

IREM DE REIMS

Moulin de la Housse

51100 REIMS

Tél : 26 85 12 21

JEAN PIAGET

et les

MATHEMATIQUES AU COLLEGE

PAR Michèle et André ARSENE (Animateurs)

Ont contribué également à la rédaction de ce fascicule

Marie-Claude AMAND

Jacques BALESI

Evelyne DEPOMMIER

Jean-Jacques POIGNANT

Marie-José SADIN

2ème EDITION 1986-1987



UNIVERSITE DE REIMS

Moulin de la Housse

51100 REIMS

Tél : 26 85 12 21

JEAN PIAGET

et les

MATHEMATIQUES AU COLLEGE

PAR Michèle et André ARSENE (Animateurs)

Ont contribué également à la rédaction de ce fascicule

Marie-Claude AMAND

Jacques BALESI

Evelyne DEPOMMIER

Jean-Jacques POIGNANT

Marie-José SADIN

2ème EDITION 1986-1987

TABLE DES MATIERES

<u>Chapitre 0</u>	Introduction
<u>Chapitre 1</u>	Qui est Piaget ?
<u>Chapitre 2</u>	Faut-il brûler Piaget ?
<u>Chapitre 3</u>	Vocabulaire - Théorie
<u>Chapitre 4</u>	Avant le collège : les opérations concrètes
<u>Chapitre 5</u>	Le collège : Les opérations formelles
5-1	Evolution de la pensée de l'enfant
5-2	Pensée concrète et pensée formelle
5-3	Un exemple : combinaison de deux facteurs
5-4	Le groupe I N R C
5-5	Pensée naturelle et pensée formelle
<u>Chapitre 6</u>	les mathématiques au collège.
6-1	Transitivité - Implication - Géométrie
6-2	Proportionnalité
6-3	Les vecteurs
6-4	Opérations dans D en 6ème et 5ème
6-5	Géométrie en 6ème - 5ème
6-6	Géométrie en 4ème - 3ème
<u>Chapitre 7</u>	Piaget et la didactique
<u>Conclusion</u>	
<u>Bibliographie</u>	

A V E R T I S S E M E N T

Le document présenté ici a été réalisé grâce au travail d'un groupe actif

C'est ce qui fait son importance et sa variété.

Il peut manquer parfois d'unité mais nous avons voulu respecter les écrits de chacun des rédacteurs, afin de ne pas les dénaturer.

Il ne s'agit ni d'un livre de spécialiste ni d'une thèse, mais plutôt d'une réflexion collective s'appuyant sur les recherches d'un grand psycho-pédagogue.

INTRODUCTION

Si l'on désire comme le besoin s'en fait de plus en plus sentir, former des individus capables d'inventions et de faire progresser la société de demain, il est clair qu'une éducation de la découverte active du vrai est supérieure à une éducation ne consistant qu'à dresser les sujets à vouloir par volontés toutes faites et à savoir par vérité simplement acceptées.

J. Piaget. [PP] 1969

la vérité ne peut-être versée d'un esprit dans l'autre.....

les cours magistraux sont temps perdu.....

il arrive que les maitres..... se plaisent à discourir et les élèves ne se plaisent pas moins à écouter, c'est la ruse de la paresse.

Alain. [NO]

Alain et Piaget, qui n'ont pas la même philosophie de l'enseignement, sont au moins d'accord sur ce point :

pour que l'enseignement porte ses fruits, il doit faire appel à l'activité de l'élève.

Le professeur qui s'agite au tableau en débitant un discours aux meilleurs, ne peut que favoriser ou même engendrer l'échec scolaire. Il ne peut en être autrement car les élèves plus lents ou déjà en difficulté ne peuvent suivre efficacement quelque discours que ce soit. Il leur faut agir intellectuellement et être guidé individuellement. Ils ont besoin de prendre leur temps s'ils veulent avoir une chance d'intégrer l'enseignement qu'on leur impose.

Si l'on ajoute à cela les philosophies absurdes de certains parents ou pseudo-pédagogues qui disent "c'était comme ça, il n'y a pas de raison que ça change" ou bien "on en a bavé, ils en baveront", on comprend que l'échec scolaire ait pris de telles proportions.

Nous pensons d'autre part que la pédagogie est d'abord un instrument au service des élèves et non un accessoire du métier d'enseignant, qui doit d'abord convenir à l'enseignant lui-même.

Jean Piaget qui, ne l'oublions pas, est apparu en 1955 aux Etats-Unis comme le prophète de l'éducation, nous a semblé un guide de grande valeur pour nous aider à comprendre et à agir.

Et le fait qu'il se soit, pendant toute sa vie de chercheur, entouré des plus grands spécialistes mondiaux de toutes les disciplines, nous incite à le suivre dans ses théories.

CHAPITRE I

JEAN PIAGET

Naissance à Neufchatel en 1896

de 1911 à 1921 on trouve déjà des études de biologie, philosophie, psychologie. Il dit :

"...mon but qui était de découvrir une sorte d'embryologie de l'intelligence était adapté à ma formation biologique; dès les débuts de mes réflexions théoriques j'étais convaincu que le problème des relations entre organisme et milieu se posait aussi dans le domaine de la connaissance, apparaissant alors comme le problème des relations entre le sujet agissant et pensant et les objets de son expérience..."

ces phrases pourraient constituer une définition, ou une approche de ce que Piaget appelle l'épistémologie génétique.

à partir de 1921 Piaget se consacre aux recherches sur la connaissance et la pensée chez l'enfant puis plus tard (1925-35) il s'intéresse au développement de l'intelligence chez l'enfant.

Selon lui : *"l'intelligence constitue un état d'équilibre vers lequel tendent toutes les adaptations successives d'ordre sensorimoteur et cognitifs, ainsi que tous les échanges entre l'organisme et le milieu"*.

autrement dit l'intelligence est la capacité d'adapter son comportement aux modifications du milieu.

Cela dit, les définitions de l'intelligence sont nombreuses.

On peut rappeler celle de Binet, l'inventeur du test de QI :

" l'intelligence, c' est ce que mesure mon test"

Depuis il semble acquis qu'il faille parler d'intelligences au pluriel car elles se manifestent souvent dans des domaines précis, électivement par rapport à d'autres.

En fait Piaget a touché à tout :

On trouve des publications dans beaucoup de domaines : Biologie - Sociologie - Pédagogie, psychologie, philosophie, logique, épistémologie.

Il va mettre à profit toutes ces études dans ses recherches sur l'évolution et le développement de l'enfant en ce qui concerne le langage, le raisonnement, le jugement, etc...

Mais le fait majeur de toute cette époque c'est le développement d'une technique nouvelle d'investigation psychologique :

- la méthode clinique (ou critique) Elle se distingue des autres méthodes, qui, en général, ne tiennent compte que de l'individu étudié pour lui-même, utilisant les tests et le questionnaire.

Ici l'accent est mis sur la relation chercheur sujet.

Piaget utilise l'entretien psychologique en psychiatrie, le dialogue avec le sujet qui permet de moduler les questions en fonction des réponses, afin de cerner plus précisément la pensée de l'enfant.

D'autre part, cette technique visait à chercher chez l'individu des conduites généralisables à tous, et non à faire en quelque sorte une psychanalyse du sujet.

Un important matériel expérimental est mis en oeuvre (voir les différentes expériences dans les livres).

La méthode étudie donc l'expérimentateur, le sujet et le matériel en interaction, et comment le sujet réagit à son environnement et agit sur lui.

Ainsi sont mis en évidence les stades de développement de l'enfant.

3 grands stades :

- stade sensori-moteur : avant 2 ans.
- stade des opérations concrètes : avant 11 - 12 ans.
- stade des opérations formelles : après 12 ans.

et nous arrivons vers 1930 à des recherches qui nous intéressent directement puisqu'elles concernent les mathématiques :

- activités logico-mathématiques
- notions de physique
- notion sur l'espace, le temps, le hasard

Enfin le gros morceau à partir de 1949 que toutes les études précédentes préparaient :

- introduction à l'épistémologie génétique

" on pourrait définir l'épistémologie génétique d'une façon plus large et plus générale comme l'étude des mécanismes de l'accroissement des connaissances. Le caractère propre de cette discipline consisterait alors à analyser, dans tous les domaines intéressant la genèse ou l'élaboration des connaissances scientifiques, le passage des états de moindre connaissance aux états de connaissance plus poussée".

