant. Comme aucune arête n'est commune à un carré et à un triangle équilatéral, les 48 arêtes délimitent 12 quadrilatères.

Mais on constate aussi en examinant les quadrilatères situés sur les bords de la figure qu'ils ne sont pas plans. Or nous nous intéressons aux polyèdres *convexes*. Examinons de plus près un de ces quadrilatères, par exemple $P_0P_1R_3R_0$ (voir la figure 4).

On sait que $R_0 = M_Z(Q_1) = M_ZD_1(P_1)$ et $R_3 = M_Z(Q_0) = M_ZD_1(P_0)$. Or M_ZD_1 est une rotation de 180° .

Par conséquent, on a aussi $P_1 = M_ZD_1(R_0)$ et $P_0 = M_ZD_1(R_3)$. De plus, l'axe A de cette rotation de 180° est perpendiculaire aux segments $[P_1R_0]$ et $[P_0R_3]$ et les coupe en leur milieu.

2.5.1 Sous quelle condition le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ est-il plan ?

Admettons d'abord que les quatre points P_0, P_1, R_0, R_3 sont distincts. Alors, pour que le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ soit plan, il faut et il suffit que les segments $[P_1R_0]$ et $[P_0R_3]$ aient le même milieu.

Or

$$\frac{1}{2}(P_1 + R_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y+z \\ 0 \\ y+z \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2}(P_0 + R_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+z \\ 0 \\ x+z \end{pmatrix}$$

Le quadrilatère est donc plan si $x = y$, c'est à dire si $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, pour obtenir l'enveloppe convexe de l'orbite de P_0 , il suffit d'adjoindre les douze quadrilatères en question aux faces déjà trouvées.

Si $x > y$ (ou $\varphi < \frac{\pi}{4}$), alors les points P_0 et R_3 sont plus éloignés de l'origine que P_1 et R_0 . On obtiendra l'enveloppe convexe en coupant en deux triangles le quadrilatère gauche $P_0P_1R_3R_0$ à l'aide de la diagonale P_0R_3 . Par contre, si $x < y$ on devra utiliser dans ce but la diagonale P_1R_0 .

Les deux configurations ci-dessous ne se distinguent que par les valeurs de la longueur φ : 34° pour celle de gauche, 56° pour celle de droite. Ces deux valeurs sont symétriques par rapport à 45° . Les deux configurations sont symétriques par rapport au plan d'équation $x = y$.

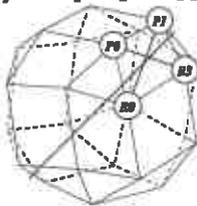


figure 10

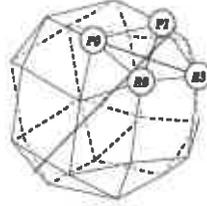


figure 11

Sur chacune de ces figures on a tracé l'axe de la rotation de 180° qui échange les points P_1 et R_0 d'une part, P_0 et R_3 d'autre part. Sur la figure 11, on va tracer la diagonale R_0P_1 du quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$, alors que sur la figure 10, on va tracer P_0R_3 .

En procédant de la même manière pour tous les quadrilatères gauches du type $P_0P_1R_3R_0$, on obtient deux polyèdres convexes symétriques.

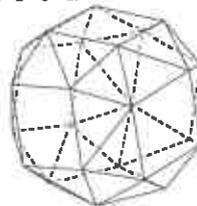


figure 12

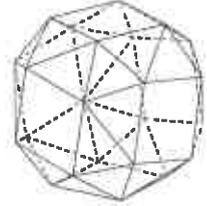


figure 13

Pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, on obtient un polyèdre qui est son propre symétrique. Le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ est un rectangle : c'est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. De plus, le plan de symétrie (du polyèdre) d'équation $x = y$ passe par les milieux des arêtes P_0P_1 et R_3R_0 .

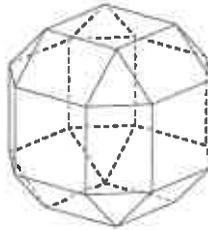


figure 14

2.5.2 Sous quelle condition les quadrilatères gauches disparaissent-ils ?

Nous envisageons dans ce paragraphe la possibilité que les quatre points P_0, P_1, R_3, R_0 ne soient pas tous distincts. Plusieurs cas apparaissent.

$P_0 = P_1$: Ce cas ne peut se produire que si le point P_0 est sur l'axe de

M_S , autrement dit si $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou encore $\theta = 0$. Il est de plus

équivalent à $R_3 = R_0$. Le polyèdre est alors un octaèdre. Les faces carrées du type $P_0P_1P_3P_3$ se réduisent à des points, les polygones gauches du type $P_0P_1R_3R_0$ se réduisent à des segments et ceux-ci coïncident avec les arêtes des faces triangulaires du type $P_0Q_0R_0$.

$P_0 = R_0$: Dans ce cas, on a aussi $P_0 = Q_0$ puisque P_0, Q_0 et R_0 sont sommets d'un triangle équilatéral. De même P_1, R_3 et S_2 coïncident, etc. Ainsi, les faces triangulaires sont réduites à un point, situé sur l'axe de la rotation D_1 , les polygones gauches $P_0P_1R_3R_0$ se réduisent à des segments et ceux-ci coïncident avec les arêtes des faces carrées type $P_0P_1P_3P_3$. Puisque $P_0 = Q_0 = R_0$, on a $x = y = z$ et par conséquent $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \arctg \sqrt{2}$ (soit 54,5356... degrés) Le polyèdre est un cube.

$P_0 = R_3$: De l'examen de la figure 7, on déduit immédiatement $Q_0 = P_3$. La face carrée $P_0P_1P_3P_3$ est donc cette fois adjacente à la face triangulaire $P_0Q_0R_0$. Le polygone gauche $P_0P_1R_3R_0$ se réduit à deux arêtes R_0P_0 et P_0P_1 .

De $P_0 = R_3$, on déduit aussi $x = z$ et $y = 0$: P_0 appartient à l'axe de la rotation $M_S D_1$. On a alors $\varphi = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Le polyèdre est un cuboctaèdre.

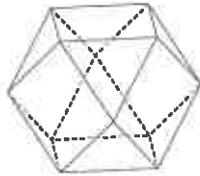


figure 15 : Un cuboctaèdre

$P_1 = R_0$: Ce cas correspond à $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. À part cela, il est identique au précédent, à ceci près que les identifications entre sommets s'opèrent autrement. Mais le polyèdre final est le même.

2.5.3 D'autres possibilités

Dans le cas général, une face carrée et une face ayant la forme d'un triangle équilatéral ne peuvent avoir en commun qu'un sommet. Les « trous » entre ces deux types de faces sont bouchés par les triangles issus du coupage en deux, par une diagonale, des polygones gauches de type $P_0P_1R_0R_0$. Se pourrait-il que pour certaines valeurs des paramètres θ et φ , deux faces adjacentes soient coplanaires, ce qui les amènerait à fusionner ?

Il est clair qu'une face carrée et une des faces triangulaires équilatérales ne pourraient être coplanaires : les unes sont dans des plans perpendiculaires aux axes de rotation d'ordre 4, les autres dans des plans perpendiculaires aux axes de rotation d'ordre 3. Ces directions de plans sont indépendantes des valeurs de θ et φ .

Par contre, on pourrait imaginer qu'un des sommets R_0 ou R_3 soient dans le plan du carré $P_0P_1P_2P_3$. Vu la symétrie d'ordre 4, ce sont alors quatre triangles qui fusionneraient avec ce carré, amenant la formation d'octogones.

De la même façon, un des points P_1 ou R_3 pourrait être dans le plan du triangle $P_0Q_0R_0$, et cette fois c'est la symétrie d'ordre 3 qui amènerait la formation d'hexagones.

Voyons cela de plus près.

- Si $\varphi < \frac{\pi}{4}$, le triangle $P_0P_1R_3$ est une face adjacente au carré $P_0P_1P_2P_3$. Ces deux faces sont coplanaires si R_3 a la même hauteur que P_0 . Or la hauteur de R_3 vaut x , et la relation $x = z$ équivaut à

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Si cette condition est satisfaite, on note en effet le remplacement des six faces carrées et des 24 faces triangulaires issues des quadrilatères gauches par six octogones.

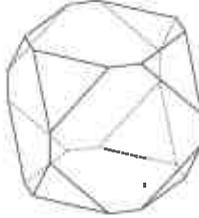


figure 16

- Si $\varphi > \frac{\pi}{4}$, c'est le triangle $P_0P_1R_0$ qui est une face adjacente au carré $P_0P_1P_2P_3$. On procède comme ci-dessus en supposant que R_0 a la même hauteur que P_0 . La hauteur de R_0 vaut y , et la relation $x = z$ équivaut à

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Nous pouvons résumer ces deux situations en disant que le polyèdre admet des faces octogonales lorsque le point (φ, θ) appartient à la courbe qui limite vers le haut le domaine de paramétrisation (figure 7).

- Si $\varphi < \frac{\pi}{4}$, le triangle $P_0R_0R_3$ est une face adjacente à la face triangulaire équilatérale $P_0Q_0R_0$. Le point R_3 est dans le plan de cette face si et seulement si le vecteur $R_3 - P_0 = \begin{pmatrix} z - x \\ -2y \\ x - z \end{pmatrix}$ est perpendiculaire

à l'axe de la rotation D_1 , c'est à dire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition

à satisfaire est donc $y = 0$, c'est-à-dire $\sin \theta \sin \varphi = 0$. Le cas $\theta = 0$ est celui — déjà rencontré — de l'octaèdre. Le cas $\varphi = 0$ correspond aux points du bord gauche du domaine de variation.

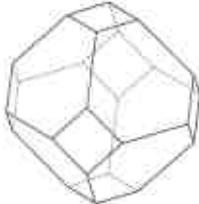


figure 17

- Si $\varphi > \frac{\pi}{4}$, c'est le triangle $P_0P_1OR_0$ qui est une face adjacente à la face triangulaire équilatérale $P_0Q_0R_0$. Le point P_1 est dans le plan de cette face si et seulement si le vecteur $P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} y-x \\ -x-y \\ 0 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à l'axe de la rotation D_1 , c'est à dire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition à satisfaire est donc $x = 0$, c'est-à-dire $\sin \theta \cos \varphi = 0$. Le cas $\theta = 0$ est à nouveau celui de l'octaèdre. Le cas $\varphi = \frac{\pi}{2}$ correspond aux points du bord droit du domaine de variation.

Dressons un tableau qui résume (provisoirement) nos constatations.

θ	φ				
0	0				
	Octaèdre (φ quelconque) F : 8 triangles équilatéraux, A : 12, S : 6				
	F : 8 hexagones, 6 carrés A : 36 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 24 triangles A : 60 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 12 rectangles A : 48 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 24 triangles A : 60 S : 24	F : 8 hexagones, 6 carrés A : 36 S : 24
Max	$\frac{\pi}{4}$ Cuboctaèdre F : 6 carrés 8 triangles équil. A : 24 S : 12	$\arctg \frac{1}{\cos \varphi}$ F : 6 octogones 8 triangles équil. A : 36 S : 24	$\arctg \sqrt{2}$ Cube F : 6 carrés A : 12 S : 8	$\arctg \frac{1}{\sin \varphi}$ F : 6 octogones 8 triangles équil. A : 36 S : 24	$\frac{\pi}{4}$ Cuboctaèdre F : 6 carrés 8 triangles équil. A : 24 S : 12

2.6 Des polyèdres archimédiens

Dans les pages précédentes, nous avons déjà découvert dans la famille du cube des polyèdres très particuliers. D'abord deux polyèdres réguliers, le cube lui-même et l'octaèdre. Ensuite un polyèdre quasi-régulier, le cuboctaèdre.

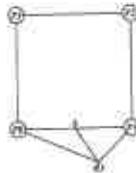
Nous allons rechercher à présent si la famille comprend d'autres polyèdres archimédiens. Il nous suffit de rechercher dans cette famille les polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers.

Les seuls polygones que l'on rencontre comme faces de polyèdres de cette famille sont des triangles, des rectangles, des hexagones et des octogones.

Nous procéderons en passant en revue les différentes cases du tableau précédent.

1. Commençons par la case de la dernière ligne pour laquelle $\varphi < \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$.

Pour trouver un polyèdre archimédien dans cette case, il faut rechercher des valeurs de θ et φ pour lesquelles les faces octogonales soient régulières. D'après l'analyse faite en 2.5.3, une des faces octogonales est constituée du carré $P_0P_1P_2P_3$ fusionné avec quatre triangles parmi lesquels le triangle $P_0P_1R_3$.



La première condition à satisfaire pour que l'octogone soit régulier est que les côtés P_0R_3 et R_3P_1 aient même longueur, c'est-à-dire que dans le plan $P_0P_1P_2$, le point R_3 soit sur la médiatrice de P_0P_1 . La figure ci-dessus est réalisée dans ce plan. Les coordonnées de P_0 , P_1 et R_3 y sont respectivement (x, y) , $(y, -x)$ et $(x, -y)$. Le milieu du segment P_0P_1 est le point A de coordonnées $\frac{1}{2}(x+y, y-x)$. La perpendicularité de P_0A et AR_3 se traduit par l'équation $2y^2 + 4xy - 2x^2 = 0$, soit, en remplaçant $\frac{y}{x}$ par $\operatorname{tg} \varphi$: $\operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0$. La solution positive est $\operatorname{tg} \varphi = -1 + \sqrt{2}$ ce donne pour φ une valeur de $\frac{\pi}{8}$. La valeur correspondante de θ est donnée par l'équation $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$. On obtient ainsi $\theta = 0.8249436 \dots \operatorname{rad} (47,26579 \dots ^\circ)$

En principe, pour vérifier qu'un polygone est régulier, il faut vérifier que les côtés ont même longueur, mais aussi que les angles sont égaux. Nous venons de choisir θ et φ de façon que R_3 soit sur la médiatrice de P_0P_1 . Par raison de symétrie, les quatre sommets de l'octogone autres que P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont tous sur la médiatrice d'un

des côtés du carré $P_0P_1P_2P_3$ et les huit côtés de l'octogone ont même longueur. De plus, les huit rayons joignant le centre du carré aux huit sommets de l'octogone ont même longueur puisque les coordonnées dans le plan du carré de P_0 et R_0 sont respectivement (x, y) et $(x, -y)$. Enfin ces huit rayons forment entre eux huit angles de $\frac{\pi}{4}$. L'octogone est donc régulier.

2. Pour $\varphi > \frac{\pi}{4}$ et $\text{tg } \theta = \frac{1}{\sin \varphi}$, on trouve de la même manière un polyèdre archimédien correspondant à $\varphi = \frac{2\pi}{9}$ et $\theta = 0.8249436 \dots$ rad.

Les deux polyèdres précédents portent le nom de « cube tronqué ».



figure 18 : Un cube tronqué

3. Passons à la case du tableau pour laquelle $\varphi = 0$ et $\theta < \frac{\pi}{4}$. Les polyèdres correspondant à cette case ont 14 faces dont 6 carrés et 8 hexagones. Nous cherchons si ces hexagones, construits autour de triangles équilatéraux tels que $P_0Q_0R_0$ sont réguliers pour certaines valeurs de θ .

Dans cette situation, on a $P_0 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, $R_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R_3 =$

$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Notre raisonnement sera analogue au précédent : nous

cherchons si le point R_3 peut se trouver sur la médiatrice de P_0R_0 . En notant A le milieu de P_0R_0 et en exprimant la perpendicularité de AR_3 et AP_0 , on obtient l'équation

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{2}$$

d'où $\theta \simeq 26,56^\circ$.

4. On obtient bien entendu un autre polyèdre du même type pour $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \arctg \frac{1}{2}$. Ces deux polyèdres portent le nom de « octaèdre tronqué ».



figure 19 : Un octaèdre tronqué

5. Dans la case du tableau correspondant à $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $0 < \theta < \arctg \sqrt{2}$, nous trouvons des polyèdres ayant 26 faces, dont 6 carrés, 8 triangles équilatéraux et 12 rectangles. Existe-t-il des valeurs de θ pour lesquelles ces derniers sont aussi des carrés ?

Un de ces rectangles est le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$. Vu que $\varphi = \frac{\pi}{4}$, les coordonnées des quatre sommets sont :

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \end{pmatrix} \quad R_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \end{pmatrix}$$

La longueur du côté P_0P_1 vaut donc $\sqrt{2} \sin \theta$, et celle du côté P_0R_0 vaut $\sqrt{2} |\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \cos \theta|$. Les rectangles sont donc des carrés si et seulement si $\theta = \arctg(2 - \sqrt{2})$ (en degrés : approximativement $30,3612^\circ$). Le polyèdre obtenu est le « rhombicuboctaèdre ».

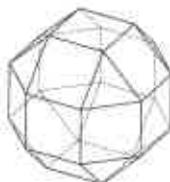


figure 20 : Un rhombicuboctaèdre

6. Il nous reste à explorer les deux cases du tableau données, la première par $0 < \theta < \arctg \frac{1}{\cos \varphi}$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ et la seconde $0 < \theta < \arctg \frac{1}{\sin \varphi}$ et $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Vu la symétrie de la situation, nous nous contenterons de la première.

Il s'agit alors de déterminer si les triangles — *a priori* quelconques — issus du quadrilatère gauche $P_0P_1R_3R_0$ peuvent être équilatéraux pour certaines valeurs de φ et θ . Pour la situation $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, les triangles à considérer sont $P_0P_1R_3$ et $P_0R_0R_3$ (voir figures 13 et 12). Il suffit que l'un des deux soit équilatéral pour que l'autre le soit aussi.

En effet, $|P_0P_1| = |R_0R_1|$ (côtés de faces carrées) et $|P_0R_0| = |P_1R_0|$ (deux côtés de faces triangulaires équilatérales).

Considérons donc le triangle $P_0P_1R_0$ et ses sommets :

$$P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} \quad R_0 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Les trois points P_0 , P_1 et R_0 étant situés sur une sphère de rayon 1, les trois distances $|P_0P_1|$, $|P_1R_0|$ et $|P_0R_0|$ sont égales si et seulement si les trois angles $\widehat{P_0P_1}$, $\widehat{P_1R_0}$ et $\widehat{R_0P_0}$ sont égaux. Il nous suffit donc d'égaliser les produits scalaires correspondants :

$$P_0 \cdot P_1 = z^2 \quad P_0 \cdot R_0 = 2xz - y^2 \quad R_0 \cdot P_1 = xz + yz + zx$$

Les équations à résoudre sont donc $y^2 + z^2 = 2xz$ et $xy + yz + zx = z^2$.
Passant en coordonnées sphériques, elles deviennent

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \varphi - 2 \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + 1 = 0 \\ \operatorname{tg}^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \operatorname{tg} \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) - 1 = 0 \end{cases}$$

En additionnant ces deux équations et en simplifiant par $\operatorname{tg} \theta$, on trouve $\operatorname{tg} \theta$ en fonction de φ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\sin \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi)}$$

On remplace alors $\operatorname{tg} \theta$ par cette valeur dans la première équation. Après calculs, on arrive à l'équation

$$\operatorname{tg}^5 \varphi + 2 \operatorname{tg}^4 \varphi + 3 \operatorname{tg}^3 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - 2 = 0$$

qui admet dans l'intervalle $[0, 1]$ la seule racine $\operatorname{tg} \varphi \simeq 0,495843297931$, ce qui fournit $\varphi \simeq 26,3742053779^\circ$. On trouve alors sans peine la valeur $\theta \simeq 32,1606898335^\circ$.

La solution symétrique (si $\varphi > \frac{\pi}{4}$) fournit les valeurs

$$\theta \simeq 32,1606898335^\circ \text{ et } \varphi \simeq 63,6257946221^\circ$$

Les deux polyèdres ainsi obtenus portent le nom de « snub cube ».



figure 21 : Snub cube gauche



figure 22 : Snub cube droit

Résumons nos résultats concernant les polyèdres archimédiens de la famille du cube en un tableau :

	Colatitude θ	Longitude φ
Cube	$\arctg \sqrt{2}$ (54,73...°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)
Cube tronqué	$\arctg \frac{1}{\cos(\pi/8)}$ (47,26...°) $\arctg \frac{1}{\cos(\pi/8)}$ (47,26...°)	$\frac{\pi}{8}$ (22,5°) $\frac{3\pi}{8}$ (67,5°)
Octaèdre	0	—
Octaèdre tronqué	$\arctg \frac{1}{2}$ (26,56...°)	0
Cuboctaèdre	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	0
Rhombicuboctaèdre	$\arctg(2 - \sqrt{2})$ (30,36...°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)
Snub cube gauche	0,56131... (32,1606...°)	0,46031... (26,3742...°)
Snub cube droite	0,56131... (32,1606...°)	1.109... (63,62...°)

Pour conclure, complétons la figure 8 :

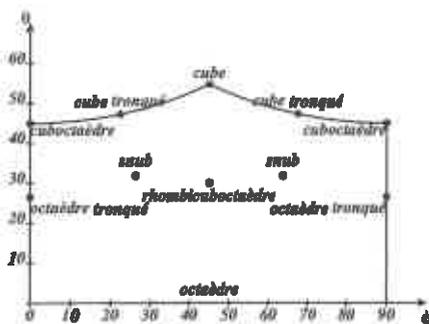


figure 23

3

La sorcière d'Agnesi

Pierre Lecomte, Université de Liège.

3.1 Introduction.

Cet article est qu'un petit résumé du premier site internet¹ qu'a bâti Pierre Lecomte pour résumer ses travaux.

On y retrouve les premières applications géométriques de la transformation qui produit la célèbre courbe à partir d'un cercle. A ce propos, et même si le nom de *sorcière* provient d'une erreur de traduction, on a pensé utile de reproduire en annexe, l'article rédigé dans l'Ouvert de l'Irem de Strasbourg, par Bruno Bernardoff. C'est une traduction libre d'une biographie faite par June Barrow-Green et Jeremy Gray, pour le bicentenaire de la mort de la mathématicienne.



figure 1 : Maria Gaetana Agnesi.

¹On le trouve à l'adresse <http://www.ulg.ac.be/gsothalg/sorciere1/index.html>.

La Sorcière d'Agnesi (cf fig 3) est une courbe construite au moyen d'un cercle, d'une droite et d'un point.

La figure 2 illustre cette construction : A est un point du cercle, a est la tangente au cercle passant par le point diamétralement opposé; le point P décrit le cercle; la droite (AP) rencontre a en Q ; le point P' est l'intersection de la perpendiculaire à a passant par Q et de la parallèle à a passant par P .

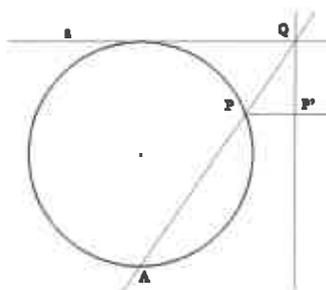


figure 2

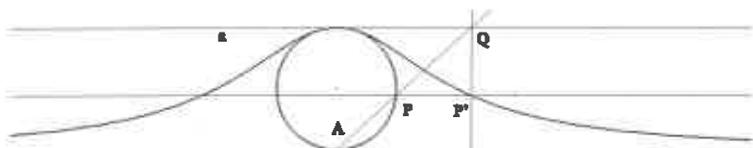


figure 3 : La Sorcière d'Agnesi.

On constate assez vite que le rôle du cercle est secondaire. Il indique quels points transformer mais le passage de P à P' n'en dépend pas. Il est seulement dicté par A et a . En substituant un arc de courbe C au cercle, on obtient une autre courbe, que nous appellerons *transformée d'Agnesi* de C (par rapport à A et a). Il est du reste aisé de retrouver P à partir de P' . La construction est réversible, ce qui permet de trouver un arc de courbe C' dont C soit la transformée d'Agnesi : la *transformée d'Agnesi inverse* de C .

Ces dénominations ne sont pas canoniques : on appelle aussi ces transformations des *hyperbolismes* directe et inverse. L'une et l'autre sont des cas particuliers de transformations de Newton.

On peut généraliser encore, en remplaçant a par une courbe ou en changeant les directions selon lesquelles on projette P et Q sur P' . On peut aussi s'affranchir totalement de la courbe C et considérer les deux transformations comme des transformations du plan euclidien, réciproques l'une de l'autre.

C'est à l'illustration de ces quelques considérations que les notes qui suivent

sont consacrées. Cela nous conduira à quelques énoncés élémentaires mais amusants. Dans la mesure où ils proviennent de transformations inversibles, ils possèdent le plus souvent une forme de réciproque qui traduit l'effet de l'inverse de la transformation utilisée pour les obtenir, ou de l'alignement des points. Nous laisserons le plus souvent au soin du lecteur la formulation de celle-ci.

Dans le reste de ce texte, \mathcal{E} désigne un plan affine euclidien.

3.2 Les transformations A et A^{-1} .

On fixe un point A de \mathcal{E} , ainsi qu'une droite a de \mathcal{E} ne contenant pas A .

3.2.1 Définitions.

L'application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ transforme le point $P \neq A$ en l'intersection P' de la parallèle à a menée par P et de la perpendiculaire à a menée par l'intersection Q de (AP) avec² a .

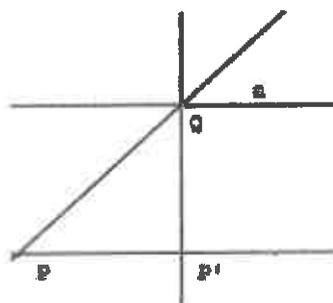
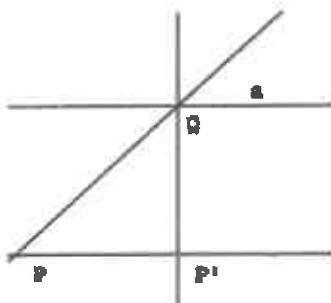


figure 4 : Construction de $\mathcal{A}(P)$.

L'application réciproque \mathcal{A}^{-1} applique donc un point P sur l'intersection P' de la parallèle à a menée par P et de la droite joignant A à la projection orthogonale Q de P sur a .

²Si P est un point de la parallèle à a menée par A , autre que A , (AP) est aussi parallèle à a et Q n'existe pas ; lorsque $P = A$, Q est indéfini car il y a une infinité de droites passant par A et P .

figure 5 : Construction de $A^{-1}(P)$.

Les applications A et A^{-1} sont définies dans le complémentaire de la parallèle à a menée par A , où elles sont réciproques l'une de l'autre³.

Les points fixes de A et A^{-1} sont les points de a et ceux de la perpendiculaire à a menée par A , autres que A .

3.2.2 Expressions analytiques.

Il est assez naturel de rapporter \mathcal{E} à un repère orthonormé (A, e_1, e_2) dont l'origine soit A , avec e_1 parallèle à a et e_2 orienté de A vers sa projection orthogonale sur⁴ a . Celle-ci a donc des coordonnées de la forme $(0, h)$ où $h = d(A, a) > 0$.

Dans un tel repère, les expressions analytiques de A et de sa réciproque sont données par :

$$\begin{cases} A : (x, y) \mapsto \left(\frac{hx}{y}, y\right) \\ A^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\frac{xy}{h}, y\right) \end{cases}$$

Elles confirment ce que nous savions des domaines et des images des transformations étudiées.

Avec ces formules, il est aisé de décrire analytiquement les "transformations d'Agnesi" directe et inverse de courbes. Par exemple, si C est décrit par des équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

alors sa transformée directe $C' = A(C)$ admet les équations paramétriques

$$\begin{cases} x' = \frac{hx(t)}{y(t)} \\ y' = y(t) \end{cases}.$$

³En fait A^{-1} est définis dans \mathcal{E} tout entier. Elle donne A comme image commune aux points de cette parallèle.

⁴Seule l'orientation de e_1 n'est pas précisée. Il y a donc deux repères ayant les propriétés demandées. Un pour chaque orientation possible de \mathcal{E} .

Si C est défini par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, alors C' admet l'équation

$$F'(x, y) = (F \circ \mathcal{A}^{-1})(x, y) = F\left(\frac{xy}{h}, y\right) = 0.$$

Dans chaque cas, il faut bien entendu étudier les éventuelles singularités de la transformée. Pour la transformée inverse $C'' = \mathcal{A}^{-1}(C)$, il vient respectivement

$$\begin{cases} x'' = \frac{a(t)y(t)}{h} \\ y'' = y(t) \end{cases}$$

et

$$F''(x, y) = (F \circ \mathcal{A})(x, y) = F\left(\frac{hx}{y}, y\right) = 0.$$

Les transformées de certaines courbes se présentent parfois comme des graphes de fonctions, ce qui en facilite l'étude et donne quelques exercices intéressants. C'est le cas de la Sorcière d'Agnesi. C'est aussi le cas par exemple de la transformée directe d'une parabole par rapport à son sommet et à une perpendiculaire à son axe.

3.3 Transformées de droites.

3.3.1 Transformation directe.

Aspects analytiques.

Considérons une droite d d'équation $px + qy + r = 0$. La courbe $\mathcal{A}(d)$ admet l'équation

$$\frac{p}{h}xy + qy + r = 0. \tag{3.1}$$

Lorsque d n'est pas parallèle à a , c'est-à-dire lorsque $p \neq 0$, $\mathcal{A}(d)$ est donc une hyperbole équilatère. Elle passe par les points F et F' , intersections de d et de l'ensemble des points fixes de \mathcal{A} . Ses asymptotes sont d'une part la parallèle a' à a passant par A et, d'autre part, la perpendiculaire à a menée par le point d'intersection C' de a et de la parallèle à d menée par A . Ceci s'explique aisément au moyen de la géométrie projective.

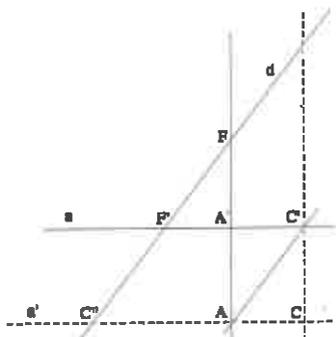


figure 6 : Le centre C et les asymptotes (en pointillé) de $\mathcal{A}(C)$.

Les directions des asymptotes d'une hyperbole sont, dans ce cadre, les points à l'infini de celle-ci. En étendant la construction de \mathcal{A} à cette sorte de points, l'image de la direction de d est l'intersection de la perpendiculaire à a en C' et de la parallèle à a menée par P , qui est la "droite⁵ à l'infini", c'est-à-dire l'ensemble des directions de \mathcal{E} .

C'est donc la direction de (CC') , une des asymptotes de l'hyperbole. La seconde asymptote est, de façon analogue, l'image du point C'' commun à d et la parallèle a' à a menée par A . Le centre de l'hyperbole coïncide avec A exactement lorsque d est perpendiculaire à a .

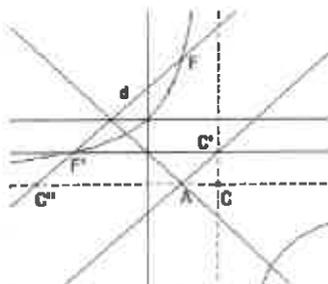


figure 7 : Aperçu de l'Hyperbole.

L'hyperbole d'équation (3.1) est dégénérée exactement lorsque d passe par A .

Lorsque d est parallèle à a (et ne passe pas par A), alors $\mathcal{A}(d) = d$.

Enoncés géométriques.

En examinant la discussion précédente, on obtient quelques énoncés de géométrie élémentaire.

⁵Car d n'est pas parallèle à a .

Énoncé 1 :

On donne deux droites perpendiculaires a et b et un point P qui n'appartient à aucune d'elles. Une droite d passant par P coupe a et b en A et B respectivement. Montrer que le lieu de l'intersection de la parallèle à a menée par B avec la parallèle à b menée par A est une hyperbole dont les asymptotes sont les parallèles à a et b menées par P .

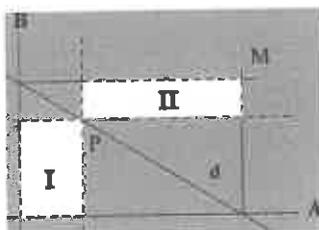


figure 8 : Les rectangles I et II ont même aire.

Ce lieu est en effet la *transformée d'Agnesi* A de b par rapport à P et a . On peut aussi faire la vérification directe de la propriété (voir la figure 8) : il est évident que les rectangles I et II ont même aire. Comme le rectangle I est fixe, l'aire de II est constante. Par conséquent, M se déplace sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les droites tracées en pointillés.

Plus généralement

Énoncé 2 :

On donne deux droites sécantes a et b et un point P qui n'appartient à aucune d'elles. Une droite d passant par P coupe a et b en A et B respectivement. Montrer que le lieu de l'intersection de la parallèle à a menée par B avec la perpendiculaire à a menée par A est une hyperbole. Déterminer les asymptotes de celle-ci.

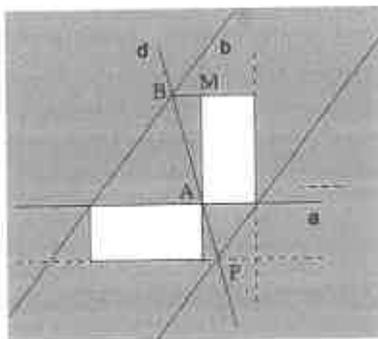


figure 9 : Les rectangles clairs ont même aire.

De nouveau on peut noter que ce lieu est la *transformée d'Agnesi* directe de b par rapport à P et a . On peut aussi en donner une démonstration purement synthétique par comparaison d'aires de rectangles. La figure aide à comprendre comment.

D'une part, en vertu de ce qu'on a dit à propos de l'Énoncé 1, les rectangles de teinte claire ont même aire. Il est évident également que les triangles de même numéro ont même aire (ils sont égaux deux à deux), de même que les triangles notés (arbitrairement) $BB'B''$ et $PP'P''$. Par conséquent les rectangles de teinte soutenue ont aussi même aire, ce qui termine la démonstration.

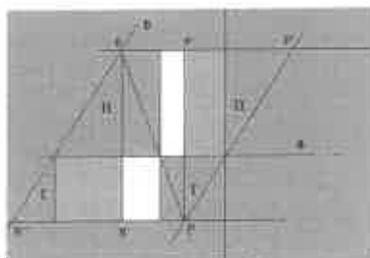


figure 10 : Les rectangles de même teinte ont même aire, ainsi que ceux de même numéro.

Avec la transformée d'Agnesi inverse, il vient

Énoncé 3 :

La transformée d'Agnesi inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à un point situé sur une de ces asymptotes et à une droite parallèle à celle-ci est une droite.

Nous laisserons au lecteur le soin de l'exploiter pour obtenir des exercices supplémentaires.

3.3.2 Transformation inverse .

Les développements sont analogues à ceux relatifs à la transformée directe. Nous laisserons à l'imagination du lecteur toute liberté de compléter à sa guise les quelques indications qui suivent.

Considérons à nouveau une droite d d'équation $px + qy + r = 0$. La courbe $A^{-1}(d)$ est définie par l'équation

$$ph\frac{x}{y} + qy + r = 0. \quad (3.2)$$

Lorsque d n'est ni parallèle ni perpendiculaire à a , il s'agit d'une parabole. Elle passe par A et par l'intersection B de d et de la perpendiculaire à a menée par A .

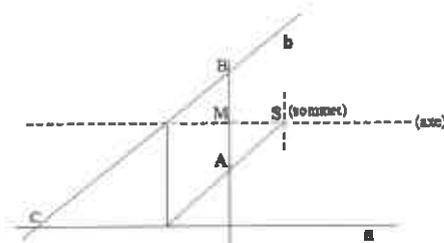


figure 11 : Le sommet S , l'axe et la tangente au sommet (en pointillé) de $\mathcal{A}^{-1}(d)$.

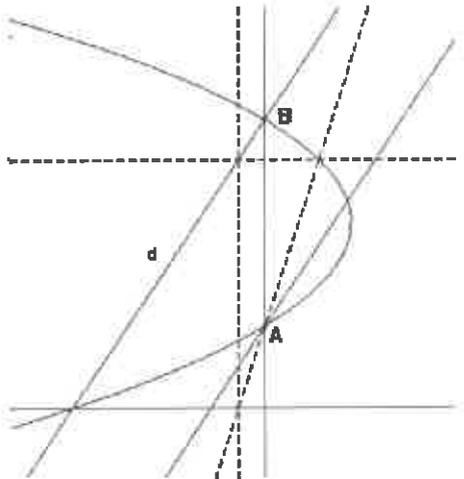


figure 12 : Aperçu de la parabole.

Elle passe aussi par l'intersection de d et de a . Son axe est parallèle à a . Il passe donc par le milieu M du segment $[AB]$. Son sommet est facile à construire. L'axe coupe d en un point. La droite qui passe par la projection orthogonale de celui-ci sur a et par A le sommet de la parabole. Lorsque d est perpendiculaire à a , l'équation (3.2) est celle de la droite passant par A et l'intersection de d avec a . Lorsque d est parallèle à a , elle représente elle-même.

Les faits ci-dessus font l'objet d'énoncés que nous ne formulerons pas

explicitement⁶. Nous nous contenterons de formuler une forme de réciproque à laquelle ils donnent lieu.

Énoncé 4 :

Des points A et B sont situés sur une parabole. La droite joignant le sommet de celle-ci à la projection orthogonale de l'intersection de (AB) avec l'axe sur la parallèle à l'axe passant A par coupe la perpendiculaire à l'axe menée par selon un point de la parabole.

Voici un autre exemple, facile à paramétrer et conduisant à une courbe du quatrième degré en forme de huit. Il s'agit de la transformée inverse d'un cercle par rapport à son centre et à une tangente

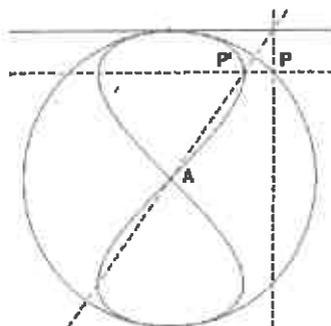


figure 13 : La transformée inverse du cercle par rapport au centre et à une tangente est une sorte de "huit".

3.4 Annexes Historique.

Bien⁷ des mathématiciens connaissent le nom d'Agnesi à cause de la cubique dite "versiera" ou « cubique d'Agnesi » ou encore « sorcière d'Agnesi ». Cette cubique a pour équation cartésienne $x^2y = a^2(a - y)$. Cependant, la plupart d'entre eux, peu au fait de son histoire, peuvent se demander en vain la raison de la dénomination, pour le moins inhabituelle, de cette courbe. Nous verrons que

⁶En particulier, nous ne donnerons pas de justifications synthétiques à ces propriétés

⁷Traduction de Bruno Bernardoff (Pour le journal l'Ouvert de l'Irem de Strasbourg, n° 96) de la biographie June Barrow-Green, Jeremy Gray Maria Gaetana Agnesi, *Newletter*, n° 31, Mars 1999, Revue de la Société Mathématique Européenne.

si la vérité est bien plus triviale que ce que l'on peut s'imaginer, il nous faut noter que ce nom a au moins l'avantage de perpétuer le souvenir de Maria Gaetana Agnesi, sinon la première du moins une des toutes premières mathématiciennes européennes de la période moderne.

Maria Gaetana Agnesi naquit à Milan en 1718, l'aînée des 21 enfants de Pietro Agnesi dont la famille avait fait fortune dans le commerce de la soie⁹. Elle fut poussée dans les études par son père qui lui procura les meilleurs maîtres de la région en philosophie, en langues, en sciences naturelles, en mathématiques et en musique. Dès l'âge de 11 ans, elle dominait de nombreuses langues dont le français, le latin, le grec, l'allemand, l'espagnol et l'hébreu. En 1738 fut publié un volume de 191 thèses philosophiques qu'elle se prépara à défendre, défiant ainsi tous les concurrents. Les comptes rendus de son habileté dans cette joute oratoire montrent qu'elle possédait déjà de sérieuses connaissances dans les disciplines scientifiques puisqu'elle y fait référence à la théorie des marées, à la propagation de la lumière, aux propriétés géométriques des courbes et de son soutien à la philosophie newtonienne.

Cependant Agnesi se lassa rapidement d'une vie publique où on ne s'intéressait qu'à son prodigieux talent et, contre la volonté de son père, elle décida d'entrer au couvent. Ce n'est qu'après de longues discussions, qu'elle accepta de rester au sein de la famille à la condition qu'elle abandonne les formes de sa vie passée. Elle se cloîtra chez elle et s'adonna à l'étude de la religion et des mathématiques. Ses progrès en mathématiques furent grandement facilités par l'arrivée à Milan de Ramiro Rampinelli (1697-1759), moine bénédictin et surtout mathématicien qui était auparavant professeur à Rome et à Bologne. Rampinelli devint un visiteur régulier de la maîtresse de maison et tint bientôt le rôle de professeur d'Agnesi.

Le premier travail mathématique d'Agnesi, un commentaire du traité posthume de L'Hospital sur les sections coniques⁹, ne fut pas publié. Cependant, son deuxième ouvrage mathématique, "Istituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana", en deux volumes, publié à compte d'auteur à Milan en 1748, la rendit célèbre (cf fig 14). Il était rédigé en italien (et non pas en latin) d'une part parce qu'elle préférait écrire en cette langue et d'autre part parce qu'elle voulait le rendre accessible à la jeunesse italienne, en particulier à ses frères. Son but, comme elle le déclare dans la préface, était de présenter le sujet de façon qu'il soit « pourvu de sa clarté et de sa simplicité propre... [et] suive l'ordre naturel qui procure, peut-être, le meilleur enseignement et la plus grande lumière » La préface contient également un hommage émouvant à Rampinelli ainsi qu'une reconnaissance envers une œuvre plus ancienne de Reyneau¹⁰.