Pour résumer : Comment l'enfant fait-il pour progresser, comment se fait-il qu'il soit capable de comprendre aujourd'hui ce qu'il ne pouvait comprendre hier et quel est le processus de cette évolution ?

C'est précisément l'objet d'étude de l'épistémologie génétique.

Or qu'observons-nous dans nos classes ?

Des notions sont comprises par certains élèves alors que d'autres en sont incapables malgré les efforts que l'on peut déployer.

Leurs structures mentales ne semblent pas prêtes à intégrer ces notions. Bien sûr il faut considérer les intérêts, la structure familiale, les relations professeur-élève, voire le vécu de l'enfant qui influence à coup sûr les désirs, les choix et les blocages.

Pour des enfants sans trop de problèmes, il semble évident que leur évolution mentale ne se fasse pas en même temps, au même moment, il peut y avoir plusieurs années de décalage.

Mais l'essentiel pour nous est de pouvoir localiser leurs domaines d'aptitudes et de trouver leurs limites afin de réaliser un enseignement optimum.

Les études de Piaget peuvent-elles nous aider à répondre à nos préoccupations d'enseignants grâce à :

l'étude des stades

l'épistémologie génétique ?

C'est ce que nous proposons de chercher au cours de ce stage.

CHAPITRE 2

PIAGET or not PIAGET

Très vite en abordant notre étude, nous avons découvert la difficulté du travail qui nous attendait :

- 1 - la littérature piagétienne est immense
- 2 - la littérature piagétienne est difficile
- 3 - Piaget est contesté par certains auteurs
- 4 - le simple fait de prononcer le nom de Piaget devant certaines personnes ou certains enseignants provoque le sourire ou l'étonnement, voire l'agressivité.

Tout ceci prouve que Piaget a laissé derrière lui un sillage non effacé par le temps.

Demeurées incomprises par beaucoup de gens, ses théories ont tout à la fois créé des doutes ou des angoisses, pour autant qu'on ait essayé et réussi à le lire, mais aussi ouvert les esprits à d'autres idées, justes ou moins justes, c'est à chacun de juger.

Avant de passer aux mathématiques nous tenons à dire quelques mots du livre de David COHEN :

"Faut-il brûler Piaget", qui tente de mettre en lumière les défauts de la théorie piagétienne.

Il n'est pas question ici de faire une analyse critique complète de ce livre mais nous estimons qu'il est indispensable d'en parler de façon à ce que chaque lecteur de ce document sache que nous ne faisons pas des écrits de Piaget une panacée, qu'ils sont peut-être quelquefois critiquables, mais que nous en sommes conscients et que nous acceptons certaines de ses idées dans la mesure où elles semblent entrer en correspondance avec notre expérience et notre réflexion.

D'après D. Cohen, Piaget demeure actuellement "la" référence en ce qui concerne l'évolution intellectuelle de l'enfant. Français, Américains, Anglo-saxons s'en sont largement inspirés.

Même en ce qui concerne les études sur l'humour, l'américain Paul Mc Ghee reconnaît que les résultats de Piaget constituent les fondations de son édifice, et Chris Athey constate que 91% des histoires drôles que se racontent les

enfants rentrent dans le cadre des étapes (stades) décrites par Piaget. En matière de pédagogie, il est à la source de beaucoup de changements et, comme Maria Montessori, met en lumière la valeur du jeu qui permet à l'enfant, par son côté symbolique, d'intégrer le réel au moi, sans contrainte ni sanction.

Alors que reproche-t-on à Piaget ?

Voici quelques critiques formulées par ceux qui le considèrent malgré tout comme leur maître :

- il s'attache au seul aspect cognitif de la pensée et néglige l'aspect affectif. (remarquons que Freud fait un peu le contraire)
- il ramène le comportement à la seule logique
- il néglige l'influence du milieu social ou culturel de l'enfant
- son système de stades est organisé autour d'une logique hypothético-déductive pure, c'est-à-dire qu'il ne considère dans ses critères de développement que des principes fondés sur les progrès en logique mathématique.
- Piaget n'accorde à l'environnement qu'un rôle très limité

Toutes ces critiques (et Cohen se ramène toujours à celles-ci) concernent le fait que Piaget ne fait intervenir dans ses études sur l'évolution de l'enfant, ni l'aspect affectif, ni l'influence de la société.

On lui reproche de fonder toutes ses démonstrations sur la logique et l'aspect cognitif pur.

Il est certain que lors d'une étude psychologique de l'enfant, et surtout si on prétend émettre une théorie générale de l'évolution, tous les aspects de la vie sont à prendre en compte car ils influencent tous à un certain degré le devenir et la maturité de l'enfant.

Mais Piaget ne traite pas de la psychologie de l'enfant en général. Depuis toujours son but est l'épistémologie génétique et non la psychologie. Il ne nie pas l'influence de l'affectif et du social mais essaie au contraire de trouver, au cours de l'évolution de l'enfant, ce qui ne dépend pas de l'affectif et du social, pour ne conserver que les aspects génétique et neurologique. Il le dit :

Pour Piaget, il ne suffit pas d'ordonner chronologiquement quelques conduites apparemment particulièrement typiques du comportement de l'enfant à un âge donné. Il pose un certain nombre de conditions,

auxquelles la description du développement doit suffire, pour se donner le droit de parler de stade ; il faut :

- 1 - que la succession des conduites soit constante, indépendamment des accélérations ou des retards qui peuvent modifier les âges chronologiques moyens (note : on distingue donc toujours en psychologie l'âge chronologique et l'âge mental) en fonction de l'expérience acquise et du milieu social (comme des aptitudes individuelles) ;
- 2 - que chaque stade soit défini, non pas par une propriété simplement dominante, mais par une structure d'ensemble caractérisant toutes les conduites nouvelles propres à ce stade ;
- 3 - que ces structures présentent un processus d'intégration, tel que chacune soit préparée par la précédente et s'intègre dans la suivante.

[DRO - p. 86]

c'est sa position. Elle est peut-être étroite comme le dit D. Cohen, mais elle a au moins un mérite, celui d'éliminer des variables propres à chacun, pour pouvoir en observer d'autres qui, d'après lui, sont communes à tout être humain.

Autre critique :

"..ses expériences tendent à vérifier ses idées plutôt qu'à les tester..."

Il est bien évident que Piaget n'énonce pas des idées sans savoir pourquoi. Il a beaucoup observé les enfants et notamment les siens, et a ainsi formulé des hypothèses. La phrase ci-dessus est probablement vraie mais on peut se demander en quoi cette méthode est répréhensible.

On peut répondre à D. Cohen que sa méthode à lui, vise davantage à critiquer les idées de Piaget plutôt qu'à les vérifier.

Plus loin il dit :

"...Piaget essaie rarement devant l'échec de proposer à nouveau l'épreuve..."

Cet argument vient du fait qu'il reproche à Piaget et ses collaborateurs de ne pas toujours employer un langage compréhensible pour les enfants.

c'est possible, il aurait fallu assister à des entretiens pour pouvoir juger. Cependant lorsqu'on lit le livre sur la géométrie spontanée de l'enfant par exemple, on se rend compte de toutes les précautions que prennent Piaget et ses collaborateurs pour employer un langage clair et à la portée des enfants.

Mais (comme le font D. Cohen et certains chercheurs) si on répète suffisamment l'épreuve, on crée alors un conditionnement qui fait que les résultats obtenus ne concernent plus l'aspect cognitif pur, comme le veut Piaget.

Autre critique :

Piaget pense que le bébé est essentiellement égocentrique.

Bruner pense que c'est faux. Voilà ses arguments :

- 1 - Bruner prouve que le bébé accorde beaucoup d'attention à la mère. Il sait capter son attention etc...
- 2 - le bébé a une certaine conscience de l'existence des autres (expérience à l'appui).

Ces arguments ne sont pas en contradiction avec le fait que les bébés soient égocentriques, d'ailleurs la conscience de l'existence des autres est une condition à la conscience de sa propre existence. Un bébé ne peut se prendre pour le centre du monde que s'il a conscience de ce monde et peut le manipuler. S'il capte l'attention de sa mère, c'est dans l'espoir d'un retour.