⁹C'est à tort que de nombreux dictionnaires biographiques perpétue le mythe d'un père professeur de mathématiques à Bologne. Le statut social exact de la famille Agnesi est parfaitement documenté dans l'ouvrage d'Anzoletti "Maria Gaetana Agnesi" publié à Milan en 1900.

⁹Guillaume de L'Hospital, « Traité analytique des sections coniques », Paris 1720. Ce livre eut une grande importance lors de sa publication.

¹⁰Charles René Reyneau : « Analyse démontrée ou la méthode de résoudre les problèmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences » Paris 1707. 4 John

En dehors de Rampinelli, une autre personne eut une influence importante sur l'ouvrage. Il s'agit du mathématicien Jacopo Riccati (1676–1754). Rampinelli connaissait bien Riccati et c'est sur son conseil qu'Agnesi lui écrivit, lui demandant son avis et des commentaires sur son travail. Commença alors une longue et fructueuse correspondance entre elle et Riccati, correspondance qui dura de 1745 à 1749 et dans laquelle Riccati suggère de nombreuses corrections et annotations. La correspondance contient également la « méthode des polynômes » œuvre non publiée de Riccati et qui datait de plusieurs années. Agnesi inclut cette œuvre dans son ouvrage en précisant soigneusement son origine.

À première vue, il semble que l' "Instituzione Analitiche" fut un grand succès. Marie-Thérèse, Grande Duchesse d'Autriche et féministe notoire à laquelle Agnesi avait dédié son travail, montra sa satisfaction en envoyant à l'auteur une boîte incrustée de diamants. Le Pape Benoît IV qui avait lui-même étudié les mathématiques lui écrivit personnellement pour la féliciter et peu de temps après il lui accorda le poste rémunéré de lectrice honoraire en analyse à l'université de Bologne. En 1750, elle fut nommée sur la chaire de mathématiques. En 1749, l'Académie française recommanda que le deuxième volume fut traduit en français, traduction qui vit le jour en 1775. En 1760, John Colson⁴ prépara une traduction anglaise⁵ mais qui ne fut publiée qu'en 1801 pour diverses raisons dont la mort du traducteur. Colson avait été tellement intéressé par le travail d'Agnesi qu'il apprit l'italien pour effectuer la traduction, traduction qui ne se limitait pas seulement au vocabulaire mais également aux notations, puisqu'il transposa les notations de Leibniz en celles de Newton.

Cependant, un examen plus attentif des sources montre que l'accueil de son livre ne fut pas aussi large qu'on peut le penser. Le travail d'Agnesi ne reçut pratiquement pas d'attention de la part des grands mathématiciens du XVIII^e siècle et plus tard les historiens des mathématiques l'ignorèrent largement. Comme Truesdell l'a démontré avec force, c'était essentiellement parce que le livre d'Agnesi, bien qu'il fut sans aucun doute un modèle de clarté, ne contenait rien de nouveau ou d'original, ni davantage d'applications à la mécanique. Bien qu'il ait été décrit avec précision comme « un exposé par l'exemple plutôt que par la théorie », il ne contient pas un seul exemple d'un calcul différentiel ou intégral appliqué à un phénomène naturel, contrairement à bien d'autres livres de l'Europe continentale de la même période. Le livre commence par l'algèbre élémentaire, continue par la théorie des équations et l'usage des coordonnées en géométrie, puis dans le volume II, attaque le calcul différentiel et intégral (ainsi que les séries infinies telles qu'on les connaissait à l'époque), et termine par la résolution des équations différentielles élémentaires.

⁴ Colson était titulaire d'une chaire à Cambridge de 1739 à 1760. La plupart de ses publications sont des traductions. ⁵ J. Colson, "Analytical Institutions", Volume I, Londres 1801.

L'étude de la courbe connue aujourd'hui sous le nom de « sorcière d'Agnesi » apparaît vers la fin du premier volume¹¹ (page 381). Cette courbe, dont la première mention se trouve dans les travaux de Fermat, fut construite en 1703 par Guido Grandi (1671-1742) qui, en 1718, l'appela « Versiera » du latin « Versiora » qui est la corde qui entoure une voile¹². Dans l'étude de cette courbe, Agnesi suit fidèlement Grandi et écrit "La curva... dicesi la Versiera". Le nom de « sorcière » n'apparut que plus tard et résulte d'une erreur de traduction. Le coupable en est Colson qui confondit "la Versiera" avec "l'aversiera" qui a justement le sens de « sorcière » (voir sa traduction page 222).



figure 14

Malgré sa nomination sur une chaire de l'université de Bologne, Agnesi ne se rendit jamais dans cette ville pour y toucher ses revenus. Pourtant son nom resta sur les registres de l'université pendant quarante-cinq ans. Peu de temps après la publication de "Istituzioni Analitiche", et sans doute à la suite d'une sévère injonction paternelle elle se dédia corps et âme à la religion. Elle prit en charge l'instruction de ses frères et sœurs et s'engagea dans l'aide aux pauvres et aux malades. Après la mort de son père en 1752, elle redoubla de ferveur religieuse et s'investit totalement dans son travail charitable. Elle créa et finança un hospice pour les vieilles femmes. En 1771 elle devint directrice d'un grand asile pour pauvre, "Pio albergo Trivulzio" dépendant de l'église et elle y mourut, sans ressource, en 1799.

4

La géométrie élémentaire, une science physique ?

Rudolf Bkouche, Irem Lille.

"Geometry is a physical science".¹

W. K. Clifford

4.1 Introduction.

La géométrie : science mathématique ou science physique ?

Cette question est moins celle du statut de la géométrie que celle des relations entre sciences mathématiques et sciences physiques, question d'autant plus difficile lorsque l'on sait que la signification des termes "mathématique" et "physique" s'est transformée au cours de l'histoire et par conséquent la relation entre ces deux domaines de la science.

Cela nous demande de revenir sur la signification de ces termes d'abord à l'époque de la naissance de la géométrie rationnelle telle que l'ont développée les géomètres grecs, ensuite à l'époque moderne, celle de la Révolution Scientifique au XVII^{ème} siècle, enfin à l'époque contemporaine marquée par la naissance des géométries non-euclidiennes et le développement des méthodes formalistes.

¹William K. Clifford, *the common sense of the exact sciences*, Dover, New York 1955, p. 43. L'ouvrage de Clifford a été publié après sa mort en 1885 par Pearson, le chapitre "Space" dont est extrait l'assertion citée a été écrit en 1875 (cf. la préface de Pearson, p. lxiii)

Cependant avant de commencer cette étude nous énoncerons deux propriétés géométriques, posant la question de leur appartenance aux mathématiques ou à la physique.

Le premier théorème, un des fleurons de la géométrie grecque, énonce qu'il existe, à similitude près, cinq polyèdres réguliers et cinq seulement, propriété que l'on peut opposer à celle qui dit que dans le plan existe, pour tout entier $n \geq 3$, un n -gone et un seul défini à similitude près.

Le second théorème, à l'origine de la topologie algébrique, est la formule d'Euler qui énonce que pour tout polyèdre convexe, si l'on note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, f le nombre de faces, alors

$$s - a + f = 2$$

Ces deux énoncés sont considérés traditionnellement comme des énoncés mathématiques, mais si l'on considère que ces deux théorèmes énoncent des propriétés profondes de l'espace on peut affirmer qu'ils participent de l'étude des corps solides, donc des sciences physiques. Notons cependant une différence entre ces deux énoncés. Si la formule d'Euler peut être approchée empiriquement, à partir de quelques situations particulières², l'assertion concernant les polyèdres réguliers résulte du seul raisonnement, autrement dit c'est le raisonnement qui nous permet ici d'appréhender l'une des propriétés profondes de l'espace.

La physique moderne, issue de ce que l'on appelle la Révolution Scientifique du XVII^{ème} siècle, nous a habitués à cette appréhension purement déductive des propriétés du monde, l'expérience ayant pour objet moins de découvrir ces propriétés que de les vérifier une fois connues, vérification qui s'appuie sur un discours théorique déjà construit, et l'on sait que les instruments utilisés pour cette vérification sont eux-mêmes construits à partir des résultats théoriques.

Ainsi Bachelard, après avoir rappelé que "les instruments ne sont que des théories matérialisées"³, écrit

"Après avoir formé, dans les premiers efforts de l'esprit scientifique, une raison à l'image du monde, l'activité spirituelle de la science moderne s'attache à construire un monde à l'image de la raison. L'activité scientifique réalise, dans

²Les travaux d'Euler sur les polyèdres sont développés dans deux mémoires. Dans le premier mémoire d'Euler ("Elementa Doctrinae Solidorum", *Novi commentarii academias scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/1753), 1758, p. 109-140) l'approche est essentiellement expérimentale, c'est à partir de situations déjà connues (en particulier les polyèdres réguliers) qu'Euler conjecture la formule qu'il tentera de démontrer dans un second mémoire ("Démonstration Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Haecris Planis Inclusa Sunt Praedita", *Novi commentarii academias scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/1753), 1758, p. 140-160). Ulérieurement Cauchy ("Recherche sur les Polyèdres", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1811, p.) puis Jordan ("Recherches sur les polyèdres", *J. für die Reine und Angew. Math.*, Bd. LXVI, 1866, p. 22-91) donneront des démonstrations de la formule d'Euler que l'on peut encore considérer comme des démonstrations de type expérimental.

³Gaston Bachelard, *Le Nouvel Esprit Scientifique*, "Nouvelle Encyclopédie Scientifique", PUF, Paris 1934/1973, p. 16

toute la force du terme, des ensembles rationnels."

Mais contrairement au discours bachelardien qui place cette transformation de la raison scientifique dans la science du XX^{ème} siècle, on peut considérer que cette transformation a commencé avec la géométrie grecque. Si la physique aristotélicienne, en se voulant au plus proche de la connaissance intuitive, participe de la construction d'une raison à l'image du monde, la géométrie grecque, telle qu'elle a été codifiée par Euclide, participe de la rationalisation du monde, la découverte des polyèdres réguliers en étant l'une des marques les plus profondes. En ce qui concerne la mécanique, cette transformation aura lieu avec la géométrisation du temps telle qu'elle apparaît avec la Révolution scientifique du XVII^{ème} siècle. La mathématisation croissante des sciences de la nature et la naissance des méthodes formalistes au début du XX^{ème} siècle renforceront cette emprise du rationnel sur le réel, renforcement qui apparaît comme un renouvellement de la pensée scientifique. Mais *ce nouvel esprit scientifique*, pour reprendre une expression de Bachelard, s'inscrit dans une histoire de la mathématisation des sciences de la nature. Nous reviendrons ci-dessous sur le terme "mathématisation".

4.2 *Mathématiques et physique dans le corpus aristotélicien.*

Rappelons d'abord comment Aristote exprime dans la *Physique* la distinction entre le "mathématique" et le "physique" :

"La géométrie étudie la ligne physique en tant qu'elle n'est pas physique; au contraire, l'optique étudie la ligne mathématique, non en tant que mathématique, mais en tant que physique"⁴.

Cette distinction peut être précisée si l'on revient sur le sens des termes "mathématique" (*μαθηματικη*) et "physique" (*φυσικη*) chez Aristote. Le terme *φυσικη* renvoie à la connaissance de la nature, c'est-à-dire aux objets de la connaissance empirique, le terme *μαθηματικη* renvoie à la connaissance scientifique, celle que nous atteignons par la démonstration. Ainsi Aristote distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique, ici la ligne considérée comme rayon lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif. On peut alors considérer que c'est *via* l'activité de raisonnement que se constitue l'objet mathématique; dans une perspective gonséthienne, on pourrait dire qu'un objet de connaissance devient objet mathématique dès qu'il devient objet de discours démonstratif. En ce sens c'est la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, autrement dit, y compris dans les mathématiques euclidiennes, c'est le langage qui modèle les objets. Il faut alors, pour éviter tout malentendu, distinguer entre la chose qui nous est donnée par la connaissance empirique et l'objet, lequel représente la

⁴Aristote, *Physique*, texte établi et traduit par Henri Carteron, Les Belles Lettres, Paris 1973, Livre II, p. 63, 194 a,

chose *via* le discours.

C'est cette réduction au discours qui constitue la science rationnelle, celle qui se construit *via* le raisonnement comme l'explique Aristote dans les *Seconds Analytiques* :

"Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration⁵."

Cela nous amène à faire deux remarques.

- Ce que nous appelons aujourd'hui les sciences mathématiques, lesquelles participent selon certains des sciences formelles, a un sens différent de celui que lui donnaient les Grecs. Nous pourrions rappeler ici le terme néerlandais *wiskunde* introduit par Stevin pour désigner les mathématiques, lequel terme désigne la science.
- Quant aux sciences physiques, la mathématisation de la physique telle qu'elle est apparue au XVII^{ème} siècle a permis d'insérer la mécanique dans ce que l'on appelait alors la *mathesis universalis* ; en ce sens la physique moderne mathématisée s'inscrit dans le programme aristotélicien des *Seconds Analytiques*⁶. Ainsi la physique est devenue un chapitre des mathématiques à condition de donner au terme "mathématique" un sens plus large que celui qui réduit les mathématiques à leur seul caractère de science formelle. Mais on peut dire aussi que les mathématiques sont un chapitre de la physique dans la mesure où elles prennent leur source dans le monde et où elles sont un moyen de connaître une part du monde. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de l'exposé.

4.3 Géométrie et corps solides.

"Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie⁷" écrit Poincaré dans *La Science et l'Hypothèse*, mettant ainsi l'accent sur l'objet d'étude de la géométrie élémentaire.

La géométrie élémentaire, celle que nous ont léguée les Grecs, a pour objet d'étudier les propriétés des corps solides quant à leur forme et à leur grandeur. Un corps solide peut être défini comme un corps dont la forme et la grandeur restent invariables lorsqu'ils se meuvent. Notons qu'une lecture purement formelle de cette définition pose problème ; si l'égalité est définie par le mouvement, il faut alors définir la notion de mouvement, et plus précisément la définition de mouvement sans déformation⁸, c'est-à-

⁵ Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979, p. 8

⁶ On peut alors considérer que la physique n'a pu réaliser le programme des *Seconds Analytiques* qu'en prenant ses distances d'avec le monde qu'elle se proposait d'étudier.

⁷ Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), Flammarion, Paris 1968, p. 86.

⁸ Notons que pour Aristote le terme "mouvement" désigne le changement en général, le mouvement proprement dit étant appelé le mouvement local. Il faut alors définir parmi les mouvements locaux ceux qui conservent la forme et la grandeur des corps solides (cf. Aristote, *Catégories*, traduction Tricot, Vrin 1977, p. 72-75).

dire celui qui conserve la forme et la grandeur, ce qui renvoie à une circularité. Pour éviter une telle circularité, on peut considérer que les notions de corps solides et de mouvement sont issues de l'expérience du monde et que la géométrie a pour objet d'étudier les propriétés des corps solides, lesquelles restent invariantes par le mouvement, autrement dit d'expliciter les relations entre corps solides et mouvement. Une lecture empiriste des *Eléments* d'Euclide permet alors de sortir du cercle, la géométrie a moins pour objet de définir les corps solides que d'expliciter les propriétés d'invariance des corps solides par rapport au mouvement, corps solides et mouvement relevant de la connaissance empirique. Une telle lecture s'inscrit dans le programme de la *mathesis universalis*, laquelle n'est autre que la construction de la science rationnelle.

Deux corps solides sont égaux lorsqu'ils ont même forme et même grandeur ce que l'on peut reconnaître à la possibilité de les superposer. Cette possibilité pose problème ; si on peut vérifier que deux corps solides plans, deux plaques planes par exemple, sont égaux en les superposant, cette opération est impossible pour des corps solides tridimensionnels : comment superposer deux cubes en bois égaux ? Cette difficulté exige d'énoncer des critères permettant d'affirmer *a priori* que deux corps solides sont égaux.

Notons que les *Eléments* d'Euclide proposent une définition plus large de l'égalité, l'égalité de grandeur, puisqu'ils considèrent comme égaux deux triangles ayant même aire⁹. Nous restreignons ici l'usage du terme "égalité" à la seule relation "même forme et même grandeur" ; c'est celle qui est assurée par le principe de l'égalité par superposition que nous énoncerons sous la forme :

Deux objets que l'on peut superposer sont égaux.

Ce principe s'appuie sur le mouvement et par cela-même renvoie à la connaissance empirique. La construction d'une géométrie rationnelle implique que l'on énonce des critères d'égalité qui évitent tout recours à l'expérience pour ne s'appuyer que sur le seul discours démonstratif, ce sera le rôle des cas d'égalité des triangles. Nous ne reviendrons pas ici sur le rôle de ces critères dans l'élaboration de la géométrie rationnelle, renvoyant à l'un de nos précédents articles¹⁰. Nous nous bornerons ici à expliquer comment les cas d'égalité permettent d'éliminer le mouvement de la géométrie : en effet une fois démontrés ces cas d'égalité, qu'il faut considérer comme des critères de superposition, il suffit, pour montrer l'égalité de deux corps ou de deux figures, de s'appuyer sur ces cas d'égalité et leurs conséquences. En ce sens les cas d'égalité jouent un rôle fondamental dans la mise en place de la géométrie rationnelle.

⁹Pour lever ces difficultés terminologiques, Legendre propose d'appeler *équivalentes* deux figures planes ayant même aire (cf. Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823, p. 60).

¹⁰Rudolf Bkouche, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles", *Bulletin de l'APMEP* n°430, septembre-octobre 2000, p. 613-629.

Rappelons que dans les *Eléments* d'Euclide seule la démonstration du premier cas d'égalité des triangles (la proposition 4 du Livre I) s'appuie sur la superposition, exemple classique de démonstration de type expérimental en ce sens qu'elle décrit ce que l'on appelle aujourd'hui une expérience de pensée. Ce premier cas d'égalité permet de se passer de la superposition et ainsi d'éliminer tout recours au mouvement dans la suite de l'exposé euclidien, y compris dans la démonstration des deux autres cas d'égalité¹¹. On peut voir dans les *Eléments* d'Euclide un mode exemplaire de construction d'un discours rationnel s'appuyant sur des données de la connaissance mondaine (les corps solides et les figures qui les représentent); si les définitions, postulats et axiomes jouent le rôle d'énoncés premiers, ces énoncés renvoient à une connaissance intuitive des objets étudiés. Une fois ces énoncés explicités, on peut mettre en place le discours démonstratif qui permet, à partir des vérités premières énoncés par les axiomes et les postulats, d'énoncer de nouvelles propriétés des objets étudiés qui sont autant de vérités du monde. Ainsi se développe une forme de connaissance du monde fondée par le seul usage d'un discours convenablement réglé permettant non seulement de connaître ces vérités mais aussi les raisons de ces vérités. C'est cela qui fonde la nécessité des vérités connues par la voie de la démonstration, ces vérités non seulement sont vraies mais ne peuvent pas ne pas être vraies.

Un autre aspect de l'usage de la démonstration réside dans la réduction des objets étudiés à des objets de discours, c'est sur les objets de discours que porte le raisonnement montrant ainsi ce fait remarquable que le discours rationnel, s'il constitue ce que l'on pourrait appeler une réduction langagière du monde, permet une connaissance du monde. La connaissance rationnelle se construit ainsi comme une réduction du monde *via* le langage, il est alors remarquable que cette réduction langagière soit efficace, on peut voir ici une première forme de ce que Wigner a appelé la déraisonnable efficacité des mathématiques dans la connaissance des sciences de la nature¹², mais il faut donner au terme "mathématiques" le sens plus général de *mathesis universalis*. Il importe de noter que cette réduction langagière n'est pas formaliste au sens moderne de ce terme. Pour les géomètres grecs le langage parle des objets et les propriétés énoncées concernent les objets¹³; c'est en ce sens que les objets du discours géométrique représentent ce que l'on appelle les *idéalisés mathématiques*, que l'on peut considérer comme des constructions de l'esprit humain, les-

¹¹Euclide recourt encore une fois au mouvement dans le livre XII des *Eléments* pour définir la sphère comme la surface obtenue par rotation d'un cercle autour de l'un de ses diamètres (Livre XII, définition 14).

¹²E.P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960, p. 1-14

¹³sur les limites de cette conception nous renvoyons à l'ouvrage de Umberto Eco, *Kant et l'ormithorynque* (1997), traduit de l'italien par Julien Gayraud, Grasset, Paris 1999.

quelles permettent de parler des objets du monde empirique¹⁴. Notons que la construction de ces idéalités leur confère une existence objective dans la mesure où elles ne dépendent plus de la façon dont elles ont été construites, c'est en ce sens que l'on peut parler d'une ontologie de ces idéalités qui conduit à renverser l'ordre de la connaissance, les objets empiriques originaux devenant de simples reproductions, plus ou moins grossières, de ces idéalités¹⁵.

4.4 Géométrie et Mécanique.

Précisons d'abord un point de terminologie : le terme *mathématisation* que nous utiliserons dans la suite de cet exposé signifie moins une application des mathématiques¹⁶ à un domaine de la science que l'entrée du domaine de la science considéré dans la *mathesis universalis* au sens donné ci-dessus. C'est en ce sens que l'on peut parler de la mathématisation de la physique considérée comme science de la nature, la philosophie naturelle du XVII^e siècle, dont Newton se proposait d'explicitier les principes mathématiques qui la guide dans son ouvrage dont nous rappelons le titre complet : *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*¹⁷.

Cette mathématisation de la physique a commencé par la mécanique considérée comme science du mouvement mais cette mathématisation s'appuie, selon Newton, sur le fait que la géométrie s'inscrit dans une mécanique universelle dont elle n'est que la partie consacrée à l'art de mesurer. C'est ce qu'explique Newton dans la préface des *Principia* :

*"Geometry does not teach us to draw these lines (right lines and circles), but requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but no geometrical problems. The solutions of these problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, when so solved, is shown; and it is the glory of geometry that from those few principles brought from without, it is able to produce so many things. Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring*¹⁸."

Newton distingue alors la géométrie comme science de la grandeur (*magnitude*) des corps et la mécanique comme science du mouvement des

¹⁴Il faut alors distinguer les idéalités mathématiques des constructions formelles hilbertiennes dont l'usage se veut indépendant de toute signification antérieure au langage.

¹⁵On peut considérer la philosophie platonicienne comme l'expression de ce renversement.

¹⁶J'ai dit ailleurs combien l'expression "application des mathématiques" était ambiguë et combien il fallait s'en méfier.

¹⁷Isaac Newton, *Principia*, Motie's translation revised by Cajori (2 volumes), University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1934/1962.

¹⁸Isaac Newton, *Principia*, o.c. volume I, p. xvii.

corps.

Il peut alors donner une exposition déductive de la mécanique en s'appuyant sur le modèle euclidien ce qui permet de considérer les *Principia* comme une continuation des *Eléments*. Mais cette exposition déductive a un prix, la géométrisation du temps, c'est-à-dire la réduction du temps à une idéalité sur le modèle des idéalités géométriques : le temps ne représente plus cette notion complexe liée au devenir, il n'est qu'une forme qui permet d'étudier le mouvement que Newton définit de la façon suivante : "*Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equally without relation to anything external...*"¹⁹

Notons la référence au mouvement uniforme ("*flows equally*") qui apparaît comme un cercle analogue à celui dont nous avons parlé plus haut à propos des relations entre corps solides et mouvement. Il faut alors comprendre qu'il s'agit moins de relier la définition du temps au mouvement uniforme que de définir le temps comme étant lui-même un mouvement uniforme de référence qui permet de mesurer les autres mouvements. Le mouvement d'un corps n'est plus lié à son devenir pour n'être plus que la correspondance qui associe à chaque instant la position du corps.

En ce sens le temps newtonien est statique ; ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrisation du temps n'est pas la simple représentation du temps par une droite, elle exprime une *statification* du temps, c'est cette statification du temps et par conséquent du mouvement, ce que l'on pourrait appeler la *réduction du devenir à l'être*, qui a permis de développer une théorie mécanique déductive répondant au programme des *Secondes Analytiques*. La mécanique rationnelle ainsi construite permet alors une réduction des phénomènes liés au mouvement analogue à celle opérée par la géométrie grecque pour les corps solides, ici encore les objets de discours ainsi construits renvoient à de nouvelles idéalités mathématiques.

4.5 *Mathématiques pures et mathématiques mixtes.*

Contrairement à la mécanique dont la récente mathématisation prenait encore en compte le caractère empirique original, permettant le développement au XVIII^e siècle d'une philosophie empiriste, la géométrie représentait un bloc rationnel qui pouvait amener à penser qu'elle était rationnelle par essence.

C'est ce que montrent les grandes tentatives de classification des sciences qui se développent à l'époque classique, celle de Bacon et celle de D'Alembert qui distinguent *mathématiques pures et mathématiques mixtes*²⁰. Ainsi D'Alembert écrit dans la rubrique "Mathématiques" de l'*Encyclopédie* :

¹⁹*Ibid.* o.c. p. 6.

²⁰Ces classifications des sciences sont exposées par D'Alembert dans le *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (1759/1763) (Editions Gonthier, Paris 1965). Bacon, p. 171-175, D'Alembert, p. 179-182.

"Les Mathématiques se divisent en deux classes; la première, qu'on appelle Mathématiques pures, considère la propriété de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres; dans le second cas par l'étendue; dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique; dans le second, Géométrie. La seconde classe s'appelle Mathématiques mixtes; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers²¹.

D'Alembert, qui est l'auteur de l'article "Mathématiques", précise ensuite : *"Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, etc."*

Dans l'article "Mathématiques", D'Alembert se contente de citer les grandes divisions des Mathématiques mixtes sans entrer plus avant dans leur définition et renvoie au *Discours Préliminaire* pour plus de précision.

La question peut alors se poser de ce qui caractérise les mathématiques mixtes : en quoi sont-elles mathématiques ? que signifie le terme *mixtes* opposé au terme *pures* ?

Le terme *mixtes* laisse entendre une part de connaissance empirique dans la définition des mathématiques *mixtes* ; on peut alors essayer d'explicitier l'opposition *pures/mixtes* via les termes *abstrait* et *concret* utilisés dans le texte de l'*Encyclopédie* : les mathématiques pures étudient la grandeur en tant qu'elle est considérée comme abstraite alors que les mathématiques mixtes s'intéressent aux grandeurs concrètes, ce qui ne fait que repousser la question. D'autant que D'Alembert explique le rôle de l'abstraction dans la construction de la science, écrivant :

"L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres²²."

L'abstraction participe ainsi de la problématisation, c'est-à-dire de l'organisation de l'ensemble des questions que nous nous posons lorsque, confrontés à certaines situations, nous essayons de les comprendre, questionnement qui conduit à expliciter les propriétés que nous nous proposons d'étudier à propos de cette situation. L'abstraction (l'activité d'abstraction) est ainsi constitutive de toute connaissance scientifique.

Revenant à la part de connaissance empirique intervenant dans la définition de la grandeur concrète, on peut alors poser la question : pourquoi la géométrie est-elle classée parmi les mathématiques pures alors que la mécanique est classée parmi les mathématiques mixtes ? Pour préciser cette question nous reviendrons aux articles "Géométrie" et "Mécanique" de l'*Encyclopédie*, articles tous deux écrits par D'Alembert.

²¹ *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques* (3 tomes), Paris-Liège 1764-1785, réédition ACL, Paris 1987, tome second, p. 366

²² Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Éléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 29.

"Géométrie est la science des propriétés de l'étendue en tant qu'on la considère comme étendue et figurée"²³.

Dans les lignes qui suivent, D'Alembert rappelle l'étymologie du terme *géométrie* et par conséquent l'origine empirique du domaine de la connaissance défini par ce terme. La géométrie est ainsi définie comme provenant de l'abstraction de connaissances empiriques antérieures, reste alors à expliciter le mode d'abstraction qui conduit de la géométrie empirique à la géométrie mathématique et le rôle joué par la démarche hypothético-déductive, point sur lequel nous reviendrons. La définition même de la géométrie donnée par D'Alembert prend en charge ce processus d'abstraction, processus que l'on peut considérer au XVIIIème siècle comme achevé. C'est en ce sens que la géométrie, devenue science des propriétés de cette entité *abstraite* qu'est l'étendue, participe, selon D'Alembert, des mathématiques pures.

"Mécanique, partie des mathématiques mixtes, qui considère le mouvement et les forces motrices, leur nature, leurs lois et leurs effets dans les machines"²⁴

La part d'empirisme est ici donnée par le mouvement; c'est donc le mouvement qu'il faut mathématiser, ce qui permettra de réduire la mécanique à une théorie hypothético-déductive analogue à la géométrie rationnelle telle qu'elle est exposée dans les *Eléments* d'Euclide, lesquels resteront jusqu'au XIXème siècle l'exemple paradigmatique d'un exposé hypothético-déductif²⁵.

En comparant avec le texte de Newton cité ci-dessus, on voit que la place de la géométrie est ambiguë, à la fois participant des mathématiques pures pour des raisons qui relèvent essentiellement de la tradition, et des mathématiques mixtes par leur origine empirique. Cette reconnaissance de la part d'empirisme de la connaissance géométrique est ancienne comme l'explique Neugebauer à propos d'Archytas de Tarente qui opposait l'arithmétique à la géométrie, celle-ci ne pouvant donner des preuves aussi satisfaisantes que celle-là²⁶, mais on peut penser que la tradition d'une géométrie purement rationnelle est devenue d'autant plus prégnante que la réduction langagière, en mettant en avant les idéalités mathématiques, a pu occulter la part d'empirisme de la connaissance

²³Encyclopédie, o.c. tome second, p. 128.

²⁴Ibid. p. 370.

²⁵Nous distinguons deux types d'exposés hypothético-déductifs, l'exposé de type euclidien qui suppose donnés des objets, les axiomes n'étant que les relations premières (évidentes par elles-mêmes !) entre ces objets et l'exposé de type hilbertien dont les objets ne sont que des mots, les termes primitifs de la théorie, termes reliés par les axiomes qui ne sont eux-mêmes que des assertions premières sans autre signification qu'elles mêmes. Dans notre article "La démonstration : du réalisme au formalisme" (in *La Démonstration, Mathématiques et Philosophie*, coordonnée par Michèle Villetard-Tihonmont, IREM de Lille, avril 2003"), nous posons la question des raisons qui ont conduit les mathématiciens à passer du point de vue euclidien au point de vue hilbertien.

²⁶O. Neugebauer, *The Exact Science in Antiquity*, Dover Publications, New York, 1969, p. 148.

géométrique. On peut noter, même s'il le fut à moindre échelle, que le caractère rationnel de la mécanique a conduit, dans l'enseignement supérieur français, à placer la mécanique parmi les sciences mathématiques, même si les grands traités de mécanique rationnelle ont toujours mis l'accent sur le caractère expérimental de la mécanique, tout cela pour dire combien est floue la frontière entre le rationnel et l'expérimental, ce que Ferdinand Gonseth résume de la façon suivante :

"Dans toute expérimentation il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique), il y a un résidu intuitif"²⁷.

et il précise :

"La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que de tendance, mais non d'essence."

Plus tard Gonseth explicitera les trois aspects de la connaissance géométrique, l'intuitif, l'expérimental et le théorique, insistant sur l'articulation entre ces trois aspects, ce qu'il appelle une synthèse dialectique²⁸.

4.6 Le séisme non-euclidien.

La relation entre géométrie mathématique et géométrie physique se posera sous une forme différente avec les géométries non-euclidiennes. Parmi les postulats énoncés par Euclide dans les *Eléments*, le cinquième, dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, pose problème par son caractère non évident.

"Si une droite tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits"²⁹.

Rappelons que ce postulat sert à démontrer la proposition 29 du Livre I qui énonce l'égalité des angles alternes-internes découpés par une sécante sur deux droites parallèles ; cette proposition étant elle-même la réciproque de la proposition 27, il semblait raisonnable d'en donner une démonstration et c'est pour assurer celle-ci qu'Euclide énonce son cinquième

²⁷Ferdinand Gonseth, *Les Fondements des Mathématiques*, préface de Jacques Hadamard, Blanchard, Paris.

²⁸Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace* (6 volumes), Editions du Griffon, Neuchâtel 1945-1955. Pour une présentation des conceptions de Gonseth nous renvoyons aux articles de Rudolf Bkouche, "Quelques remarques sur la démonstration (autour de la philosophie de Gonseth)" in *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon mai 1989), IREM de Besançon et IRRM de Lyon 1990, et Houria Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth" in *La Figure et l'Espace*, Actes du 8ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Lyon 1991), IREM de Lyon 1993.

²⁹Euclide, *Les Eléments*, volume 1, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaire par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990 p. 175.

postulat dont la démonstration de la proposition 29 apparaît comme une simple paraphrase. On peut considérer le recours au cinquième postulat comme la marque d'un échec, dont Euclide lui-même était peut-être conscient, ce qui explique les nombreuses tentatives de démonstration de ce postulat qui vont se développer tout au long de l'histoire de la géométrie³⁰, d'autant que les deux ingrédients les plus importants dans le développement de la géométrie grecque, la méthode des aires et la théorie des proportions géométriques, en sont des conséquences. C'est l'absence de démonstration de cette propriété nécessairement vraie mais non évidente qui conduit D'Alembert à la présenter comme le "scandale" de la géométrie³¹.

Les tentatives de démonstration du cinquième postulat ont conduit à énoncer des propriétés équivalentes, parmi elles l'existence de triangles semblables non égaux, propriété que Laplace considérait plus évidente que l'énoncé euclidien et proposait d'adopter comme postulat de la géométrie. Une autre propriété équivalente est celle qui dit que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits³².

Parmi les tentatives de démonstration du postulat des parallèles, nous citerons celle de Ibn Al Haytham, reprise par au XVIIIème siècle par Lambert, qui consiste à montrer qu'un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle, et celle de Al-Khayyam, reprise au XVIIIème siècle par Saccheri, qui se propose de montrer que si un trapèze isocèle a un angle droit, c'est un rectangle. Ces tentatives feront apparaître le lien entre le postulat des parallèles et l'existence de rectangles. Ibn Al-Haytham et Al-Khayyam s'appuient sur un raisonnement par l'absurde, raisonnement qui sera repris, sans que l'on en connaisse la filiation, par Saccheri et Lambert.

Ibn Al-Haytham considère un quadrilatère ayant trois angles droits et pose la question du quatrième angle : droit, obtus ou aigu. S'il est droit la géométrie est euclidienne ; on peut montrer, sous l'hypothèse archimédienne, que l'angle obtus est contradictoire au fait que l'on peut toujours prolonger une droite ; le cas de l'angle aigu est plus difficile et Ibn Al-Haytham s'appuie sur le postulat suivant :

*"Une droite de longueur constante, qui se meut orthogonalement sur une autre droite située dans un même plan, engendre par son extrémité libre une droite parallèle à la droite sur laquelle elle se meut, et toutes les perpendiculaires abaissées de l'une sur l'autre sont égales"*³³.

³⁰Bonola, *Non-euclidean geometry* (1912), translated by H. S. Carslaw, Dover Publications, New York 1955 et Jean-Claude Pont, *L'Aventure des Parallèles*, Peter Lang, Berne 1986.

³¹Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 318.

³²Notons que si le postulat des parallèles implique que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, la réciproque suppose que la géométrie est archimédienne (cf. Legendre, *Eléments de Géométrie*, o.c. p. 26-27).

³³Khalil Jaouiche, *La Théorie des Parallèles en Pays d'Islam*, Vrin, Paris 1986, p. 65 ; la traduction du texte d'Ibn Al-Haytham est donnée p. 162.

énoncé dont on peut montrer qu'il est équivalent au cinquième postulat. Lambert reprend le problème autrement. Il remarque que l'hypothèse de l'angle obtus correspond à la géométrie sphérique et que l'on obtient l'hypothèse de l'angle aigu en considérant une sphère de rayon imaginaire. Il définit ainsi trois géométries, celle de l'angle droit (l'euclydienne), celle de l'angle obtus (la sphère), celle de l'angle aigu (la sphère de rayon imaginaire). La géométrie du plan ne peut alors être que la géométrie de l'angle droit.

D'autres exemples de géométries distinctes de la géométrie usuelle seront étudiés, telles celles de Schweikert ou de Taurinus³⁴. Cependant, parmi toutes ses constructions, seule la géométrie euclidienne représente le plan usuel. La géométrie non-euclidienne apparaîtra lorsque l'on pensera que le plan usuel pourrait ne pas être euclidien.

C'est cela que dit Gauss dans une lettre de 1817 à Olbers :

"J'en viens de plus en plus à la conviction que la nécessité de notre géométrie ne peut pas être démontrée, ou du moins qu'elle ne peut pas l'être par la raison humaine ni pour la raison humaine. Peut-être atteindrons-nous, dans une autre existence, une compréhension de la nature de l'espace qui nous est maintenant inaccessible.

*Jusque là, il nous faut mettre la géométrie au même rang que l'arithmétique dont la vérité est purement a priori, mais plutôt au même rang que la mécanique*³⁵"

C'est la question de la vérité physique du postulat des parallèles qui est posée, ainsi c'est une question de physique qui conduira à penser la possibilité d'une géométrie non-euclidienne.

De l'échec des tentatives de démonstration du postulat des parallèles, trois géomètres de la première partie du XIX^{ème} siècle, Gauss³⁶, Bolyai³⁷, Lobatchevski³⁸, émettront l'idée que ce postulat peut ne pas être vraie et construiront une géométrie fondée sur la négation de ce postulat conduisant à l'idée que par un point hors d'une droite on peut mener plusieurs droites du plan défini par le point donné qui ne rencontrent pas la droite donnée.

On voit ici poindre l'idée d'une pluralité de géométries possibles. Cette pluralité posera un double problème :

D'une part un problème logique, qu'est-ce qui guide le raisonnement dans

³⁴Banola, *Non-euclidean geometry* o.c. p. 75-83.

³⁵cité et traduit par Gonseth in *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, volume VI, "Le Problème de l'Espace", Editions du Griffon, Neuchâtel 1955, p. 94.

³⁶Gauss n'a rien publié de son vivant "par crainte des clamours des Bèotiens" comme il l'écrivit à Bessel. Cependant son traité de 1827 sur les surfaces et l'étude des triangles géodésiques (c'est-à-dire dont les côtés sont des géodésiques) montre qu'il connaissait le lien entre les géométries non-euclidiennes et la géométrie des surfaces.

³⁷János Bolyai, "La science absolue de l'espace", traduction par Jules Hoüel, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, tome 5, 1867, p. 207-378.

³⁸Nicolas Lobatchevski, "Etudes géométriques sur la théorie des parallèles", traduction par Jules Hoüel, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles*, tome 4, 1866, p. 83-120, réédition sous le titre *La théorie des parallèles*, Monom, 1980

une telle géométrie qui fait apparaître des objets différents de nos habitudes, ainsi un quadrilatère ayant trois angles droits et dont le quatrième ne l'est pas ? Ce problème est d'autant plus fort que les textes fondateurs de la géométrie non-euclidienne sont rédigés dans un style euclidien et qu'il n'est pas toujours facile, pour le lecteur, de s'assurer de la justesse des raisonnements. Cette question logique doit être reliée à ce que l'on a appelé, à la fin du XIX^{ème} siècle, la *crise des fondements* et nous ne l'aborderons pas ici.

D'autre part un problème physique, s'il existe plusieurs géométries incompatibles entre elles, laquelle est la géométrie de notre espace, la *vraie* géométrie pourrait-on dire ?

Notons que Lobatchevski abordait en 1835 cette question sous la forme suivante :

*"En réalité, dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement : c'est lui qui rend possibles les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement et, pour cette raison, l'espace en lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous (souligné par nous)"*³⁹.

et pour préciser cette conception du caractère artificiel⁴¹ des constructions géométriques, Lobatchevski ajoutait :

"Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines forces de la nature suivent une géométrie et d'autres leur géométrie propre."

Ainsi Lobatchevski non seulement mettait en cause l'unité mathématique de la géométrie mais il posait la question de son unité physique pour représenter le monde.

Ainsi le passage de la géométrie aux géométries conduisait à redéfinir le rapport entre une géométrie mathématique issue d'une construction axiomatique et la géométrie physique, celle du monde.

4.7 De Riemann à Einstein.

Cette question de la pluralité des géométries renouvellera la question de l'espace, c'est ce qu'expose Riemann dans sa dissertation de 1854, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie"⁴², l'un des textes les plus importants de l'histoire de la géométrie. S'appuyant sur un travail antérieur de Gauss sur la théorie des surfaces⁴³, Riemann proposait une

³⁹Nicolas Lobatchevski, "Nouveaux principes de la géométrie" (1835-1838) (traduit du russe par F. Mailloux), Mémoires de la ⁴⁰, 3^{ème} série, tome 2, 1900.

⁴¹Le terme "artificiel" doit être entendu ici comme opposé au terme "naturel" (est artificiel ce qui n'existe pas dans la nature, ce qui est construit par l'homme).