Autre critique :

ce n'est pas la logique qui manque aux jeunes enfants (comme le croit Piaget) mais la compréhension du langage (d'après les critiques).

Ceci est possible et il n'est pas question de dire que toutes les expériences de Piaget ont été menées de façon compréhensible pour les enfants. Ceci dit, Piaget montre justement que la logique s'élabore au fur et à mesure de l'intégration du réel. Et d'autre part les contre-expériences présentées par Cohen ne sont guère plus convaincantes, surtout lorsqu'elles intercalent des apprentissages entre deux tests semblables.

Dernière critique :

Piaget sous-estimerait le petit enfant et surestimerait les plus grands (stade III).

C'est possible mais pas évident à prouver. Il est un fait que lorsqu'on observe des jeunes enfants on est souvent étonné de leurs répliques, même parfois de leurs raisonnements. Mais il est très difficile de savoir quels sont les processus mis en oeuvre. Ce peut être le conditionnement, l'imitation, la précocité. S'agit-il véritablement d'une logique ? qui sait ?.

Enfin nous pouvons ajouter :

Tout est critiquable et l'on trouve dans toute chose ce que l'on veut bien y trouver, on y voit ce que l'on veut bien y voir. Chacun sait le rôle de l'inconscient et du vécu dans cette affaire.

On peut, bien entendu se poser des questions à propos de la validité des expériences de Piaget, compte-tenu que les résultats d'une expérience (ou d'un test) dépendent d'une foule de chose : milieu social du testé, milieu social du testeur dont les questions ou les situations qu'il propose sont conditionnées par son vécu, relation testeur-testé, idées inconscientes du résultat. Bref ! toute relation humaine concernant un couple et même ici un triplet puisqu'il faut considérer le matériel utilisé, est un cas particulier. Il aurait fallu également mentionner l'influence des facteurs temps et espace dans lesquels se déroule l'expérience, qui peuvent influencer celle-ci.

Or ce qui nous intéresse, nous, concerne bien l'aspect cognitif des choses et aussi de savoir pourquoi un enfant sait faire aujourd'hui ce qu'il ne comprenait pas hier. Ceci ne dépend ni de l'affectif ni du social car pour les élèves du premier cycle tout est joué, heureusement pour certains, malheureusement pour d'autres.

La théorie piagetienne répond donc à nos préoccupations et nous décidons de l'étudier.

CHAPITRE 3

VOCABULAIRE et THEORIE

Intelligence

voir chapitre 1

Epistémologie génétique

voir chapitre 1

Perception et action

Une expérience cruciale peut être citée à cet égard : celle d'Ivo Kohler sur les sujets qui, pourvus de lunettes à miroirs renversant les objets de 180° redressent ceux-ci au bout de quelques jours (au point de circuler à bicyclette dans les rues d'Innsbruck avec ces lunettes sur le nez !). Rien ne montre mieux comment la perception visuelle peut être influencée par l'action entière, avec action rétroactive de la motricité sur la perception et coordination des claviers visuels et tactilo-kinesthésiques.

Partant de telles prémisses nous défendrons les hypothèses suivantes. Nos connaissances ne proviennent ni de la sensation ni de la perception seules, mais de l'action entière dont la perception ne constitue que la fonction de signalisation. le propre de l'intelligence n'est, en effet, pas de contempler mais de "transformer", et son mécanisme est essentiellement opératoire. Or, les opérations consistent en actions intériorisées et coordonnées en structures d'ensemble (réversibles, etc.) et si l'on veut rendre compte de cet aspect opératoire de l'intelligence humaine, c'est donc de l'action même et non pas de la perception seule qu'il convient de partir.

On ne connaît, en effet, un objet qu'en agissant sur lui et en le transformant (de même que l'organisme ne réagit au milieu qu'en l'assimilant, au sens le plus large de ce terme). Et il est deux manières de transformer ainsi l'objet à connaître. L'une consiste à modifier ses positions, ses mouvements ou ses propriétés pour en explorer la nature : telle est l'action que nous appellerons "physique". L'autre consiste à enrichir l'objet de propriétés ou relations nouvelles qui conservent ses propriétés ou relations antérieures mais en les complétant par des systèmes de classements, d'ordinations, de mises en correspondance, de dénombrements ou mesures, etc. : telles sont les actions que nous appellerons logico-mathématiques. Ce sont alors ces deux sortes d'actions, et non pas seulement les perceptions leur servant de signalisation,

qui constituent les sources de nos connaissances scientifiques.

Action et Opérations concrètes et formelles

Mais il faut savoir que les termes "ACTION" et "OPERATION" ne sont pas strictement équivalents pour Piaget. Le terme action désigne effectivement ce que le sujet fait, son comportement observable. Le terme opération, par contre, désigne un type d'action qui présente les propriétés suivantes : il peut être intériorisé (cela veut dire que le sujet, au lieu d'effectuer réellement l'action, peut la penser dans sa tête), il est réversible (ce qui veut dire que l'opération est un type d'action qu'on peut non seulement faire, mais aussi défaire ; on peut donc renverser l'effet d'une opération), et finalement l'opération fait partie de ce que Piaget appelle une structure d'ensemble. Cela veut dire que les opérations ne possèdent pas seulement une opération inverse ou réciproque (puisque'elles sont réversibles), mais encore que des opérations tendent à s'articuler entre elles, de façon à former un système d'opération ou justement une structure d'ensemble .Si nous pouvons faire et défaire quelque chose, nous pouvons souvent obtenir l'effet de "faire" en passant par un détour ou par une autre voie, par exemple : il va sans dire que l'opération (puisque'elle peut être intériorisée) peut aussi bien porter sur des objets réels (ou concrets) que sur des objets ou concepts ou propositions abstraits (donc des objets formels). Par ailleurs, il est également assez évident que l'opération peut aussi bien consister à combiner des objets entre eux, à les déplacer ou à transformer des objets.

Piaget a coutume de distinguer entre les opérations concrètes et les opérations formelles. Les deux types d'opérations présentent les mêmes propriétés : il s'agit chaque fois d'actions réversibles, intériorisables et intégrées à une structure d'ensemble. mais les premières restent liées, comme leur nom l'indique d'ailleurs, à un substrat concret, donc des objets réels ; en plus, le sujet qui fonctionne au niveau de ces opérations concrètes est limité dans la complexité des systèmes qu'il peut articuler et il paraît incapable d'articuler des univers composés d'objets quelconques. Il a, en effet, besoin d'une certaine parenté entre les objets qui constituent son univers d'action, cette parenté devant pré-exister à son action sur l'univers. A cet égard la logique des opérations concrètes n'apparaît donc pas comme une simple structure formelle (indépendante du contenu éventuel dont on voudrait la remplir) ou mathématique (que l'on peut essayer d'appliquer à n'importe quel contenu), mais comme une logique particulière qui tient à la fois compte des opérations et du contenu.

Les opérations formelles, par contre, apparaissent comme une structure "pure" indépendante de supports concrets et applicable à n'importe quel contenu. Le niveau des opérations concrètes est le niveau de fonctionnement typique des enfants de 7-8 à 11-12 ans, tandis que les opérations formelles se construisent à partir de 11-12 ans jusque vers 14-15 ans.

LP

Schème

Piaget appelle "schème" des "ensembles organisés de mouvements" ou d'opérations. Le jeune enfant dispose par exemple de schèmes moteurs (prendre, tirer, pousser, sucer, etc..) tandis que l'enfant au niveau des opérations concrètes dispose (en plus) de schèmes opératoires (tels que classer, sérier, dénombrer, mesurer) qu'il acquiert et développe peu à peu.

LP

Assimilation - accommodation - équilibration

En d'autres termes, l'équilibration permet au sujet de se réadapter au réel lorsque celui-ci se modifie d'une quelconque façon ; le sujet compense ces modifications par des réglages qui interviennent soit de façon rétroactive (c'est-à-dire qu'ils entrent en fonction lorsque la modification a déjà eu lieu : "feed-back") ou de façon anticipatrice (c'est-à-dire qu'ils entrent en jeu pour prévenir une modification du milieu prévue ou anticipée par le sujet : "feed-forward").

Les textes antérieurs de Piaget, moins explicites, permettent d'arriver à une interprétation semblable ou à l'une ou l'autre des interprétations suivantes :

- 1 - L'équilibre ou équilibration est vue comme une tendance à réagir aux modifications de l'environnement (et non comme un mécanisme pour y réagir) ce qui en ferait une sorte de mécanisme énergétique du développement (motivation à agir) ;
- 2 - L'équilibre n'apparaît pas seulement comme un facteur de compensation entre le sujet et le milieu, mais aussi comme un mécanisme de correction de perturbations intérieures au sujet (ex. insuffisances du milieu social compensé par l'activité autonome du sujet, etc...) ;
- 3 - L'équilibration apparaît comme un nouveau facteur de développement, produit de l'interaction des facteurs hérédité, action du milieu et action sur le milieu ;
- 4 - Dans la mesure où elle apparaît comme cause ou comme explication du passage d'un niveau opératoire à un niveau

opérateur supérieur (passage des opérations concrètes aux opérations formelles, p ex.), l'équilibration pourrait être interprétée comme un facilitateur de la finalité du développement

- 5 - Finalement nous pourrions interpréter l'équilibration comme une tendance du sujet à résoudre les dissonances cognitives (au sens de Festinger) ; etc..

Ces perspectives, un peu hasardeuses en partie , devraient montrer au lecteur le pluralisme interprétatif qui peut se dégager des positions successives de Piaget et l'encourager à coordonner lui-même les points de vue, avant de se laisser fixer par une interprétation unique, conditionnée par l'époque et le contexte de sa publication.

Lorsque Piaget parle d'adaptation il distingue, en général, deux mécanismes à la fois antagonistes et complémentaires : l'ASSIMILATION et l'ACCOMMODATION. L'assimilation consiste à intégrer un nouvel objet ou une nouvelle situation à l'ensemble des objets ou situations auxquels une conduite existante est déjà appliquée. Ainsi le "schème" de préhension (conduite consistant à prendre un objet avec les mains) est peu à peu appliqué à toutes sortes d'objets et la catégorie des objets "préhensibles" s'enrichit de plus en plus. Inversement et simultanément le sujet est forcé par les contraintes du réel (objets grands et petits, anguleux ou arrondis, lourds et légers, etc., dans notre exemple) de modifier son "schème" de préhension pour pouvoir effectivement prendre l'objet : la façon de prendre, le mouvement des doigts, la force à exercer, etc.. doivent être adaptés aux contingences matérielles de l'objet. Ce processus d'accommodation enrichit donc un "schème" d'action en le rendant plus flexible et plus universel . Il paraît évident que dans le cas normal le processus d'adaptation nécessite un certain équilibre interne au sujet entre l'accommodation et l'assimilation. Si, en effet, l'assimilation l'emporte sur l'accommodation l'enfant enrichit bien les ensembles d'objets auxquels une conduite peut s'appliquer, mais la conduite elle-même ne se différencie que de façon insuffisante, ce qui conduit à une adaptation peu satisfaisante. Et inversement, si l'enfant ne fait qu'accommoder ses conduites aux situations locales, mais sans s'assimiler les contenus auxquels elles s'appliquent, il ne parviendra pas à enrichir et à approfondir son champ de connaissances. Nous verrons cependant qu'il existe des conduites d'un niveau supérieur au simple comportement moteur où l'un ou l'autre des aspects peut passagèrement l'emporter dans des situations particulières (dominance de l'accommodation dans les jeux d'imitation, dominance de l'assimilation dans le jeu symbolique).

Les stades

Le problème des stades

Pour Piaget, il ne suffit pas d'ordonner chronologiquement quelques conduites apparemment particulièrement typiques du comportement de l'enfant à un âge donné. Il pose un certain nombre de conditions, auxquelles la description du développement doit suffire, pour se donner le droit de parler de stades ; il faut :

- 1 - que la succession des conduites soit constante, indépendamment des accélérations ou des retards qui peuvent modifier les âges chronologiques moyens (note : on distingue donc toujours en psychologie l'âge chronologique et l'âge mental) en fonction de l'expérience acquise et du milieu social (comme des aptitudes individuelles) ;
- 2 - que chaque stade soit défini, non pas par une propriété simplement dominante, mais par une structure d'ensemble caractérisant toutes les conduites nouvelles propres à ce stade ;
- 3 - que ces structures présentent un processus d'intégration tel que chacune soit préparée par la précédente et s'intègre dans la suivante.

Il va de soi qu'à ces conditions formelles s'ajoutent des conditions plus pratiques. On ne peut, en effet, pas exiger qu'un stade se présente immédiatement en sa forme la plus évoluée et on distinguera dans la pratique la phase de préparation ou les "processus de formation" et la période d'achèvement ou les "formes d'équilibre finales" (en un sens relatif, bien entendu : de la phase d'équilibre provisoirement atteinte le sujet passera à des niveaux plus élaborés). Ce sont pourtant les formes finales d'équilibre qui définissent, à des niveaux différents, les structures d'ensemble qui caractérisent le comportement du sujet. Nous distinguons donc dans une première approche trois stades essentiels du développement intellectuel de l'enfant, à savoir :

- 1 - le stade du développement sensori-moteur, de la naissance à l'âge de deux ans ;
- 2 - le stade des opérations concrètes, de 2 ans à 11-12 ans ;
- 3 - le stade des opérations formelles qui débute vers 11-12 ans.

Ce dernier postulat d'intégration montre clairement que les stades ne sont pas des "rondelles de salami" empilées les unes sur les autres et sans relations ; mais que l'enfant reconstruit à chaque nouveau stade l'ensemble de ses conduites antérieures à un niveau plus évolué.

Quelques détails sur les stades

Stade I :

réflexe - premières habitudes - premières coordinations - début d'intériorisation des schèmes.

Stade II :

A - (2 à 3-6 ans) représentations préopératoires

- * apparition de la fonction symbolique
- * début d'intériorisation des schèmes d'action

B - opérations concrètes

- * opérations simples (7-8 ans à 9-10 ans)
- * achèvement de certains systèmes (espace - temps etc.)

Stade III :

opérations formelles (11-12 ans à 14-15 ans)

CHAPITRE 4

AVANT LE COLLEGE, LE STADE DES OPERATIONS CONCRETES

Nous ne souhaitons pas nous étendre sur ce stade qui ne fait pas l'objet essentiel de notre étude, mais il nous paraît important de signaler les acquisitions faites par l'enfant juste avant son arrivée au collège puisque le stade II couvre la période qui s'étend de 7-8 ans jusqu'à 11-12 ans.

Nous reprendrons simplement les notions les plus importantes signalées par tous les auteurs qui ont écrit sur Piaget.

4-1 La sériation et les relations asymétriques

"Les sujets de 7 ans savent ordonner sans hésiter une suite de batons $A < B < C$ etc. Mais vers 4-5 ans, ils procèdent par couple $A < C$, $D < B$, etc... sans savoir coordonner ces couples ; vers 5-6 ans, ils les réajustent empiriquement ; enfin vers 6-7 ans ils procèdent systématiquement en choisissant d'abord le plus petit de tous, puis le plus petit de ceux qui restent, etc... Cette dernière méthode suppose donc la multiplication des rapports $B > A$ et $B < C$, qui est acquise sur le plan concret à 7 ans. Mais, sur le plan verbal, une question exactement semblable en sa forme telle que: Edith (B) est à la fois plus claire que Suzanne (C) et plus foncée que Lili (A). Quelle est la plus foncée des trois ? n'est résolue que vers 11-12 ans faute de concilier dans l'abstrait $B > A$ avec $B < C$ ".

[J.E - p 9]

"L'enfant accède à la réciprocity (réversibilité) et à la transitivité de <".

[J.P - p 91]

De cette sériation opératoire acquise vers 7 ans dérivent des correspondances sériales (faire correspondre à des bonshommes de tailles différentes, des cannes également différentes) ou des sériations à deux dimensions (disposer en une table à double entrée des feuilles d'arbre différant à la fois par leurs grandeurs et leurs teintes plus ou moins foncées".