⁴²Bernhart Riemann, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie", traduction Jules Houël, in *Oeuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968, réédition Gabay, Paris 1990.

⁴³Carl-Friedrich Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes* (traduction Roger), Blanchard, Paris 1967. Le texte de Gauss a été publié en 1827.

notion générale d'espace, lui permettant de poser la question de la nature de l'espace physique.

L'article de Riemann comprend trois parties, la première est consacrée à la notion générale de multiplicité à n dimensions, la seconde introduit les relations métriques, essentiellement infinitésimales, cherchant à généraliser les constructions de Gauss sur les surfaces et introduit la courbure de l'espace, enfin la troisième se propose de définir la nature de l'espace physique, renvoyant à l'expérience pour une réponse à cette question. Dans cette dernière partie Riemann pose la question de savoir si la géométrie de l'espace est indépendante des corps, auquel cas la courbure de l'espace est constante, les observations astronomiques montrant qu'elle nulle, ou si au contraire la présence des corps influe sur la géométrie de l'espace.

Cet article aura une double postérité, mathématique d'une part, physique de l'autre.

Sur le plan proprement mathématique, la notion générale d'espace conduira à l'étude générale des espaces dits *abstraites*, les variétés de la géométrie différentielle moderne, et ouvrira un nouveau chapitre des mathématiques toujours florissant.

Sur le plan de la physique nous distinguerons deux grandes problématiques.

La première porte sur la nature de l'espace physique ; il s'agit alors de regarder, parmi les divers espaces que l'on peut construire, lesquels peuvent représenter l'espace de la physique. Parmi ces travaux nous citerons ceux de Helmholtz et ceux de Clifford.

Helmholtz s'interroge sur les axiomes que doit vérifier l'espace et met en valeur ce qu'il appelle l'*axiome de libre mobilité* qui exprime la possibilité du mouvement des corps solides ; un tel espace est alors à courbure constante au sens de Riemann⁴⁴.

Clifford, quant à lui, s'est posé la question du sens physique de la courbure de l'espace, s'appuyant sur le lien proposé par Riemann entre la courbure et la présence de matière. Ceci l'a conduit aux remarques suivantes :

"That small portions of space are in fact of a nature analogous to little hills on a surface which is on the average flat ; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.

That this property of being curved or distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.

That this variation of the curvature of space is what really happens in that phenomenon which we call the motion of matter, whether ponderable or ethereal. That in the physical world nothing else takes place but this variation subject (possibly) to the law of continuity."⁴⁵

Cette notion de courbure de l'espace définie par l'influence des corps sur

⁴⁴Helmholtz, "On the Origin and Significance of Geometrical Axioms" in James R. Newman, *The World of Mathematics*, Tempus 1988, volume one, p. 637-657.

⁴⁵W. K. Clifford, "On the Space Theory of Matter" (1876), in James R. Newman, *The World of Mathematics*, o.c. p. 559-560.

la géométrie de l'espace fera son chemin pour aboutir à la théorie de la Relativité Générale d'Einstein en 1916.

Notons cependant que Clifford ne s'intéresse qu'à l'espace. C'est la théorie de la Relativité Restreinte qui conduira à penser l'espace-temps et sa représentation géométrique par Minkowski. L'espace de Minkowski est un espace plat, c'est-à-dire sans courbure, permettant de représenter les phénomènes électromagnétiques. Pour intégrer la théorie de la gravitation dans cette nouvelle physique, il faudra faire appel aux variétés riemanniennes, la courbure représentant les forces gravitationnelles liées à la présence des corps; ainsi la gravitation participe de la géométrie de l'espace-temps marquant ainsi l'influence des corps matériels sur la géométrie. On peut alors parler d'une première géométrisation de la physique intégrant les forces gravitationnelles dans la géométrie. Après ce premier succès Einstein posera la question de la géométrisation de l'électromagnétisme, c'est-à-dire de son insertion dans la structure de l'espace-temps. Si ces recherches n'ont pas abouti au résultat espéré par Einstein elles ont conduit à une notion importante de la physique moderne avec les théories de jauge dont nous ne pouvons parler ici, théories qui constituent une étape importante dans la géométrisation de la physique⁴⁶.

La seconde problématique ouvre un champ plus large conduisant à définir des relations étroites entre la géométrie différentielle considérée comme étude des espaces abstraits généraux et la physique mathématique, l'un des exemples les plus importants étant celui de la représentation géométrique de la mécanique analytique de Lagrange par Levi-Civita⁴⁷. Un système mécanique à n degrés de liberté étant donné, l'ensemble de ses positions possibles est représenté par un espace de dimension n muni d'une métrique définie par son énergie cinétique : l'espace des configurations; on peut alors écrire les équations du mouvement du système mécanique considéré comme celle du mouvement d'un point dans l'espace des configurations. On peut alors montrer que si le système n'est soumis à aucune force la trajectoire du point qui le représente est une géodésique de l'espace des configurations (ligne de plus courte distance), ce qui conduit à une forme généralisée du principe d'inertie. Cette représentation géométrique a ouvert un champ d'études toujours actif que nous ne pouvons

⁴⁶Rappelons que la première théorie de jauge est issue des travaux de Hermann Weyl sur la recherche d'une théorie géométrique englobant la gravitation et le champ électromagnétique. Nous renvoyons ici à un article de Hermann Weyl, "Gravitation und Elektrizität", *Sitzungsberichte des Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1918 (cet article est publié en anglais in *The Principles of Relativity, a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, with notes by A. Sommerfeld, translated by W. Ferret and G.B. Jeffrey, Dover Publications, 1952, p. 200-216) et à son ouvrage *Space, Time, Matter*, (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover Publications, New York 1952.

⁴⁷T. Levi-Civita, "Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche", *Annali di matematica pura ed applicata*, Serie II, Tomo XXIV, 1896, p. 255-300.

aborder ici⁴⁸.

4.8 Retour sur la distinction entre géométrie physique et géométrie mathématique.

Le développement de la géométrie au XIX^e siècle après ce que nous avons appelé le séisme non-euclidien a conduit d'une part à la distinction entre géométrie mathématique et géométrie physique en même temps qu'elle a créé de nouveaux rapports entre ces deux domaines. Ce que Einstein résume de la façon suivante :

*"Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité"*⁴⁹

soulignant ainsi une certaine irréductibilité des deux géométries, mais il revient plus loin sur le rôle d'une théorie géométrico-physique :

*"Une théorie géométrico-physique est, à première vue, nécessairement privée du caractère intuitif; elle est un simple système de concepts. Mais ces concepts servent à établir une connexion logique entre une multiplicité de phénomènes sensibles réels ou imaginés? Rendre une théorie intuitive, cela signifie donc qu'il nous faut représenter cette plénitude de phénomènes dont l'ordre schématique est réalisé par la théorie"*⁵⁰

Mais la question de la nature de l'espace physique est devenue plus complexe lorsque Poincaré a montré que la question posée par Riemann à la fin de son article, y compris le renvoi à l'expérience, ne pouvait être résolue simplement. En effet toute expérience nécessite des instruments de mesure et ces instruments sont construits à partir d'une théorie géométrique déjà élaborée. On ne peut donc répondre d'une façon unique à la question de la nature de l'espace et Poincaré explique que la question revient à choisir non une réponse vraie illusoire mais la réponse la plus commode⁵¹.

Quelques années plus tard, Reichenbach expliquait dans son ouvrage *Philosophy of Space and Time* :

*"Mathematics reveals the possible spaces; physics decides which among them corresponds to physical space"*⁵²

⁴⁸Nous nous contenterons de citer l'ouvrage de Jean-Marie Souriau, *Structures de systèmes dynamiques*, "Collection Dunod Université", Dunod, Paris 1970 et celui de Vladimir Arnold, *Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique* (1974), traduit du russe par Djilali Embarek, Editions Mir, Moscou 1976.

⁴⁹Albert Einstein, "La Géométrie et l'Expérience" (1921) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, textes traduits par Maurice Solovine et Marie-Antoinette Tonnelat, Gauthier-Villars, Paris 1972 p. 76.

⁵⁰*Ibid.*, p. 85.

⁵¹Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), préface de Jules Vuillemin, Flammarion, Paris 1968, p. 74-76.

⁵²Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (1927) (translated by Maria Rei-

On peut alors remarquer la double interprétation du terme "decides" ; soit l'espace physique a une structure géométrique déterminée et le physicien doit découvrir cette structure parmi les possibles, soit la structure est déterminée par le physicien pour rendre compte des phénomènes ; la préface de Carnap laisse entendre que c'est la seconde interprétation qu'il faut lire :

"In physical geometry, there are two possible procedures for establishing a theory of physical space. First, the physicist may freely choose the rules for measuring length. After this choice is made, the question of the geometrical structure of physical space becomes empirical ; it is to be answered on the basis of the results of experiments. Alternatively, the physicist may freely choose the structure of physical space ; but he must adjust the rules of measurement in view of the observational facts."

En ce sens la géométrie physique relève plus d'une question de cohérence globale que d'une question de vérité⁵³.

4.9 Quelques considérations didactiques.

Ces remarques sur le statut de la géométrie nous conduisent à situer l'enseignement de la géométrie au carrefour des mathématiques et de la physique, c'est-à-dire à la fois dans l'enseignement des mathématiques et dans l'enseignement des sciences physiques⁵⁴.

Nous nous placerons ici dans une perspective gonséthienne sur les trois aspects de la géométrie rappelés ci-dessus, en insistant sur la nécessaire articulation de ces trois aspects. Il ne saurait être question de distinguer, autrement que pour les besoins de l'analyse, le moment empirique et le moment rationnel, encore moins le moment physique et le moment mathématique.

Pour préciser cela nous rappelons une idée ancienne d'Emile Borel aujourd'hui reprise par Jean-Pierre Kahane, celle des laboratoires de mathématiques et plus précisément de la place de la géométrie dans de tels labora-

chenbach and John Freund, with introductory remarks by Rudolf Carnap), Dover, New York 1957, p. 6.

⁵³La question philosophique de la vraie nature de l'espace reste toujours d'actualité comme le montre le débat entre Hawkings et Penrose dans leur ouvrage *Space and Time*, "The Isaac Newton Institute Series of Lectures", Princeton University Press, Princeton, 1996, traduction française par Françoise Balibar, *La Nature de l'Espace et du Temps* (1996), présentation par Marc Lachize-Rey, "urf essais", Gallimard, Paris 1997.

⁵⁴Si la rencontre des disciplines a un sens autre que celui du discours moraliste sur l'interdisciplinarité, cette rencontre est moins celle des enseignants des disciplines concernées que celle que l'on peut pratiquer à l'intérieur même d'une discipline, ainsi l'enseignement de la géométrie demande de faire des mathématiques dans le cours de physique et de faire de la physique dans le cours de mathématiques.

toires⁵⁵.

Le caractère expérimental de la géométrie apparaît sous diverses formes dont l'une des plus anciennes est la pratique des instruments géométriques, instruments de mesure ou instruments de constructions géométriques, parmi lesquels la règle et le compas.

Comme nous l'avons déjà rappelé, l'usage d'un instrument scientifique ne relève pas de la seule pratique mais suppose un lien explicite entre la connaissance empirique et la connaissance rationnelle, c'est ce lien qui permet l'expérimental⁵⁶. Pour préciser cela nous rappellerons ce que dit Abel Rey des rapports entre la règle et la droite d'une part, le compas et le cercle d'autre part :

*"La règle et le compas (ne sont) que le symbole des idées claires et distinctes de la droite et du cercle"*⁵⁷

Les constructions à la règle et au compas se situent ainsi au carrefour de la géométrie rationnelle et de la géométrie pratique et participent ainsi de l'aspect expérimental de la géométrie au sens gonséthien défini ci-dessus. En ce sens, si laboratoire de mathématique il doit y avoir, les constructions à la règle et au compas y ont une place importante sinon première. Le dessin géométrique, en tant qu'il est un dessin structuré, apparaît ainsi moins comme un accompagnement du cours, la partie pratique en quelque sorte, que comme faisant partie de l'enseignement de la géométrie ; d'une part les constructions géométriques constituent des théorèmes d'existence mettant en jeu des algorithmes géométriques, d'autre part leur exécution matérielle exige un respect rigoureux des règles ainsi mises en place. La rigueur apparaît ainsi moins comme un exercice de style caractéristique du cours de mathématiques que comme une nécessité pour réaliser l'objectif que l'on s'est donné, savoir, la construction d'un objet géométrique déterminé. Si l'on se place dans le cadre de la géométrie élémentaire, on peut alors considérer que la détermination de l'algorithme participe de la phase "analyse" de la résolution d'un problème de construction tandis que la réalisation matérielle s'inscrit dans la phase "synthèse".

C'est à dessein que nous avons employé le terme "algorithme". Il nous semble important que dans l'enseignement scientifique, y compris dans l'enseignement de l'informatique, le terme "algorithme" soit défini indépendamment de tout usage machinal. La construction d'un algorithme est une opération intellectuelle, donc théorique, à des fins essentiellement pratiques, cette construction étant soumise à des contraintes définies par les instruments dont on dispose. Mais de telles contraintes ne sont pas

⁵⁵Emile Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire" (1904), in *Oeuvres*, tome 4, CNRS, Paris 1972, p. 2225-2256.

⁵⁶Il nous semble important de distinguer l'empirique et l'expérimental ; si le premier peut être défini comme l'appréhension inorganisée d'un donné extérieur, le second renvoie au contraire à une construction matérielle nous permettant de mettre en rapport connaissance rationnelle et connaissance du monde.

⁵⁷Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité*, volume 5, "L'Apogée de la Science Technique Grecque : L'Essor de la Mathématique", Albin Michel, Paris 1948, p.124.

seulement pratiques, tout instrument, aussi sommaire soit-il, implique une pensée théorique, aussi sommaire soit-elle, qui a permis sa réalisation. En ce sens l'usage d'un instrument est liée à la pensée qui en définit l'usage, question d'autant plus importante dans l'enseignement que le problème est moins de réaliser une performance que de comprendre les enjeux à la fois théoriques et pratiques de l'usage d'un instrument.

Les Grecs connaissaient d'autres instruments géométriques que la règle et le compas comme le montrent les divers appareils décrits par exemple par Eutocius⁵⁸ pour résoudre les grands problèmes qu'ils se posaient (duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle), et si l'on reste au seul plan de la pratique, on ne voit pas en quoi la construction "mécanique" de la conchoïde de Nicomède et de son intersection avec une droite⁵⁹ est moins acceptable que la construction de l'intersection d'un cercle tracé au compas et d'une droite tracée à la règle. D'autant que les constructions à la règle et au compas peuvent être aussi considérées comme des constructions mécaniques.

Il faut alors revenir sur une propriété particulière de la droite et du cercle : ce sont les seules courbes planes que l'on peut faire glisser sur elles-mêmes sans les déformer. Si les géomètres grecs n'ont jamais explicité une telle propriété, elle apparaît *via* les instruments qui permettent de tracer les droites et les cercles, savoir, la règle et le compas. On peut la lire aussi dans la définition euclidienne de la droite :

*"Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle."*⁶⁰ définition qui, de notre point de vue, convient aussi au cercle.

Dans l'enseignement d'aujourd'hui où la question est moins de raconter Euclide que de le retranscrire dans un cadre moderne, il serait utile que cette propriété de la droite et du plan apparaisse explicitement dans l'enseignement de la géométrie, propriété qui relève à la fois de la pratique du dessin géométrique et du statut théorique des objets considérés, propriété qui montre comment s'articulent pratique du dessin et géométrie rationnelle.

Restant dans le cadre de la réalisation matérielle d'objets géométriques ou liés à la géométrie, nous pouvons aborder la construction de solides. Il faut ici distinguer deux moments dans l'enseignement de la géométrie des solides, le moment empirique, celui de la leçon de choses pourrait-on dire,

⁵⁸Eutocius, "Commentaires au Traité sur la Sphère et le Cylindre, I et II", in Archimède, *Œuvres*, tome IV, texte établi et traduit par Charles Muegler, Les Belles Lettres, Paris 1972, p. 41-75. On peut lire aussi l'article de Joëlle Delattre et Rudolf Bkouche, "Pourquoi la règle et le compas" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques, Commission Inter-IREM Epistémologie, Ellipses*, Paris 1993, p. 87-112 Eutocius, o.c. p. 69-73. La conchoïde de Nicomède permet de résoudre le problème de la trisection de l'angle et celui de la double moyenne proportionnelle.

⁵⁹Eutocius, o.c. p.69-73. La conchoïde de Nicomède permet de résoudre le problème de la trisection de l'angle et celui de la double moyenne proportionnelle.

⁶⁰Euclide, *Les Éléments*, o.c. p. 154.

qui permet d'expliciter le double aspect de l'étude des corps solides, leur reconnaissance d'une part qui pose le problème du même (même forme et même grandeur), leur fabrication d'autre part, reconnaissance et fabrication s'appuyant sur la géométrie rationnelle. La géométrie des corps solides oblige ainsi à mieux prendre en compte les enjeux de la démonstration. C'est le raisonnement qui permet de découvrir des propriétés qui ne deviennent évidentes, au sens visuel du terme, qu'après démonstration⁶¹, ainsi l'égalité par superposition dont nous avons déjà parlé, ainsi les diverses propriétés d'incidence qui portent sur ces objets invisibles que sont les points, les droites, et les plans, invisibles au sens qu'ils n'apparaissent qu'à travers les corps solides dont ils marquent les limites ; ainsi une surface est la limite d'un corps, une ligne est la limite d'une surface, un point est la limite d'une ligne. On peut considérer que l'on ne connaît empiriquement que les corps et que c'est la géométrie qui conduit à inventer les objets-limites que sont les points, les lignes et les plans⁶².

Mais revenons sur le problème de la fabrication des objets solides. Pour construire de tels objets on utilise ce que l'on appelle des "plans", c'est-à-dire des représentations planes des objets à fabriquer. Se pose ainsi d'une part la question de la représentation plane des objets solides⁶³, d'autre part de leur fabrication à partir de cette représentation. Mais ici encore c'est le raisonnement qui permet de résoudre ces divers problèmes. On peut alors considérer que le problème général de la représentation s'inscrit dans l'enseignement de la géométrie des corps solides, non pas comme une simple illustration ou application d'un cours⁶⁴, mais comme partie de cet enseignement.

Nous pouvons citer le *filicoupeur* inventé par Charles Pérol pour construire des solides en polystyrène, construction qui demande une étude préalable utilisant des représentations planes et des méthodes analytiques. Parmi ces constructions, nous en citerons deux qui nous semblent exemplaires :

- la construction des polyèdres réguliers
- la construction de la section d'un cube par trois points situés sur sa surface.

On peut alors considérer que, à côté de la règle et du compas, le *filicoupeur*

⁶¹On peut dire que la démonstration géométrique élargit la vision.

⁶²A côté de ces définitions comme objets-limites, nous noterons les définitions cinématiques : la ligne, engendrée par le mouvement d'un point ou le plan, engendré par le mouvement d'une ligne. La géométrie suppose la concordance de ces deux modes de définition (cf. Federigo Enriques, "Les Principes de la Géométrie", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, réédition Jacques Gabay, Paris 1991, III-1, p. 13).

⁶³Le problème de la représentation est lui-même double, d'une part la représentation d'objets solides existants, d'autre part la représentation d'objets imaginaires, soit qu'on veuille donner l'illusion que ces représentations correspondent à des objets réels (ainsi la peinture), soit qu'on veuille construire les objets solides correspondant à ces représentations (architecture et dessin industriel).

⁶⁴Sur la distinction entre illustration et application nous renvoyons à un article de Nicolas Rouche in Rudolf Blouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens* Armand Colin, Paris 1991, chapitre VIII, p. 148.

a sa place dans les laboratoires de mathématiques. Nous pourrions citer d'autres instruments géométriques dont les divers instruments de mesures géométriques⁶⁵ ou les instruments cités par Eutocius pour construire les diverses courbes liées à la résolution des grands problèmes de la géométrie grecque (cf. ci-dessus).

Nous n'aborderons pas ici la question de la place de l'informatique, d'abord parce que nous pensons que celle-ci ne peut être efficiente que pour qui possède déjà une pratique géométrique, ensuite parce que le travail "à la main" des machines analogiques, dont les prototypes sont la règle et le compas, permet de comprendre le lien entre la part théorique et la part pratique du dessin géométrique; mais on pourrait aussi utiliser les divers instruments de dessin inventés au cours des âges, dont les instruments grecs déjà cités. La question se situe encore une fois dans les articulations, ce qui est occulté par la boîte noire informatique⁶⁶. Il faut alors penser l'informatique moins comme outil pédagogique que comme outil mathématique, c'est comme outil mathématique que l'informatique peut avoir sa place dans l'enseignement, ce qui suppose que les usages mathématiques de l'informatique s'insèrent dans l'enseignement au moment où ils peuvent devenir pertinents.

On pourrait parler longtemps des divers lieux où la géométrie apparaît sous ses multiples facettes, ainsi la représentation perspectiviste⁶⁷ ou la représentation de la terre *via* la topographie⁶⁸ et la cartographie⁶⁹. Il faut alors souligner que la géométrie n'est pas une science extérieure que l'on appliquerait pour résoudre les problèmes posés par la représentation perspectiviste ou par la cartographie, elle participe de ces domaines de la connaissance tout autant que ceux-ci sont constitutifs de la pensée géométrique. En cela ils ont leur place dans l'enseignement de la géométrie. Enfin nous terminerons cet article en revenant sur l'une des "notions premières" de la géométrie, la notion d'espace. Comme souvent dans les sciences hypothético-déductives, l'expression "notion première" est ambiguë et la notion d'espace en est un exemple.

Nous avons mis l'accent dans cet article sur le rôle des corps solides dans la constitution de la géométrie rationnelle. On peut remarquer que la notion d'espace n'intervient pas dans la géométrie grecque, ce qui montre qu'elle n'est pas nécessaire pour développer l'étude des corps solides.

⁶⁵On peut trouver une présentation de ces instruments dans l'ouvrage d'Emile Fournay, *Curiosités géométriques*, Vulbert, Paris 1907, p. 153-219, réédition avec une préface d'Evelyne Barbin, Vulbert, Paris 1994.

⁶⁶Nous pourrions citer l'exemple du calcul où l'on peut opposer le calcul "à la main" (le calcul posé ou le calcul au boulier) et la boîte noire de la calculatrice.

⁶⁷Thérèse Gilbert, *La perspective en questions*, "gem", ciaco éditeur, Louvain la Neuve 1987.

⁶⁸Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie Élémentaire*, tome II, Géométrie dans l'espace, nouvelle édition refondue et corrigée, Armand Colin, Paris 1949, p. 283-313.

⁶⁹Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC/Fernand Nathan, Paris 1977, volume 5, p. 26-37.

C'est pourquoi nous préférons parler de géométrie des corps solides. Par contre la notion d'espace devient utile dès que l'on veut comparer les positions relatives de deux corps ou les diverses positions d'un corps en mouvement. Effectivement la notion géométrique d'espace intervient au début de l'époque moderne à partir de deux problématiques liées au problème des positions relatives, d'une part la représentation plane des corps avec la perspective, d'autre part l'étude du mouvement avec la mécanique. L'espace est alors introduit comme le réceptacle universel dans lequel se situent les phénomènes géométriques ou mécaniques, ce qu'Euler explique dans ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne* :

"il (l'espace) ne fait que fournir les lieux que les corps occupent et remplissent"⁷⁰

précisant que cet "espace sans corps est nommé un vide (souligné par Euler), et un vide est donc une étendue sans corps".

C'est en référence à cet espace, réceptacle universel, que l'on peut parler, comme le veut la tradition de l'enseignement français, de *géométrie dans l'espace*⁷¹.

L'espace ainsi défini devient une notion première de la connaissance géométrique, mais le statut d'une telle notion reste flou, ce que montrent les débats opposants rationalistes et empiristes au XVIII^e siècle. Pour dépasser ces débats, Kant définira l'espace et le temps comme *formes a priori de l'intuition* antérieures à toute connaissance mais nécessaires pour appréhender le monde et permettre la connaissance rationnelle⁷². Cependant la notion de forme *a priori* de l'intuition néglige deux points : d'une part la notion d'espace géométrique est une construction du XVII^e siècle, d'autre part la notion de temps est une reconstruction rationnelle permettant d'éviter les difficultés liées au devenir. En ce sens l'espace et le temps de la science moderne, loin de participer d'une intuition *a priori*, sont des constructions rationnelles historiquement datées. Mais comme souvent, une construction rationnelle, une fois inventée par l'homme, devient éternelle et par conséquent est éternelle. On peut alors considérer la position kantienne comme une tentative d'explication de cette éternité, éternité à l'échelle humaine il est vrai si l'on considère que les formes *a priori* de l'intuition sont constitutives de l'esprit humain.

Ainsi la notion d'espace une fois inventée devient une notion première de la géométrie. On peut alors considérer deux étapes, d'abord celle du réceptacle universel newtonien, puis, après les révolutions non-euclidiennes et formalistes, celle de la reconstruction formelle issue de l'algèbre linéaire et de la géométrie différentielle. Mais si les reconstructions rationnelles de-

⁷⁰Leonhart Euler, *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (1772), précédées de l'Eloge d'Euler par Condorcet et annotées par Cournot, 2 volumes, Hachette, Paris 1842, volume 1, p. 271.

⁷¹Rappelons que les Anglais parlent de *Solid Geometry*.

⁷²Emmanuel Kant, *Critique de la Raison Pure*, traduction de Jules Barni revue par Pierre Archangebaud, chronologie, présentation et bibliographie de Bernard Rousset, Garnier-Flammarion, Paris 1976, p. 81-105.

viennent fondatrices, elles ne sont pas premières du point de vue de l'enseignement et l'on peut considérer que la notion géométrique d'espace, loin d'être le point de départ de l'enseignement de la géométrie, en est l'un des aboutissements. Cela n'exclut pas l'usage naïf du terme "espace", suffisant pour les débuts de l'enseignement de la géométrie, que l'on se place du point de vue des mathématiques ou de celui de la physique.

Pour être complet, il aurait fallu aborder d'autres points où la part mathématique et la part physique de la géométrie se rencontrent sans que l'on puisse toujours les distinguer. Parmi ces points nous pouvons citer, sans être exhaustifs : les figures régulières qui interviennent dans l'étude des pavages et des cristaux, les problèmes d'équilibre en mécanique, lesquels ont conduit à la notion de barycentre, l'optique géométrique, l'électromagnétisme où la notion d'orientation est importante.

Ces diverses questions où s'entremêlent sciences mathématiques et sciences physiques participent de l'enseignement de chacune de ces disciplines, c'est cela qui nous conduit à dire qu'il est important que la physique apparaisse dans le cours de mathématiques et que les mathématiques apparaissent dans le cours de physique.

Pour préciser cette dernière remarque nous reviendrons sur l'un des premiers objets rencontrés dans l'enseignement de la géométrie : la droite.

Dans les ouvrages classiques d'enseignement de la géométrie élémentaire, on se propose moins de définir la droite que d'en montrer quelques exemples parmi lesquels le fil tendu ou le rayon lumineux. Par contre dans les ouvrages d'enseignement de l'optique, on énonce que, dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite. On voit ainsi apparaître un cercle, le discours géométrique s'appuyant sur la connaissance des rayons lumineux et le discours optique s'appuyant sur le discours géométrique.

La question est alors moins de définir l'objet premier que de mettre en rapport divers objets. La notion géométrique de droite apparaît alors comme une idéalité mathématique qui permet de parler des rayons lumineux ; il importe moins de définir un objet premier que d'explicitier comment le discours rationnel à la fois se construit dans le monde et réduit la part du monde qu'il étudie pour mieux le rendre intelligible⁷³. En ce sens le "physique" et le "mathématique" s'interpénètrent sans que l'on puisse dire *a priori* lequel est antérieur à l'autre du point de vue de la connaissance. On voit ici comment l'optique et la géométrie se rencontrent, ce que l'on peut résumer en affirmant que l'optique a sa place dans l'enseignement de géométrie comme la géométrie a sa place dans l'enseignement de l'optique. Ainsi la goniométrie relève autant de l'enseignement de la géométrie que de l'enseignement de l'optique. Mais peut-être plus généralement faudrait-il introduire des éléments de métrologie des grandeurs géométriques dans l'enseignement des mathématiques.

⁷³Dans un article ultérieur nous reviendrons sur la question de la réduction dans la construction de l'intelligibilité du monde.

problèmes de lieux – problèmes de construction

Bernard Destainville – Irem de Toulouse.

5.1 Introduction.

L'apparition d'un paragraphe concernant les lieux géométriques dans le nouveau programme de la classe de Première S nous a incité, d'avantage encore, à en approfondir la démarche ; conjointement les problèmes de construction sont liés à ceux de lieux.

Pour chacun de ces deux types d'activités, après découverte d'un ensemble qui contient les solutions, une seconde partie, réciproque de la précédente, est indispensable pour s'assurer de l'égalité de l'ensemble cherché avec l'ensemble des solutions. Cette égalité résulte donc d'une double inclusion.

• Dans un problème de lieu géométrique de points, il faut d'abord construire une figure, éventuellement avec plusieurs positions du point variable, pour conjecturer ce lieu ; et si la recherche est réalisée à l'aide d'un logiciel dynamique, cette construction n'est efficace pour la conjecture que si la séquence de construction des points est correcte. Surtout, avec un tel logiciel, le point P du lieu doit être déclaré après celui qui a été choisi comme point variable M . De plus, du choix du point variable M peut dépendre la clarté de la conjecture, et en particulier le repérage des éventuelles limites du lieu pour préparer la réciproque (voir IV). Le mouvement du point variable M est très utile pour observer celui de P .

Une fois justifié le support E du lieu, une *réciproque* est indispensable pour s'assurer que tous les points de cet ensemble E conviennent : à partir d'un point P quelconque de E , peut-on faire correspondre dans l'ensemble de départ (au moins) un point M dont P est l'image ? Les points P de E qui n'ont pas d'antécédent sont à rejeter (voir III et IV). Il est préférable de construire une nouvelle figure pour mieux cerner les étapes de

la réciproque; la séquence de construction des points est nécessairement différente de celle de la première partie.

À l'issue de cette étude, nous avons donc prouvé, par double inclusion, l'égalité du lieu géométrique cherché avec l'ensemble des points de E qui ont un antécédent.

On retrouve évidemment cette démarche lorsqu'on entreprend de justifier les divers *ensembles-images*, en général admis dans les programmes actuels, pour les transformations. Par exemple, dans une rotation, l'image d'un segment est un segment dont il faut préciser les propriétés.

• Dans un problème de construction géométrique d'un point, on est souvent conduit à privilégier, parmi les hypothèses, deux conditions nécessaires qui se traduisent par l'apparition du point sur deux lieux géométriques dont on cherche l'intersection¹. Lorsque ces deux lieux sont sécants, il reste à s'assurer, par une réciproque, que les éventuels points communs à ces lieux satisfont à toutes les propriétés imposées.

Par exemple, le centre du cercle circonscrit à un triangle est nécessairement à l'intersection de deux des trois médiatrices des côtés de ce triangle; pour prouver que c'est suffisant, il faut s'assurer que le point d'intersection de ces deux médiatrices est effectivement équidistant des trois sommets du triangle. Dans d'autres problèmes de construction, un point M peut être l'image d'un autre point M' par une transformation. D'une part il faut souvent construire d'abord ce point M' , d'autre part le passage de M' à M nécessite lui-même une construction, en général aussi par intersection de deux lieux (voir II).

Dans les activités qui suivent, on peut en particulier observer les liens entre les deux types de problèmes.

5.2 Une construction avec discussion.

Soient un point A et une droite D du plan. Construire un cercle de rayon r passant par A et tangent à D . Soit O la projection de A sur D .

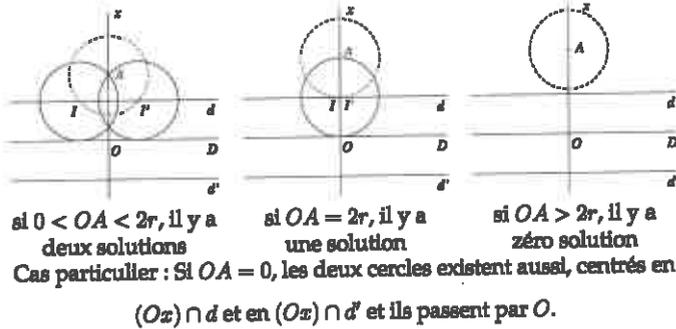
S'il existe une solution, soit I le centre du cercle :

- la distance de I à D est r ; I appartient donc à (E) , réunion des droites d et d' parallèles à D , lieu des points situés à distance r de D ;
- la distance de I à A est r ; I appartient donc au cercle (A, r) (second lieu).

S'il existe, I appartient donc à l'intersection de (E) et du cercle (A, r) .

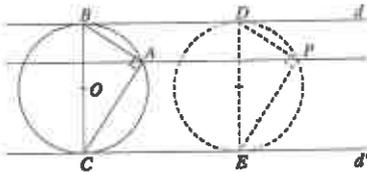
Réciproque : il y a quatre étapes : construire les deux lieux – discuter leur intersection – construire les cercles de centre I et de rayon r – vérifier qu'ils conviennent.

¹G. Polya, *La découverte des mathématiques* (Dunod, 1965); G. Gleason, *Analyse-synthèse* Brochure APMEP 76, 1990.

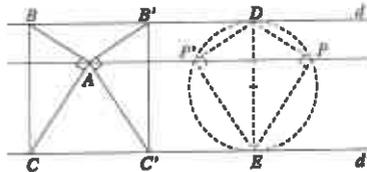


5.3 Une construction par deux méthodes.

d et d' sont deux droites parallèles et A un point du plan entre d et d' . Construire un triangle ABC , rectangle en A , avec B sur d et C sur d' , de telle sorte que la droite (BC) soit perpendiculaire à d .



Analyse : Si ABC existe, soit D un point de d et t la translation de vecteur \overrightarrow{BD} , $E = t(C)$ et $P = t(A)$; D étant fixé, P appartient à deux lieux : le cercle de diamètre $[DE]$ et la droite parallèle à d qui passe par A .



Réciproque : On part de d, d', A et $[DE]$ perpendiculaire à d . La parallèle à d en A coupe le cercle de diamètre $[DE]$ en deux points P et P' . Alors :

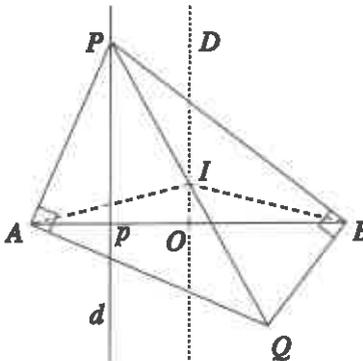
- Avec t' , translation de vecteur \overrightarrow{PA} , on a $t'(D) = B$ et $t'(E) = C$, et le triangle ABC est rectangle en A . Il convient.
- Même travail avec t'' , translation de vecteur $\overrightarrow{P'A}$. D'où $AB'C'$. Nous avons choisi cette méthode dynamique parce qu'elle fait disparaître la contrainte sur A , en déplaçant la figure, dans le même esprit que la construction d'un carré inscrit dans un triangle.

Note : une autre méthode consiste à construire d'abord le milieu O de $[BC]$; si l'on appelle D la droite des milieux de la bande de plan et $2a$ la largeur de cette bande, O est dans l'intersection de D et du cercle de centre A et de rayon a . On retrouve les deux solutions.

5.4 Deux lieux géométriques.

O est le milieu d'un segment $[AB]$, P un point de la médiatrice d du segment $[AO]$. Tracer la perpendiculaire à (PB) en B . Lorsque ces deux droites sont sécantes, on appelle Q le point d'intersection et I le milieu du segment $[PQ]$. Trouver les lieux géométriques du point I et du point Q lorsque P parcourt d .

1) Lieu géométrique de I : soit p le milieu de $[AO]$.

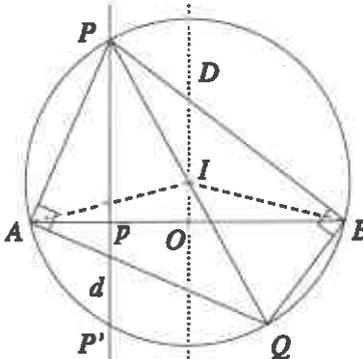


La figure : en séquence, construction de P , puis Q , puis I . Noter que si P est en p , les perpendiculaires à (PA) en A et à (PB) en B sont parallèles ; Q n'existe pas.

Conjecture : avec le logiciel CABRI, I semble décrire la médiatrice de $[AB]$.

Le support du lieu (analyse) : Si $P \neq p$, en considérant les deux triangles rectangles PAQ et PBQ , $IA = IQ = IP = IB$; donc I appartient à la médiatrice D de $[AB]$.

Réciproque (synthèse) : Soit I un point quelconque de D .



- construction : le cercle de centre I qui passe par A , passe aussi par B et coupe d en deux points P et P' . Avec P , la droite (PI) recoupe le cercle en Q . En séquence, nous avons donc construit I , puis P , puis Q .

- vérification : pour tout point I de D , les triangles PAQ et PBQ , inscrits dans des demi-cercles, sont rectangles. Donc I convient. Le raisonnement est le même pour P' .

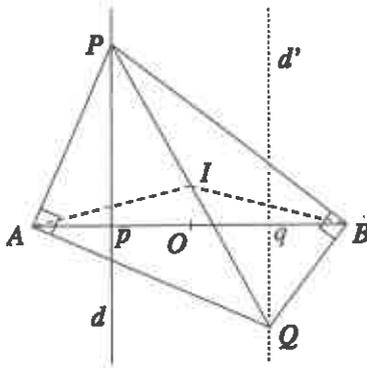
Ainsi, le lieu géométrique de I est la droite D en entier.

2) Lieu géométrique de Q : soit q le milieu de $[OB]$.

La figure : en séquence, construction de P , puis Q , puis I , comme ci-dessus, avec la même figure.

Conjecture : le logiciel CABRI propose comme lieu géométrique de Q la médiatrice du segment $[OB]$ privée du point q .

Le support du lieu (analyse) : la projection orthogonale de I sur la droite (AB) est O , et celle de P est p ; I est le milieu du segment $[PQ]$. Ainsi, par projection, O est le milieu du segment $[pq]$. Donc Q appartient à la médiatrice d' de $[OB]$.



Réciproque (synthèse) : il vaut mieux faire une nouvelle figure. Soit Q un point quelconque de d' .

- construction : traçons les perpendiculaires en A à (QA) et en B à (QB) .

Si $Q = q$, ces droites sont parallèles et P n'existe pas.

Si $Q \neq q$, ces droites sont sécantes en un point P . Soit I le milieu du segment $[PQ]$. En séquence, nous avons construit Q , puis P , puis I .

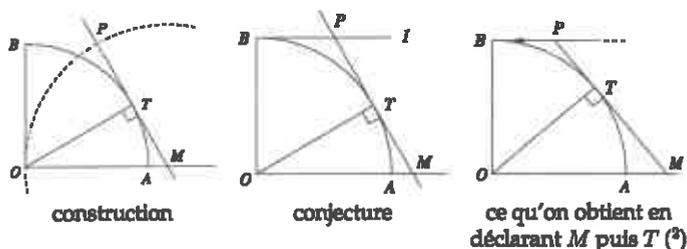
- vérification : pour tout point Q de d' , distinct de q , en inversant les rôles de P et Q dans l'étude qui précède, on démontre que P appartient à la droite d . Donc Q convient.

Ainsi, le lieu géométrique de Q est la droite d' privée du point q .

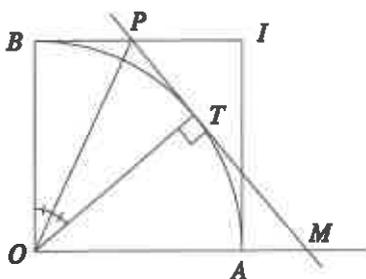
5.5 Un lieu géométrique par double inclusion.

(O) est un quart de cercle de centre O et d'extrémités A et B . Pour tout point T de (O) distinct de B , la tangente en T à (O) coupe la demi-droite $[OA)$ en M . P est le point de la demi-droite $[MT)$ tel que $MP = MO$. Trouver le lieu géométrique de P lorsque T décrit (O) .

La figure : après la mise en place de (O) , la séquence de construction est T , M , P .



Conjecture (avec CABRI) : en déplaçant T sur (O) , on peut observer les comportements limites de P aux extrémités d'un segment qui pourrait être le côté $[BI]$ du carré $AOBI$. Notons que la figure réalisée en commençant par construire M apporte une information originale pour B : il semble exclu du lieu.



Le support du lieu (analyse) : soit I le quatrième sommet du carré $AOBI$. Le point P appartient à la demi-droite $[BI]$. En effet,

- avec des considérations angulaires, les triangles OBP et OTP sont isométriques (2^{ème} cas).
- de plus, dans la construction de P , le cercle $(M; MO)$ est dans le demi-plan de frontière (BO) qui contient M .

Note : une autre solution consiste à envisager une similitude : avec H milieu de $[OP]$, les deux triangles OBP et MHO sont semblables.

2. M décrit une demi-droite, alors que T décrit un quart de cercle, qui est borné.

Réciproque (synthèse) :

- *construction* : soit P un point de la demi-droite $]BI]$ et T le point symétrique de B par rapport à (OP) . Alors $\widehat{TOB} = 2\widehat{POB}$;
 - si $P = B$, alors $T = B$ et M n'existe pas ;
 - si $P \neq B$ et P extérieur à $]BI]$, comme $\widehat{POB} > 45^\circ$, $\widehat{TOB} > 90^\circ$; donc P ne convient pas.

Ainsi, il faut que P appartienne au segment $]BI]$: le lieu de P est donc inclus dans $]BI]$.

$P \in]BI]$; par symétrie par rapport à (OP) , la droite (PT) est tangente en T au quart de cercle (O) . Elle coupe (OA) en M . En séquence, nous avons donc construit P , puis T , puis M .

- *Preuve* : les angles en O et P du triangle MOP sont égaux (symétrie par rapport à (OP) et angles alternes-internes) ; donc $MO = MP$.

Conclusion : $]BI]$ est inclus dans le lieu de P . Le lieu géométrique de P est donc le segment $]BI]$.

5.6 Conclusion.

Dans ces deux types de problèmes de recherche d'égalité d'ensembles, un support géométrique permet de mieux analyser le raisonnement par double inclusion.

Dans un souci de rigueur, la réciproque est indispensable. Il ne s'agit pas d'une simple vérification pour se sécuriser, pas plus qu'on ne peut se contenter d'une observation avec un logiciel dynamique.

La démarche est générale. On retrouve par exemple ce besoin de rigueur dans la recherche de l'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inéquation, lorsque les différentes propositions de la résolution ne sont pas équivalentes ou que l'ensemble de définition n'a pu être précisé au départ.

6 105

6

Pourquoi les aires ?

Henry Plane.

Avertissement : L'atelier "Pourquoi les aires" a demandé aux participants manipulation des figures (avec "cas de figures") et discussion simultanées, choses qui ne peuvent être rapportées en quelques brèves pages. L'objectif de l'atelier était une sorte de survol de la géométrie de l'enseignement secondaire dans lequel la notion d'aire jouait, ou pouvait jouer, un rôle comme outil de démonstration, rôle qui apparaît aujourd'hui comme oublié sinon délaissé.

6.1 Historique.

Quelques mots d'histoire pour débiter. Jadis longueurs et aires jouaient de concert un rôle important dans la construction de l'édifice mathématique. L'une et l'autre s'avéraient palpables alors que le nombre restait un être plus ou moins mystique (Bible, Pythagoriciens).

La fin du Moyen-Age abonde en résolutions géométriques de problèmes dans lesquels nous, nous ne voyons que des équations. Voir les traducteurs de l'arabe, Bombelli, Gosselin et autres (cf [2] et [5]).

Vinrent ensuite Viète et Stevin (cf [9] et [10]) qui, avec "l'arithmétique littérale" et les nombres décimaux, rendirent l'expression des raisonnements plus aisée et les calculs plus automatiques voire mécaniques.

Au dix-septième siècle il y eut comme une inversion des rôles. Un nombre, qu'il soit entier ou "sourd", connu ou inconnu, devient un être mathématique qu'on manipule, $3a$, $x + y$ ou $\sqrt{5}$... On l'associe encore à une longueur mais est-ce indispensable? Arnauld (cf [1]) bouleverse Euclide, Ozanam aussi (cf [4] et [6]). Une aire est un produit $a \cdot b$ d'entiers ou d'ir-

rationnels et non plus l'attribut d'un rectangle $ABCD$. Une sorte de hiérarchie s'installe, premier, deuxième, troisième degré...

Les dix-huitième et dix-neuvième siècles réduiront les aires à leur calcul par des formules. Voir la démonstration du théorème de Pythagore chez Clairaut (cf[3]).

On aboutira à la fin du vingtième siècle à ces ouvrages avec un chapitre : "Surfaces, périmètre et aire". Une page et quelques exercices. Comment s'étonner de la confusion chez les élèves quelques ans après... Les points

mis en relief ont été regroupés en quatre classes, quatre pistes de suggestions afin que chacun trouve des points de départ s'il veut risquer lui-même l'aventure et, grâce aux aires, augmenter ses outils.

6.2 Piste élémentaire.

La piste est élémentaire car il s'agit d'assembler des éléments de figures.

6.2.1 Pour bien distinguer aire et périmètre.



FIG. 6.1 – Périmètres égaux et aires inégales.



FIG. 6.2 – Périmètres inégaux et aires égales.

6.2.2 Sommes de carrés.

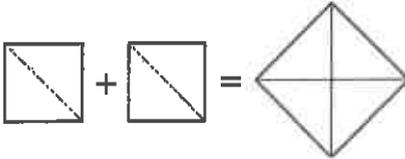


FIG. 6.3 – Avec Platon $1 + 1 = 2$ et un nombre dont le carré est deux.

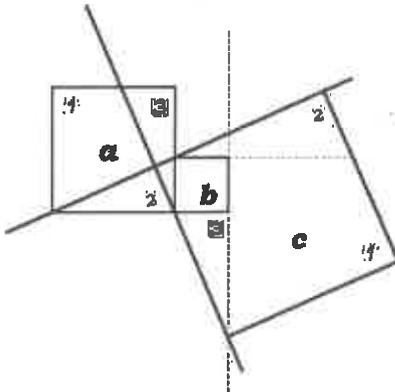


FIG. 6.4 – Carré *a* et carré *b* donnent carré *c* en deux coups de ciseaux et quelques déplacements.

Il y a bien d'autres décompositions et recompositions qui évoqueront, au besoin, translation, rotation, symétrie.

6.2.3 Un peu d'arithmétique avec du quadrillage.

En assemblant le "triangle" S_n de côté n et le "triangle" S_{n-1} de côté $n-1$ on lit (cf figure 6.5)

$$(S_n) = (S_{n-1}) + n$$

et

$$(S_n) + (S_{n-1}) = n^2.$$

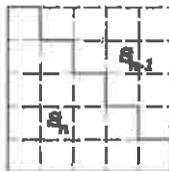


FIG. 6.5 - Somme des n premiers entiers.

Donc

$$2(S_n) = n^2 + n$$

$$(S_n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Mais assemblées autrement (cf figure 6.6) :

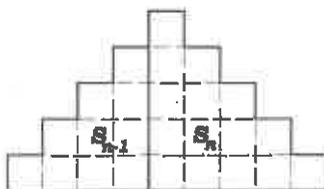


FIG. 6.6 - Somme des n premiers impairs.

$$n^2 = (S_n) + (S_{n-1}) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$$

6.3 Retour à Euclide.

6.3.1 N'oublions pas le terme rectangle.

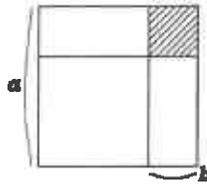


FIG. 6.7 - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Nous avons déjà rencontré $(a + b)^2$, alors $(a - b)^2$?
 Pour retrancher au carré construit sur a les deux rectangles $a \cdot b$ il faut ajouter le carré construit sur b

$$a^2 - 2(ab) + b^2.$$

C'est en s'appuyant sur ce raisonnement que Bombelli dès le seizième siècle justifiait que *moins par moins* donnait *plus*.

6.3.2 Mais il y a également les inégalités.

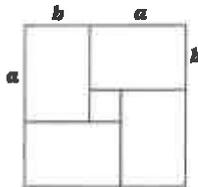


FIG. 6.8 - $(a + b)^2 > 4ab$.

Dans le carré construit sur $a + b$ il y a plus que les quatre rectangles $a \cdot b$:

$$(a + b)^2 > 4ab$$

donc

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}.$$

La moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ est supérieure ou égale à la moyenne géométrique \sqrt{ab} .

Avec $a + b = 1$, on aura la moyenne géométrique supérieure à la moyenne harmonique h telle que $\frac{2}{h} = \frac{a+b}{ab}$, etc. Mais ceci est d'un autre âge.

Si on utilise le livre II d'Euclide, d'autres relations apparaissent démontrées à l'aide des aires...

6.3.3 Equations.

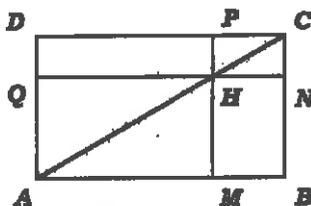


FIG. 6.9 - Le gnomon.

Bombelli, encore lui, en introduisant la longueur unité avant Descartes conduisait à d'autres constructions. C'est ainsi qu'avec, ce que les grecs nommaient le gnomon, par simples opérations sur les aires non calculées (cf figure 6.9), on obtient l'égalité d'aires

$$(DQHP) = (MBNH).$$

Et si $AM = a$, $MB = b$, $AQ = 1$ alors $a.QD = 1.b$ qui rime avec $a.x = b$, premier degré...

Trouver deux nombres connaissant somme et produit :

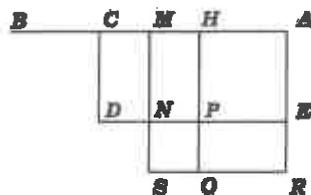


FIG. 6.10 -

Pour le second degré un auteur tel que Gosselin fondait en 1577, son raisonnement sur le problème : Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit (cf figure 6.10) :

$$a + b = \sigma$$

$$ab = \pi$$

Des deux nombres l'un deux est plus grand que $\frac{\sigma}{2}$ et l'autre plus petit (si $a = b$ une table de carrés fait l'affaire). Si AB figure σ avec $AM = \frac{\sigma}{2}$, $AC = a = AM + MC$. Posons $a = \frac{\sigma}{2} + \alpha$.

Si $HM = MC = \alpha$, $b = \frac{\sigma}{2} - \alpha = AH$.

Connaître π c'est avoir le rectangle $ACDE$ d'aire π , donc $AE = AH = CD = b$.

Le rectangle $ARQH$ obtenu en substituant $ERQP$ égal à $CMND$ conduira au carré $AMSR$ dont l'aire est $(\frac{\sigma}{2})^2$. Mais ce carré est formé de $AMNPQR$ d'aire π , $((AMNE) + (PQRE))$ et du carré $PNSQ$ d'aire α^2 . Donc

$$\frac{\sigma^2}{4} = \pi + \alpha^2 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 = \frac{\sigma^2}{4} - \pi.$$

Je peux donc (table de carrés) obtenir $\alpha = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \pi}$, à condition que $\frac{\sigma^2}{4} - \pi$ soit positif...

alors

$$a = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \pi}$$

etc...la voie est ouverte.

6.4 Rectangle, triangle, rapport de longueurs.

6.4.1 Théorème du papillon.

On a établi d'abord que tout triangle est "moitié" d'un rectangle, que si deux triangles sont situés dans une même bande de parallèles et ont même base, leurs aires sont égales et réciproquement.

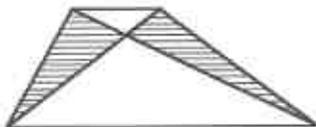


FIG. 6.11 – Théorème du papillon.

On notera que les parallèles entrent en jeu par notion de distance infiniment conservée et non d'angles correspondants égaux (voir Arnauld). On pourra noter que dans un trapèze les diagonales définissent des triangles d'aires égales (théorème dit du papillon).

6.4.2 Et Pythagore ?

- Soit un triangle ABC de hauteurs BB' et CC' prolongées en $B'B_1 = AC$ et $C'C_1 = AB$. Adjoignons les rectangles $AB'B_1B_2$ et $AC'C_1C_2$, ainsi que les triangles égaux (isométriques...) ABB_2 et AC_2C .

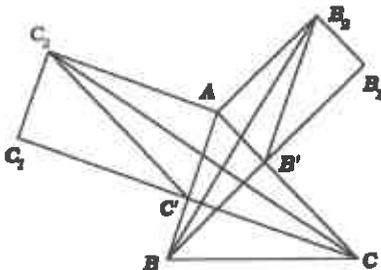


FIG. 6.12 –

Parlons aires :

$$(AB'B_1B_2) = 2(AB'B_2) = 2(ABB_2)$$

donc

$$(AB'B_1B_2) = 2(ACC_2) = 2(AC_2C_1) = (AC'C_1C_2).$$

Le produit d'un côté par la projection de l'autre sur lui ...

A moins que l'on ne parle de cosinus, ou de produit scalaire...

- Carrés construits sur les côtés (cf figure 6.13).

Trois hauteurs, six rectangles, pour trois carrés (revoir la figure si un angle est obtus).

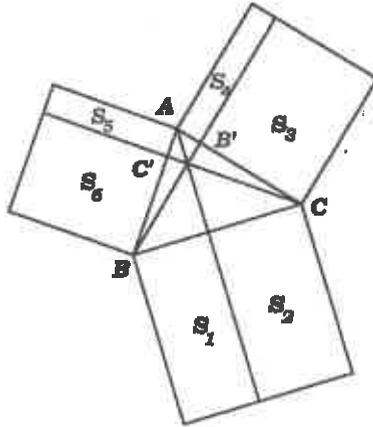


FIG. 6.13 - Carrés construits sur les côtés.

$$S_1 = S_6, \quad S_2 = S_3, \quad S_4 = S_5.$$

Dans le carré qui s'appuie sur BC

$$\begin{aligned} BC^2 &= S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \\ &= \text{carré sur } AB - S_6 + \text{carré sur } AC - S_5 \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB' \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Bien sûr si $\widehat{BAC} = 1$ droit, $S_4 = S_5 = 0 \dots$

6.4.3 Les milieux (cf figure 6.14).

Hypothèses : $AM = MB$ et MN parallèle à BC , donc

$$(AMC) = (MBC) = \frac{1}{2}(ABC)$$

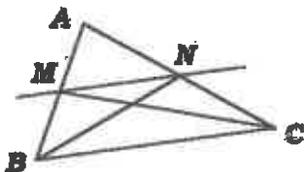


FIG. 6.14 – Droite des milieux.

$$(MBC) = (NBC) \text{ (bande)}$$

$$(NBC) = \frac{1}{2}(ABC).$$

Conclusion : $AN = NC$.

Réciproque :

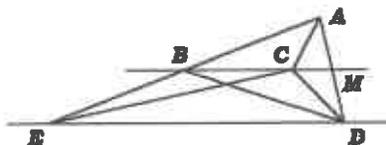
Hypothèses : $AM = MB$ et $AN = NC$.

$$(MBC) = \frac{1}{2}(ABC) \text{ et } (NBC) = \frac{1}{2}(ABC) \text{ (bande).}$$

Or M et N sont d'un même côté de (BC) , conclusion MN et BC sont parallèles.

Mais que dire de $(ABC) = (DBC)$ si A et D sont de part et d'autre de (BC) ?

La parallèle à (BC) passant par D recoupe (AB) en E :

FIG. 6.15 – A et D sont de part et d'autre de (BC) .

$$(DBC) = (EBC)$$

donc

$$\text{donc } (EBC) = (ABC);$$

or B est au milieu de $[AE]$ et M est au milieu de $[AD]$ (théorème direct).
La droite (BC) coupe (AD) en son milieu (cf 6.4.3) et $AM = \frac{1}{2}AD$.

6.4.4 Une extension.

Si au lieu de $\frac{1}{2}$ on prend le rapport k tel que $AM = kAB$, le même raisonnement conduit à $AN = kNB$ avec les réciproques associées. C'est ainsi qu'avec le trapèze on introduira la division harmonique (trop vieux souvenirs)...

6.4.5 Applications : les médianes d'un triangle.

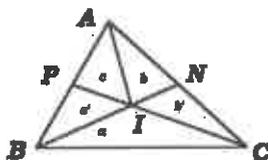


FIG. 6.16 - Les médianes.

BN et CP médianes de ABC se coupent en I . Que dire de AI ?
 En lisant le découpage en aires de la figure (cf figure 6.16) on a

$$\begin{aligned} b = b' \quad \text{et} \quad a + b' = c' + c + b \quad (BN \text{ médiane}) \\ c = c' \quad \text{et} \quad a + c' = b' + b + c \quad (CP \text{ médiane}) \end{aligned}$$

D'où $a = b + b' = c + c'$. Cette dernière égalité entraîne que (AI) coupe $[BC]$ en son milieu.

Par ailleurs, comme $c = c'$, $b + b' = 2c$ donc $CI = 2IP$ etc.

6.5 Produit de rapports ou rapport de produits.

- Euclide dans le livre 6 s'intéresse aux parallélogrammes équiangles et au rapport de leurs côtés. Au seizième siècle un de ses traducteurs, Commandino, dans une scholie, adapta la propriété aux triangles ayant un angle égal. Clavius, Henrion, Le Mardelle insistèrent sur la propriété puis, comme d'autres, elle fut négligée. Arrêtons nous un instant.

Traçons deux droites Δ_1 et Δ_2 se coupant en O . Sur δ_1 prenons deux points A et A' et sur Δ_2 deux points B et B' .

Mais il y a plusieurs cas de figure ! Tant pis, étudions les triangles OAB et $OA'B'$. Mais les angles en O sont ou égaux ou supplémentaires ! Tant pis, traçons $A'B$. Étudions le rapport des aires (OAB) et $(OA'B')$.

Dans tous les cas de figure on a :

$$\frac{(OAB)}{(OA'B)} = \frac{OA}{OA'} \text{ et } \frac{(OA'B)}{(OA'B')} = \frac{OB}{OB'}$$

donc

$$\frac{(OAB)}{(OA'B')} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'}$$

Le rapport des aires égale donc le rapport du produit des côtés des angles égaux ou supplémentaires.

Votre figure est bien en accord !...

2. Applications :

- (AD) est bissectrice de l'angle A du triangle ABC .

Mais bissectrice intérieure ou extérieure ? Ne perdons pas notre temps ; angles égaux ou supplémentaires a-t-on vu.

$$\text{En } A \quad \frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{AB.AD}{AC.AD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{En } D \quad \frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{DA.DB}{DA.DC} = \frac{DB}{DC}$$

Si vous voulez perfectionner votre figure, orientez les triangles et vous aurez la relation algébrique qui vous convient.

- Triangles équiangles.

Vocabulaire usuel au "grand siècle" pour désigner des triangles ayant deux, donc trois, angles homologues égaux.

$$\text{Hypothèses : } \begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{N} \\ \hat{C} = \hat{P} \end{cases}$$

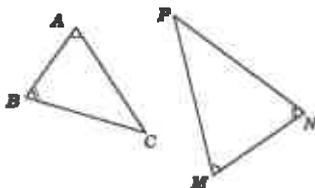


FIG. 6.17 - Triangles équiangles.

$$\frac{(ABC)}{(MNP)} = \frac{AB.AC}{\underset{\text{en } A}{MN.MP}} = \frac{BA.BC}{\underset{\text{en } B}{NM.NP}} = \frac{CB.CA}{\underset{\text{en } C}{PN.PM}}$$

En simplifiant

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$$

Conclusion : côtés homologues proportionnels.

Et de plus

$$\frac{(ABC)}{(MNP)} = \left(\frac{AB}{MN}\right)^2$$

Le rapport des aires est le carré du rapport des côtés.

- Arrêtons-là : Menelais en rideau.

a, b, c sont les aires des figures.

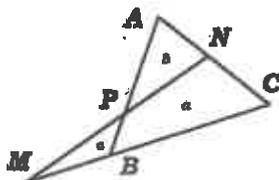


FIG. 6.18 - Théorème de Menelais.

$$\text{En } M \quad \frac{c}{a+c} = \frac{MB \cdot MP}{MC \cdot MN}$$

$$\text{En } N \quad \frac{a+c}{b} = \frac{NC \cdot NM}{NA \cdot NP}$$

$$\text{En } P \quad \frac{b}{c} = \frac{PA \cdot PN}{PB \cdot PM}$$

Le produit membre à membre et les simplifications conduisent à

$$1 = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB}$$

On peut aussi algébriser. N'a-t-on pas travaillé à l'économie ?

Bibliographie

- [1] Arnauld, *Nouveaux élémens de géométrie* Paris, 1667. Reproduction publiée par l'IREM de Dijon, 1983.
- [2] Bombelli, *Algèbre* (1560), livres I-V, Bortolotti, Milan, 1928.
- [3] Clairaut, *Eléments de géométrie* Paris, 1765, réédition Siloë, Laval, 1986.
- [4] Euclide, *Eléments* :
Editions des "Eléments de géométrie d'Euclide" avec commentaires
- En latin
- Clavius (1589)
- Commandino (1572)
- En français
- Henrion (1615)
- Le Mardele (1623)
Les oeuvres d'Euclide traduites littéralement par F. Peyrard 1819, réédition Blanchard, Paris, 1993. Edition commentée, Vitrac, Paris 1990-1994.
- [5] Gosselin, *Ars Magna* (en latin), 1577.
- [6] Ozanam, *Géométrie pratique* Paris, 1684.
- [7] Plane, *Démontrer les aires* Irem du Mans, fascicules 1 (Octobre 2000) et 2 (Juin 2001) (Martine Janvier et Anne Gravier).
- [8] Platon, *Ménon*, trad. de Monique Canto-Sperber, Paris, Garnier, 1991



- [9] Stevin, *La Disme en français* (1585), reproduction de l'édition de Girard (1634), Irem Paris VII, Paris, 1980.
- [10] Viète, *en latin, fin seizième siècle, avec commentaires, la nouvelle algèbre de M. Viète*, par Vauzelard, Fayard, Paris, 1986.

7

La géométrie au service des corps flottants.

*Frédéric Vivien, Luc Sinègre
Irem de Rouen.*

7.1 Introduction.

A partir d'un objet comme le culbuto, objet de masse non homogène et plutôt concentrée dans une zone du solide, nous pouvons retrouver plusieurs positions autour de l'équilibre.

L'équilibre stable : l'objet repose sur sa masse principale. Tout petit mouvement apporté à cet objet le fera revenir dans cette position. L'équilibre instable : avec beaucoup de patience, nous pouvons faire tenir le culbuto avec sa masse principale située sur le haut. Tout petit mouvement qui lui est appliqué le fera revenir dans la première position, l'équilibre stable.

Imaginons cet objet flottant sur l'eau ; nous retrouverons les mêmes positions d'équilibres. Si, de plus, l'objet est constamment soumis à une force qui l'écarte d'une position d'équilibre (le vent dans les voiles d'un navire), cet objet aura alors tendance soit à rester dans sa nouvelle position, soit à revenir dans la position d'équilibre initiale, soit à s'écarter plus encore de sa dernière position.

7.2 Historique.

Archimède est le premier scientifique à s'être occupé de la théorie des corps flottants. Le mathématicien ne se contente pas de poser la célèbre loi qui régit l'équilibre ; il détermine, pour des corps sphériques, cylindriques ou paraboliques, dans quels cas l'équilibre doit être stable ou instable. Mais comme le remarque Lazare Carnot[2] rapporteur en 1814, pour l'Institut, avec Poinsot et Sané du mémoire de Dupin[4], la principale difficulté provient davantage des mathématiques que de l'hydrostatique

En admirant la force d'esprit qu'exigeaient ces premiers résultats d'une science alors dans l'enfance, on ne peut s'empêcher d'avouer qu'une méthode qui doit, à chaque corps nouveau dont on s'occupe, recourir à de nouveaux moyens de solution, ne soit d'une étude et d'une application extrêmement pénibles.

Deux géomètres reprisent les recherches du savant de Syracuse, au dix-huitième siècle, c'est-à-dire presque deux mille ans plus tard. Pierre Bouguer, réussit d'abord, pendant les loisirs que lui laisse le voyage qui lui permit de mesurer un arc de méridien, à rédiger le *Traité du navire*[1] (1746). Le texte reste fidèle à Archimède, Bouguer adopte un point de vue géométrique¹ et barycentrique qui évite le calcul intégral et lui permet donc d'être compris par les ingénieurs maritimes. Euler qui reste fidèle à sa méthode au dire de Carnot, a choisi la géométrie analytique.

Dans les deux cas, on considère que le corps flottant admet un plan de symétrie, ce qui n'est pas une bien grande restriction pour décrire des vaisseaux de guerre ou de commerce !

Dupin

au lieu de se tenir toujours infiniment près de chaque position d'équilibre, ... , considère à la fois toutes les positions qu'un corps peut prendre.

Certes Bouguer avait déjà cherché au chapitre cinq de son *Traité*[1] (*recherches plus étendues sur les métacentres*, p.269) à dépasser le cas trop particulier de l'équilibre et remarquant notamment que

Certains navires conservent bien leur situation horizontale tant qu'ils sont au port : mais aussitôt que quelque puissance un peu forte, comme l'impulsion du vent sur les voiles, les fait pencher d'une quantité un peu grande, ils ne se relèvent que très difficilement ; et ce qui est le comble de malheur, puisqu'il faut périr, ils continuent quelquefois à s'incliner, quoique la cause qui a fait commencer leur inclinaison, cesse d'agir. .

Il donne alors les dessins de deux courbes métacentriques produisant deux situations opposées, mais c'est à Dupin que revient l'idée de déduire les propriétés géométriques de la surface métacentrique de celle de la surface des centres de carènes, dont elle est la développée.

Le métacentre défini à l'origine comme point limite d'une condition d'équilibre doit donc être pensé comme le point caractéristique d'une surface. Le problème passe donc du terrain de la Mécanique à celui de la Géométrie Pure, et les développements apportés par Monge et ses élèves (courbe indicatrice, directions conjuguées, ...) vont permettre d'exposer plus simplement et d'enrichir ce que Bouguer et Euler avaient déjà posé.

¹Jean Dhombres en a fait une analyse à la fois historique et didactique (cf [3]).

7.3 Autour de l'équilibre.

Description de la figure 7.1 :

Le plan de flottaison est le plan de la surface libre du liquide. Ce plan

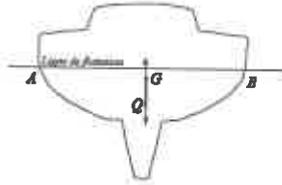


FIG. 7.1 – Coupe du corps flottant perpendiculaire au plan de symétrie.

sépare le corps flottant en deux parties. La partie la plus intéressante est la carène, c'est-à-dire le volume du corps immergé. La trace de ce plan sur la figure est la droite (AB). Le poids du corps flottant induit une force verticale \vec{P} appliquée au centre de gravité G. Ce poids s'équilibre avec la poussée \vec{F} qui s'exerce au centre de gravité Q de la carène. La loi d'Archimède permet d'affirmer que, si le corps flottant est en équilibre, $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$. Comme le poids du corps immergé est constant, la poussée doit correspondre à un volume de liquide déplacé constant, on dit que la flottaison est isocarène. Cette force, dite de poussée, s'exerce au centre de poussée, le centre de gravité de la carène. Ce point n'est pas le point d'application de la poussée comme l'indique l'exemple d'un flotteur sphérique (fig 7.2). Comme la poussée d'Archimède est constante, l'aire de la partie immer-

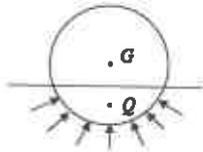


FIG. 7.2 – Centre de poussée d'un flotteur sphérique

gée est constante, pour toute position d'équilibre du navire.

Bouguer, Euler et Dupin représentent le mouvement avec un référentiel attaché au bateau. Comme le montre la figure 7.3 cette convention demande au lecteur un temps de réflexion, car la rotation induite sur la re-

présentation est opposée au tangage réel du bateau. Ceci posé pour un dé-



FIG. 7.3 – Représentation du tangage.

placement ce qui correspond pour un déplacement infinitésimal d'angle $\theta = \widehat{BOB'}$ les onglets AOA' et BOB' doivent avoir le même volume. Comme ces deux volumes sont tous deux égaux à θ fois la surface, O est le centre de gravité de la surface de flottaison $[AB]$. On déduit les énoncés suivants :

- Pour des déplacements isocarènes petits, la flottaison passe par un point fixe qui est le centre de gravité de la flottaison initiale. On appelle ce point le centre de flottaison.
- Toutes les flottaisons isocarènes enveloppent une surface, la surface de flottaison, qui est en même temps le lieu du centre de gravité des flottaisons.

Si, toujours dans le cadre d'un tout petit déplacement θ , on appelle a et b les centres de gravités des onglets AOA' et BOB' précédents. Notons également Q le centre de gravité de la partie commune $OA'EB$ (cf figure 7.4). Le centre de poussée dans le premier cas est α le barycentre des points a et Q affectés des coefficients v_A et V , volumes respectifs de l'onglet et de la partie commune. Dans le second, β le barycentre des points b et Q affectés des mêmes coefficients.

La droite $(\alpha\beta)$ reste donc toujours parallèle à la droite (ab) . En faisant

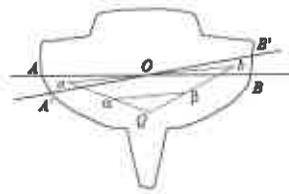


FIG. 7.4 –

tendre θ vers 0, la droite $(\alpha\beta)$ tend vers une tangente à la surface de poussée, alors que (ab) tend, elle vers la flottaison.

- Le plan tangent en chaque point de la surface des poussées est parallèle à la flottaison correspondante.

- La poussée restant perpendiculaire au plan de flottaison est donc la normale à la surface des poussées passant par le centre de poussée.

7.4 Le métacentre et la courbe de GZ.

Examinons la situation autour d'une situation d'équilibre. Pour simplifier nous ne considérons qu'un déplacement autour d'un axe longitudinal (roulis). S'exercent au centre de gravité du navire G et au centre de poussée Q deux forces égales en intensité et opposées qui forment donc un couple. La normale (QG) pivote autour du centre de courbure de la courbe de poussée que nous appellerons le métacentre M à l'équilibre. L'équilibre est donc stable si et seulement si le point M se trouve à l'extérieur du segment $[QG]$ donc si et seulement si le rayon de courbure r en Q de la courbe de poussée est supérieur à la distance $QG = d$. Comme pour un bâton que l'on tenterait de poser verticalement sur l'eau, si le centre de gravité est "trop haut", le moindre déséquilibre provoque la chute du bâton.

Le couple agissant sur le navire est égal au produit du poids du navire

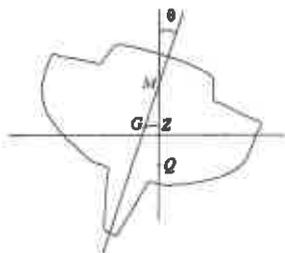


FIG. 7.5 - Bras de redressement.

par la distance entre les deux axes d'application des deux forces (le poids et la poussée). On appelle bras de redressement, et l'on note généralement GZ , la distance séparant le centre de gravité et la verticale contenant le centre de carène. On a, en considérant des orientations bien choisies, $GZ = GM \cdot \sin(\theta)$:

- Si $GZ > 0$, c'est-à-dire si le moment tend à redresser le navire alors $GM > 0$ et le point M est donc au-dessus de G .
- Si $GZ < 0$ c'est-à-dire si le moment tend à retourner le navire alors $GM < 0$ et le point M est donc au-dessous de G .

Ceci confirme que le centre de gravité G doit être au-dessous du métacentre M pour qu'il y ait stabilité². "Méta" ici, comme l'a voulu Bouguer,

²La proposition 20 du chapitre 3 du premier tome (cf 7.9) de la Scientia Navalis [5]

signifie la plus haute hauteur possible du centre de gravité du navire.

La courbe de stabilité statique donne, pour plusieurs angles de gîte θ , la position du centre de gravité du navire, le point G , et celle du centre de poussée, le point Q . Sur la figure (figure 7.6, trouvée dans [6]) on remarque

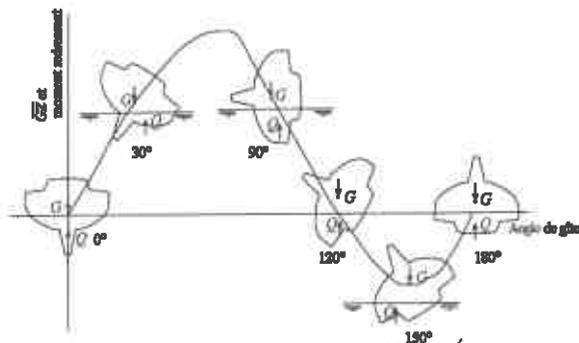


FIG. 7.6 – Courbe de GZ.

que plus le bateau s'incline, plus Q s'écarte de la verticale de G .

La tangente à la courbe au point d'origine est une représentation de la stabilité initiale du bateau : plus la pente est importante, plus le bateau est stable en position droite.

Sur notre exemple, la distance \overline{GZ} est maximale pour un angle de gîte aux environs de 70° qui est l'angle de stabilité maximale. Si la force qui incline le bateau est plus grande que le moment redressant à ce point, le bateau se rapproche du point de chavirement. Bien souvent toutefois, cette force est celle du vent dans les voiles et elle diminue au fur et à mesure que le bateau se couche.

Plus on incline le bateau au-delà de 70° , plus la distance \overline{GZ} diminue jusqu'à un angle où Q est de nouveau exactement aligné avec G à 120° . Dans ce cas le bateau est en équilibre instable ; le moindre mouvement peut soit amorcer un redressement, soit causer un chavirement complet. En effet, après 120° , Q est passé de l'autre côté de G , soit $\overline{GZ} < 0$ et le moment entre les deux forces contribue maintenant au chavirement. A 180° , le bateau est stable à l'envers.

Sans entrer dans les détails théoriques, quels sont les points à considérer ?

- Le point de chavirement doit être le plus loin possible.

Invenire stabilitatem, quae superficies quascumque plana aquae verticaliter insidens in situ aequilibrii perserverat
indique que la stabilité de l'équilibre est réalisée si et seulement si la distance GO entre le centre de gravité et le centre de poussée est supérieure à $\frac{AB^2}{2AMFN}$.

- Le bras redressant à l'angle de stabilité maximale doit être le plus grand possible.
- La surface sous la courbe doit être la plus grande possible, en stabilité positive et la plus petite possible en stabilité négative. En effet la surface sous la courbe est l'intégrale du moment redressant, c'est-à-dire le travail nécessaire pour incliner le navire jusqu'au point de chavirement. Autant ce travail doit être grand pour le bateau droit, autant il est utile qu'il soit le plus petit possible pour le bateau chaviré. Il faudra en effet une vague assez forte pour fournir ce travail et ainsi redresser le bateau.

7.5 La courbe métacentrique.

Si le navire présente un plan de symétrie longitudinale, la surface des poussées a la même symétrie. Le métacentre M , qui, comme nous l'avons déjà vu, est le point caractéristique de la développée de cette surface décrit dans une coupe transversale une courbe qu'on appelle *courbe métacentrique*. En un point d'équilibre Q , la courbe de poussée correspondant à la coupe transversale, présente une tangente horizontale. Lui correspond sur la *courbe métacentrique* un point de rebroussement de première espèce.

On peut illustrer cette situation en construisant à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la courbe métacentrique d'un solide dont la courbe de poussée est une parabole.

Si le centre de gravité G du solide est en dessous de la courbe métacentrique, une seule normale passe par G et il existe une seule position d'équilibre pour le solide. Si G est au-dessus, il est sur trois normales et l'équilibre est instable. Si le centre de gravité G du solide est en dessous de

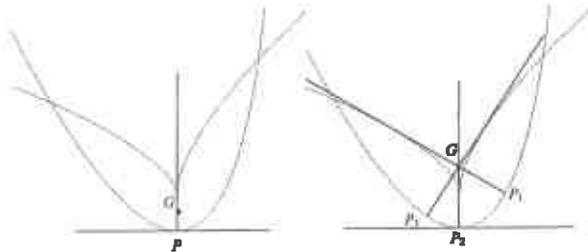


FIG. 7.7 – Normales à une courbe de poussée parabolique.

la courbe métacentrique (ou développée), une seule normale passe par G et il existe une seule position d'équilibre pour le solide. Si G est au-dessus,

il est sur trois normales et l'équilibre est instable.

7.6 Le théorème de Bouguer.

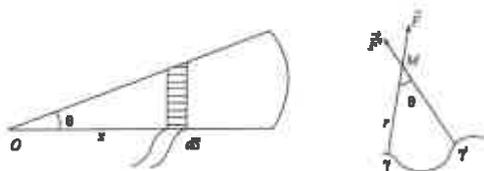
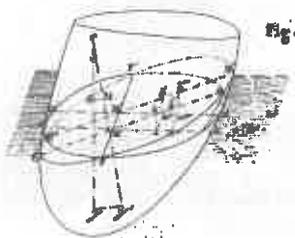


FIG. 7.8 -

Quand la flottaison passe de (AB) à $(A'B')$ (cf fig 7.4) la poussée passe de \vec{F} à \vec{F}' . Si nous appelons \vec{f} la poussée de l'onglet AOA' , la poussée de la partie $OA'B$ est donc $\vec{F} - \vec{f}$. Il suffit d'ajouter à cette dernière la poussée \vec{f}' de l'onglet $B'O'B$ pour obtenir $\vec{F}' = \vec{F} - \vec{f} + \vec{f}'$ ou encore $\vec{F}' - \vec{F} = \vec{f}' - \vec{f}$. Comme les onglets ont le même volume, $\vec{f}' - \vec{f}$ constitue un couple dont le moment par rapport à l'axe de roulis passant par O peut se calculer en intégrant le moment d'une tranche élémentaire de base dS , de hauteur θ située à x de O (cf 7.8), qui vaut $\theta x^2 dS \rho$. Le symbole ρ désigne la masse volumique du liquide. On a donc le moment du couple en O qui vaut $\Gamma = \int_S \rho \theta x^2 dS = \rho \theta I$ où l'on reconnaît dans I le moment d'inertie de la surface de flottaison $\mathcal{I} = \int_S x^2 dS$. On calcule le moment de $\vec{F}' - \vec{F}$ en γ centre de poussée de la première situation qui vaut F' multiplié par le déplacement $\gamma \gamma'$ sur la courbe de poussée. Or $F' = \rho V$ (V le volume de la carène), soit encore $\Gamma = \rho V r \theta$. On retrouve donc la loi³ de Bouguer

$$I = rV.$$

3



On a donc intérêt pour augmenter le rayon r et donc faciliter la condition de stabilité $r > a$ à augmenter l'inertie de la surface de flottaison (flotteurs, balanciers, etc.)

La figure 7.9 montre comment Euler a procédé pour trouver la condition

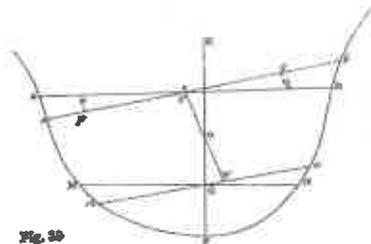


Fig. 30

FIG. 7.9 -

d'équilibre. Les moments des deux onglets boB et aoA sont tous les deux proportionnels aux quantités $po - GV$ et $qo + GV$, le moment résultant sera lui proportionnel à $po + qo = \frac{2AB}{3}$ ce qui permet d'obtenir une condition où n'interviennent que des points de la position initiale. Notons enfin que trouver la distance entre le centre de gravité et le centre de poussée supérieure au cube du segment de flottaison divisé par 12 fois le volume de la carène ($GO > \frac{AB^3}{12v}$) est conforme avec ce qui précède puisque dans le cas d'un raisonnement plan la quantité $\frac{AB^3}{12}$ représente bien l'inertie de la flottaison.

Cette démonstration reste très proche de celle de Dupin dans [4] qui écrit

Nous allons démontrer dans un instant que les moments simples des deux onglets $F'AF''B$ divisés par la tangente de $AMBm$ et par le volume de la carène, sont égaux en somme au rayon de l'arc $\gamma\gamma'$ que parcourt le centre de carène, lorsque le plan de flottaison cesse d'être $F'AA'F''$, et devient $F''BB'F'$. Donc le rayon de $\gamma\gamma'$ est simplement égal au moment d'inertie de l'aire totale $\alpha F'AF''$ (moment pris par rapport à l'axe $F'F''$) divisé par le volume de la carène.

Bibliographie

- [1] Bouguer Pierre, *Traité du navire, et de ses mouvements*, Paris, Jombert, 1746.
- [2] Carnot Lazare, Poinso, Sané, *Rapport sur un mémoire de Charles Dupin, "De la stabilité des corps flottants"*, Paris, 1814.
- [3] Dhombres Jean, *Histoire et didactique, à partir de la Scientia Navalis et du calcul intégral, quelques réflexions sur la mise en perspective historique de l'apprentissage des mathématiques*, Irem, Nantes, 1998.
- [4] Dupin Charles, *Applications de Géométrie et de Mécanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc ... pour faire suite aux Développements de Géométrie*, Paris, Bachelier, 1822.
- [5] Euler Leonard, *Scientia Navalis, Oeuvres complètes série 2, oeuvres de mécanique et d'astronomie*, vol 18, 19, Truesdell, Baltimore, 1967.
- [6] Article publié originellement dans "BRYC" revue du Bruxelles Royal Yacht Club.

8

Premiers niveaux de difficulté dans l'étude des lieux

Luc Sinègre

8.1 Introduction.

Tous les enseignants savent qu'on a posé jusqu'à la fin des années soixante des problèmes dits de lieu.

Quel est le lieu de l'orthocentre du triangle quand un des sommets décrit un cercle donné qui contient les deux autres ?

L'introduction du vocabulaire des mathématiques modernes remplaça cette formulation trop attachée à la Mécanique par le célèbre

Trouver l'ensemble des points M tels que...