[J.P - p 92]

4-2 La classification et l'emboîtement des classes, ou les relations symétriques

"L'emboîtement des classes, selon leur extension, sera obtenu vers huit ans, c'est-à-dire lorsque l'enfant sera parvenu à découvrir la conservation des quantités en présence"

[J.P - p.93]

4-3 Les groupements

"L'enfant de moins de 7 ans dans son égocentrisme, ne voit lors d'un déplacement que le point d'arrivée. Se libérer de cet égocentrisme, c'est donc entrer dans la voie des compositions réversibles. En effet, en quittant cet égocentrisme, l'enfant passe à la notion de groupement. Il situe l'espace en tant que groupement d'objets. Il est un de ces objets. Il structure l'espace. Alors intervient le repérage. Un déplacement considère alors le point d'arrivée par rapport au point de départ. la notion de réversibilité devient possible. L'identité est perçue comme la composition de l'action directe et de l'action inverse"

[G.S - P 35]

4-4 Le nombre, ou la synthèse des relations asymétriques et des relations symétriques.

"Ce n'est pas parce que l'enfant sait compter verbalement qu'il comprend la notion de nombre".

[J.P - p 97]

"La suite indéfinie des nombres et surtout les opérations de l'addition (et son inverse la soustraction) et de la multiplication (avec son inverse la division) ne sont au contraire accessibles en moyenne qu'après l'âge de 7 ans. Or, la raison en est simple : le nombre est en réalité un composé de certaines opérations précédentes et il suppose par conséquent leur construction préalable. Un nombre entier est, en effet, une collection d'unités égales entre elles, donc une classe dont les sous-classes sont rendues équivalentes par suppression des qualités, mais il est en même temps une suite ordonnée, c'est donc une sériation des relations d'ordre. Sa double nature, cardinale et ordinale résulte ainsi d'une fusion des systèmes d'emboîtements et de sériations logiques et c'est ce qui explique son apparition contemporaine de celles des opérations qualitatives".

[G.E.P-p66]

"la suite des nombres se constitue grâce à des opérations consistant simultanément à additionner de façon inclusive (classe) et à ordonner (sériation) avec l'opération inverse, fournissant la conservation du tout et la sériation fournissant le moyen de distinguer néanmoins une unité de la suivante. Le nombre entier peut ainsi être conçu comme une synthèse de la classe et de la relation asymétrique (ordre), d'où son caractère simultanément ordinal et cardinal"

[G.E.P - p 142]

De même en géométrie :

"la mesure constitue une synthèse de la partition et du déplacement"

[G.S - p 10]

"la mesure des longueurs nous est apparue comme résultat d'une fusion proprement dite entre les opérations de partition et de déplacement"

[G.S - p 162]

"l'unité doit être construite "par découpage du continu" et anticipée comme pouvant être reportée sur les autres parties de l'objet"

[J.P - p 104]

4-5 L'espace

"Dans le domaine de l'espace, la représentation est au début moins influencée qu'on ne pourrait le penser par les rapports métriques en jeu dans la perception. Elle part au contraire de ces sortes de relations que les mathématiciens appellent topologiques bien avant de se placer au point de vue de la géométrie d'Euclide"

[O.V.E - p 97]

"La manipulation de la mesure est postérieure à celle du nombre..... dès que cette synthèse est atteinte, entre la partition du continu et les déplacements ordonnés de la partie le long du tout, la mesure devient une simple application du nombre au continu spatial"

[J.P - p 105]

4-6 Les conservations

"Vers 7-8 ans, l'enfant admet la constance de la matière ; vers neuf ans, il reconnaît la conservation du poids, mais pas celle du volume et vers 11-12 ans, celle du volume"

[G.E.P - p 58]

4-7 Le temps et la vitesse

"La notion de vitesse n'est pas donnée sous sa forme métrique ($v = d/t$) atteinte vers 10 ou 11 ans, mais, en relation avec l'apparition primordiale des structures topologiques, elle se présente sous une forme ordinale : Un mobile est plus rapide qu'un autre s'il le dépasse..... Vers 10-11 ans, âge des opérations concrètes, il découvre la structure opératoire des dépassements constatés et anticipés, puis la durée des intervalles, d'une part, et les relations entre les durées et espaces parcourus, d'autre part"

[J.P - p 105]

Pour terminer ce rapide survol, il nous faudrait encore signaler l'apparition des notions de causalité et de hasard.

[voir J.P - p 109]

4-8 Conclusion

"Du point de vue de leur forme, les opérations concrètes ne consistent en effet qu'en une structuration directe des données actuelles (classer, sérier, etc...). Le possible se réduit à un simple prolongement virtuel des actions ou opérations appliquées à ce contenu donné.

Du point de vue du contenu, la pensée concrète présente d'autre part cette particularité limitative de n'être pas immédiatement généralisable à tous les contenus, mais de procéder domaine par domaine, avec un décalage atteignant souvent quelques années entre la structuration d'un contenu (ex : longueur) et celle du suivant (ex : poids)

Si chaque domaine de structuration concrète parvient bien à des formes stables d'équilibre, l'instabilité réapparaît avec la coordination des domaines".

[L.E.A - p 218-219]

CHAPITRE 5

LE STADE DES OPERATIONS FORMELLES

L'EPOQUE DU COLLEGE

5-1 Evolution de la pensée de l'enfant

Au stade 1, les enfants savent agir, mais pas intérioriser leurs actions. Ils donnent des interprétations multiples et contradictoires des faits. Ils établissent des liaisons précausales (finalisme, animisme, morale...). Il n'y a pas d'indifférenciation entre l'action propre du sujet et le processus extérieur.

Au stade 2, on observe le début des opérations concrètes. Les actions intériorisées peuvent se composer avec d'autres en systèmes d'ensembles réversibles s'accompagnant d'une prise de conscience de ses propres mécanismes et de ses propres coordinations. Mais les enfants en restent aux simples opérations concrètes de sériation et de correspondance. Ils commencent à faire la distinction du "tous" et du "quelques". Ils deviennent capables d'établir des classifications en tableaux à double entrée (voir exemple au paragraphe 5-3). Mais ils ne sont pas capables d'organiser leurs expériences, ni de dissocier les facteurs entrant en jeu, ni d'effectuer des vérifications systématiques et actives.

Au stade 3 enfin l'enfant émet des hypothèses, est capable de faire varier un seul facteur "toutes choses égales par ailleurs". C'est le stade de l'apparition du raisonnement hypothético-déductif. L'enfant est capable d'une recherche active de vérification, utilise des méthodes systématiques pour chercher toutes les solutions d'un problème et sait rechercher des preuves.

Notons que le stade 3 commence à 12 ans environ et s'achève à 15 ans environ selon Piaget. Les éléments caractéristiques de ce stade s'élaborent progressivement pendant toute cette période. Ils n'apparaissent pas brutalement à 12 ans mais se mettent en place petit à petit, par étapes.

Notons donc au passage qu'un élève de sixième ou cinquième ne dispose pas encore, en général, de toutes les capacités que nous venons de décrire pour le stade 3.

5-2 La pensée formelle du point de vue de l'équilibre

Au stade de la pensée préopératoire, les états et les modifications ne forment pas un système unique.

Au stade de la pensée concrète, le système des régulations parvient à une première forme d'équilibre stable : En atteignant le niveau de la réversibilité entière, les opérations concrètes se coordonnent en structures définies (classifications, sériations, correspondances...). Les situations statiques sont subordonnées aux transformations en ce sens que chaque état est conçu comme le résultat d'une transformation.

Dire que le système des transformations est en équilibre signifie que ces transformations ont acquis une forme réversible et le pouvoir de se coordonner selon des lois fixes de composition : Les transformations sont dorénavant assimilées à des opérations, point d'aboutissement des actions intériorisées du niveau précédent et de leurs régulations intuitives.

L'équilibre atteint présente encore un champ relativement restreint et demeure par conséquent instable aux frontières de ce champ.

Au stade de la pensée formelle, une inversion s'opère entre le possible et le réel. C'est le réel qui subordonne au possible. Les faits sont dorénavant conçus comme le secteur des réalisations effectives au sein d'un univers de transformations possibles, car ils ne sont expliqués et même admis en tant que faits qu'après une vérification portant sur l'ensemble des hypothèses possibles compatibles avec la situation donnée.

En substituant des énoncés verbaux aux objets, on superpose une nouvelle logique, celles des propositions, à celle des classes et des relations portant sur ces objets.