Comme l'abandon du langage des mathématiques modernes a correspondu, dans les années quatre-vingts, avec la disparition totale de de la *Cinématique* au Lycée, aucune des deux terminologies ne renvoie plus directement à une partie du cours. Cependant on trouve encore les deux formulations, au gré de l'humeur des rédacteurs de problèmes. Est-ce important ? Est-ce seulement un problème de vocabulaire ?

Une première réponse, naïve, serait de présenter la vision mécanique comme une vision plus concrète en opposition avec les mathématiques plus abstraites des ensembles.

Cette dualité concret-abstrait semble renforcée depuis le développement des logiciels de géométrie (Cabri géomètre, par exemple). En effet ces logiciels permettent de découvrir des lieux qui sortent des sentiers battus, et plus généralement de modéliser des systèmes articulés. Mal utilisés ils évitent aussi aux élèves de réaliser concrètement la figure et donc les font s'abstraire au mauvais sens du terme.

Nous espérons montrer, dans ce qui suit, que les deux présentations, mécanique et ensembliste, possèdent toutes les deux leur intérêt mais aussi leurs part d'abstraction. Il nous paraît intéressant de mettre en parallèles, sur des exemples, *l'articulation mécanique* qui met en mouvement la figure et la résolution classique qui elle utilise les *transformations*. Tout le monde sait que la difficulté est de parvenir à ce que l'élève arrive à introduire, de lui-même, sa propre transformation, et la définisse, à l'aide de points fixes, sans contraintes en surnombre. Voilà bien longtemps qu'au Baccalauréat une telle épreuve n'a été demandée ce qui prouve que notre jugement est largement partagé !

Nous avons essayé d'illustrer par des exemples, et de graduer les principales difficultés que rencontrent les élèves : points guides et points guidés, de type élémentaire ou simple, droites guides et points guidés, etc. Nous concluons par un exemple qui pourrait être le sujet, à lui seul, d'un article entier. Ce problème de lieu, dit du parallélogramme¹ montre les difficultés que l'on rencontre lorsque justement, on ne dispose pas, *a priori* d'un guidage entre un point variable de la figure, parcourant un lieu connu, et le point recherché. Les généralisations qu'en a tirées Thierry Hamel illustrent aussi combien l'emploi des transformations, en tant que véritables *déformations*, c'est-à-dire dégagés cette fois de la Mécanique, est fécond. Son développement qui formait la dernière partie du résumé de cette intervention, présente un intérêt en lui-même ; il fut donc décidé de le présenter à part. Le lecteur trouvera cet article au chapitre suivant.

8.2 Premiers Problèmes.

Beaucoup se souviennent encore de la mise en oeuvre d'une réciproque comme d'un exercice formel. Souvent les mauvais élèves croient que la complexité des mathématiques est le fait des professeurs, et non pas de leur nature même, ou de celle de la réalité. Dans la réalité le carré de la somme de deux nombres vaut la somme des carrés, mais les professeurs ne veulent pas en convenir et compliquent ! Justement en ce qui concerne les réciproques, le clan des mauvais élèves est très important, car on travaille toujours, au début sur des objets mathématiques très simples. Les objets les plus compliqués que l'on rencontre sont les cercles et les droites, et les questions

Est-ce que toute la droite est décrite (ou tout point de la droite atteint)

paraissent bien sibyllines.

L'introduction des transformations, même dans des cas très simples, permettait aux professeurs d'éviter justement ces réciproques "scholastiques".

¹Henri Plane avait soulevé ce thème lors d'une discussion de la commission Inter Irem de géométrie sur la problèmes de *réciproques*.

8.2.1 Lieux élémentaires.

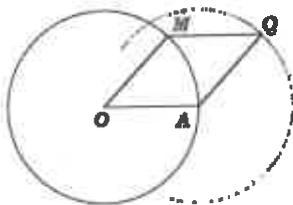


FIG. 8.1 – La réciproque coïncide avec le sens direct.

Le point M décrit le cercle de centre O contenant A . On construit le parallélogramme $(MOAQ)$ et l'on cherche le lieu de Q (cf figure 8.1). Beaucoup d'élèves trouvent que par égalité sur les côtés opposés la longueur AQ est fixe et donc que le point Q appartient au cercle de centre A , contenant O . Mais la mise en place de la réciproque est souvent oubliée. On peut d'ailleurs remarquer que par la symétrie des données, poser la réciproque revient à faire jouer à O le rôle de A et Q celui de M .

Bien sûr la solution classique consiste à introduire la translation de vecteur \vec{OA} qui élimine le problème de la réciproque.

Le passage du monde de la mécanique à celui des transformations correspond à remplacer les articulations qui relient le point M au point Q par une transformation connue. Dans ce cas la solution est particulièrement simple car les contraintes et les relations sont directement données par l'énoncé. L'élève a juste à remplacer le parallélogramme articulé $(MOAQ)$ par la translation pour conclure. En revanche si le problème avait été rédigé différemment, par exemple si Q avait été défini comme le barycentre du système $\{(O, -1), (M, 1), (A, 1)\}$ il aurait d'abord fallu que l'élève anime le cercle initial et mette en place le parallélogramme articulé avant de refaire le même raisonnement, ou encore reconnaisse la définition de la translation, pour produire directement, et sans recourir au mouvement, le cercle final.

Voilà un début de problème très voisin (cf figure 8.2) :

Soit C le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur C . Pour tout point M de C , distincts de A et de B on construit le point Q tel que $(MABQ)$ soit un parallélogramme. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[MQ]$ puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit C privé des points A et B .

Si la présentation par les traceurs peut laisser penser que l'interprétation cinématique est plus naturelle que l'interprétation ensembliste, il ne faut

8.2.2 Lieux simples.

Les lieux *simples* sont obtenus de la même façon que les lieux élémentaires. Mais les points qui les déterminent ne sont plus directement donnés par la figure initiale. Pour ces lieux qui constituent l'essentiel de ce qui devrait être demandé aux lycéens, la difficulté consiste donc à trouver le *guidage* qui relie un point connu de la figure au point recherché. Par exemple dans le problème de Bac de Besançon précité on lisait à la deuxième question :

On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM) . Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ? Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit C privé des points A et B .

Le concepteur du problème a souhaité, avec raison, aider le candidat à dé-

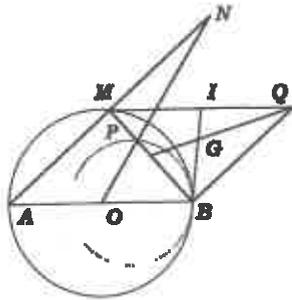


FIG. 8.3 – Un lieu simple.

couvrir la transformation, ici, l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$ qui relie M à P . Sans indication la question serait certes plus difficile, mais la difficulté n'a rien à voir avec un problème de réciproque. La réponse serait la même pour une question beaucoup plus simple :

On appelle P le barycentre du système $(B, 1) (M, 2)$ etc.

8.3 Rappel Historique.

Chasles dresse dans l'Aperçu[2] des méthodes en Géométrie [1837] l'inventaire de doctrines récentes sur la transformation des figures. Ce catalogue vient après le rappel de la théorie des transversales que l'auteur place dans le mouvement de renouveau qu'a commencé Carnot. Cette énumération semble de prime abord hétéroclite. Chasles cite, par exemple, après la perspective elle-même, l'homothétie, qui est désignée comme

la méthode qui consiste à faire croître, dans un rapport constant, les rayons visuels menés aux différents points d'une figure, pour former une figure semblable et semblablement placée ;

puis l'affinité dont le nom est attribué à Euler (Lineae affines) et utilisée dans le plan comme dans l'espace. On remarque d'abord que, dans ce catalogue, voisinent des méthodes de construction utilisées ou inventées par les artistes (Dürer, théorie des bas-reliefs, voûtes) et des théories qui relèvent directement des mathématiques (homologie, étude de courbes par projection ou perspective). Il s'agit pour Chasles de faire rentrer ces tentatives dans une même catégorie, l'homographie. Les transformations que nous avons déjà évoquées, translations (par l'étude des frises de Bosse), homothéties, déplacements entrent dans ce que Chasles appelle le principe d'homographie, ou plus exactement le principe de déformation homographique. Il faut d'ailleurs distinguer l'application du principe d'homographie lui-même qui sert à démontrer et inventer de nouveaux théorèmes, et l'étude des figures que le principe permet d'obtenir, figures que l'auteur appelle alors homographiques. Le principe de déformation est donc d'abord un outil de démonstration, comme le principe de dualité auquel il succède dans l'exposé de Chasles. Mais il s'oppose au principe de dualité par son homogénéité : on associe à chaque objet élémentaire un objet du même type, aux points des points, aux droites des droites. Dans *le Rapport sur les progrès de la Géométrie* (p.140) Chasles[3] dressera d'ailleurs un peu plus tard l'historique d'une autre transformation point à point, l'inversion, transformation par rayons vecteurs réciproques. On y lit que cette transformation aurait pu apparaître naturellement de l'étude, par Ptolémée, de la projection stéréographique, mais que c'est Quetelet qui dans son résumé d'une nouvelle théorie des caustiques (1827) l'emploie pour étudier la polaire d'une courbe plane quelconque. Est attribuée ensuite à Bellavitis l'idée d'une méthode générale de transformation des figures, fondée sur des considérations directes.

A l'origine les transformations ne sont donc pas reliés à nos guidages. De toute manière la translation, l'homothétie ou les déplacements ne sont pas de "bonnes déformations" car elle n'ont pas d'intérêt particulier comme outil de démonstration aux yeux d'un géomètre du dix-neuvième siècle, et elle n'ont évidemment aucun pouvoir d'invention. C'est donc comme cas particulier d'homographies et grâce au pouvoir synthétique de l'unification mathématique que les transformations étudiées aujourd'hui au collège ont pris d'abord place dans la catégorie des transformations de Chasles.

Pour donner un exemple ce principe de déformation pourrait donner la réponse à la question suivante, issue du problème initial (cf figures 8.1 et 8.4) déformé par affinité.

Un point M décrit une ellipse de demi-diamètre $[OA]$. Quel est le lieu du barycentre du système $\{(O, -1), (M, 1), (A, 1)\}$?

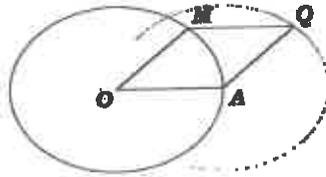


FIG. 8.4 – Un lieu simple.

Mais si l'on ne retrouve pas de lien originel entre les transformations et les articulations mécaniques, ce lien est fait par Chasles lui-même qui indique comme une application possible de la théorie des figures homographiques :

Les propriétés que présente le système de deux corps égaux, et même de deux corps semblables, situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Ceci lui permet donc de rattacher à l'homographie l'étude du mouvement des corps indépendamment des causes qu'il a appelé, après Ampère, *Cinématique*. Il choisit d'illustrer son propos par un théorème de Mécanique pratique (on peut transporter un corps solide d'une première position à une autre par le mouvement d'une vis). Mais ces remarques visent plus à conforter le caractère d'universalité du principe d'homographie qu'à asseoir de nouvelles preuves.

Quand Chasles résume le même sujet dans le Rapport[3] en 1870, les figures en mouvement ne sont plus seulement des figures semblables car on peut considérer deux figures semblables, ainsi que l'auteur l'avait fait dans un mémoire antérieur[1], et plus généralement deux figures homographiques quelconques ([3], 1870 p.242). Il indique que le cas des figures égales, qui est le plus simple de la théorie des figures homographiques, a du être traité directement, en raison de l'importance qu'il présente en Mécanique.

Mais le lien entre les systèmes articulés et la théorie naissante des transformations a été effectué dès la fin du dix-neuvième siècle et nous avons raconté cette histoire à Montpellier[4]. Rappelons simplement que l'idée de rechercher, dans le mouvement d'un quadrilatère articulé, la trajectoire d'un point attaché à la bielle en fonction de celle d'un point attaché à la manivelle s'est posé en 1875, raconte Kempe, pour résoudre le problème de l'échange de ces tiges. Kempe[5] a d'abord retrouvé le mécanisme de Scheiner en recherchant la trajectoire d'un point directement placé sur la bielle avant que Sylvester ne généralise le problème en choisissant de construire sur chaque tige deux véritables triangles ayant les

mêmes angles.

8.4 Réversibilité des guidages.

8.4.1 Un cercle partiel ?

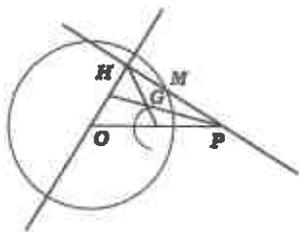


FIG. 8.5 – Un cercle partiel.

On a pris un point P à l'extérieur d'un cercle de centre O et de rayon R . Le point M décrit le cercle. On note H le projeté orthogonal de O sur (PM) quel est le lieu \mathcal{L} du centre de gravité G du triangle OHP ?

Une étude, disons expérimentale, permet de tracer le lieu demandé. Ce lieu contient deux points d'arrêts qui ne sont pas des points déjà donnés dans le texte (c'est pour cela qu'on a choisi le lieu du centre de gravité). On s'aperçoit facilement en faisant tourner le point M sur le cercle que \mathcal{L} est décrit deux fois. Une première étape de la solution consiste bien sûr à rattacher le point G au point H , par l'homothétie de centre I , milieu de $[OP]$. Ce lien peut-être posé dès la construction de la figure si l'on veut éviter (donc si l'on s'interdit) de construire les médianes du triangle OHP . Comme H appartient au cercle de diamètre $[OP]$, le point G appartient à l'image de ce cercle par l'homothétie. Nous venons de définir un premier guidage de H à G .

Ce guidage étant réversible (ce qui signifie dans le monde des applications que l'homothétie est une bijection) le point H ne doit pas décrire entièrement un cercle. Comme la droite (PM) balaye le secteur défini par les deux tangentes (PA) et (PB) menées au cercle par P , seul l'arc d'extrémités A et B du cercle et contenant O est décrit par H .

Ces remarques qui ne constituent pas une preuve parfaitement satisfaisante pourraient suffire lors d'une première étude. Elles expliquent pourquoi il y a un vide dans \mathcal{L} , et c'est le plus important. Pour expliquer pourquoi \mathcal{L} est parcouru deux fois on peut mettre en place les deux guidages qui l'on vient de trouver. A un point M on associe donc d'abord le projeté orthogonal de O sur (PM) et c'est là la partie la plus délicate. Nous avons vu que le second guidage était réversible (homothétie). Si l'on étudie aussi la réversibilité du premier guidage on constate que deux points du cercle correspondent au même point H , ce qui justifie la double génération. Cette

difficulté provient d'une mauvaise formulation de notre énoncé. Si l'on avait écrit

à toute droite D passant par P et sécante au cercle on associe H le projeté orthogonal de O sur D

on aurait alors un énoncé qui aurait permis d'associer à toute droite du secteur (APB) un et un seul point H et le lieu \mathcal{L} ne serait décrit qu'une fois. La preuve de la réciproque correspond à la construction du point H à partir d'une droite D donnée qui repose sur un guidage droite-point.

8.4.2 Une application complexe.

Les applications géométriques des nombres complexes fournissent les premiers exemples d'applications ponctuelles suffisamment irrégulières puisque, par exemple, les droites ne sont plus conservées par les homographies. Ces exercices permettent aussi une nouvelle transposition grâce au secours de l'Algèbre. Nous donnons ici l'exemple d'une application ponctuelle qui n'est pas une homographie et qui s'apparente à la transformation³ de *Joukowski*. On retrouve cette application dans un exercice de Bac 1997 (Spécialité) qui a produit un petit scandale en son temps.

Étudions l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point

$$M' \text{ d'affixe } z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Une construction géométrique de cette application est possible. Soit A le

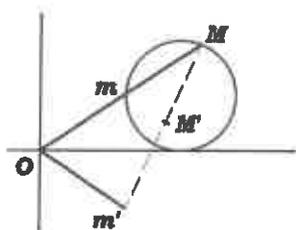


FIG. 8.6 – Anti-inversion.

point d'affixe 1. On associe à M l'intersection m de (OM) avec le cercle contenant M et tangent en A à (OA) . On appelle m' le symétrique⁴ de m par rapport à (OA) . Le point M' est le milieu de $[m'M]$.

Algébriquement il est facile de constater, grâce au théorème de *d'Alembert-Gauss* que tout point μ d'affixe ζ donné possède en général deux antécédents solutions du polynôme $z^2 - 2\zeta z + 1$. Ces deux antécédents sont confondus si et seulement si le discriminant du trinôme est nul, donc si et seulement si $\zeta^2 = 1$. En reprenant la partie réelle et la partie imaginaire de cette condition on trouve les intersections des axes avec l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$. Donc les quatre points $(1, 0)$ $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(0, -1)$. Si l'on recherche à construire l'antécédent d'un point Q donné, d'affixe ζ , on cherche à construire géométriquement les racines ω_1 et ω_2 du trinôme

³On appelle transformation de *Joukowski* une application conforme qui permet de passer de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre circulaire à un écoulement autour d'un profil d'aile d'avion, d'où son utilité (cf [6]).

⁴L'application qui à M associe m est une inversion de pôle O et de puissance 1, l'application qui à M associe M' est une anti-inversion de même pôle et même puissance, elle est obtenue en ajoutant l'action de la réflexion d'axe (OA) .

$z^2 - 2\zeta z + 1$. Comme leur produit fait 1 on retrouve que les points P_1 et P_2 sont anti-inverses l'un de l'autre. En regardant la somme on constate que P_1 et P_2 sont symétriques par rapport à Q . La transposition *algébrique* a donc été féconde.

Pour rechercher l'image du cercle unité par cette application, le plus

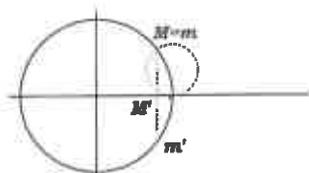


FIG. 8.7 – La transformation se réduit à une projection.

simple est de remarquer qu'à tout point d'affixe $e^{i\theta}$ on associe le point d'affixe $\cos \theta$. L'image du cercle unité est donc le diamètre horizontal. La réciproque se démontre en invoquant un argument de *continuité*, ce qui donne dans le langage des fonctions une nouvelle version d'un guidage mécanique. Bien sûr, on peut aussi, voir que notre application une fois restreinte au cercle unité n'est qu'une projection.

A une demi droite que l'on écrit, pour θ fixé, $(\lambda e^{i\theta})_{\lambda \in [0, +\infty[}$, on associe donc

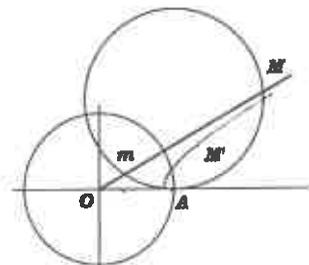


FIG. 8.8 – Branche d'hyperbole image d'une demi-droite.

le point d'affixe $\frac{1}{2}(\lambda e^{i\theta} + \frac{1}{\lambda} e^{-i\theta})$. Le point M' décrit la branche d'hyperbole d'équation $xy = 1$ et $x \geq 0$ dans le repère affine $(O, \frac{e^{i\theta}}{2}, \frac{e^{-i\theta}}{2})$. L'étude du lieu se ramène donc à l'étude d'un paramétrage de la branche d'hyperbole, nouvelle transposition (ou adaptation ?) du guidage mécanique.

Bibliographie

- [1] CHASLES (Michel), *Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables, placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre*, [1830].
- [2] CHASLES (Michel), *Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, 1837, Gauthier-Villars, (3ème éd. 1889 Paris).
- [3] CHASLES (Michel), *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Hachette, Paris, 1870.
- [4] HAMEL (Thierry), SINEGRE (Luc), VIVIEN (Frédéric) *Actes du colloque*, Irem Montpellier, 2003.
- [5] KEMPE (Alfred. Bray), *On the General Method of producing exact Rectilinear Motion by Linkwork*, Proceedings of the London Royal Society. 163 (1875), p.565-577.
- [6] VIVIEN (Frédéric) *La transformation de Joukovski*, Aimer faire des Maths, Irem Rouen, 1998.

Le paralléloplane

Thierry Hamel.

9.1 *Enoncé original du problème.*

(tel qu'il nous a été proposé par Henry Plane, un beau jour d'été 2002...)

On considère un parallélogramme $ABCD$; dans son plan, tout point M peut être projeté sur ses côtés parallèlement aux autres : pour être précis autant qu'exact, on trace les parallèles à (AD) et à (AB) passant par M qui viennent couper respectivement (AB) , (BC) , (CD) et (DA) en H , K' , H' et K (cf figure 9.1). On démontre que, quelle que soit la position du point

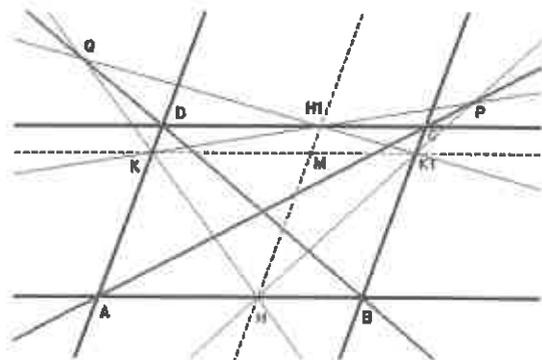


FIG. 9.1 -

M , les droites $(H'K)$ et (HK') se coupent sur la diagonale (AC) , et "symétriquement" les droites (HK) et $(H'K')$ se coupent sur la diagonale (BD) .

On introduit ainsi une double transformation du plan :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\mapsto [(AC) \times (BD)] \\ M &\mapsto (P, Q) \end{aligned}$$

qu'on pourra décomposer naturellement :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\mapsto (AC) & \varphi_2 : \mathbb{R}^2 &\mapsto (BD) \\ M &\mapsto P & M &\mapsto Q \end{aligned}$$

9.2 Généralisation :

Un "basculement" du plan du parallélogramme dans \mathbb{R}^3 nous amène directement dans le plan projectif $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$:

Soient quatre points A, B, C, D tels que les droites (AB) et (CD) se coupent en S et (AD) et (BC) se coupent en T ; par tout point M du plan du quadrilatère $ABCD$ on trace les droites (SM) et (TM) qui coupent respectivement, la première (AD) en K et (BC) en K' , la seconde (AB) en H et (CD) en H' . (cf figure 9.2) Les droites $(H'K)$ et (HK') se coupent toujours sur

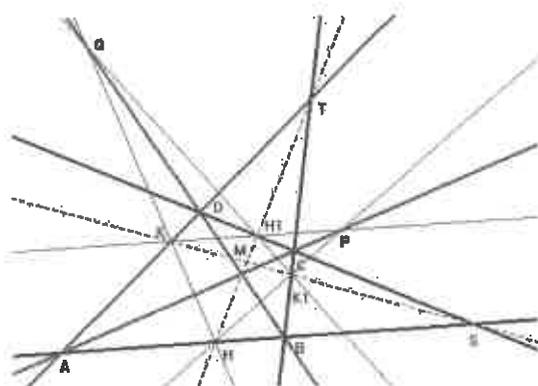


FIG. 9.2 -

(AC) et les droites (HK) et $(H'K')$ se coupent² toujours sur (BD) .
On retrouve bien sûr les transformations du paragraphe précédent complétées à l'infini.

¹On a choisi une droite à l'infini, il s'agit de la droite (ST) .

²Le passage du résultat en projectif est trivial puisqu'il n'est présentement question que de droites! Il suffira donc pour la démonstration du résultat de se restreindre au plan affine avec ses parallèles...

On peut écrire cet énoncé projectif plus projectivement ! Considérons (cf figure 9.3) deux faisceaux de droites, le premier engendré par d_1, d_2 sécantes en S , et le second par δ_1, δ_2 sécantes en T . Soit d une droite appartenant au premier faisceau et δ une droite appartenant au second, d et δ se coupent en M , d coupe δ_1 en K et δ_2 en K' , δ coupe d_1 en H et d_2 en H' . Le résultat final est que les droites $(H'K), (HK)$ et (AC) appartiennent au même faisceau concourant au point P , d'une part et d'autre part, les droites $(HK), (H'K')$ et (BD) appartiennent au même faisceau concourant au point Q . Poussons cette logique projective jusqu'au dual de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Le faisceau de

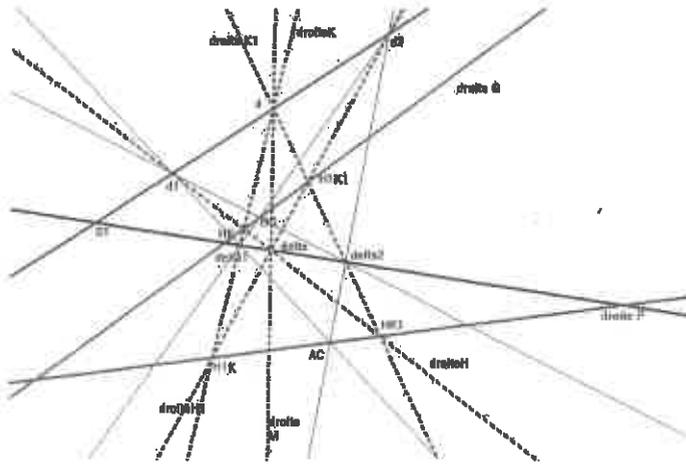


FIG. 9.3 -

droites (d_1, d_2) [respectivement (δ_1, δ_2)] devient une droite du dual contenant le "point" d [respectivement le "point" δ], ces deux faisceaux se coupent en le point (ST) (cf figure 9.3) [qui est la droite commune aux deux faisceaux]. Les droites duales $(d_1, \delta_1), (d_1, \delta_2), (d_2, \delta_1), (d_2, \delta_2), (d, \delta), (d, \delta_1), (d, \delta_2), (d_1, \delta), (d_2, \delta)$ correspondent aux points $A, B, D, C, M, H, H', K, K'$; Les intersections duales $H' \cap K, H \cap K'$ et $A \cap C$ sont alignées ainsi que les intersections $H \cap K, H' \cap K'$ et $B \cap D$: c'est le théorème de Pappus qui le dit ! C'est la version duale et sa démonstration du résultat annoncé.

9.3 Démonstration plus basique de la propriété du parallélogramme

En fait pour prouver la proposition dans son état initial, il suffit d'utiliser convenablement un autre théorème en us, j'ai nommé cette fois-ci celui de Ménélaus.

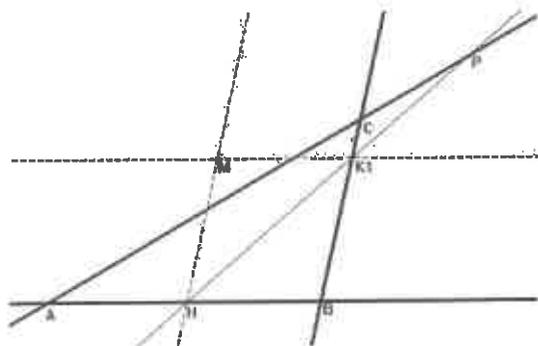


FIG. 9.4 -

Reprenons les hypothèses de la page 117 et nommons P [respectivement P'] l'intersection de $(H'K)$ avec (AC) [respectivement (HK') avec (AC)]. Le théorème de *Ménélaus* appliqué dans le triangle ADC (respectivement ABC) donne :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{H'D}}{\overline{H'C}}$$

$$\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{K'A}}{\overline{K'C}} \times \frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}$$

Une ombre de Thalès sous les hypothèses originales :

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{K'B}}{\overline{K'C}} \text{ d'une part } \frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{H'D}}{\overline{H'C}} \text{ d'autre part,}$$

mène à l'égalité :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'C}}$$

d'où la coïncidence recherchée : $P = P'$.

Bien sûr, une composition d'homothéties bien choisies donne rigoureusement la même démarche.

si on appelle $h_H, h_K, h_{H'}, h_{K'}$ les homothéties dont les centres sont donnés en indice et qui transforment respectivement A en B, A en D, D en C, B en C , on se rend à l'évidence que les composées $h'_H \circ h_K$ et $h_{K'} \circ h_H$ sont deux homothéties qui transforment toutes deux A en C et ont même rapport (*Thalès*) : elles ont donc même centre autant dire $P = P'$!

9.4 Approche analytique dans le plan affine

On peut se fixer le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de sorte que O soit le centre du parallélogramme, \vec{i} le vecteur (\vec{OB}) , \vec{j} le vecteur (\vec{OC}) [cf figure 9.6].

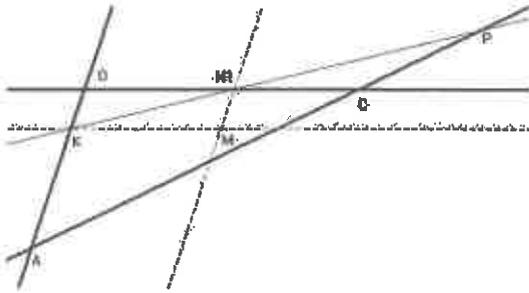


FIG. 9.5-

On pose M de coordonnées $(x_0; y_0)$. On obtient par le calcul le plus élé-

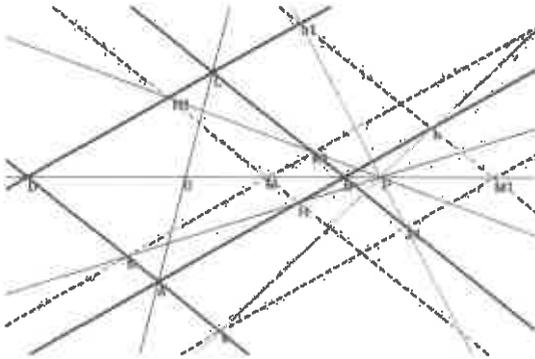


FIG. 9.6-

mentaire les coordonnées :

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_0 + y_0 + 1}{2} \\ y_H = \frac{x_0 + y_0 - 1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_{H'} = \frac{x_0 - y_0 - 1}{2} \\ y_{H'} = \frac{x_0 - y_0 + 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_0 - y_0 - 1}{2} \\ y_K = \frac{-x_0 + y_0 - 1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_{K'} = \frac{x_0 - y_0 + 1}{2} \\ y_{K'} = \frac{-x_0 + y_0 + 1}{2} \end{cases}$$

puis les équations de droites :

$$(HK') (x_0 - 1)x - y_0 y = \frac{x_0^2 - y_0^2 - 1}{2} ; (H'K) (x_0 + 1)x - y_0 y = \frac{x_0^2 - y_0^2 - 1}{2}$$

$$(HK) x_0 x - (y_0 + 1)y = \frac{x_0^2 - y_0^2 + 1}{2} ; (H'K') x_0 x - (y_0 - 1)y = \frac{x_0^2 - y_0^2 + 1}{2}$$

et enfin les points :

$$P \left\{ \begin{array}{l} x_P = 0 \\ y_P = \frac{1}{2} \left[y_0 + \frac{1}{x_0} - \frac{y_0^2}{x_0} \right] \end{array} \right. ; Q \left\{ \begin{array}{l} x_Q = \frac{1}{2} \left[x_0 + \frac{1}{x_0} - \frac{y_0^2}{x_0} \right] \\ y_Q = 0 \end{array} \right.$$

Pour rompre avec la routine (jusqu' alors on a privilégié le point P) et pour rester confortablement le long de l'axe des abscisses, observons que la transformation notée page 118, φ_2 restreinte à la diagonale (BD) c'est-à-dire l'axe des abscisses s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi_2 : (BD) &\mapsto (BD) \\ M_0(x_0) &\mapsto Q \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) \end{aligned}$$

ce qui amènent deux réflexions :

1. Q est le milieu du segment qui joint M à son inverse [que nous noterons dorénavant M'], par l'inversion de centre O et de puissance 1 ;
2. Q est l'image de deux points situés sur l'axe (BD) à savoir ces deux inverses M et M' . Ceci répond très partiellement à la question de la réciproque des transformations $\varphi_i, i = 1, 2$. [cf figure 9.7]

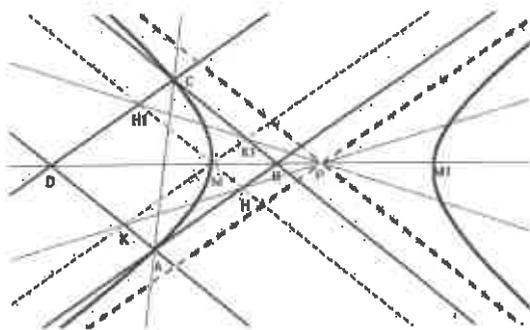


FIG. 9.7 -

Plus généralement on observe que les antécédents par φ_2 dans le plan tout entier sont les points $M(x_0; y_0)$ vérifiant :

$$x_0^2 - y_0^2 - 2x_0 y_0 + 1 = 0$$

on reconnaît une hyperbole (équilatère dans le repère choisi). [cf figure 9.7].

Concluons ce paragraphe sur les remarques suivantes :

1. A chaque point Q de la diagonale (BD) [respectivement P sur (AC)] correspond par φ_2^{-1} [respectivement par φ_1^{-1}] une hyperbole : il s'agit de l'hyperbole⁵ de centre Q [respectivement P] dont les asymptotes sont parallèles aux côtés du parallélogramme initial et qui passe par A et C [respectivement B et D].
2. Si on se fixe un point P sur (AC) et un point Q sur (BD) , on trouve deux antécédents par φ qui sont les deux autres points d'intersections des deux hyperboles, je dis les deux autres puisqu'elles ont en communs leurs points à l'infini et que deux coniques se coupent en au plus quatre points réels.

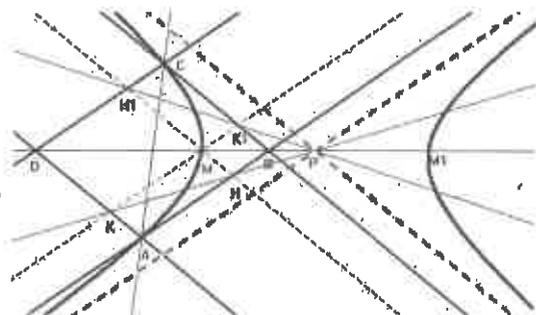


FIG. 9.8 -

9.5 Point de vue barycentrique dans le plan affine

Reprenons encore les notations de la page 117, on peut dire que le point M partage le parallélogramme $ABCD$ en quatre parts [cf figure 9.9] $\pi_C = MHAK$, $\pi_D = MHBK'$, $\pi_A = MK'CH'$, et $\pi_B = MH'DK$; on vérifie aisément que M est le barycentre du système

$$\{(A; \text{aire}(\pi_A)); (B; \text{aire}(\pi_B)); (C; \text{aire}(\pi_C)); (D; \text{aire}(\pi_D))\},$$

le mot " aire " étant pris dans son sens algébrique conventionnel, c'est-à-dire compté négativement quand son bord est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre (par exemple π_A est dans le sens des aiguilles d'une montre sur la figure 9.9, donc son aire est un nombre négatif. . .)

Par exemple, si on pose, en tenant bien entendu compte de l'orientation des axes du nouveau repère $\mathfrak{R}_2 = (A, B, D)$:

$$h = \overline{MH} < 0 ; h' = \overline{MH'} > 0 ; k = \overline{MK} < 0 ; k' = \overline{MK'} < 0 ;$$

⁵Notons bien l'unicité de la conique pour les contraintes annoncées : centre, direction des asymptotes (le points à l'infini, deux points.

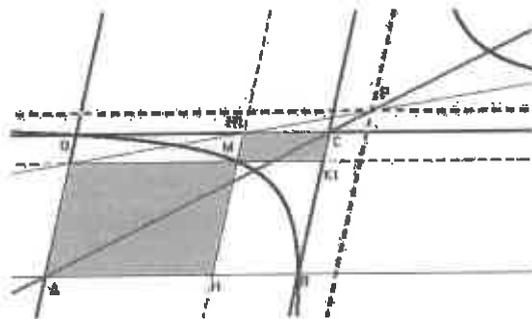


FIG. 9.9 -

on peut écrire les "équilibres" :

	(e_1)			(e_2)			(e_3)		
M	K	K'		K	A	D	K'	B	C
m	k	-k		a	h'	-h	a	h'	-h

la combinaison $a.(e_1) - k'.(e_2) + k.(e_3)$ donne :

M	A	B	C	D
a	-h'k'	h'k	-hk	hk'

on peut se ramener à la forme :

M	P'	Q'
ma	-hk - h'k'	hk + hk'

où P' [respectivement Q'] est le barycentre de (A; h'k') et (C; hk) [respectivement de (B; h'k) et (D; hk')] donc de (A; aire(π_A)) et (C; aire(π_C)) [respectivement de (B; aire(π_B)) et (D; aire(π_D))], simple question de proportions et de hauteur de parallélogramme.

Par ailleurs, on peut écrire :

	(s_1)			(s_2)		
H	A	B		H'	C	D
k - k'	k'	-k		k' - k	k	-k'

	(s_3)			(s_4)		
K	A	D		K'	B	C
h' - h	-h'	h		h - h'	h'k	-h

on en déduit les combinaisons :

$$h's_1 + ks_4$$

H	K'	A	C
$h'(k - k')$	$k(h - h')$	$h'k'$	$-hk$

$$hs_2 + k's_3$$

H'	K	A	C
$h(k' - k)$	$k'(h' - h)$	$-h'k'$	hk

on prouve ainsi que les droites (HK') et $(H'K)$ sont sécantes en le point qui est le barycentre de $(A; -h'k')$ et $(C; hk)$ et qui est aussi le point P !

de façon similaire, les équilibres :

$$h's_1 + k's_3$$

H	K	B	D
$h'(k - k')$	$k(h' - h)$	$-h'k$	hk'

$$hs_2 + ks_4$$

H'	K'	B	D
$h(k' - k)$	$k(h - h')$	$h'k$	$-hk'$

prouvent que les droites (HK) et $(H'K')$ se coupent au point barycentre de $(B; kh')$ et $(D; -h'k)$, qui n'est ni plus ni moins que le fameux point Q !

On peut donc affirmer, en comparant les coordonnées barycentriques de P, Q et P', Q' que P et P' [respectivement Q et Q'] sont conjugués par rapport à A et C [respectivement B et D].

On peut aussi, en utilisant les produits " hk " définissant les coordonnées barycentriques ci-dessus, déterminer parfaitement la position des points P et Q sur les diagonales et par rapport au parallélogramme, en fonction de celle de M , dont la position est donnée selon les quatre mesures "cardinales" h, k, h' et k' .

Si on tient compte des remarques concluant le paragraphe précédent, on en vient à affirmer que fixer un point P sur la diagonale (AC) revient

- d'une part à fixer le rapport $\frac{h'k}{hk'}$, c'est-à-dire en fait le rapport des aires algébriques des quadrilatères $MHAK$ et $MK'CH'$
- et d'autre part à paramétrer une hyperbole de centre P passant par A et C etc.

Par conséquent, dans un "parallélogramme", les points M qui découpent celui-ci dans un rapport $\frac{\text{aire}(MHAK)}{\text{aire}(MK'CH')} = C^{\text{te}}$ constituent l'hyperbole de centre P passant par A et C etc.

Ce qui pourra faire l'objet d'un exercice relativement abordable par des lycéens en section scientifique, qu'on formulerait par exemple ainsi :

Dans un repère $(O; x, y)$ on place A en O , puis B en $(1; 0)$, C en $(1; 1)$ et D en $(0; 1)$; ensuite on choisit arbitrairement M de coordonnées $(x; y)$ dans le dit repère. Quel est l'ensemble des points M tels les aires des parallélogrammes $MHAK$ et $MK'CH'$ soient dans un rapport constant, où H, K, H', K' etc. ?

On trouvera aisément une équation d'hyperbole sous la forme :

$$(1 - w).xy - x - y + 1 = 0$$

qu'on ramènera à la forme précédente par un changement de repère élémentaire :

$$X^2 - Y^2 + 2X_P X + 1 = 0,$$

changement qui permettra d'établir une relation simple entre X_P et le rapport w .

10

Le problème de Rudolf Bkouche ou la construction du quadrilatère de Ptolémée.

Frédéric Vivien, Luc Sinègre, Thierry Hamel.

10.1 Introduction.

En marge du colloque, comme c'est souvent le cas, on pose des questions qui ne restent pas toujours sans réponse. C'est la résolution d'un tel problème, après une fameuse visite de *Stavelot*, que l'on propose ici.

Ainsi Rudolf Bkouche, martelait-il à Liège qu'un quadrilatère convexe articulé $ABCD$ de côtés fixés est d'aire maximale si et seulement si il est inscriptible dans un cercle et il s'interrogeait :

Comment le construire ?

C'est-à-dire comment construire un quadrilatère convexe inscriptible tel que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$.

Le lecteur qui aimerait revenir sur le théorème de Ptolémée lui-même et à une démonstration élémentaire de l'assertion de Rudolf pourra se reporter à l'exposé de Thierry Hamel[3]. La démonstration la plus efficace repose sur les propriétés de l'inversion, et elle a servi de modèle à notre construction. On la trouve exposée dans tous les livres de Terminale antérieurs à

1970 ou encore dans Berger[2]. Il faut signaler qu'on peut produire une démonstration aussi élégante grâce aux propriétés des triangles semblables, maintenant de nouveau enseignées dans les Lycées. Evelyne Barbin a écrit l'historique de cette démonstration[1] depuis les *Elements de Géométrie* du père B. Lamy.

10.2 Analyse.

Soit $ABCD$ quatre points cocycliques sur un cercle de centre O avec

$$AB = a, BC = b, CD = c \text{ et } DA = d.$$

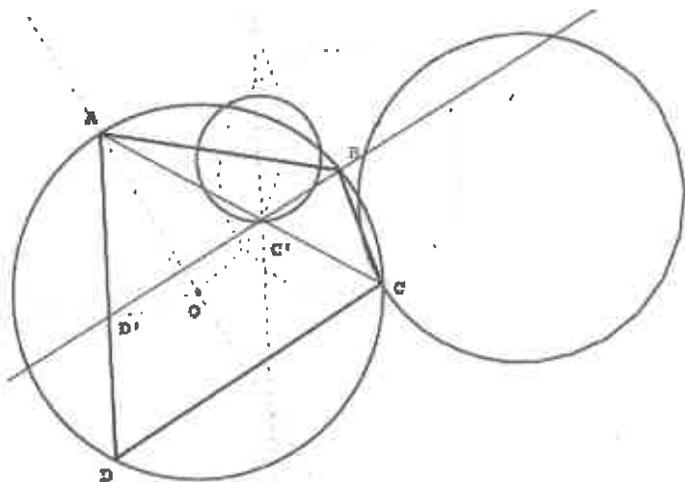


FIG. 10.1 - Construction Ptolémée.

L'inversion de pôle A et de rapport a^2 laisse B invariant et envoie C et D respectivement en C' et D' situés sur la perpendiculaire passant par B à la droite (AO) (cf figure 10.1).

On a

$$B'C' = \frac{a^2 b}{AB \cdot AC} \quad C'D' = \frac{a^2 c}{AC \cdot AD} \quad AD' = \frac{a^2}{d}$$

Si bien que

$$\frac{B'C'}{\frac{b}{a}} = \frac{C'D'}{\frac{c}{d}} = \frac{B'D'}{\frac{b}{a} + \frac{c}{d}}$$

¹ On a donc

$$\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{bd}{bd + ca}$$

Le point C' appartient donc à l'image du cercle de centre A et de rayon AD' par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{bd}{bd + ca}$. Le point C appartient donc à l'image de ce cercle par la première inversion ce qui paraît suffisant pour le construire compte-tenu qu'il est sur le cercle de centre B et de rayon b .

¹ C' appartient au segment $[BD']$ si l'on pris le quadrilatère $ABCD$ convexe.

10.3 Synthèse.

Pour construire un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle tel que

$$AB = a, BC = b, CD = c \text{ et } DA = d,$$

on procède ainsi :

On place un segment $[AB]$ de longueur a . Le cercle de centre A et de rayon $\frac{a^2}{b}$ a pour image, par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{bd}{bd+ac}$ (rapport constructible), un cercle que l'on notera γ . Pour finir, on construit l'image γ' de γ par l'inversion de pôle A qui laisse fixe le point B . γ' coupe le cercle de centre B et de rayon b en deux points dont l'un sera la solution. D se construit alors sans peine.

La figure (figure 10.2) qui suit illustre cette construction sous *Cabri géomètre* lorsqu'on se donne les distances a, b, c et d sur un axe.

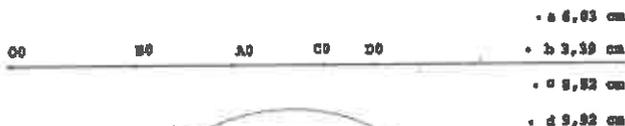


FIG. 10.2 - Synthèse.

Bibliographie

- [1] Barbin Evelyne *La figure et l'espace* Dans les actes du huitième colloque Inter-Irem Epistémologie et Histoire des mathématiques Irem Lyon.
- [2] Berger Marcel *Géométrie* vol2, Paris, Nathan, 1979.
- [3] Hamel Thierry *Autour des quadrilatères inscriptibles et du théorème de Ptolémée. Des applications de la seconde à la terminale.* Dans Pourquoi Aimer Encore Faire des mathématiques I, Irem Rouen, 1994.

11

Trois exemples pour illustrer la démarche expérimentale en mathématiques avec *Cabri*

Jean-Jacques DAHAN, Irem de Toulouse

11.1 Introduction.

- Résumé de l'atelier.

1. Je propose de mener la recherche d'un problème de type "boîte noire". Cette recherche sera menée collectivement afin de générer un débat scientifique qui apparaîtra comme un modèle pour la démarche expérimentale individuelle.
2. On utilisera, d'une manière originale, les transformations du plan disponibles dans *Cabri* pour créer une page dans laquelle on simulera une promenade aléatoire dans un quadrillage du plan. On montrera ainsi la nécessité de connaissances mathématiques préalables pour concevoir de tels cadres d'expérimentation.
3. On montrera aussi comment, avec l'outil "Trace" et une construction conditionnelle spécifique, il est possible de visualiser très aisément des lignes de niveau. On fera prendre conscience qu'une telle procédure peut permettre d'induire une démarche expérimentale de découverte et de validation.

- Déroulement effectif.

L'ordre proposé a été modifié afin d'atteindre les objectifs précisés plus loin :

1. LA PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE PYTHAGORE.
2. UN EXEMPLE DE SIMULATION AVEC CABRI PROMENADE ALÉATOIRE SUR UNE GRILLE

3. DÉROULEMENT DE LA RÉOLUTION DE LA BOÎTE NOIRE PROPOSÉE

- Objectifs assignés à cet atelier.

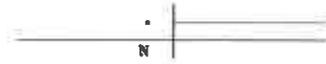
Mon intention était *in fine* de résoudre avec les participants un problème de type boîte noire pendant la dernière demi-heure de l'atelier. Le compte-rendu de cette résolution menée par un public d'experts en géométrie constitue la partie 3 de cet article. Je voulais convaincre mon auditoire que ce genre de problème amenait une dévolution rapide, permettait de dégager les vrais connaissances des participants et rendait possible la proposition à tous publics de problèmes consistants (les vrais problèmes : ceux dont on ne sait si on saura les résoudre, si on a les outils pour les résoudre et même s'il est résolvable). Je voulais montrer comment on pouvait dégager quelques phases d'une démarche expérimental à partir de l'analyse d'une telle recherche (ceci constitue d'ailleurs le thème de ma thèse en cours). Pour que cette résolution puisse être abordée dans des conditions optimales par mon public, j'ai mis en place ce que je pourrais appeler une mini instrumentalisation, c'est à dire une prise en main du logiciel Cabri qui fixe en moins d'une heure les schémas d'utilisations les plus pertinents que je voulais voir apparaître au cours de la résolution de la boîte noire (comment et dans quels contextes utiliser les outils " trace ", " lieu ", " redéfinition "...). Au cours de cette prise en main faite de manière monstrative, j'ai présenté une transposition possible de la découverte de la propriété de Pythagore (partie 1) et la façon de simuler une promenade aléatoire (partie 2) où la démarche expérimentale est présentée de façon isomorphe à la démarche expérimentale en physique du moins dans sa formalisation.

11.2 La propriété caractéristique de Pythagore.

11.2.1 Présentation du montage.

Le montage est ici donné par un fichier Cabri qui a été conçu par moi et qui fonctionne ainsi : Un point M libre pilote le point A sommet du triangle ABC. Le résultat du calcul de $BC^2 - AB^2 - AC^2$ est affiché. Quand on tire le point M, on voit se superposer à A un point A_p bleu si le résultat précédent est positif et un point A_n rouge si ce résultat est négatif. Ce qui se passe sur la partie supérieure de l'écran n'a pas nécessairement à être décrit pour comprendre l'expérimentation qui va être faite à partir de ce montage. Cela permettra par la suite d'expliquer comment ce montage spécial a été effectivement réalisé (on verra que la conception de ce montage dépend des connaissances de celui qui le réalise : connaissances à la fois au niveau du logiciel et au niveau mathématique). On peut simplement constater qu'un point P bleu apparaît sur une demi-droite bleue simultanément à l'apparition de A_p et qu'un point rouge N apparaît sur une

semi-droite bleue simultanément à l'apparition de A_n , comme on peut le constater sur les deux copies d'écrans qui suivent :



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -1,35 \text{ cm}^2$$



figure 1



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = 1,55 \text{ cm}^2$$

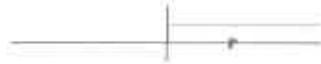


figure 2

11.2.2 Protocole expérimental.

Les manipulations que l'on demande d'effectuer avec ce montage sont les suivantes :

Activer la trace du point rouge A_n . Faire de même avec A_p , après évidemment avoir tiré sur M pour faire apparaître A_p . Faire balayer à M le maximum de points de l'écran afin que A en fasse autant avec comme seul objectif de repérer la zone ou les zones de changements de couleurs obtenus par la fonction trace.



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -18,94 \text{ cm}^2$$



1 = 4,00 cm
2 = 3,10 cm

figure 3



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -18,53 \text{ cm}^2$$



1 = 4,00 cm
2 = 3,10 cm

figure 4

On obtient ainsi un ensemble de données graphiques qu'il faudra traiter dans l'étape suivante.



figure 5

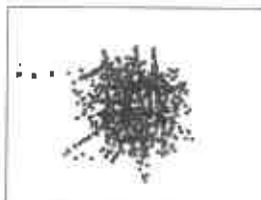


figure 6

11.2.3 Traitement inductif des données.

La valeur monstrative de cette expérimentation est flagrante. En effet la seule visualisation du résultat des zones colorées en rouge et bleu constitue l'essentiel du traitement des données collectées. La conjecture qui arrive nécessairement est que :

Les points du plan vérifiant

$BC^2 - AB^2 - AC^2 > 0$	est l'intérieur du disque de diamètre BC	C_1
$BC^2 - AB^2 - AC^2 < 0$	est l'extérieur du disque de diamètre BC	C_2
$BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0$	est le cercle de diamètre BC	C_3

Remarque : toutes les fois que cette expérience a été réalisée, notons que la dernière conjecture arrive tout naturellement comme une application d'un théorème en acte très souvent utilisées en Collège et en Lycée : le théorème des valeurs intermédiaires. Notons d'autre part que l'objectif monstratif, comme dans l'expérimental en sciences physiques, n'est pas seulement, "donner à voir" mais "faire adhérer le plus vite possible à la loi mise en évidence".

11.2.4 Validation dans le micromonde Cabri.

Pour augmenter la plausibilité de cette conjecture, on est amené à monter une autre expérience qu'on nomme expérience de validation mais qui n'est autre que la vérification d'une condition nécessaire impliquée par la véracité du résultat conjecturé.

- **Analyse théorique :**

Si la conjecture C_3 est vraie, alors tous les points A du cercle de diamètre BC vérifient dans l'environnement Cabri $BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0 \dots$

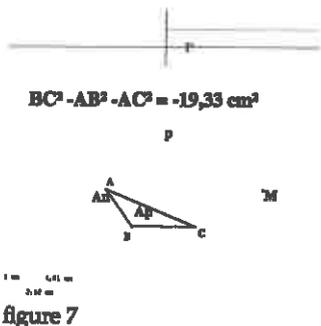
- **Validation expérimentale**

- **Montage :** on reprend le montage précédent qu'on modifie comme suit ; on trace le segment BC puis le cercle de diamètre BC. On redéfinit le point A comme point de ce cercle.

- **Protocole expérimental :** on tire le point A le long de ce cercle et on s'intéresse à l'affichage du résultat de $BC^2 - AB^2 - AC^2$.

- **Traitement des données :**

L'expérience réalisée conduit à remarquer qu'après la redéfinition le résultat affiché est 0,00 et qu'ensuite le déplacement de A ne modifie pas l'affichage du résultat. On peut même demander l'affichage de ce résultat avec le maximum de décimales permises par Cabri et on obtient la confirmation de la conjecture avec la précision permise par les calculs de Cabri. Ce que j'appelle une validation dans le micromonde Cabri.

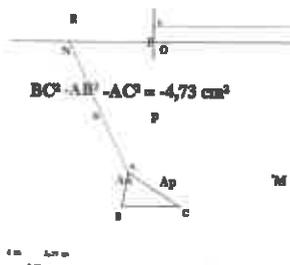


11.2.5 Compléments sur le montage expérimental utilisé.

Voici le détail des constructions réalisées pour obtenir les points conditionnels A_n et A_p . On construit une demi-droite (ou) puis une droite parallèle à cette demi-droite passant par O. On crée les deux demi-droites d'origine O portées par la dernière droite tracée; celle située à droite sera bleue, celle de gauche sera rouge. Le point R est le point obtenu par report de la mesure $BC^2 - AB^2 - AC^2$ sur la demi-droite d'origine o (il peut éventuellement être situé à gauche de o si le résultat reporté est négatif) P est le projeté orthogonal de R sur la demi-droite bleue et N (P existe quand le résultat est positif) est le projeté orthogonal de R sur la demi-droite rouge (N existe quand le résultat est négatif).

Le point p est le milieu de [AP];
 A_p est défini comme le symétrique de P par rapport à p; ce point quand il existe est donc superposé à A.

Le point n est le milieu de [AN];
 A_n est défini comme le symétrique de N par rapport à n; ce point quand il existe est donc superposé à A..



11.2.6 Conclusion.

Faire découvrir le plus vite possible la propriété attendue, c'est à dire se livrer à une monstration au sens de Joshua est possible grâce à la subtilité des constructions des investigations et des manipulations proposées. Or tous ces paramètres dépendent de l'expertise de celui qui monte l'expérience : je veux dire ici à la fois les connaissances mathématiques et les compétences dans l'utilisation de l'instrument *Cabri* (au sens de Rabardel, c'est à dire de l'artefact avec ses schèmes pertinents d'utilisation) de celui qui a conçu le fichier *Cabri*. Les notions de montage de protocole expérimental sont des ingrédients de la démarche expérimentale qui sont formalisés grâce à cette transposition informatique de cette notion bien classique qui paraissait vieillie par les usages.

11.3 *Un exemple de simulation avec Cabri promenade aléatoire sur une grille.*

11.3.1 Objectifs de la simulation avec son protocole expérimental.

Présentation du phénomène à simuler sous Cabri

A partir d'un point de départ D donné du plan on désire animer un point afin qu'il saute de manière aléatoire du point ou il se trouve jusqu'à l'un des 8 points voisins de la grille carrée définie à partir de D (cf fig. 10) et ayant pour base "horizontale" un vecteur \vec{AC} de longueur réglable. L'enchaînement de ces sauts constituera ce que j'ai appelé promenade aléatoire sur une grille.

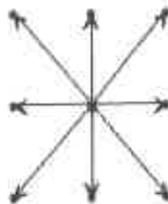


figure 10 Promenade aléatoire

Montage de l'expérimentation (construction de la figure Cabri)

La figure obtenue pourra être la suivante (fig.11) à la fin du montage :

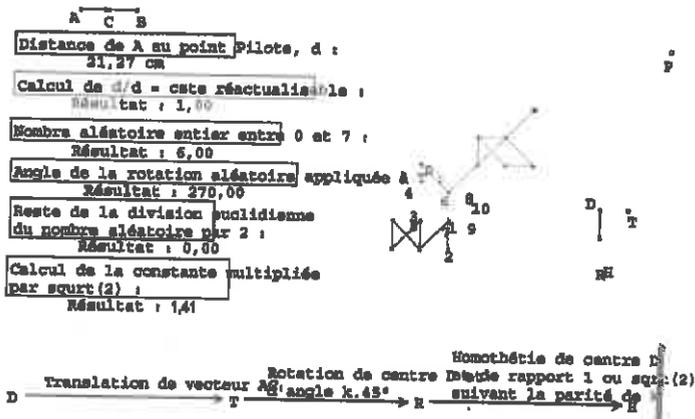


figure 11

Les matériaux pour préparer le saut aléatoire

- Une demi-droite [AB) est créée à partir de deux points de la grille associée au repère par défaut de Cabri, situés sur la même horizontale.
- Un cercle quelconque ici représenté en pointillés est positionné à droite de l'écran. Un point appelé point pilote est créé sur ce cercle en tant que " point sur objet ". Notons que la distance de ce point à A notée d ne devra jamais être nulle. Cette distance est la première valeur numérique affichée (ici 21,27cm).
- Le rapport d/d est évalué avec la calculatrice et affiché : ici il apparaît sous la forme 1,00. Notons que ce nombre 1 est fonction de la position du point pilote en particulier (mais aussi de A). Chaque changement de position du point pilote réactualisera le calcul de ce rapport qui néanmoins donnera toujours 1. Ce résultat constamment égal à 1 sera la seconde valeur affichée.
- Ensuite, grâce encore à la calculatrice nous générons un nombre entier aléatoire compris entre 0 et 7 par la formule : $\text{Partie entière de rand}(0, 8.d/d)$ éditée comme suit :

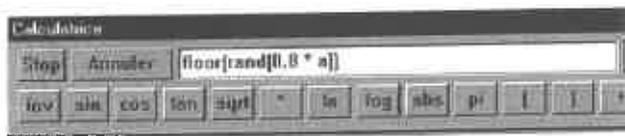


figure 12

où le a est la valeur calculée précédemment pour d/d . Le nombre obtenu est la troisième valeur affichée (ici 6). On notera ce nombre k pour la suite.

- On calcule toujours à la calculatrice le produit $k.45$ pour obtenir un des huit angles définis par notre maillage. Ce nombre sera la quatrième valeur affichée (ici 270).
- On fait ensuite calculer (toujours avec la calculatrice) le reste de la division euclidienne de k par 2 qui donnera 1 ou 0 par la formule, $k - 2 \cdot \text{Partie entière de } a/2$, éditée comme suit :

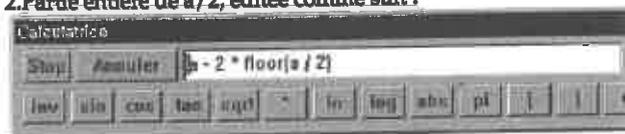


figure 13

- où a représente k . Ce nombre sera le cinquième nombre affichée (ici 0). Notons que ce reste est égal à 0 quand l'angle $k.45$ repère une position horizontale ou verticale et il est égal à 1 quand il repère une position inclinée à 45° .
- Calcul de l'image du nombre précédent par la fonction affine $y = (\sqrt{2} - 1)x + 1$. Cette image vaut $\sqrt{2}$ quand x vaut 1 et 1 quand x vaut 0. Ce calcul est édité dans la calculatrice comme suit :

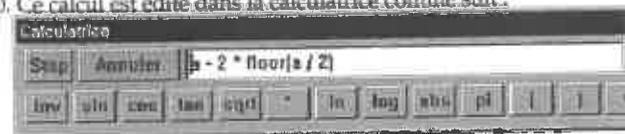


figure 14

Le résultat de ce calcul sera le sixième nombre affichée (ici 1,41 qui est l'affichage de $\sqrt{2}$).

Les transformations à composer pour effectuer le saut aléatoire

- On reporte le premier nombre affichée en C sur la demi-droite $[AB)$ et on crée ensuite le vecteur \vec{AC} .
- On crée un point libre D dans le plan (ce point sera le point de départ de notre promenade aléatoire) qu'on transforme en T par la translation de vecteur \vec{AC} .
- On transforme ce point T par la rotation de centre D et d'angle aléatoire $k.45$ qui est le quatrième nombre affichée pour obtenir le point R.

Ce point R est sur le maillage seulement quand k est pair, c'est à dire quand le reste évalué par le cinquième résultat affiché est 0. Quand k est impair, R est à la distance 1 de D sur une diagonale du maillage au lieu d'être situé à la distance $\sqrt{2}$; c'est pourquoi :

- On transforme R par l'homothétie de centre D et de rapport le sbdème nombre affichée pour obtenir enfin le point H qui est le point obtenu à partir de D en effectuant le saut aléatoire annoncé. Remarquons que H est confondu avec R quand k est pair.

Validation de l'algorithme de saut aléatoire

Si on tire le point pilote, les positions des images de D sont recalculées donc les points images changent aléatoirement. Notons que T se repositionne toujours au même endroit.

Enregistrement de l'algorithme de saut aléatoire

La complexité de cette technique pour venir à bout de la tâche que nous étions imposée nous donne l'idée d'enregistrer ces constructions sous la forme d'un nouvel outil Cabri appelé macro-construction ; cet outil permettra à partir d'un point de départ D de générer le point aléatoire obtenu après un saut du genre précédent commandé par un point pilote.

La macro " Promenade aléatoire 1.mac " admet pour objets initiaux :

- Un segment qui détermine la direction horizontale du maillage sur lequel la promenade aura lieu et le sens positif sur cette horizontale (ici [AB])
- Un point qui sera notre point pilote (ici P), puis Un point qui sera le point de départ de la promenade (ici D).

Elle admettra comme objet final :

- Le point obtenu par le saut aléatoire effectué à partir de notre point de départ (ici : " Point d'arrivée ")
- le segment joignant le point de départ et le point d'arrivée du saut.

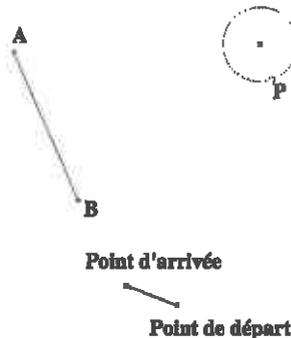


figure 15

Si on active la trace du segment joignant le point de départ au point d'arrivée et qu'on lance une animation du point pilote on voit apparaître tous les sauts possibles dans les directions du maillage indiquées par le segment [AB], comme suit :

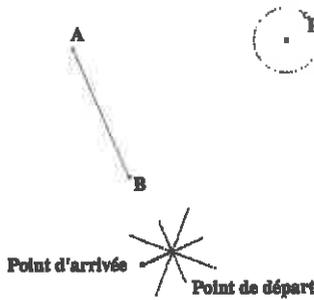


figure 16

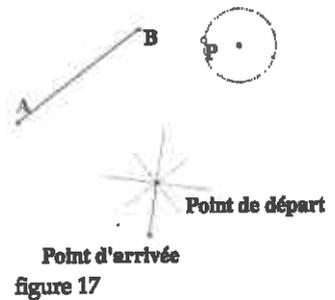


figure 17

Enregistrement de l'algorithme de promenade aléatoire

Si on applique notre macro successivement à chaque point sur lequel nous arrivons nous obtenons un enchaînement de sauts aléatoires du même type. Lorsqu'on répète 10 fois cette opération, on peut visualiser une promenade aléatoire à 10 saut qu'on peut enregistrer sous forme d'une nouvelle macro-construction qu'on a nommé " Promenade aléatoire 10.mac " et qui sera utilisée plus loin. Celle -ci admet les mêmes objets initiaux que la précédente mais cette fois les objets finaux sont tous les segments intermédiaires et les points intermédiaires de cette promenade.

Si on déplace le point pilote, chacune de ses nouvelles positions génère une promenade différente. On en montre deux exemples ci-dessous :

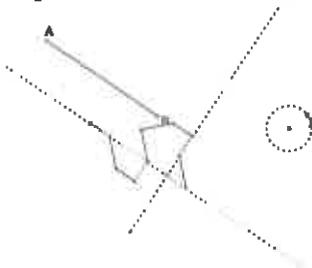


figure 18

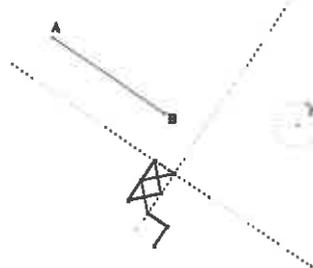


figure 19

Validation de l'algorithme de promenade aléatoire

Si on active les traces de tous les segments intermédiaires et qu'on lance une animation du point pilote, on peut voir apparaître toutes les promenades aléatoires à 10 sauts ainsi générées :

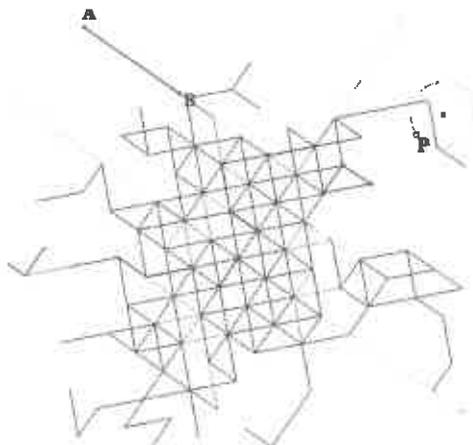


figure 20

11.3.2 Réalisations promenades aléatoires en vue d'un traitement statistique

On peut utiliser la seconde macro pour réaliser des échantillons de promenades aléatoires afin de s'intéresser par exemple à la distance entre le point de départ et d'arrivée. Il suffira de mesurer cette distance et de la stocker dans le tableau de Cabri. Si on lance une animation, on peut stocker toutes les distances générées aléatoirement. Ces tableaux peuvent être copiés dans le logiciel Excel par exemple pour traitement statistique.

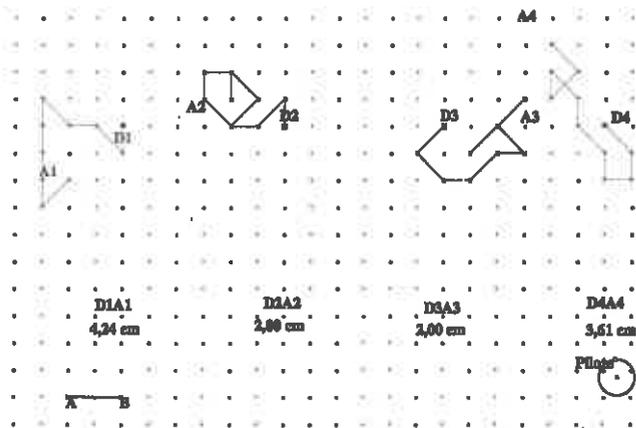


figure 21

Dans la page Cabri qui précède (figure 21), on a appliqué la macro aux points D_1, D_2, D_3 et D_4 pour obtenir des chemins aléatoires qui aboutissent respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 . On a ensuite mesuré les distances $D_i A_i$. Si on saisit ces données dans le tableur de Cabri et qu'on lance une animation en lançant le point pilote. Le tableur va remplir 4 colonnes des distances obtenues aléatoirement à chaque chemin aléatoire généré. On peut imaginer une distribution d'échantillonnage faite à partir d'un grand nombre de point D_i avec des échantillons de distances de taille n (n compris entre 1 et 999).

11.3.3 Conclusion

On aura pu constater qu'on pouvait aborder avec l'outil Cabri fortement épaulé par des connaissances sur les transformations un domaine aussi inattendu que celui de la simulation en statistique. On peut imaginer faire utiliser un tel fichier par des élèves qui disposeraient donc des macros convenables pour se concentrer sur les problèmes de fluctuation d'échantillonnage. On peut envisager de faire construire un tel fichier aux élèves à condition de les guider pas à pas la première fois pour qu'il puisse répéter cette opération connue en physique sous le nom de montage. Notons que l'utilisation du fichier est régie par les règles plus connues sous le nom de protocole.

11.4 Déroulement de la résolution de la boîte noire.

11.4.1 Entrée en matière.

Le fichier Cabri préparé par moi est ouvert et l'écran de l'ordinateur rétro projeté apparaît aux participants comme il est reproduit ci à droite ; deux points m et M de couleurs et d'épaisseurs différentes sont seuls présents sur la page Cabri (BNLIEGE).



11.4.2 Proposition du problème.

Je fais constater aux participants que je peux me saisir du point rouge m pour le tirer où je le désire. Je fais aussi constater que le déplacement de m commande le déplacement de M .

Je fais constater que je ne peux me saisir du point M. J'affirme que le point m a été transformé en M par une transformation que je connais et qui est cachée dans une macro construction (outil que j'ai créé transformant tout point de la page Cabri en son image par ma transformation cachée).

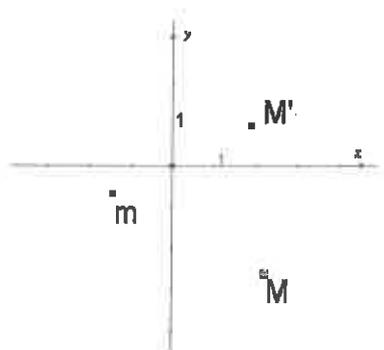


Le but du problème est la mise en évidence de cette transformation par tous les moyens qui seront proposés par les participants. Je me contenterai d'être le " sherpa " (dans le sens proposé par Luc Trouche). En réalité, je serai un peu plus que le sherpa puisque je précise que je demanderai à Cabri de réaliser toute manipulation possible à condition qu'elle soit suggérée par l'auditoire.

11.4.3 Première attaque.

Le démarrage se fait sur les chapeaux de roues ; la première proposition fuse : on me demande d'appliquer la transformation cachée au point image M pour voir s'il ne se transforme pas en m.

L'expertise du public lui fait donc d'entrée de jeu prendre une initiative spécifique que je n'avais jamais rencontrée auparavant : la transformation f vérifie-t-elle $f \circ f = \text{identité}$? Je suis obligé de faire apparaître le système d'axes car ma macro construction admet ces axes comme objets initiaux et j'applique la macro à M pour obtenir M'.



Le public peut constater que le point M' image de M n'est pas confondu avec m. Je tire le point m dans tous les sens de manière aléatoire sur la page sans pouvoir réussir à le superposer à M'. Je propose donc de cacher à nouveau les axes avant de continuer. On me demande aussi d'effacer le point M', ce que je fais.

11.4.4 Seconde attaque.

On me demande de déplacer horizontalement le point m après avoir préalablement activées les traces de m et M .



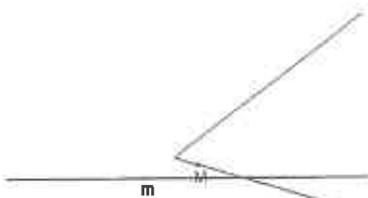
On obtient le résultat ci-contre qui surprend le public.



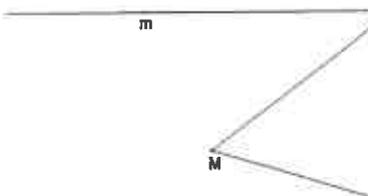
Il m'est demandé ensuite de faire apparaître l'image d'une droite, ce qui est réalisé de la manière suivante : On construit d'abord une droite qui apparaît ici horizontale.



On redéfinit le point m comme point de la droite créée et je demande le lieu de M quand m varie sur cette droite et on voit donc apparaître l'écran de droite où cette image semble être constituée de la réunion de deux demi-droites de même origine.

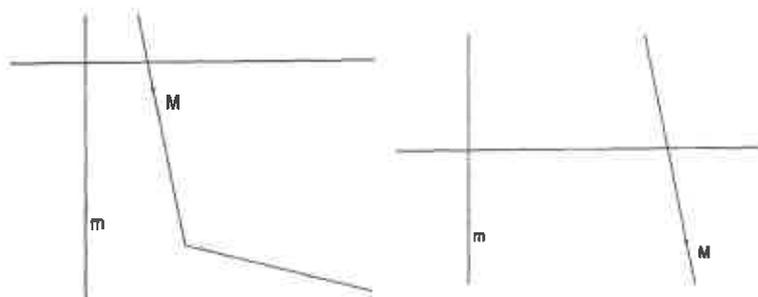


Il m'est demandé de déplacer la droite d'appartenance de m , ce que je fais en tirant sur le point initialement créé pour cette droite. Celle-ci se déplace parallèlement à elle-même et l'image ne change pas de forme.



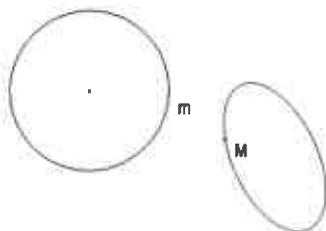
Le public désire ensuite voir apparaître l'image d'une droite perpendiculaire à la précédente. Je trace donc une droite perpendiculaire à la précédente et redéfinit le point m sur cette droite. L'image est réactualisée.

instantanément. Les deux écrans suivants montrent comment cette image peut changer suivant la position de cette perpendiculaire.



Je sens mon public déstabilisé par l'originalité des images possibles mais son expérience en géométrie et son début d'expertise des outils spécifiques à ce logiciel leur fait proposer une autre initiative.

On me demande de déterminer l'image d'un cercle. Je construis donc un cercle et redéfinit le point m sur ce cercle pour faire apparaître son image qui a la forme ovale que l'on voit ci à droite. On me fait tourner m sur son cercle d'appartenance et le public constate que son image M tourne dans le même sens sur sa courbe image qui est qualifiée par certains d'ellipse.

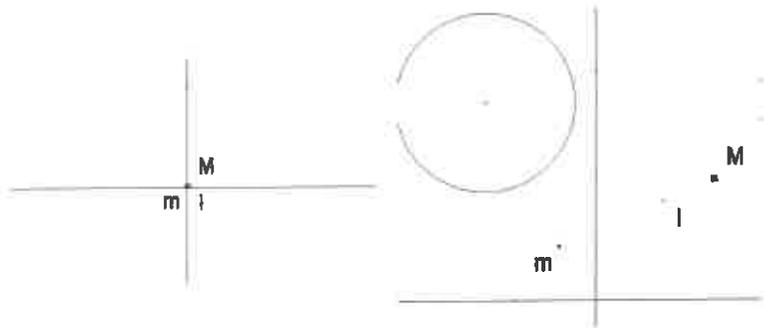


La piste de recherches d'images d'objets classiques, droites et cercles dans des configurations particulières est soudainement abandonnée.

11.4.5 La piste des points invariants.

Le public me demande de libérer le point m pour essayer de le mouvoir jusqu'à une position où il pourra être superposé à son image. Le guidage est rapide et efficace. Le public s'accorde rapidement pour privilégier un point qu'on me demande de marquer. Pour cela j'adopte l'attitude de sherpa amélioré en donnant une construction qui me permet de tracer un point repérant cette position particulière de m. Il suffit de tracer une première droite passant par un premier point puis une seconde droite passant par un second point (ces deux droites ont été créées pratiquement perpendiculaires sur l'écran qui suit). Il suffit ensuite de les positionner en sorte

qu'elles se coupent sur la position voulue, de créer leur point d'intersection I puis de redéfinir ce point comme un point libre donc ne dépendant plus des droites qui ont servi à le créer.

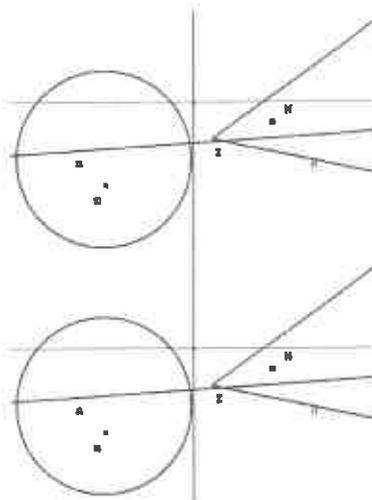


Sur le dernier écran, on a tiré sur le point m pour l'écarter de cette position particulière, laissant apparaître le point I qui semble être un point invariant de la transformation.

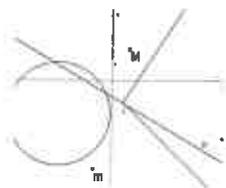
11.4.6 Retour a des recherches d'images de droites.

Il m'est demandé immédiatement après de déterminer l'image d'une droite passant par ce point I . On en trace donc une sur laquelle on crée un point générique n à qui on applique la macro pour obtenir son image N . Le lieu de N nous donne l'image désirée.

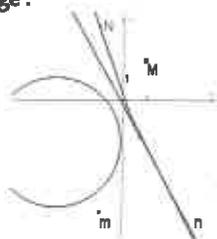
On me demande ensuite de faire pivoter cette droite autour de I ; on arrive à faire se rapprocher notre paire de "demi-droites" de la droite d'appartenance de n .



On me fait continuer cette exploration comme suit :

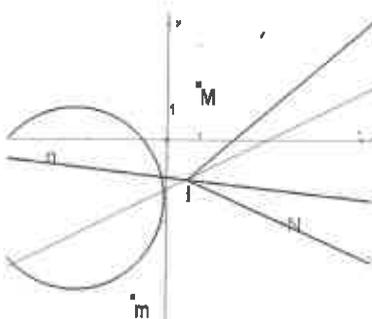


On essaie ensuite de me faire trouver une position où la droite donnée se superpose à son image :



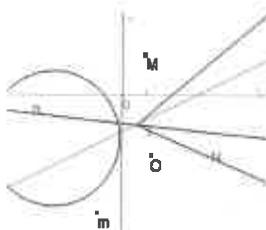
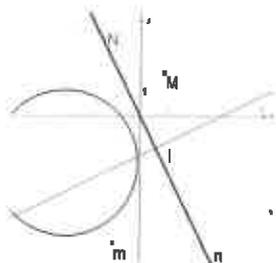
On me fait ensuite revenir à la position précédente où l'image de notre droite semblait être une demi-droite. On me demande de tracer la droite (passant par I) sur laquelle notre droite et son image semblent être incluses.

On a fait pivoter cette droite jusqu'à la position recherchée puis on a écarté la droite d'appartenance de n laissant bien visible la droite désirée. On a fait pivoter cette droite jusqu'à la position recherchée puis on a écarté la droite d'appartenance de n laissant bien visible la droite désirée.



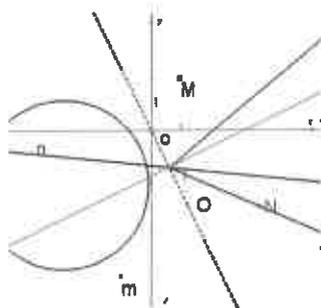
On me fait à nouveau pivoter la droite rouge jusqu'à la position où son image se superpose à elle :

Pour valider cette conjecture, on me demande d'écarter la droite rouge pour construire l'image de l'origine o par la transformation cachée en appliquant la macro qui la cache. On obtient le point O :



On fait remarquer qu'on obtient une droite ayant direction orthogonale à la direction verte semblant passer par l'origine o du repère et que la restriction de la transformation cherchée semble être une symétrie par rapport à la droite verte. La conjecture semble validée visuellement. On me propose quand même de construire le milieu du segment $[oO]$. On trouve le point J qui semble se superposer à I .

Je note qu'on ne me demande pas de mesurer l'angle fait par la droite verte et $[oO]$, mais de tracer la droite (oO) qui apparaît ici en pointillés.

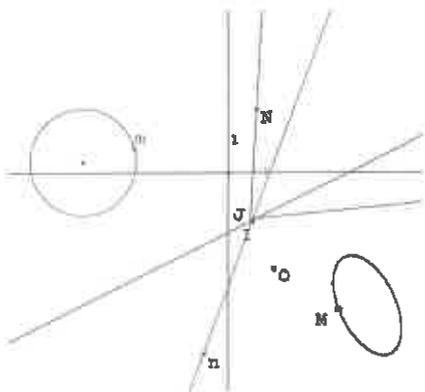


L'attention du public se concentre maintenant sur le cercle qui avait été laissé de côté. La suite va montrer que les participants vont essayer d'établir un lien entre ces images et les droites précédemment mises en évidence....

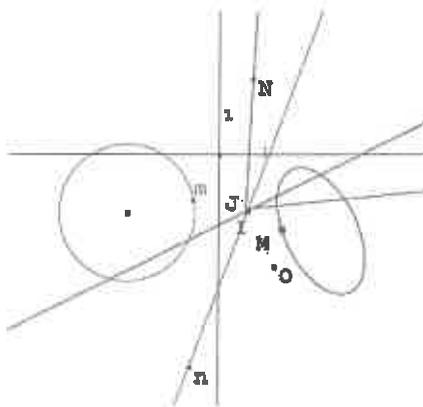
11.4.7 Retour à des recherches d'images de cercles.

La proposition d'investigation qui est faite est la suivante : trouver l'image d'un cercle centré en I . Pour cela, nous avons été amenés à faire dans l'ordre les manipulations qui suivent.