La pensée formelle part de l'hypothèse, c'est-à-dire du possible au lieu de s'en tenir à une structuration directe des données perçues. Elle constitue un système d'opérations à la seconde puissance.

Au stade 2, les structures concrètes de classes consistent exclusivement en classifications simples (additives) ou multiples (tables multiplicatrices ou matrices) et reposent exclusivement sur la réversibilité par inversion :

$$A + A' = B \quad A = B - A'$$

Les structures concrètes de relations coordonnent entre elles les égalités, les différences ordonnées. La réversibilité consiste alors en réciprocités.

Le stade 3 réunit les inversions et les réciprocitys en un système unique de transformations (le groupe INRC), pose la question de toutes les combinaisons possibles à l'intérieur des classes, applique le plus simple des groupements (classification) au plus général (la table des multiplications logiques).

5-3 Exemple

Deux facteurs x et y étant donnés :

Le stade 2 mettra en évidence les 4 classes $xy, \bar{x}y, x\bar{y}, \bar{x}\bar{y}$ en constituant la table multiplicative :

	x	\bar{x}
y	xy	$\bar{x}y$
\bar{y}	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$

Le stade 3 en tirera 16 combinaisons possibles :

l'affirmation		$xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
la conjonction	$x \cdot y$	xy
la disjonction	$x \vee y$	$xy + x\bar{y} + \bar{x}y$
l'implication	$x \supset y$	$xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
l'équivalence	$x \Leftrightarrow y$	$xy + \bar{x}\bar{y}$
l'affirmation de x	$x [y]$	$xy + x\bar{y}$
l'affirmation de y	$y [x]$	$xy + \bar{x}y$
implication réciproque	$y \supset x$	$xy + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$
la négation complète		aucune
incompatibilité	x / y	$x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
la négation conjointe		$\bar{x}\bar{y}$
la non implication		$x\bar{y}$
l'exclusion réciproque	$x \vee\vee y$	$\bar{x}y + x\bar{y}$
la négation de l'affirmation de x		$\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y$
la négation de l'affirmation de y		$x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$
la négation de l'implication réciproque		$\bar{x}y$

Nous avons utilisé ici les notations de Piaget, ce qui pourra faciliter une lecture ultérieure de ses ouvrages.

Remarquons que pour 3 propositions x, y, z on peut construire 256 opérations, et pour 4 propositions, 65 536 opérations..... ! On comprend alors l'incroyable progrès que marque le passage du stade 2 au stade 3.

Prenons un exemple très simple, tiré de nos mathématiques, à savoir les notions de parallélogramme, de quadrilatère et d'angle droit :

Au stade 2, jusqu'à 11 ou 12 ans, la logique de l'enfant reste concrète et liée à l'action. Le raisonnement logique porte sur des actions que l'enfant doit effectuer lui-même. Il doit manipuler pour raisonner. Il n'a pas la possibilité

de construire un discours logique indépendant de l'action.

Il est capable de classifications : Parmi les quadrilatères Q , il reconnaîtra les parallélogrammes P et les non parallélogrammes \bar{P} . Il saura faire $P + \bar{P} = Q$ d'où $Q - P = \bar{P}$ (réversibilité additive). Parmi les quadrilatères Q , il reconnaîtra ceux qui ont 4 angles droits D et les autres \bar{D} (donc $D + \bar{D} = Q$). Il sera capable de multiplier (multiplication logique) ces groupements à travers la manipulation d'objets, par exemple construire un quadrilatère qui soit un parallélogramme mais qui n'ait pas 4 angles droits ($P\bar{D}$).

Il construit donc une table multiplicative du type :

	:	P	:	\bar{P}	:
	:	PD	:	$\bar{P}D$:
	:	$P\bar{D}$:	$\bar{P}\bar{D}$:

au cours du stade 3, les structures logiques se mettent en place. l'enfant devient (progressivement) capable de raisonner sur des hypothèses et non plus sur des objets :

Etant donné les 4 classes $PD, \bar{P}D, P\bar{D}, \bar{P}\bar{D}$, il va être capable de réfléchir sur les 16 groupements logiques possibles. Il va constater ici qu'on peut avoir $PD + P\bar{D} + \bar{P}\bar{D}$ mais qu'on ne peut pas trouver $\bar{P}D$ (quadrilatères ayant 4 angles droits sans être des parallélogrammes). Il en conclura que $D \implies P$ (que Piaget note $D \supset P$) notation qui peut prêter à confusion avec la proposition (vraie) $D \subset P$).

Remarquons que l'enfant ne dira pas $D \Rightarrow P$ mais plutôt : "Si un quadrilatère a 4 angles droits, alors c'est forcément un parallélogramme".

Remarquons encore que certains mathématiciens trop stricts pourront nous reprocher un manque de rigueur d'expression. Peut-être aurait-il fallu commencer ce paragraphe par "Soit Q l'ensemble des quadrilatères convexes du plan.....". Nous n'avons pas lésiné non plus sur le nombre des angles droits (3 auraient peut-être suffi !). Notre but est avant tout la simplicité. la rigueur ne favorise pas toujours la compréhension !.

Remarquons enfin que ce reproche est souvent fait à Piaget par les mathématiciens : il lui arrive souvent par exemple d'employer un même terme pour des usages différents, ou il arrive que le même mot évolue de sens au cours d'un livre. Nous pensons qu'il faut nous garder de nos manies "corporatistes" et accepter le mode d'écriture de ce grand savant qui affine sa propre pensée au fur et à mesure qu'il écrit.

5-4 Le groupe I N R C

On a dit précédemment au cours du stade 3 que les inversions et réciprociétés sont réunies en un système unique de transformations que Piaget appelle le groupe I N R C.

Supposons des propositions p, q, \dots et les connecteurs "et" et "ou". Selon Piaget :

L'identité (I) conserve p, q , "et", "ou".

La négation (N) échange p en \bar{p} , q en \bar{q} , "et" en "ou", "ou" en "et".

La réciproque (R) conserve le "et", conserve le "ou", change p en \bar{p} , q en \bar{q}

La corrélatrice (C) conserve p , conserve q , change "et" en "ou", change "ou" en "et".

Par exemple : $N(p \text{ et } q) = \bar{p} \text{ ou } \bar{q}$

$C(p \text{ ou } \bar{q}) = p \text{ et } \bar{q}$

Prenons un exemple concret emprunté aux expériences de Piaget. Imaginons une balance à 2 plateaux. Appelons p la proposition "mettre un poids dans un plateau". Appelons q la proposition "mettre un autre poids dans ce plateau".

I = mettre 2 poids dans le même plateau (p et q)

N = enlever au moins 1 poids de ce plateau (\bar{p} ou \bar{q})

R = mettre 2 poids dans l'autre plateau (\bar{p} et \bar{q})

C = enlever au moins 1 poids de l'autre plateau (p ou q)

I est l'opération directe (action)

N est l'opération inverse (suppression ou diminution)

R est l'opération réciproque (elle n'est pas l'inverse de I puisqu'elle n'annule pas l'action mais en neutralise simplement l'effet par compensation).

C est l'inverse de R et la réciproque de N.

Remarque : pour Piaget, l'opération "inverse" N de l'opération directe I est la négation au sens mathématique de I.

Par contre certains mots comme "opération" ou "réciproque" ont chez Piaget une signification beaucoup plus générale que celle que nous donnons, nous mathématiciens, à ces mots. Nous devons donc nous méfier de nos "habitudes" si nous voulons comprendre le vocabulaire Piagetien.

Le mot "opération" désigne en général une action, le plus souvent d'ailleurs une action intériorisée.

Le mot "réciproque" est employé dans un sens très large qui n'est d'ailleurs absolument pas incompatible avec le sens mathématique. L'implication réciproque par exemple est un cas particulier qui fonctionne en accord parfait

avec le système décrit par Piaget. les exemples qui suivent le prouvent. Méfions nous donc de notre conditionnement et ayons l'esprit ouvert si nous voulons comprendre le message. L'exemple de la balance illustre bien la notion d'action réciproque au sens de Piaget.