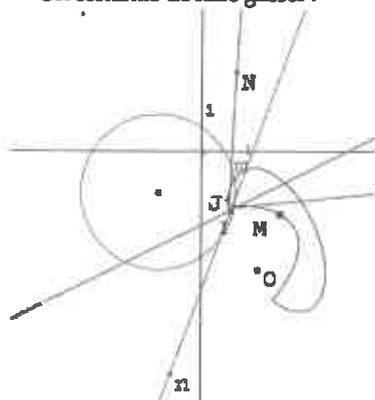
On commence donc par redéfinir le point m comme un point du cercle oublié et on voit donc apparaître son image en bleu qui a une forme ovale :



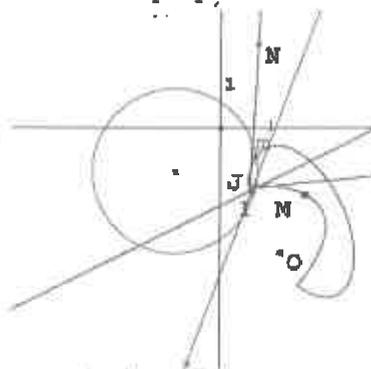
Ensuite on se saisit du centre pour faire glisser le cercle rouge; on voit simultanément son image évoluer :



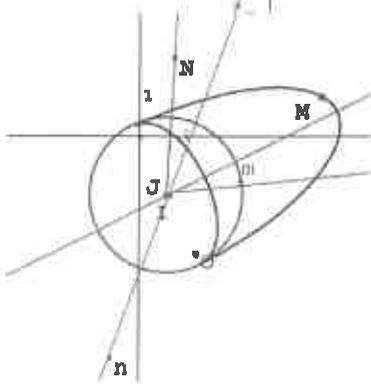
On continue de faire glisser :



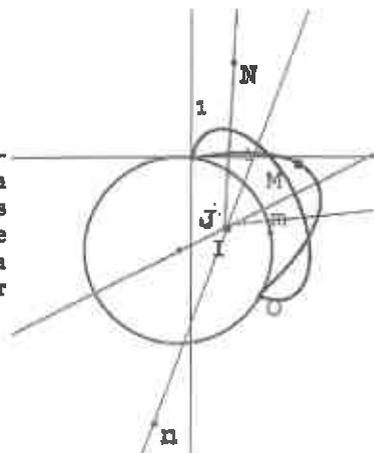
Encore une peu plus :



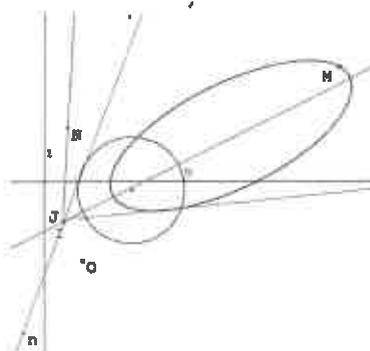
La surprise est déjà grande ; elle augmente encore plus quand on arrive à la position recherchée :



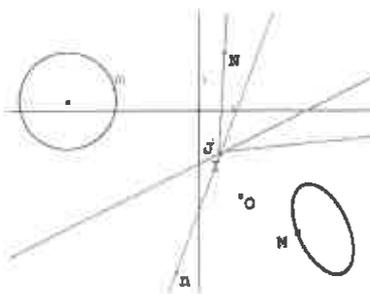
Surprise mais pas découragement car vraisemblablement la symétrie de la figure incite les participants à proposer de faire glisser ce cercle le long de la droite verte. On obtient pour commencer :



Cet écran a été obtenu quand on a fait glisser le centre vers la droite. Certains participants prononce le mot d'affinité dans des affirmations du type " il y a une affinité ", " ça contient une affinité " et d'autres que je n'ai pu percevoir.



Immédiatement après cette manipulation, il m'est demandé de repositionner le cercle à sa position initiale. L'écran obtenu est le suivant :



Cette fois c'est le mot symétrie qui surgit : on m'évoque une symétrie axiale d'axe la droite verte.

- qu'une instrumentalisation à l'outil Cabri était possible à partir d'une recherche de boîte noire menée en commun, y compris avec un public d'experts en géométrie.
- qu'une dévolution rapide pouvait être obtenue pour un tel type de problèmes.
- qu'une démarche expérimentale effective se met en place où le débat scientifique prend une forme originale et riche : c'est un dialogue où chaque question est une proposition d'investigation et chaque réponse ou critique en est une autre qui vient lui répondre comme un écho déviant ou amplificateur. Cette démarche déjà observée de multiples fois avec des publics de tous âges et de tous niveaux est donc confirmée dans un public expert en géométrie.

Les objectifs plus profonds :

En liaison avec la thèse que je prépare sur la démarche expérimentale en Mathématiques, cette atelier a constitué pour moi une expérience de validation des hypothèses que j'ai formulées sur la caractérisation formelle d'une telle démarche. Ces hypothèses ont pu être émises grâce à des analyses de résolutions de boîtes noires qui m'ont servi à la fois de microscope et de télescope (pour ne pas parler de microscope avec le double sens qu'on pourrait lui affecter) pour découvrir ces hypothèses sur les différentes phases d'une démarche expérimentale ainsi que sur les liens entre ces phases.

Une partie de ma thèse contiendra donc l'analyse de ce compte rendu à la lumière des hypothèses faites. Ma grille de lecture et d'analyse permettra in fine de mieux réfléchir une ingénierie didactique intégrant l'expérimental dans l'enseignement des Mathématiques et dans la conception de problèmes plus consistants que les problèmes fermés qui sont le lot des évaluations dans notre système éducatif.

En guise de conclusion :

La tâche de résolution de problème nécessite la connaissance de techniques qui sont le plus souvent données pour ne pas laisser l'élève perdu au milieu de l'océan des théorèmes. Les problèmes de boîtes noires donnent l'occasion à l'élève de ne pas exiger les techniques qui habituellement lui sont indispensables mais au contraire de se livrer à des investigations en liaison avec des techniques connues, c'est à dire d'être réellement actif au sens mathématiques du terme. Notre devoir est de réfléchir à la manière dont la transposition didactique des notions abordées par ce blais se met en place. Il ne faudrait pas que des schèmes d'usages se mettent en place de manière sauvage dans ce type de démarche, la démarche expérimentale où l'induction a la place importante que lui reconnaissait Polya il y a plus de cinquante ans. Les protocoles expérimentaux des sciences expérimentales se retrouvent dans la démarche expérimentale en Mathématiques dans les méthodes d'investigations, les procédures pilotées par le

Trois exemples pour illustrer la démarche expérimentale avec Cabri 155

Professeur : on retrouve donc l'instrumentalisation qui peut concerner les outils abstraits comme les outils technologiques.

Bibliographie

- [1] Friedelmeyer J.P. *Les aires : outil heuristique outil démonstratif*, 1998, Repères IREM N°31 TOPIQUES éditions 39-62.
- [2] Glaeser G. *Analyse et Synthèse*, 1986, Publication de l'A.P.M.E.P. N°76.
- [3] Joshua M.A., Joshua S. *Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique*, 1987, (première partie). Recherche en didactique des Mathématiques, 8, (3), 231-266.
- [4] Joshua M.A., Joshua S. *Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique*, 1988, (deuxième partie). Recherche en didactique des Mathématiques, 9, (1), 5-30.
- [5] Kuntz G. *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*, 1993, Repères IREM N°11 TOPIQUES éditions 5-31.
- [6] Millar R. *Investigations des élèves en science : une approche fondée sur la connaissance* (page 9) Didaskalia N°9.
- [7] Polya G. *Les Mathématiques et le raisonnement plausible*, 1957, Gauthier-Villars.
- [8] Perrot F. et Tadjeddine M. *Apprentissage de l'expérimentation en physique* : Didaskalia N°6.
- [9] Sous la direction de J.P. BOUVIER avec J.J. DAHAN *Première S Math*, 1999, Éditions Belin.
- [10] Sous la direction de J.P. BOUVIER avec J.J. DAHAN *Seconde Math*, 2000, Éditions Belin. Éditions Belin.
- [11] Dahan J.J. *Enseigner et pratiquer les Mathématiques avec Cabri* Brochure IREM de Toulouse.
- [12] Dahan J.J. *Introduction à la Géométrie avec la TI-92* Ellipses Publishing.
- [13] *Mathematics in showing all the hidden stages of a true research. Examples with Cabri.* ATCM 2002 Melaka.
http://www.irem.upe-tlse.fr/Groupe/MathInfo/Kuis/Cople1_CONF_ATCM_2002.htm
- [14] *Apprentissage à la recherche des problèmes inversés. Approche de problèmes "difficiles" Mini-cours.*

Cabriworld 2001 Montréal

<http://www.iam.upa-tsa.fr/Groupe/MathInfo/CMontreal/minicours/CM0confmontreal.htm>

- [15] *Using the new tools of Cabri II plus to teach functions*
T3 2003 Nashville

http://www.iam.upa-tsa.fr/Groupe/MathInfo/Nashville/nashville_sonf.pdf

Chercher avec Cabri.

Michel Carrat.

12.1 Introduction.

Dans cet article je me propose, à travers la résolution d'un exercice, de montrer comment un logiciel comme Cabri permet de comprendre, grâce à l'environnement mathématique qu'il génère, une situation géométrique, est une aide à sa résolution et à la validation des résultats obtenus.

L'utilisation d'un instrument lorsqu'on fait de la géométrie, ou plus généralement des mathématiques, demande d'avoir une connaissance des caractéristiques de l'instrument utilisé ; avec les instruments issus des nouvelles technologies, cette connaissance se double de celle d'une philosophie sous-jacente induite, consciemment ou inconsciemment par le constructeur, du logiciel que l'on veut utiliser.

Les géomètres ont toujours été conscients que les outils utilisés dans leur activité jouent un rôle dans leurs modes de fonctionnement, leurs savoirs-faire. Plus encore, les compétences mathématiques ne sont pas nécessairement les mêmes : on n'a pas les mêmes heuristiques de procédures et les mêmes validations si on fait de la géométrie à la règle et au compas, ou à la règle et à l'équerre, ou au compas seul, etc.

L'objet de cet article n'étant pas de présenter les qualités, les avantages ou les inconvénients de Cabri, je me contenterai d'énoncer deux caractéristiques essentielles de ce logiciel, caractéristiques qui permettent de faire de la géométrie "dans le prolongement de la main" comme certains ont

coutume de dire, mais plus encore. Ceci vaut aussi pour la règle et le compas, et comparer ce que ces deux technologies ont en commun à travers la lecture des éléments d'Euclide, permettrait de voir Cabri autrement qu'à travers le prisme de l'ordinateur.

Le logiciel Cabri est basé sur le dessin et le numérique : ceci a pour conséquences qu'il ne démontre pas (même s'il calcule avec une très bonne approximation sur la situation que l'on voit à l'écran : le nombre de chiffres après la virgule affiché est de quinze (valides ?)), et que pour utiliser la caractéristique dessin avec l'ergonomie attenante, il nous faudra développer notre faculté à voir et à construire avec les fonctions de Cabri qui sont, si on n'utilise pas la calculette, essentiellement celles induites par les constructions à la règle et au compas point à point. Ceci est un très bon atout pour l'apprentissage de la géométrie, car pour voir et reconnaître dans le contexte où on cherche, il faut connaître déjà, c'est-à-dire avoir vu dans d'autres contextes. Notons qu'une difficulté pour l'enseignant sera d'expliquer aux élèves l'intérêt de la démonstration, vu les performances de ce logiciel, d'où un questionnement sur le rôle de la démonstration, qui est aussi de comprendre, et ses heuristiques.

12.2 Premières observations et énoncé de l'exercice.

Exercice proposé :

Soient un triangle ABC et un point P de son plan. On note A', B', C' les symétriques de P par rapport aux côtés $BC, AC, et AB$ du triangle. Trouver le lieu géométrique des points du plan tels que l'aire du triangle $A'B'C'$ soit égale à celle du triangle ABC .

L'exercice, du moins sous cette forme, n'est pas un exercice classique ce qui fait que l'on se trouve un peu désarmé, un peu comme des élèves devant certains exercices que nous leur proposons. C'est cette situation qui va nous guider dans la recherche de cet exercice, nous essaierons de garder un "regard naïf" le plus longtemps possible, avant que d'utiliser des compétences mathématiques dites supérieures au temps jadis.

Une étape d'observation.

Dessignons, avec Cabri, un triangle ABC (cf fig. 1), prenons un point P et à l'aide de la fonction "symétrique" construisons le triangle $A'B'C'$. Pour mieux comparer les aires, avec l'outil calculette faisons le rapport r des aires des triangles $A'B'C'$ et ABC . Positionnons le point P pour que ce rapport r soit égal à 1.

Sur la position trouvée, on constate que le point P est unique, par contre si on s'éloigne du triangle, il apparaît que ce rapport diminue puis croît "indéfiniment", et ce dans toutes les directions en partant du triangle ABC .

Nous remarquons dans cette démarche que le plus souvent en géométrie on commence à chercher près de l'objet sur lequel on travaille, puis on s'en éloigne de plus en plus.

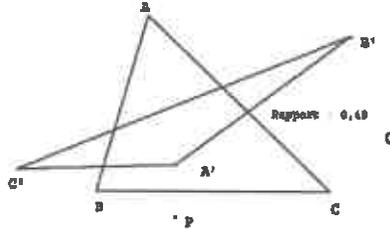


figure 1

Notre premier constat est que le lieu se compose d'un point particulier, dans ou proche du triangle ABC , et de points dans toutes directions assez éloignés du triangle.

Détermination de ce point :

Dans un premier temps, il convient de se rendre compte visuellement si le point P est ou n'est pas un point connu (s'il ne l'est pas, il nous faudra utiliser une autre stratégie). Sur un seul triangle cela paraît une gageure, car la valeur du rapport dépend de la position du point par rapport au triangle choisi. Si on modifie la position d'un sommet du triangle initial, on repositionne le point P pour que le rapport r soit égal à 1, mais ce faisant, on perd le dessin initial. Le mieux est de considérer plusieurs triangles ABC sur une même feuille, et de voir pour chacun d'eux où se trouve ce point.

Pour ne pas refaire cette construction, on fait une macro. Dans le cas présent, je suggère deux macros que j'appellerai "rapport" et "rapport-triangle" dont les objets initiaux sont le triangle ABC et le point P , et les objets finaux sont pour la première le rapport r , et la deuxième le rapport r et le triangle $A'B'C'$.

Sur l'écran (cf fig. 2) considérons plusieurs triangles ABC et appliquons à chacun d'eux la macro "rapport". Comme il est plus facile de reconnaître des points particuliers sur des triangles que nous connaissons que sur des triangles quelconques, modifions ces triangles de telles sortes qu'un soit rectangle, un autre soit équilatéral, un autre soit isocèle avec un angle assez aigu, un autre avec un angle obtus. Pour chacun d'eux positionnons correctement le point P .

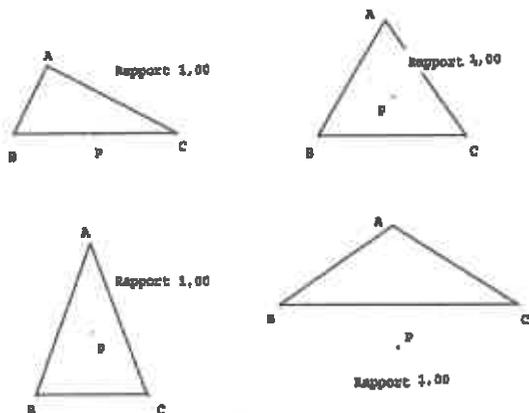


figure 2

Par élimination successive des points connus et possibles, milieu du côté opposé à l'angle le plus grand, centre de gravité, centres des cercles circonscrit et inscrit, orthocentre, etc il ne reste comme possibilité que le centre du cercle circonscrit.

Validation par Cabri :

Tracer le centre ω du cercle circonscrit d'un triangle quelconque, redéfinir le point P comme étant le point ω avec la fonction "redéfinir un point" : le rapport est égal à 1 même si on demande plus de chiffres après la virgule. Pour Cabri le point ω , centre du cercle circonscrit est un point du lieu quelque soit le triangle considéré.

Démonstrations :

1°) En utilisant les cas d'égalités des triangles, il est aisé de montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux : ils ont même aire.

2°) Notons ω' le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Les points ω et ω' avec les sommets des triangles ABC , $A'B'C'$ sont les sommets d'un cube vu en perspective cavalière. Ces triangles se situent sur des plans parallèles et se déduisent l'un de l'autre par la symétrie centrale de centre le centre du cube (le milieu de AA'). Ces triangles sont égaux : ils ont même aire.

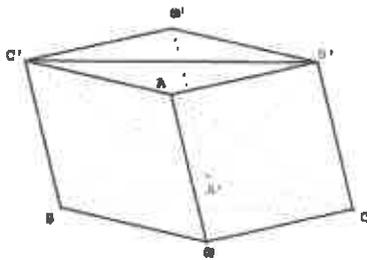


figure 3

3°) Les projections orthogonales a, b, c du point ω sur les côtés du triangle

initial sont les milieux I, J, K des côtés du triangle ABC : l'aire du triangle IJK est le quart de celle du triangle ABC . Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.

Notes :

1. Une démonstration suffit pour prouver le résultat, mais plusieurs démonstrations peuvent apporter un autre regard et donner une meilleure intelligence de la situation. Dans ce cas, il n'en est rien pour les autres points.
2. Pour tout point P du plan, si on considère les projections orthogonales sur les côtés du triangle, le triangle obtenu, appelé triangle podaire, est homothétique du triangle $A'B'C'$ dans le rapport $\frac{1}{2}$.

Pour la recherche de notre problème, on pourra choisir indifféremment l'un ou l'autre triangle.

12.3 Recherche des autres points. Première conjecture.

Comme il n'apparaît pas facile de déterminer les autres points, l'idée est de regarder le comportement du rapport r lorsqu'on s'éloigne du point ω centre du cercle circonscrit. De faire ceci au hasard du déplacement de notre souris (on voit que r diminue vers zéro puis croît), ne donne pas d'idée sur la position des points cherchés. Il convient de limiter le degré de liberté du point P pour se forger une idée plus précise.

Comportement du rapport r lorsque P parcourt une circonférence de centre ω :

Si on promène le point P autour du point ω , on voit que le rapport r prend des valeurs continues proches les unes des autres. Traçons un cercle de centre ω , et redéfinissons le point P comme un point sur ce cercle. Si on fait parcourir au point P cette circonférence on voit que le rapport r est constant. Modifions le rayon de cette circonférence et recommençons : il en est de même. On en déduit le théorème vraisemblable (conjecture visuelle) suivant :

Conjecture A : *La valeur du rapport r entre les deux aires est constante sur une circonférence concentrique au cercle circonscrit du triangle donné.*

Note : Dans ce cas pour montrer que des points sont cocycliques, on pourra montrer que leurs triangles podaires respectifs par rapport à un même triangle sont de même aire.

Regardons le comportement du rapport r lorsqu'on modifie le rayon de ce cercle : en s'éloignant du centre du cercle circonscrit, il diminue et tend vers zéro (ou presque ?) puis croît de plus en plus. Lorsque le rapport

est presque nul, le cercle est presque le cercle circonscrit au triangle initial ! La connaissance de la droite de Simson (ou de Wallace) nous dit qu'il est nul : les projections orthogonales de tout point situé sur le cercle circonscrit sur les côtés du triangle sont alignées.

Ce résultat, que nous savons démontrer, conforte notre conjecture.

Note : Si on note a, b, c , les projections orthogonales d'un point P sur les côtés du triangle ABC le rapport des aires des triangles $A'B'C'$, ABC et abc , IJK sont égaux. Prenons des aires algébriques, alors le produit vectoriel de deux vecteurs du plan est un scalaire égal à l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs. Notons $r(P)$ le rapport des aires des triangles considérés, alors :

$$r(P) = \frac{\vec{P}a \wedge \vec{P}b + \vec{P}b \wedge \vec{P}c + \vec{P}c \wedge \vec{P}a}{\omega\vec{I} \wedge \omega\vec{J} + \omega\vec{J} \wedge \omega\vec{K} + \omega\vec{K} \wedge \omega\vec{I}}$$

Il ne reste plus qu'à faire le calcul pour trouver les lignes de niveau de la fonction $r(P)$.

12.4 Une autre expérimentation. Deuxième conjecture.

Le rapport étant vraisemblablement constant sur des circonférences concentriques au cercle circonscrit donné, pour essayer de comprendre la situation modifions le cadre donné : inscrivons le triangle ABC dans une circonférence de centre ω , appliquons la macro "rapport" à ce triangle et à un point quelconque, et faisons parcourir au sommet A la circonférence. Le rapport r reste constant. Faisons de même avec les deux autres sommets : on obtient le même résultat, et ceci quelque soit le rayon du cercle pris.

On en déduit le théorème vraisemblable suivant :

Conjecture B : La valeur du rapport r entre les deux aires dépend du rayon du cercle circonscrit du triangle donné, de l'éloignement du point P au centre du cercle circonscrit, et non de la forme ou de l'aire du triangle.

12.5 Etude de la variation du rapport en fonction de l'éloignement du centre du cercle circonscrit.

Pour ce faire, on limite le degré de liberté du point P en positionnant ce point sur une droite passant par le centre du cercle circonscrit (ce point devant être un centre de symétrie pour les valeurs prises par le rapport r).

Nous allons étudier la relation, la fonction, existant entre le rapport r et la distance d du point P au centre du cercle circonscrit ω . Pour ce faire on montre les axes, on reporte la distance d sur l'axe des x , et le rapport r sur l'axe des y . Définissons une nouvelle macro "parallélogramme" qui à trois points R, S, T donne le point U tel que le quadrilatère $RSTU$ soit

un parallélogramme (Pour construire le point U , on prend le milieu des points R, T , puis le symétrique de S par rapport à ce milieu).

Appliquons cette macro aux points définis sur les axes par r, O (origine des axes), et d : on obtient le point M de coordonnées (d, r) . Demandons le lieu géométrique de ce point lorsque le point P parcourt la droite : on obtient le graphique ci-dessous (au besoin on peut demander plus de points pour le lieu). Il reste à étudier cette courbe.

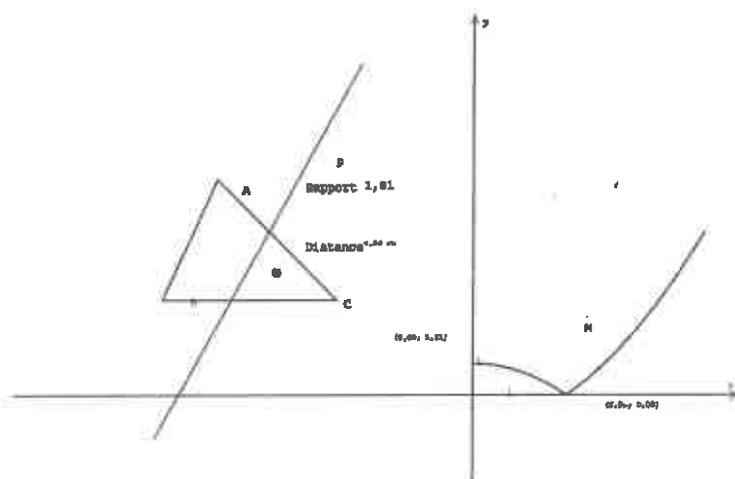


figure 4

L'étude précédente sur un cercle concentrique nous permet de dire qu'il existe une symétrie par rapport à l'axe des y , la distance étant une valeur positive cette partie n'apparaît pas. On peut la faire apparaître en faisant comme suit :

On définit de nouveaux axes en prenant pour origine étant le point ω , pour axe des abscisses la droite parcourue par le point P , et pour axe des ordonnées une droite quelconque passant par ω . On demande les coordonnées du point P dans ces nouveaux axes, soit $(x, 0)$, et on construit comme précédemment sur le système d'axes initial le point N de coordonnées (x, d) . On demande à cabri de tracer le lieu du point N lorsque P parcourt la droite. On obtient le graphique ci-dessous (cf fig. 4), symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

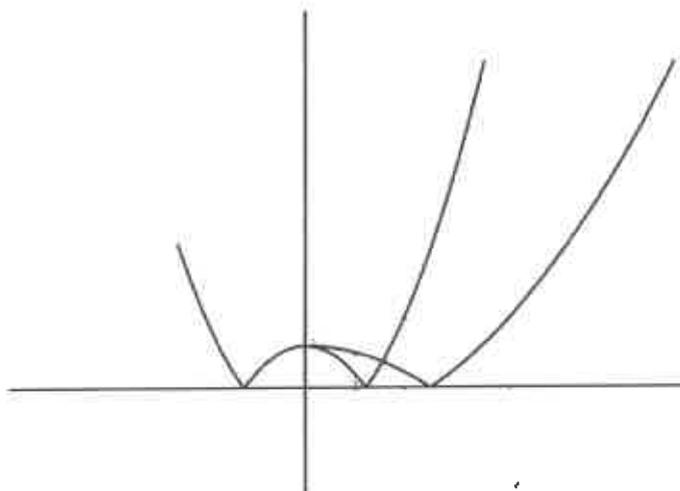


figure 5

Sur la partie positive, les deux graphiques ne correspondent pas car Cabri calcule toujours avec le même système d'axes (celui que le constructeur a choisi), même s'il affiche les coordonnées d'un point dans n'importe quel système d'axes. Pour s'en convaincre modifions la position du point déterminant l'unité des abscisses du deuxième système d'axes : le lieu du point N se déforme et on peut, sur la partie positive des abscisses, le faire coïncider avec le lieu du point M .

12.6 Calcul de la valeur de d pour la quelle le rapport r est égal à 1. Troisième Conjecture.

- i) Du point $(0, 1)$ on peut tracer une parallèle à l'axes des abscisses et estimer la valeur de d . Cela ne nous apportera pas plus que lorsqu'on essayait de positionner le point P pour avoir le rapport égal à 1 ; Cabri (celui en ma possession) ne fait pas l'intersection avec les lieux géométriques.
- ii) On peut remarquer que le graphique obtenu est un graphique connu : une parabole, ou plutôt la valeur absolue d'une parabole ? Pour confirmation prenons la fonction "conique" et choisissons cinq points sur une branche du lieu : la conique couvre le lieu. Re commençons avec la partie non couverte, il en est de même. Si on approche le curseur Cabri nous donne à choisir entre "ce lieu" et "cette parabole". Si on déplace les points d'une même branche définissant ces deux coniques il en est de même, la conique recouvre toujours le lieu. Elles ne dépendent pas des points choisis.

Demandons les équations des deux paraboles ainsi obtenues : la traduction algébrique-géométrique de ces équations nous dit que nous avons une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Le graphique est la valeur absolue. Pour plus de sécurité demandons si un point du lieu, que l'on pourra faire varier, est sur la parabole : Cabri nous dit que oui, mais de temps en temps il nous dit que non ! Que croire ? Avec une des premières versions Cabri, il dit toujours non. Mais l'oracle, ou la pythie dépend de l'épsilon choisi pour l'approximation et de l'algorithme utilisé, et ce en fonction de la courbe.

Comme nous n'avons pas le choix (pas d'autre idée pour continuer notre recherche) et lorsqu'on sait la difficulté d'obtenir une parabole lorsque les cinq points sont libres, (ou seulement le cinquième), on conjecture :

Conjecture C : *La fonction définissant le rapport r en fonction de la distance d est une parabole en valeur absolue.*

12.7 Détermination du lieu. Quatrième conjecture.

On peut reprendre l'idée énoncée dans i), faire l'intersection avec la conique avec la droite, et demander les coordonnées du point ainsi défini. Cela nous donnera une construction stable avec Cabri du cercle cherché, mais ne nous fera pas comprendre davantage le problème.

On sait que la fonction cherchée s'annule aux points d'abscisses $\pm R$, où R est le rayon du cercle circonscrit, et prend la valeur 1 en 0. Si cette fonction est la valeur absolue d'une parabole, l'équation des deux paraboles est donc :

$$Y_1 = -\frac{1}{R^2}(X_1^2 - R^2) \text{ et } Y_2 = \frac{1}{R^2}(X_2^2 - R^2)$$

On peut ainsi calculer la valeur d pour laquelle le rapport est égal à 1. On peut même établir la relation entre les valeurs des distances d_1 et d_2 pour que les rapports soient égaux : $Y_1 = Y_2$ si et seulement si $X_1^2 + X_2^2 = 2R^2$, c'est-à-dire si et seulement si $d_1^2 + d_2^2 = 2R^2$.

Ce résultat est validé avec Cabri, même lorsqu'on demande le rapport avec l'approximation maximale. On déduit le théorème vraisemblable suivant :

Conjecture D : *Le lieu géométrique cherché est un cercle concentrique au cercle circonscrit, de rayon $R\sqrt{2}$, où R est le rayon du cercle circonscrit.*

Etalement de notre conjecture

Pour conforter notre conjecture C, on peut la tester sur des relations métriques connues en des points où les calculs sont aisés.

12.8 Aire définie par le centre du cercle inscrit.

Notons O le centre du cercle inscrit à un triangle ABC , et D, E, F ses projections orthogonales sur les côtés du triangle, R et R' les rayons des cercles circonscrit et inscrit respectivement, et S et s les aires des triangles ABC et DEF .

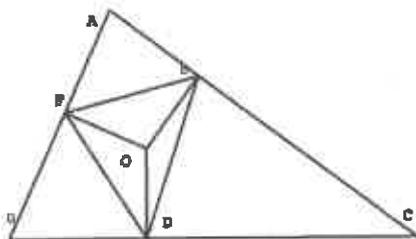


figure 6

On a $2S = R^2 (\sin A + \sin B + \sin C) = R^2 \left(\frac{a}{R}\right) = \frac{aR}{R}$, d'où $\frac{a}{b} = \frac{R'}{2R}$. Comme l'équation de notre parabole est égale à $Y = -\frac{1}{2R}(X^2 - R^2)$, on déduit des égalités précédentes $\frac{R'}{2R} = \frac{R^2 - X^2}{4R^2}$ et par suite $X^2 = R(R - 2R')$ qui est une formule connue donnant la distance entre les centres inscrit et circonscrit.

Ceci renforce notre conjecture. De plus cette formule montre que le diamètre du cercle inscrit est inférieur au rayon du cercle circonscrit, et qu'il y a égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

12.9 Point de Lemoine.

Sous l'hypothèse de notre conjecture, on peut calculer aisément la distance d entre le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine, résultat méconnu ou peu connu (?).

Le point de Lemoine pour un triangle de côtés a, b, c est défini comme étant le point dont les distances x, y, z aux trois côtés sont entre elles dans le même rapport que les côtés correspondants¹.

Au numéro 2361 de ce même ouvrage F.G.M. montre que le point de Lemoine est le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est minima.

De la relation $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, on déduit $\frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$, où S est l'aire du triangle donné. Si s désigne l'aire du triangle podaire du point de Lemoine, on obtient $\frac{s}{S} = \frac{12S^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$ (numéro n°2364 de F.G.M.). En utilisant l'équation de la parabole il vient $d^2 = R^2 - 3\left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2$ où R est le

¹F.G.M., Exercices de Géométrie, n°103, 1920, p. 46.

rayon du cercle circonscrit du triangle donné.

Note : Si notre conjecture est validée, on obtient une formule pour la distance du point de Lemoine au centre du cercle circonscrit pour un triangle donné, et pour tout point du plan la connaissance du rapport de l'aire de son triangle podaire à l'aire de ce triangle permet de calculer la distance de ce point au centre du cercle circonscrit en fonction du rayon de ce dernier cercle.

Ainsi pour les trois autres points du plan du triangle dont les distances aux trois côtés sont entre elles dans le même rapport que les côtés correspondants, on a une formule analogue pour exprimer la distance de ces points au centre du cercle circonscrit.

12.10 Recherche analytique.

A ce stade, nous avons suffisamment d'éléments pour entreprendre une étude analytique en sachant ce que nous devons trouver : nos conjectures semblent solides. Une autre approche est de regarder dans la littérature si notre problème, ou un problème semblable n'a pas été traité.

Après une certaine recherche historique, je l'ai retrouvé sous la forme des projections orthogonales sur les côtés du triangle donné (cf. note 2 du paragraphe "Une étape d'observation") ; l'égalité du rapport $\frac{1}{4}$, n'ayant pas été abordée. La primeur de ce problème semble revenir à Lhuillier² :

- *Si de l'un quelconque des points d'une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés, l'aire du triangle dont les sommets seront les pieds de ces perpendiculaires sera constante. Si, en particulier, ce cercle se confond avec le premier, cette aire deviendra nulle ; c'est-à-dire qu'alors les pieds des trois perpendiculaires seront en ligne droite (*)*.
- *En outre, si deux cercles concentriques au cercle circonscrit sont tels que la somme des carrés de leurs rayons soit double du carré du sien, les triangles qui auront pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées des points des circonférences des derniers cercles sur les directions des côtés du triangle inscrit au premier seront équivalents.*

(*) *Ce cas particulier a déjà été démontré dans le présent recueil (tom.IV, p. 251)*

Ce problème a été résolu dans ce même volume par M. Querret (p. 280 - 285) et par Sturm (p. 286 - 292). La démonstration de Querret est analytique et peut se traduire aisément comme un calcul vectoriel (déterminant). Il prend un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine

²Lhuillier, Théorème de Géométrie, Annales de Gergonne, tome XIV, 1823 - 1824, p. 28.

est un sommet du triangle donné. Dans ce système les deux autres sommets sont de coordonnées a, b , et a', b' respectivement ; les équations des droites des trois côtés sont :

$$b'X - a'Y = 0, \quad bX - aY = 0, \quad (b - b')(X - a) - (a - a')(Y - b) = 0$$

Pour un point P donné (en fait pour un point intérieur) il calcule la distance de ce point aux trois côtés, puis l'aire des trois triangles déterminant le triangle dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires ; il en déduit l'aire de ce dernier k^2 et l'équation en fonction des coordonnées x et y du point P :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm \frac{2c^2 c' c'' k^2}{(ab' - ba')^2}$$

où α et β sont les coordonnées du centre du cercle circonscrit et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, et $c'' = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}$.

Si R est le rayon du cercle circonscrit et T est l'aire du triangle donné il trouve l'équation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \cdot \frac{T \pm 4k^2}{T^2}$, et ensuite les rayons r et r' des deux cercles résolvants le problème : $r^2 = R^2 \cdot \frac{T - 4k^2}{T^2}$, $r'^2 = R^2 \cdot \frac{T + 4k^2}{T^2}$. Ce dernier résultat démontre celui que nous avons conjecturé avec Cabri, à savoir l'équation des deux paraboles. De plus Querret remarque que la corde t du cercle dont le rayon est R , tangente à celui dont le rayon est r est égale à la corde t' du cercle dont le rayon est r' , tangente à celui dont le rayon est R . Si $\alpha, \alpha', \alpha''$, sont les angles du triangle donné, il trouve :

$$k^2 = t^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{\sin \alpha'}{2} \cdot \frac{\sin \alpha''}{2} = t'^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{\sin \alpha'}{2} \cdot \frac{\sin \alpha''}{2}$$

La démonstration donné par Sturm est basée sur les relations métriques du triangle, essentiellement celles qui font appel aux relations trigonométriques pour le calcul de l'aire et du rayon du cercle circonscrit ; comme Querret, il prend un point intérieur et laisse au lecteur le soin de voir les autres cas de figure.

Si α, β, γ , sont les angles du triangle donné, r le rayon du cercle circonscrit, x, y les coordonnées du point P rapportées aux deux côtés de l'angle γ pris pour axes des coordonnées, et k^2 l'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires sur les côtés abaissées de P , il trouve l'équation suivante :

$$r^2 - \frac{k^2}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \left(x - \frac{r \cos \alpha}{\sin \gamma}\right)^2 + \left(y - \frac{r \cos \beta}{\sin \gamma}\right)^2 + 2 \left(x - \frac{r \cos \alpha}{\sin \gamma}\right) \left(y - \frac{r \cos \beta}{\sin \gamma}\right) \cos \gamma$$

Ceci montre que pour toute valeur de k on a l'équation d'un cercle, et si $k = 0$ c'est celle du cercle circonscrit ; de plus, l'aire étant nulle, Sturm

en déduit que les points projetés sont alignés, et pour tout k , que les lieux cherchés sont des circonférences concentriques au cercle circonscrit. Par de là, Sturm retrouve tous les résultats de Querret, et poursuivant plus avant sa recherche, il projette le point P suivant des obliques faisant des angles constants. Il trouve que le lieu géométrique tel que l'aire des triangles dont les sommets sont les projetés obliques est une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit.

Il généralise ce problème en prenant un polygone et affirme, en donnant une ligne directrice pour le démontrer, que le lieu est une ligne du second ordre.

Quelques 40 ans plus tard, ce problème réapparaît ; il semble que sa source ce soit perdue. Il a été repris par de nombreux mathématiciens d'alors, mais leurs démonstrations diffèrent peu des unes des autres dans leur esprit ; il paraît cependant intéressant de les comparer pour étudier les différentes pratiques de la géométrie analytique de cette époque en relation avec la vision géométrique et les traductions géométrie analytique (ou calcul algébrique) et géométrie synthétique. Parmi les nombreux auteurs ayant étudié ce problème, citons entre autres Briot et Bouquet³, M. Combette⁴, A. Duporcq⁵, M. F. Stordeur⁶, pour ce que leur solution apporte en compréhension où en technicité.

L'étude faite par M. Combette me paraissant plus riche, je vais en rapporter les éléments essentiels. Il pose le problème est dans l'espace pour un polygone (plan) sous la forme des projections orthogonales sur chaque côté, mais nous relaterons la partie relative au plan. Le lieu trouvé pour une valeur constante de l'aire du polygone ainsi construit est une circonférence toujours de même centre. Reprenons son texte :

Je prends l'équation de la droite sous la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

dans un repère orthonormé, (p) représentant la distance de l'origine à la droite, et (α) l'angle que fait cette perpendiculaire avec les (x) positifs ; cet angle devant être toujours compté dans le sens de la flèche.

Sous cette forme, la distance (δ) d'un point quelconque (x, y) à la droite s'exprime simplement au moyen de la formule

$$\delta = \pm (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p),$$

avec la convention de prendre le signe $(+)$ si le point et l'origine sont de côtés différents de la droite, et le signe $(-)$ dans le cas contraire.

³Briot et Bouquet, *Leçons de Géométrie analytique*, 13^e édition.

⁴M. Combette, *Etude d'un lieu géométrique*, *Revue des sociétés savantes*, tome V, 1870, page 203 - 233.

⁵A. Duporcq, *Aire polygonale*, *Intermédiaire des mathématiciens*, 1898, p. 166 - 167, n° 1 232.

⁶M. F. Stordeur, *Question 1 174*, p. 470 - 471.

Dans tout ce qui va suivre, je représente symboliquement par (α) la quantité $(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$.

Ceci posé, je considère un polygone plan quelconque, et je désigne les équations de ses côtés par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \dots, \quad \omega = 0,$$

et par A l'angle formé par les côtés $\alpha = 0, \quad \beta = 0,$

par B l'angle formé par les côtés $\beta = 0, \quad \gamma = 0,$

.....

par O l'angle formé par les côtés $\omega = 0, \quad \alpha = 0,$

Dans ces hypothèses, la fonction

$$\alpha\beta \sin A + \beta\gamma \sin B + \dots + \omega\alpha \sin O,$$

dans laquelle (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque, par exemple, intérieur au polygone, représente précisément le double de l'aire (σ) du polygone a, b, c, d, \dots, o . Par suite, l'équation du lieu des points pour lesquels σ a la même valeur est

$$(1) \quad \alpha\beta \sin A + \beta\gamma \sin B + \dots + \omega\alpha \sin O = 2\sigma$$

.. Je vais démontrer que généralement l'équation (1) représente une circonférence

Pour ce faire, il montre que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux, faisant la différence entre eux, et que le coefficient de xy est nul. Ce qui lui permet de constater que ces circonférences ont toutes le même centre.

Notes :

1°) Ce calcul est essentiellement celui que nous avons signalé lors de notre conjecture A.

2°) M. F. Stordeur constate que cette équation, ne diffère que d'une constante 2σ de l'équation du cercle circonscrit. Il en déduit immédiatement que c'est une circonférence concentrique au cercle circonscrit.

Plus avant dans son article M. Combette trouve le même résultat en projetant le point relativement à une même direction sur les côtés du polygone donné ; l'équation de la parabole exprimant le rapport étant $\pm \frac{R_0^2 - R^2}{4R^2 \sin^2 \phi}$.

L'étude particulière qu'il fait pour le triangle démontre ce que nous avons conjecturé avec Cabri : nos résultats sont ainsi prouvés.

En continuant l'article de M. Combette, on a une généralisation de cette étude, en considérant les projections orthogonales d'un triangle et de son cercle circonscrit sur un autre plan : le cercle se projette en une ellipse, le triangle en un triangle et les droites perpendiculaires aux côtés a, b, c du triangle en des parallèles aux directions conjuguées de ces côtés... Donc, si un triangle est inscrit dans une ellipse, et si par un point quelconque

de cette courbe on mène des parallèles aux directions conjuguées des côtés, les trois pieds seront en ligne droite, et l'ellipse sera le lieu des points jouissant de cette propriété.

Il y a plus, en considérant une circonférence concentrique à la première, sa projection sera une ellipse concentrique et homothétique à la première, et l'aire du triangle qui aura pour sommets les pieds des conjugués des côtés menés par un point quelconque de cette ellipse sera constante.

Pour finir l'étude de ce problème sur le triangle, M. Combette donne des relations métriques obtenues avec l'équation de cette parabole : à savoir la distance du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et ex-inscrits, la valeur du rayon du cercle circonscrit en fonction des rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, au centre du cercle inscrit aux centres des cercles ex-inscrits. Il en déduit une propriété moins connue du cercle des neuf points : le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles ex-inscrits.

12.11 Conclusion.

La recherche que nous venons de décrire est une recherche où l'algèbre et la géométrie ne sont pas deux domaines distincts mais font parties d'un même corpus : c'est une façon de voir et de faire qui était réservé au début du siècle à des mathématiciens confirmés, mais qui actuellement avec l'aide d'un tel logiciel peut se concevoir dans l'enseignement secondaire autrement que sur des exemples d'école. En effet les passages géométrie-algèbre, algèbre-géométrie demandent pour les concevoir dans sa tête (selon l'expression qui était en usage), pour le moins, maturation, pratique, compétences techniques ; il n'était pas concevable, et il ne l'est toujours pas, de demander à un élève de tracer à la règle et au compas suffisamment de points d'un lieu (autre qu'une droite ou un cercle) pour avoir une idée de celui-ci, ou de laisser le problème complètement ouvert comme il nous a été proposé, sans un bagage conséquent de géométrie synthétique et/ou analytique, bagage que l'on n'acquiert qu'à partir d'un certain âge.