On peut composer I, N, R, C selon la loi donnée dans la table suivante :

	:	I	:	N	:	R	:	C	:
I	:	I	:	N	:	R	:	C	:
N	:	N	:	I	:	C	:	R	:
R	:	R	:	C	:	I	:	N	:
C	:	C	:	R	:	N	:	I	:

On a donc par exemple :

$$NR = RN = C$$

$$RC = CR = N$$

$$NC = CN = R$$

Vérifions le sur un exemple :

Soit la proposition (p et q)

	:	I	:	N	:	R	:	C	:
	:	p et q	:	\bar{p} ou \bar{q}	:	\bar{p} et \bar{q}	:	p ou q	:
I	:	I (p et q) = p et q (=I)	:	I (\bar{p} ou \bar{q}) = \bar{p} ou \bar{q} (=N)	:	I (\bar{p} et \bar{q}) = \bar{p} et \bar{q} (=R)	:	I (p ou q) = p ou q (=C)	:
N	:	N(p et q) = \bar{p} ou \bar{q} (=N)	:	N(\bar{p} ou \bar{q}) = p et q (=I)	:	N(\bar{p} et \bar{q}) = p ou q (=C)	:	N(p ou q) = \bar{p} et \bar{q} (=R)	:
R	:	R(p et q) = \bar{p} et \bar{q} (=R)	:	R(\bar{p} ou \bar{q}) = p ou q (=C)	:	R(\bar{p} et \bar{q}) = p et q (=I)	:	R(p ou q) = \bar{p} ou \bar{q} (=N)	:
C	:	C(p et q) = p ou q (=C)	:	C(\bar{p} ou \bar{q}) = \bar{p} et \bar{q} (=R)	:	C(\bar{p} et \bar{q}) = \bar{p} ou \bar{q} (=N)	:	C(p ou q) = p et q (=I)	:

On peut facilement reprendre le même travail en remplaçant $(p \text{ et } q)$ par $(p \text{ ou } q)$ ou encore par $(p \Rightarrow q)$ qui peut être écrit sous la forme $(\bar{p} \text{ ou } q)$, etc...

C'est le grand progrès du stade 3 qui réunit les inversions et les réciprociétés en un seul système et qui va permettre à l'enfant d'aborder entre 12 et 15 ans les premiers raisonnements hypothético-déductifs.

Piaget insiste bien sur le fait que, si tous les enfants passent par les mêmes stades, ils ne progressent pas tous au même rythme et on comprend mieux pourquoi nos élèves (sauf les soi-disant "meilleurs") ont tant de difficultés en 4ème avec les démonstrations de géométrie. Notre rôle pédagogique à cette période sera donc moins d'utiliser les compétences de raisonnement que les élèves ne possèdent pas que de les aider à mettre en place les structures logiques mentales nécessaires au raisonnement hypothético-déductif (ce qui ne signifie absolument pas que l'on doive introduire des cours de logique dans le 1er cycle, Piaget ne cessant de répéter que les structures logiques doivent être acquises par l'action).

Selon Piaget, les schèmes opératoires à structure formelle, c'est-à-dire dont la compréhension nécessite la mise en place du groupe I N R C, sont :

- Les opérations combinatoires.
- Les proportions (classe de 6ème !).
- La coordination de 2 systèmes de référence et la relativité des mouvements et des vitesses.
- La notion d'équilibre mécanique.
- La notion de probabilité.
- La notion de corrélation.
- Les compensations multiplicatives (qui aboutissent par exemple à la conservation de la notion de volume).
- Les formes de conservation dépassant l'expérience.

5-5 Pensée naturelle et logique formelle

L'apprentissage du raisonnement fait partie évidente des objectifs de l'enseignement des mathématiques. Cependant les difficultés rencontrées dans la classe, les erreurs, les blocages de certains élèves prouvent que cet apprentissage ne se déroule pas sans problème. Nous allons donc essayer

d'examiner la pensée naturelle et de montrer qu'elle ne s'exprime pas seulement dans la formalisation et que la logique formelle en est même distincte.

Gardons-nous de croire que la fonction logique de la pensée est la seule fonction intelligente. Deux autres fonctions, qui relèvent de l'imagination, caractérisent l'intelligence : le questionnement sur des solutions et l'invention d'hypothèses. la fonction logique consistera à vérifier, à contrôler les solutions et à les communiquer.

Quelques difficultés :

- L'enfant ne ressent pas la nécessité de rechercher le vrai.
- L'enfant ne ressent pas la nécessité de prouver ses assertions.
- Si l'enfant prouve, ses preuves ne relèvent ni de règles, ni de lois.

D'où vient la nécessité de rechercher et fournir une preuve ?

- Les échecs face aux choses.
- Le choc de sa propre pensée contre celle des autres.

Ainsi Piaget précise : "Sans les autres, les déceptions de l'expérience nous mèneraient à une surcompensation d'imagination.....". C'est donc à partir des échanges avec les autres et de leur résistance que naît la nécessité logique tendant vers la coopération des opinions, vers le consensus.

Les études génétiques de Piaget ont mis en évidence les obstacles rencontrés par l'enfant qui s'efforce d'argumenter et prouver. Mais il nous faut dès à présent énoncer les erreurs psychologiques et didactiques auxquelles nous ont conduit notre méconnaissance de ces obstacles et la projection sur l'enfant de notre comportement d'adulte.

Ces erreurs consistent à croire que :

- L'expression verbale est seule révélatrice de la fonction logique
"l'aptitude verbale est confondue avec l'aptitude à manier une relation dans les actes" dit Piaget.
- Les capacités logiques se développent sur le seul terrain formel (symbolisme des maths).
- La nécessité de prouver est imposée par la seule intervention du maître.
- L'enfant est conscient de son propre raisonnement.

Autres difficultés dans le développement des capacités logiques de l'enfant jusqu'à 12 ans selon Piaget :

- 1 - Egocentrisme de la pensée enfantine.

2 - Difficultés liées à la perception des faits et de leurs relations :

a/ Difficultés liées à la juxtaposition et au syncrétisme : la juxtaposition s'exprime par l'absence de liaison entre des détails perçus et l'absence d'implication entre des jugements prononcés (le DONC apparaît tardivement en remplacement du ALORS). Le syncrétisme s'exprime par une vision globale ainsi que par une propension à tout lier à tout, arbitrairement (exemple : confusion des deux notions de poids et de volume). Juxtaposition et syncrétisme sont complémentaires, quoique apparemment contradictoires. Chez l'enfant, ils tiennent lieu de synthèse.

b/ Difficultés dans la logique des relations : les problèmes posés par la nécessité de hiérarchiser les classes sont tels que la conclusion d'un syllogisme arrête la plus grande partie des enfants de moins de 12 ans.

Mettons enfin en évidence les deux types de contradiction observés par Piaget :

- La contradiction par amnésie : l'enfant oscille entre la propriété p et la propriété \bar{p}
- La contradiction par condensation. l'enfant admet p et \bar{p} . C'est l'accès à une pensée réversible qui éliminera peu à peu (après 11-12 ans) ce type de contradiction.

c/ Difficultés dans les tâches inductives et déductives : jusqu'à 7-8 ans, l'enfant est incapable d'opérer, ni par induction amplifiante, ni par déduction. Son raisonnement évolue du singulier au singulier sans transiter par des propriétés de classes. On retrouve ici la marque de l'égoïsme de l'enfant qui projette sa pensée sur les choses.

D'où l'importance de l'influence sur l'accès au formalisme des facteurs sociaux qui doivent chasser, sinon atténuer l'égoïsme naturel agissant comme frein aux points de vue étrangers.

Rappelons ici qu'un système formel suppose la manipulation de signes, de symboles comme objets, c'est-à-dire comme signifiés, et non comme signifiants. Un système est dit naïf si l'on accorde une signification aux symboles.

Interaction des deux processus : Formalisation et réalisation.

c'est " la dynamique de l'interaction entre formalisation et réalisation qui régit le déroulement de la pensée naturelle" dans les schémas de raisonnement.

Tout semble se passer comme si, lors de chaque étape de pensée, il y avait recherche d'une optimisation du fonctionnement des deux processus.

Exemple : perturbation causée par des contenus antérieurs (couplage poids - volume - linéarité des opérations appliquée. à $f(a^2 + b^2) = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Pour que l'élève puisse travailler efficacement sur des problèmes nouveaux, "il doit disposer de résultats antérieurs immédiatement accessibles" qui permettent ainsi d'engager les premiers paris intuitifs sur la solution.