Ici le logiciel nous permet de visualiser une propriété que l'on a cru percevoir sur un exemple donné, exemple que l'on peut déformer pour voir la solidité de notre hypothèse. Ainsi on peut valider ou invalider des conjectures par expérimentations comme le ferait un physicien (On le fait plus volontiers que la validation ne demande pas une débauche d'énergie, et que la réponse est souvent instantanée), en faisant des observations numériques ou non sur des dessins virtuels, des aller-retour algèbre, géométrie, et avoir une intelligence de la situation sans avoir un recours à la preuve mathématique, preuve qu'il nous faudra fournir pour avoir la certitude absolue.

Ainsi lorsqu'on s'engagera vers la recherche de cette preuve on aura

une compréhension intuitive, on saura ce que l'on en droit de trouver avec un certain degré de confiance, et sur qu'elles idées on peut s'engager. S'il y a lieu de faire des calculs, ces calculs ne seront pas faits en aveugles, ils seront réfléchis et menés vers un but que nous pensons connaître.

Si on regarde avec recul notre recherche et ses différentes étapes, on a fait une première observation, un peu en aveugle (c'est Cabri qui faisait les calculs, mais pour cela nos constructions n'étaient pas à l'oeil, elles étaient à la règle et au compas de Cabri). Cela nous a permis de conjecturer certains résultats que nous avons su prouver (Le centre du cercle circonscrit est un point du lieu). Ensuite nous avons élargi le problème : au lieu de chercher un rapport égal à 1, nous avons cherché à étudier la fonction entre ce rapport et la position du point dans le plan en limitant un degré de liberté pour mieux contrôler la situation. Cela nous a permis d'émettre des conjectures, et d'utiliser la fonction lieu de Cabri pour passer en géométrie analytique. Les résultats algébriques que nous avons déduit de ces changements de cadre, nous ont permis de déterminer de conjecturer le lieu cherché.

En résumé, nous avons émis des hypothèses, on a fait comme si on savait, ce qui nous a permis de trouver des résultats, résultats que nous avons confronté sur des exemples. Leur validation nous a conforté dans nos hypothèses, et permis d'aller plus avant dans notre démarche. Nous avons réalisé une "démonstration à trous" ; comme le noeud de notre étude était l'équation de la parabole, nous avons testé la solidité de cette dernière conjecture en l'utilisant pour retrouver des résultats connus.

Il ne restait plus qu'à donner la preuve formelle, ce que notre recherche historique a fait.

12.12 Pour aller plus loin.

L'étude faite par M. Combette pour un polygone quelconque montre que le lieu est toujours un cercle ; la fin de son article, est consacrée au cas du quadrilatère. Nous allons tester les résultats algébriques qu'il donne avec Cabri, afin de valider les résultats qu'il déduit de ses calculs et les visualiser.

Dans le cas d'un quadrilatère et pour déterminer le centre des circonférences, courbes définissant les lieux géométriques cherchés, M. Combette étudie l'équation de la courbe obtenue en prenant la constante $\sigma = 0$, c'est-à-dire lorsque l'aire du quadrilatère définie par les projections orthogonales est nulle.

Pour un quadrilatère convexe $ABCD$, on note θ et ω les intersections des droites BC , AD et AB , CD respectivement. Les points θ et ω vérifient trivialement les équations : ils sont des points du lieu. Il ne reste plus qu'à trouver un autre point de ce même lieu. Le point de Miquel est le candidat idéal : c'est l'unique point du plan tel que les quatre projections sur les

côtés du quadrilatère sont quatre points alignés. Pour le construire on trace les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles θAB , θCD , ωAD , ωBC , définis par le quadrilatère complet $ABCD\theta\omega$: ils sont concourants en un point G , troisième point du lieu.

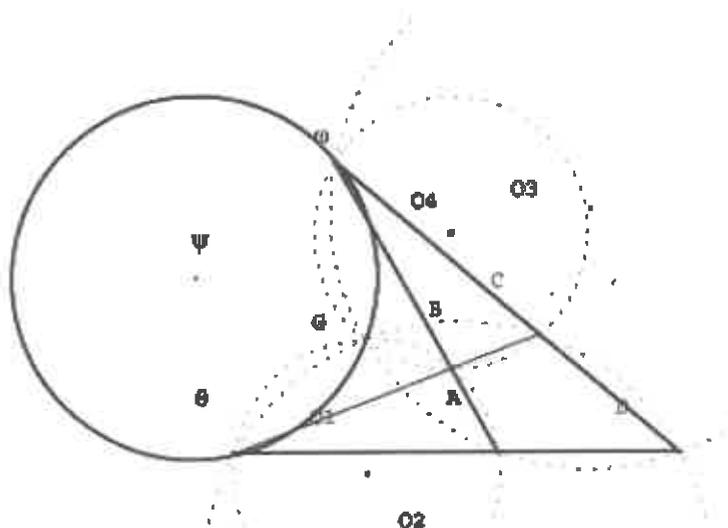


figure 7

Si on note O_1, O_2, O_3, O_4 , les centres respectifs de ces cercles, le centre ψ des circonférences cherchées se trouve à l'intersection des droites O_1O_2 et O_3O_4 (elles sont médiatrices des segments θG et ωG). Pour terminer l'étude générale (M. Combette a vu qu'il y avait des cas de figures, et n'en a étudié qu'un seul : le quadrilatère obtenu par projections orthogonales n'est pas croisé. Il affirme que si c'est le cas il obtient des résultats similaires), il donne l'équation des rayons des cercles cherchés :

$$R_1^2 = R^2 + \frac{\sigma}{2 \sin(A + D) \cos(D + C) \cos(D + B)}$$

Si le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, le lieu se réduit à une droite, et pour le cas où l'aire est nulle c'est la troisième diagonale du quadrilatère complet, ce qui était prévisible : les points G, θ, ω sont alignés.

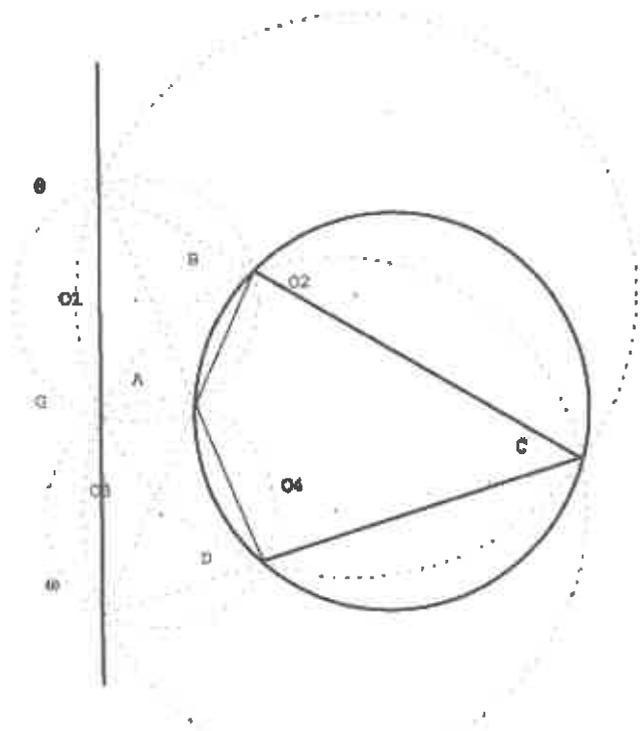


figure 8

Si le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze, le lieu est encore une droite c'est la tangente commune aux deux cercles définissant le point de Miquel G .

Si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme le rapport des aires est constant entre les deux bandes définies par les côtés du parallélogramme ; pour M. Combette le lieu n'existe pas.

Visualisation des résultats :

Traçons le cercle de centre ψ passant par les points G, ω, θ et pour un point P sur cette circonférence appliquons la macro "rapport" : le rapport n'est pas nul, il varie avec la position de P . Il est nul seulement en θ, G, ω . Prenons un autre cercle de centre ψ coupant les côtés du quadrilatère complet, et pour un point P de cette circonférence appliquons la macro : le rapport varie, sauf dans les lunules définissant le point de Miquel. Si on applique la macro "rapport-triangle", on voit que ces lunules correspondent au cas où le quadrilatère n'est pas croisé.

Une étude plus approfondie montre que l'on peut étendre ces portions de cercle dans certains cas.

Détermination du lieu pour lequel le rapport est égal à 1 :

Si on fait une étude de la circonférence désirée à l'oeil (le centre est en ψ), on obtient *a priori* aucune information sur le rayon. On va étudier le lieu cherché sur des exemples particuliers où il nous sera plus aisé de répondre dans le cas où le quadrilatère n'est pas croisé.

Le quadrilatère ABCD est un trapèze :

Les côtés BC et AD sont parallèles : le point ω est rejeté à l'infini, et la droite, lieu du point P cherché, est parallèle à la tangente commune aux cercles passant par G . Traçons une droite parallèle à cette droite et pour un point P , situé sur cette droite appliquons la macro "rapport". Cherchons la position de cette droite pour que le rapport soit égal à 1, pour une région adéquate du plan ; après une observation rapide, elle paraît passer par le milieu de O_1O_2 .

Traçons la médiatrice de O_1O_2 , et redéfinissons le point P comme un point de cette médiatrice : le rapport est égal à 1, sur deux segments de cette droite, non nécessairement définis par des lunules.

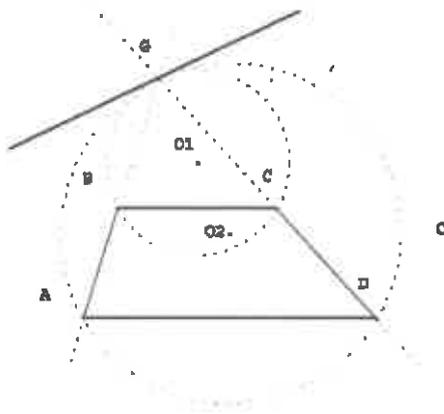


figure 9

Le quadrilatère ABCD est un quadrilatère quelconque :

Pour essayer de déterminer un point de la circonférence cherchée, on peut déterminer le point E tel que les points (O_1, O_2, ψ, E) forment une division harmonique (lorsque le quadrilatère tend à être un trapèze, le point E tend vers le milieu de O_1O_2). Si on trace le cercle de centre ψ passant par E et si on redéfinit le point P un comme un point de ce cercle, rapport n'est pas égal à 1.

Le quadrilatère ABCD est un quadrilatère inscriptible :

Inscrivons dans un cercle un quadrilatère $ABCD$, construisons son point de Miquel G et traçons la droite $\theta G\omega$. Répétons la même expérience que pour le trapèze : cette droite paraît passer par les milieux des segments

O_1O_2 et O_3O_4 . De plus le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ semble être un trapèze isocèle.

Une validation avec Cabri nous dit que le lieu cherché est la médiatrice des segments O_1O_2 et O_3O_4 , et confirme notre opinion sur le quadrilatère des centres.

Deuxième essai : le quadrilatère ABCD est un quadrilatère quelconque :

Plusieurs essais basés sur le rapport harmonique n'ayant rien donné, une observation réfléchie de la configuration lorsque le quadrilatère est inscriptible doit être envisagée.

Le quadrilatère des centres $O_1O_2O_3O_4$ étant, selon Cabri, un trapèze isocèle il est inscriptible. Une idée est de voir à quelles conditions ce quadrilatère des centres est inscriptible. Reprenons le fichier d'un quadrilatère générique, traçons les médiatrices des segments O_1O_2 , O_3O_4 : elles se coupent au point F . Traçons le cercle de centre F passant par O_1 (et O_2) : pour Cabri ce cercle passe par les points O_3 , O_4 et G .

Une cocyclicité :

Ce résultat est intéressant en lui-même : une tentative de validation de ce résultat s'impose avant de reprendre notre recherche. Théorème Le point de Miquel d'un quadrilatère complet, et les quatre centres des quatre cercles circonscrits aux triangles définissant ce point, sont situés sur une même circonférence. Ce résultat est classique : c'est le cercle de Miquel du quadrilatère que nous avons retrouvé.

Reprise du deuxième essai :

Positionnons un point P de centre ψ , appliquons la macro "rapport" et modifions le rayon de ce cercle pour que ce rapport soit égal à 1. L'observation ne s'avère pas facile : il y a beaucoup trop de courbes. En utilisant l'outil "cacher/montrez" on efface les cercles ayant servis à construire le point de Miquel et des droites utilisées lors de la recherche basée sur le rapport harmonique. Une idée est de voir comment on peut utiliser le cercle de Miquel dont nous noterons O son centre.

Avant que de penser à voir des utilisations pas aisées, essayons le cercle de diamètre ψO . Ce cercle avec le cercle donnant un rapport 1 (valeur approchée), et le cercle de Miquel paraissent concourants.

Redéfinissons le cercle donnant ce rapport approché 1 comme le cercle de centre ψ passant par M , point d'intersection du cercle de Miquel et du cercle de diamètre ψO . Le rapport donné par Cabri est égal à 1 avec le nombre de décimale voulue, et ce même en modifiant le quadrilatère. Cabri affirme : Conjecture E Pour un quadrilatère, le lieu des points du plan pour lesquels les aires sont égales est contenu dans le cercle de centre ψ et passant par le point d'intersection du cercle de Miquel et du cercle de diamètre ψO .

Conclusion

Le début de la recherche sur le quadrilatère a été de visualiser les résultats de géométrie analytique donnés par M. Combette, qui avait vu certaines limites à ses résultats, limites sur lesquelles il était passé rapidement. Nous avons pu les comprendre (quadrilatère croisé ou pas) et poursuivre notre recherche sur le problème analogue au triangle. On a exploré des configurations particulières pour voir si dans ces cas on pouvait conclure (trapèze, quadrilatère inscrit), et on a cherché une solution qui dans ces cas serait ce que nous avons trouvé.

Les divers chemins essayés par expérimentation et observation, nous ont permis de retrouver un résultat intéressant en lui-même : le cercle de Miquel et la cocyclicité de cinq points. Ce dernier résultat, nous a permis de résoudre, avec Cabri, le problème proposé ; il ne reste plus qu'à en donner la preuve formelle. Mais nous en resterons-là.

Ainsi Cabri nous a facilité les aller-retour algèbre géométrie, ce que faisaient les géomètres confirmés, avec validation calculatoire ou visuelle, et de mieux comprendre notre configuration. L'apport supplémentaire des constructions *via* Cabri permettent de mieux concevoir la figure et de la faire varier. Notre attitude d'investigation faite d'expérimentation, d'observation, de démonstrations géométriques et/ou d'analytique, a été plus dynamique que celle que nous aurions eue dans le cadre du papier-crayon. Nous avons fait comme si on savait, nous sommes allés plus avant pour confirmer ou infirmer en observant ou en confrontant à des résultats connus ; ceci nous donne une intelligence de la situation et nous permet d'être plus à même de résoudre l'exercice proposé. Notre sens de l'observation a été développé et mis à contribution. Cette conjugaison de vision et de pensée nous a fait accéder à la perception pour mieux appréhender la situation.

Pour le plaisir

Nous allons donner ici quelques résultats faisant suite à notre étude, résultats que nous avons démontrés ou non. Dans ce dernier cas, ils sont à considérer comme "Cabri-vrai" !

- 1) Considérons O_i pour $i = 1, \dots, 4$ quatre points sur une circonférence. Pour tout point G de cette circonférence il existe un quadrilatère tel le point G est son point de Miquel et la circonférence son cercle de Miquel.
Pour le déterminer, il suffit de tracer les cercles de centre O_i passant par G .
- 2) Le quadrilatère est inscritible si et seulement si les points O_i forment un trapèze isocèle.
- 3) Le lieu des points déterminant le quadrilatère lorsque le point G varie sur la circonférence sont des circonférences égales entre elles et égales à la circonférence donnée. Chacune d'elles passent par deux des points O_i .

- 4) Les centres de ces circonférences se déduisent deux à deux par une symétrie centrale.
- 5) L'angle formé par les droites AB , et CD est égal à l'angle inscrit interceptant l'arc des centres des cercles circonscrits aux triangles $AB\theta$ et $CD\theta$. On a un résultat similaire pour l'angle des droites BC et AD .
- 6) On retrouve ces angles, ou leurs supplémentaires, en considérant les triangles formés par les centres des circonférences, lieux des points des sommets du quadrilatère complet, lorsque le point G parcourt la circonférence donnée.
- 7) Ces angles, ou leurs supplémentaires, sont les angles sous lesquels on voit les segments O_1O_2 et O_3O_4 , lieux des points θ et ω , sommets des quadrilatères complets ayant le cercle donné comme cercle de Miquel.
- 8) les angles formés par les droites AO_2 , $A\omega$ et AO_4 , $A\omega$ sont constants (La droite AT passe par un point fixe).
- 9) L'angle des droites $G\theta$ et $G\omega$ est constant lorsque le point G parcourt le cercle donné; il est supplémentaire de l'angle des droites O_1O_2 et O_3O_4 définissant le point ψ .
- 10) Le lieu des points pour lesquels le quadrilatère projections orthogonales du point sur les quatre côtés est d'aire égale au quart de l'aire du quadrilatère donné, est un cercle si on considère la famille des quadrilatères ayant le même cercle de Miquel avec les quatre centres O_i .

Nous laissons au lecteur le soin de confirmer ou d'infirmer ces assertions.

Les Participants au Colloque.

Nom	Prenom	Affiliation	Email
Antibi	André	BREM Toulouse	antibi@ctet.fr
Bair	Jacques	BREM Liège 1.ux	J.Bairulg.ac.be
Balieu	Michel	CREM	
Berton	Willy		willy.berthon@lediat.net.be
Bizouche	Rudolf		rbizouche@wanadoo.fr
Bleuaret	Anne-Marie		
Berlot	Madeleine		M.Haestbroeck@uclg.ac.be
Haestbroeck			
Carracl	Michel		michel.carracl@toulouse.iafm.fr
Coolen	Annette		A.Coolen@uclg.ac.be
Cortier	Jean-Philippe	BREM Reims	jp.cortier@wanadoo.fr
Croc	Corinne		corinne.croc@wanadoo.fr
Dahan	Jean-Jacques	BREM Toulouse	jdahan@wanadoo.fr
Delagardelle	Jean-Claude	BREM Liège 1.ux	
Defize	Jean-Michel	CREM	
Derais	Micheline	BREM Liège Lux	micheline.derais@ynet.be
Desaintville	Bernard	BREM Toulouse	berncid.fr
Docq	Christine		christine.docq@bruhel.be
Ferrière	Jean-Pierre	Univ Nancy 1	ferrierjp.u-nancy.fr
Frenail	Mady		mady.frenail@carmail.com
Gervaise	Thierry		thierry.gervaise@numa.net.com
Gisbert	Hélène	Univ. Paris Sud	helene.gisbert@psud.u-psud.fr
Goussard	Marie-France	CREM	
Hainé	Robert		
Haine	Yvan		yvaine@ulg.ac.be
Hamel	Thierry		antonio@traadnet.fr
Henry	Valérie		V.Henryulg.ac.be
Jung	Claude Athénis	Luxembourg	claude.jung@ice.lu
Jubens	Daniel		daniel.jubens@wanadoo.be
Kainr	Stéphane		stephankainr1977@hotmail.com
Kryszewska	Maria-Isabéla		maria.kryszewska@jacom.net
Lebeau	Catherine		lebeam.chang@ac.be
Lecomte	Pierre	Université de Liège	plecom@ulg.ac.be
Mewis	Jules	CREM	j.mewis@unilim.be
Mottram	Eveline		evan.hainas@ynet.be
Navez	Jacques	BREM Liège 1.ux	j.navezulg.ac.be
Niel	Guy	Univ. Mons-Hainaut	guy.niel@umh.ac.be
Perrin	Daniel		daniel.perrin@unilim.u-psud.fr
Plane	Henry	BREM Paris	
Rossi	Giuseppe	BREM Liège Lux.	rossig@hotmail.com
Rouche	Nicolas	CREM	rouchemath.ncl.ac.be
Roy	Emmanuelle		Ulg/Cihtm eroyulg.ac.be
Schneider	Maggie	FUNDP Namur	maggie.schneider@fundp.ac.be
Sinègre	Luc	BREM Reims	lucsinègre@compuserve.com
Solhousse	Michéla		m.solhousse@wing.be
Van Dieren	Françoise	CREM	f.vanliete@ri.be
Vigier	Noëlle	BREM Limoges	lucm unilim.fr
Vivien	Frédéric	BREM Reims	vivien.frederic@wanadoo.fr
Wuillard	José		luc .wuillard@fundp.ac.be

182

<http://www.univ-irem.fr>

Académie	Adresses	Secrétariat	Téléphone	Directeur
Belgique Luxem- bourg	IREM de Liège-Luxembourg Université de Liège Institut de mathématiques Grande traverse, 12 40000 Liège Belgique	00 32 4 3665624	00 32 4 3665705	Jacques NAVEZ J.Navez@ulg.ac.be Jean-Claude DELAGARDELLE
Besançon	IREM de Franche Comté UPR des Sciences et Techniques 16, route de Gray 25080 Besançon cedex iremfc@math.univ-fcomte.fr Pages : http://pages.univ-fcomte.fr/CTU/IREM/Ilseux.html	Brigitte CUINET 03 81 66 62 25	03 81 66 62 34	Claude MERKER 03 81 66 63 30 claude.merker@ math.univ-fcomte.fr
Bordeaux	IREM d'Aquitaine 40, rue Lamartine 33400 Talence irem@irem.u-bordeaux.fr	Nicole BERCEBOY 05 56 84 89 74	05 56 84 89 72	Pierre-Henri TERRACHER 05 56 84 89 61 p.terracher@ irem.u-bordeaux.fr
Brest	IREM de Bretagne Occidentale UPR Sciences, BP 809 6, avenue Victor Le Gorgeu 29285 Brest cedex irem@univ-brest.fr Pages : http://www.univ-brest.fr/IREM/	Hélène LAURANS 02 98 01 63 44	02 98 01 64 41	Sandrine BOURGEOIS 02 98 01 61 30 Sandrine.bourgeois@ univ-brest.fr

Caen	IREM de Basse-Normandie campus II Sciences III Boulevard Maréchal Juin 14032 Caen irem@math.unicaen.fr Pages : http://www.math.unicaen.fr/irem/	Mme IRAN 02 31 56 74 01 02 31 56 74 02	02 31 56 74 90	Gilles DAMAMBE 02 31 56 74 73 Directeur adjoint François COUCHOT couchot@ math.unicaen.fr
Clermont-Ferrand	IREM de Clermont-Ferrand Université de Clermont II Complexe Scientifique des Césaires 63177 Aubière cedex irem@univ-bpclermont.fr Pages : http://www.math.unicaen.fr/irem/	M.T. DELAHAYS 04 78 40 70 98	04 78 40 70 78	Gérard FLEURY perso. 04 78 40 70 66 irem@univ-bpclermont.fr
Dijon	IREM de Dijon Univ. de Bourgogne. Fac. des Sc. Mirande - B.P. 47870 21078 Dijon cedex irem.Dijon@mail.u-bourgogne.fr Pages : http://www.u-bourgogne.fr/IREM/	R BESSE 03 80 39 52 30	03 80 39 52 39	Daniel BRAU irem.Dijon@ mail.u-bourgogne.fr beau@u-bourgogne.fr
Grenoble	IREM de Grenoble 100, rue des math Domaine universitaire BP 41 38402 St Martin d'Hères cedex dirm@ujf-grenoble.fr Pages : http://www.ac-grenoble.fr/irem/index.htm	Christiane RICHER 04 76 51 46 62 Sylvie GALIGNÉ 04 76 51 46 06	04 76 51 42 37	Marc LEGRAND marc.legrand@ ujf-grenoble.fr 04 76 51 44 25 perso. 04 76 08 18 65
Lille	IREM de Lille Université des Sciences et Technologies de Lille Bat. M1, cité scientifique 59635 Villeneuve d'Ascq cedex irem@univ-lille1.fr Pages : http://www.univ-lille1.fr/irem/	Nicolas VANDENBERGHE 03 20 43 41 81 A. Marie ADAM 03 20 43 41 82	03 20 33 71 61	Raymond MOCHÉ 03 20 43 45 84 Raymond.Moche@ univ-lille1.fr
Limoges	IREM de Limoges 123, av. Albert Thomas 87060 Limoges Cedex irem@unilim.fr Pages : http://www.unilim.fr/irem/	Martine GUERLETIN 03 55 45 72 49 03 55 45 72 79	05 55 45 73 20	Abdelkader NECER anec@unilim.fr 05 55 45 73 27
Lorraine	IREM de Lorraine Faculté des Sciences BP 239 54306 Vandœuvre les Nancy cedex sylvie.fartres@ univ-nancy.fr Pages : http://www.irem.univ-nancy.fr	Secrétariat : 03 83 68 49 41 Bibliothèque : 03 83 68 49 42	03 83 68 43 94	Jean-Pierre FERRIER Jean-Pierre.Ferrier@ lsc.u-nancy.fr 03 83 68 25 14
Lyon	IREM de Lyon Université Claude Bernard 43, bd du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex iremlyon@univ-lyon1.fr Pages : http://www.univ-lyon1.fr/IREM/	Jocelyne GELIN 04 72 44 81 24 04 72 43 13 82	04 72 44 80 67	Michal MEZONY mezony@univ-lyon1.fr
Aix-Marseille	IREM de Marseille Case 901 Faculté des Sciences de Luminy 163, avenue de Luminy 13288 Marseille cedex dir@irem.univ-mrs.fr Pages : http://www.irem.univ-mrs.fr	04 91 41 39 40	04 91 82 93 43	Myriam QUATRINI
Montpellier	IREM de Montpellier Université de Montpellier II - cc 040 Place Eugène Bataillon 34097 Montpellier Cedex 05	Josiane DICK 04 67 14 33 83	04 67 14 39 09	Luc TROUCHE trouche@

Nantes	IREM des Pays de Loire 2, rue de la Housinière B.P. 92208 44322 Nantes cedex 3 diram@univ-nantes.fr Centre du Mans UFR Sciences Avenue Olivier Messiaen 72085 - La Mans cedex 9 Centre d'Angers Bd Lavollée 49000 ANGERS 72085	Catherine ROBIN (IREM de Nantes) 02 51 12 59 40	02 51 12 59 41	Anne Marie CHARBONNEL 02 51 12 59 30 dlsam@ irem-nst.univ-nantes.fr Dominique BERNARD (IREM du Mans) dominique.bernard@ univ-mans.fr 02 43 63 32 10 Philippe DU BOIS (IREM Angers) Philippe.dubois@ univ-angers.fr 02 41 73 53 89
Nice	IREM de Nice Université de Nice Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 Nice cedex 2 irem@math.unice.fr Pages : http://math.unice.fr/irem/	Annie LEJEAS 04 92 07 65 18	04 92 07 65 10	Marc DIENER diener@math.unice.fr diener@wanadoo.fr 04 93 98 79 27 (personnel) 04 92 07 62 26 (professionnel)
Orléans	IREM d'Orléans-Tours Université d'Orléans BP 6789 45067 Orléans cedex 2 irem@labomath.univ-orleans.fr Pages : http://www.univ-orleans.fr/SUFFO/IREM/	M.T. PROCHASSON 02 38 41 71 90	02 38 41 71 93	Isabelle Van Den Boom Isabelle.van-den-boom@ univ-orleans.fr Adjoint : Jean-Claude LEBRETON jean-claude.lebreton@ orleans-tours.univ.fr jlebreton.spm@ wanadoo.fr
Paris-Nord	IREM de Paris-Nord Université de Paris 13 99, Avenue Jean-Baptiste Clément 99490 Villemontais irem13@univ-paris13.fr Pages : http://www.irem.univ-paris13.fr	Monique BECU 01 49 40 36 40	01 49 40 36 36	Gwenola MADEC m-gwen@nccs.fr 01 49 40 36 38
Paris VII	IREM de Paris VII Université Paris VII - Denis Diderot Case 7018, 2 Place Jussieu 75251 Paris cedex 05 Localisation : 13 rue Clisson 75013 Paris Géométrie plateau E irem7@math.jussieu.fr Pages : http://www.imm-paris7.fr	Martine LAMY 01 44 27 53 83 01 44 27 53 84	01 44 27 56 08	Michèle AKTIGUE aktigue@math.jussieu.fr 01 44 27 68 52
Picardie	IREM Rec.Math info 33, rue St Lou 80039 AMIENS irem@inaset.u-picardie.fr Pages : http://www.inaset.u-picardie.fr/irem/	03 23 62 62 98	03 23 64 82 62	Hedi DABOUSSI daboussi@u-picardie.fr 06 70 36 61 36
Poitiers	IREM de Poitiers 40 av. du Recteur Pineau 86022 Poitiers cedex irem@univ-poitiers.fr Pages : http://irem.univ-poitiers.fr/irem/	Annette FONTAINE 05 49 45 38 77	05 49 45 40 50	Jean SOUVILLE 05 49 45 38 76 souvill@mathlabo.univ- poitiers.fr

Reims	IREM de Reims 23, rue Clément Ader BP 175 51665 Reims cedex 2 irem@reims.univ.fr	03 26 77 99 48	03 26 83 35 04	Helène AUTHIER 03 26 91 82 99 helene.authier@ univ-reims.fr
Reims	IREM de Reims UFR de Maths Campus Beaulieu 33042 Reims cedex didrem@univ-reims1.fr Pages : http://www.univ-reims1.fr/irem	02 23 23 51 73		Jean DESHAYES didrem@ univ-reims1.fr 02 23 23 51 73
Rouen	IREM de Rouen Université de Rouen Bât. de Math. Avenue de Broglie B.P. 138 76821 Mont Saint-Aignan joseite.padiglione@univ-rouen.fr Pages : http://www.univ-rouen.fr/irem	Josette PADIGLIONE 02 35 14 61 41		Martine LEONARD Martine.Leonard@ univ-rouen.fr
Strasbourg	IREM de Strasbourg 7, rue René Descartes 67084 Strasbourg irem@math.u-strasbg.fr (secrétariat) bibli@math.u-strasbg.fr (bibliothèque et vente de brochures) Pages : http://irem.u-strasbg.fr	Alexandra CARMINATI 03 90 24 01 30 (secrétariat) 03 90 24 01 61 (bibliothèque)	03 90 24 01 65	Nicole BOPP 03 90 24 01 40 bopp@math.u-strasbg.fr
Corse	IREM de Corse Université Pascal Paoli Faculté des sciences Quartier Grossetti, BP 32 20280 Corte	04 95 45 00 70		Pierre Orsini deliru@univ-corse.fr Adjoint : Luc Tiennot tiennot@letec.fr
Toulouse	IREM de Toulouse Université Paul Sabatier 118, route de Narbonne 31062 Toulouse cedex 4 irem@cict.fr	Françoise BACHELARD 05 61 55 68 83	05 61 55 82 58	André ANTEI 05 61 55 68 83 antei@cict.fr
La Réunion	IREM de La Réunion IUFM de La Réunion IREM allée des Algues marines Bellevue 97487 Saint-Denis	tél et télécopie 0262 90 43 71	0262 90 43 71	directeur : Dominique TOURNES tournes@ univ-reunion.fr directeur adjoint : Béa BUTZ butz.eci@wanadoo.fr
Antilles-Guyane	IREM Antilles-Guyane Univ. des Antilles et de la Guyane Campus de Fondilole 97189 Pointe à Pitre (Guadeloupe) irem.Antilles-Guyane@ univ-ag.fr Pages : http://www.univ-ag.fr/irag/irem	05 90 48 92 02	05 90 48 92 76	Jean-André MARTI Jean-Andre.Marti@ univ-ag.fr
Antilles	IREM Section Guadeloupe Jean Bichara Lycée de Baimbridge 97139 Abymes	05 90 83 46 84		Jean BICHARA
Antilles	IREM Section Martinique Loïc Sineau Bât. de l'IUFM 97262 Fort-de-France	0596 61 50 20	0596 61 50 20	Loïc SINEBAU
Antilles	IREM Section Guyane			

Table des matières

Préface	i
Avant Propos	iii
1 La géométrie vectorielle	1
<i>Michel Ballieu et Marie-France Guissard</i>	
2 Le cube en famille	9
<i>Guy Noël</i>	
2.1 Introduction	9
2.2 Rappels et notations	10
2.3 L'orbite d'un point	10
2.4 paramétrisation	13
2.5 La famille du cube	15
2.5.1 Le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ est-il plan?	17
2.5.2 Les quadrilatères gauches disparaissent-ils?	18
2.5.3 D'autres possibilités	19
2.6 Des polyèdres archimédiens	23
3 La Sorcière d'Agnesi	29
<i>Pierre Lecomte</i>	
3.1 Introduction	29
3.2 Les transformations A et A^{-1}	31
3.2.1 Définitions	31

	3.2.2	<i>Expressions analytiques.</i>	32
3.3		<i>Transformées de droites.</i>	33
	3.3.1	<i>Transformation directe.</i>	33
	3.3.2	<i>Transformation inverse.</i>	36
3.4		<i>Annexe Historique.</i>	38
4		La géométrie élémentaire, une science physique ?	43
		<i>Rudolf Bkouche</i>	
4.1		<i>Introduction.</i>	43
4.2		<i>Mathématiques et physique dans le corpus aristotélicien.</i>	45
4.3		<i>Géométrie et corps solides.</i>	46
4.4		<i>Géométrie et Mécanique.</i>	49
4.5		<i>Mathématiques pures et mathématiques mixtes.</i>	50
4.6		<i>Le séisme non-euclidien.</i>	53
4.7		<i>De Riemann à Einstein.</i>	56
4.8		<i>Géométrie physique et Géométrie mathématique</i>	59
4.9		<i>Quelques considérations didactiques.</i>	60
5		Problèmes de lieux-Problèmes de Constructions	67
		<i>Bernard Destainville</i>	
5.1		<i>Introduction.</i>	67
5.2		<i>Une construction avec discussion.</i>	68
5.3		<i>Une construction par deux méthodes.</i>	69
5.4		<i>Deux lieux géométriques.</i>	70
5.5		<i>Un lieu géométrique par double inclusion.</i>	71
5.6		<i>Conclusion.</i>	73
6		Pourquoi les aires ?	75
		<i>Henry Plane</i>	
6.1		<i>Historique.</i>	75
6.2		<i>Piste élémentaire.</i>	76
	6.2.1	<i>Pour bien distinguer aire et périmètre.</i>	76
	6.2.2	<i>Sommes de carrés.</i>	77
	6.2.3	<i>Un peu d'arithmétique avec du quadrillage.</i>	77
6.3		<i>Retour à Euclide.</i>	79
	6.3.1	<i>N'oublions pas le terme rectangle.</i>	79

6.3.2	Mais il y a également les inégalités.	79
6.3.3	Equations.	80
6.4	<i>Rectangle, triangle, rapport de longueurs.</i>	82
6.4.1	Théorème du papillon.	82
6.4.2	Et Pythagore?	82
6.4.3	Les milieux	83
6.4.4	Une extension.	85
6.4.5	Applications : les médianes d'un triangle.	85
6.5	<i>Produit de rapports ou rapport de produits.</i>	85

7 La géométrie au service des corps flottants 91

Frédéric Vivien, Luc Sinègre

7.1	<i>Introduction.</i>	91
7.2	<i>Historique.</i>	91
7.3	<i>Autour de l'équilibre.</i>	93
7.4	<i>Le métacentre et la courbe de GZ.</i>	95
7.5	<i>La courbe métacentrique.</i>	97
7.6	<i>Le théorème de Bouguer.</i>	98

8 Premiers niveaux de difficulté dans l'étude des lieux 103

Luc Sinègre

8.1	<i>Introduction.</i>	103
8.2	<i>Premiers Problèmes.</i>	104
8.2.1	Lieux élémentaires.	105
8.2.2	Lieux simples.	107
8.3	<i>Rappel Historique.</i>	107
8.4	<i>Réversibilité des guidages.</i>	111
8.4.1	Un cercle partiel?	111
8.4.2	Une application complexe.	113

9 Le paralléloplane 117

Thierry Hamel

9.1	<i>Enoncé original du problème.</i>	117
9.2	<i>Généralisation</i>	118
9.3	<i>Démonstration élémentaire</i>	119
9.4	<i>Approche analytique</i>	120

9.5	<i>Point de vue barycentrique</i>	123
10	Construction du quadrilatère de Ptolémée	127

Thierry Hamel, Luc Sinègre, Frédéric Vivien

10.1	<i>Introduction.</i>	127
10.2	<i>Analyse.</i>	128
10.3	<i>Synthèse.</i>	130
11	Trois exemples pour illustrer la démarche expérimentale avec Cabri	133

Jean-Jacques Dahan

11.1	<i>Introduction.</i>	133
11.2	<i>La propriété caractéristique de Pythagore.</i>	134
11.2.1	Présentation du montage.	134
11.2.2	Protocole expérimental.	135
11.2.3	Traitement inductif des données.	136
11.2.4	Validation dans le micromonde Cabri.	136
11.2.5	Compléments sur le montage expérimental utilisé.	137
11.2.6	Conclusion.	138
11.3	<i>Promenade aléatoire sur une grille</i>	138
11.3.1	Objectifs de la simulation avec son protocole expérimental.	138
11.3.2	Vers un traitement statistique.	143
11.3.3	Conclusion	144
11.4	<i>Déroulement de la résolution de la boîte noire.</i>	144
11.4.1	Entrée en matière.	144
11.4.2	Proposition du problème.	144
11.4.3	Première attaque.	145
11.4.4	Seconde attaque.	146
11.4.5	La piste des points invariants.	147
11.4.6	Retour à des recherches d'images de droites.	148
11.4.7	Retour à des recherches d'images de cercles.	150
11.4.8	Une dernière construction-investigation.	153
11.4.9	Quelques remarques pour conclure.	153

12	Chercher avec Cabri	159
----	----------------------------	-----

Michel Carral

12.1	<i>Introduction.</i>	159
12.2	<i>Premières observations et énoncé de l'exercice.</i>	160
12.3	<i>Recherche des autres points. Première conjecture.</i>	163
12.4	<i>Une autre expérimentation. Deuxième conjecture.</i>	164

12.5 <i>Etude de la variation du rapport en fonction de l'éloignement du centre du cercle circonscrit.</i>	164
12.6 <i>Troisième Conjecture.</i>	166
12.7 <i>Détermination du lieu. Quatrième conjecture.</i>	167
12.8 <i>Aire définie par le centre du cercle inscrit.</i>	168
12.9 <i>Point de Lemoine.</i>	168
12.10 <i>Recherche analytique.</i>	169
12.11 <i>Conclusion.</i>	173
12.12 <i>Pour aller plus loin.</i>	174
Les participants au Colloque.	181
Les adresses des IREM.	183

Commission Inter-IREM GÉOMÉTRIE

ACTES DU COLLOQUE DE LIÈGE

15, 16, 17 Mai 2003.

Mots clés :

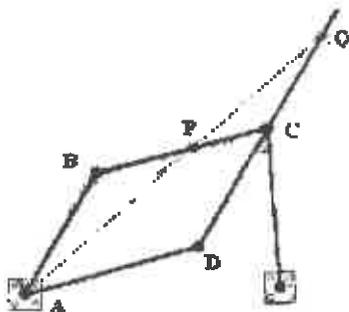
Aires, Agnesi, Cabri, Calcul vectoriel, Conique, Conjecture, Cubique d'Agnesi, Démonstration, Ensemble de points, Géométrie-Physique, Géométrie projective, Hyperbole, Lemoine, Lieu, Mécanique, Menelaus, Métacentre, Paramétrisation, Physique, Promenade aléatoire, Pythagore, Rotation.

Résumé :

La Géométrie se trouve aujourd'hui dans une étrange situation : elle n'a plus comme au temps des mathématiques modernes à lutter pour défendre son existence même; elle est reconnue (cf commission Kahane) et son rôle est valorisé. Mais sa place, encore importante au Collège, ne fait que s'amenuiser au Lycée, tant en France qu'en Belgique.

Si elle joue un rôle de nouveau essentiel dans les mathématiques vivantes, la Géométrie apparaît désormais comme une discipline mixte propre à interpréter, traduire ou représenter des systèmes ou des espaces abstraits, et non comme une discipline autonome, école du raisonnement et de la rigueur. Ce sont donc les rapports qu'elle entretient avec le monde réel et le monde physique qui font la question primordiale. Question primordiale pour les grecs anciens, comme pour les mathématiciens contemporains. Question primordiale pour enseigner, découvrir et démontrer.

Essayer de répondre à ces divers changements est l'un des seuls moyens pour espérer plaider efficacement la cause de la Géométrie dans l'enseignement secondaire, et par-là même sauver aussi ses qualités passées. C'est ce que ce colloque a essayé de faire.



ISBN 2-86239-088-7
Édition : IREM de REIMS
23, rue Clément Ader
BP 175
51685 Reims cedex 2
irem@reims.iufm.fr
03 26 77 99 48
15 €.

Dehors de couverture : recto : POINCARÉ (Henri), La Mécanique Nouvelle, Conférence, Histoire et Note sur la Théorie de la Relativité Gauthier-Villars Paris (1924). Elle illustre la "dualité" entre les résultats de Einstein et de Poincaré, pour l'application du groupe de Lorentz à la propagation des ondes. verso : KEMPE (Alfred. Bray). How to draw a straight line. A lecture on linkages (1877).