Les réussites et les échecs de ces paris sont indispensables car ils permettent la progression, par remaniement permanent, de la construction des concepts et leur intégration aux systèmes de pensée.

Reuchlin précise : *"un objet et une notion ne peuvent être utilisés par un enfant que s'ils évoquent immédiatement pour lui un certain nombre d'informations en fonction desquelles l'action est engagée."*

Reuchlin distingue 3 modalités d'interaction des deux processus :

a/ un des 2 processus prend une plus grande responsabilité ou se substitue à l'autre dans la régulation de la conduite.

Exemple : la formalisation apparaît comme relais de la réalisation (exemple : lorsqu'il s'agit d'analyser une implication.)

b/ Une complémentarité s'instaure entre les deux processus.

c/ Les deux processus sont antagonistes.

Cet antagonisme peut naître de contradictions internes du processus de réalisation dues à la multiplicité des contenus.

l'école doit développer la pensée naturelle de chaque enfant, sans privilégier l'une ou l'autre de ses deux formes qui s'avèrent indispensables dans la conduite d'un raisonnement.

CHAPITRE 6

LES MATHEMATIQUES AU COLLEGE

Il n'est pas question ici d'étudier de manière exhaustive tout ce qui est enseigné pendant les 4 années de collège en mathématiques. C'est un travail considérable qui dépasse largement les objectifs de ce stage.

Nous avons préféré axer notre travail sur quelques points forts qui sont actuellement reconnus par tous comme source d'échec : vecteurs, proportionnalité, etc.....

Nous avons tenté de projeter sur ces notions l'éclairage des théories piagésiennes en examinant l'âge auquel ces notions sont proposées (imposées) aux élèves, la façon dont les manuels les introduisent.....

Nous avons ainsi constaté que certains échecs sont parfaitement explicables au vu des conclusions de Piaget, que des remèdes sont possibles.

Nous avons donc essayé de montrer les écueils à éviter et nous tentons de proposer des modifications dans le déroulement de certains apprentissages, dans l'approche de certaines notions.

Aucune solution ne peut être miraculeuse. Notre espoir est surtout d'apporter des éléments de réflexion aux collègues soucieux des progrès de leurs élèves : on n'enseigne pas n'importe quoi à n'importe quel âge, et pas n'importe comment.

6-1 transitivité, implication et géométrie

Définition : une relation est transitive si :

$$\forall a, b, c \quad (a R b \text{ et } b R c) \Rightarrow a R c$$

Désignons par p la proposition $a R b$

Désignons par q la proposition $b R c$

Désignons par r la proposition $a R c$

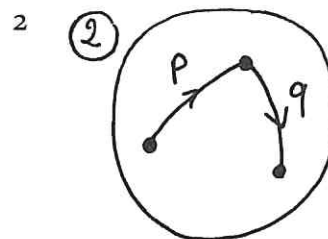
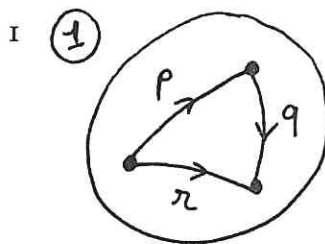
On a donc la structure logique : $(p \text{ et } q) \Rightarrow r$

Construisons sa table de vérité :

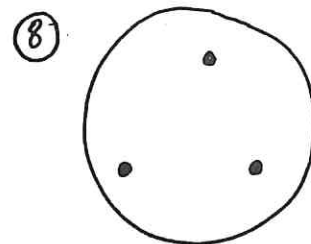
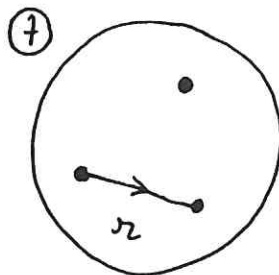
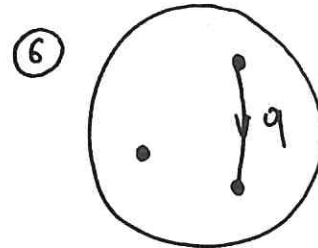
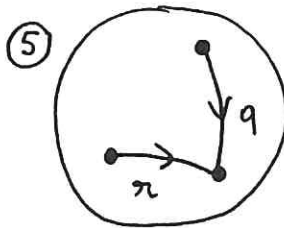
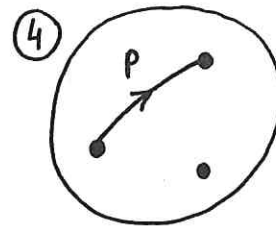
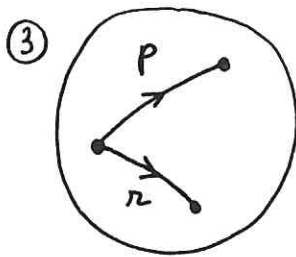
	p	q	r	p et q	$(p \text{ et } q) \Rightarrow r$
	V	V	V	V	V
	V	V	F	V	F
	V	F	V	F	V
	V	F	F	F	V
	F	V	V	F	V
	F	V	F	F	V
	F	F	V	F	V
	F	F	F	F	V

On constate que, sur 8 situations possibles, une seule est fausse, les 7 autres sont vraies. la transitivité correspond donc à 7 cas de figures, la non-transitivité à un seul cas. On peut déjà penser que la non-transitivité est plus accessible que la transitivité.

Ces 8 situations sont schématisées ci-dessous de façon simplifiée, la numérotation des dessins respectant l'ordre du tableau précédent :



(non transitivité)



Dans le cas d'une relation "d'ordre total", la transitivité est plus abordable puisqu'on n'a plus que la situation n°1 et que la "sériation" est acquise dès le stade 2.

Mais si les élèves peuvent facilement comprendre que si $2 < 3$ et $3 < 4$ alors $2 < 4$, il en est tout autrement de la démonstration de la transitivité de $<$ trouvée dans certains manuels de 5ème.

On trouve par exemple dans le "Durrande", page 147 :

"Soient a, b, c trois décimaux tels que $a < b$ et $b < c$.

Comparons a et c :

On a : $a < b$ donc $(b-a) \in D^+$

et $b < c$, donc $((c-b) \in D^+ \quad (c-b) + (b-a) \in D^+$

Or $(c-b) + (b-a) = c-a$ donc $(c-a) \in D^+$; on peut conclure que $a < c$.

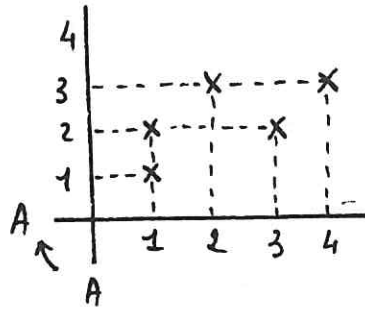
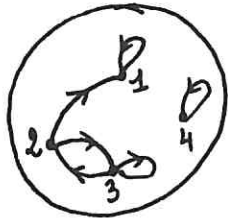
La relation $<$ dans D est "transitive".

Une telle démonstration nous semble difficilement abordable par un élève de cinquième qui entre à peine dans le stade 3 (voir chapitre 5).

Par rapport à la table de vérité établie ci-dessus, nous pensons qu'un élève de cinquième peut reconnaître assez facilement les situations correspondant aux lignes 1 et 2, il en est tout autrement des autres lignes qui exigent la compréhension de l'implication.

Ainsi les exercices suivants, trouvés page 63 dans ce même Durrande nous semblent trop difficiles :

"Compléter pour que la relation soit transitive :



(difficulté supplémentaire : le nom choisi pour les éléments)

Faut-il brûler la transitivité ?

Lisons le programme de 5ème :

I Relation - On se bornera à étudier :

.....Exemples de partition.....et de relation d'équivalence.....

III Nombres relatifs

.....les propriétés des opérations et de l'ordre seront présentées progressivement et sans démonstration.....

Certains manuels (Galion, Hachette, Istra.....) ne prononcent pas le mot "transitivité", d'autres font des démonstrations (Durrande), utilisant un formalisme qui nous semble excessif (pour combien d'élèves de 5ème la lettre a représente-t-elle vraiment un nombre ?). Entre les deux, tout est possible. la vraie question est : "Quels élèves avons-nous devant nous, que sont-ils capables de comprendre, quelles activités introduire pour leur permettre d'atteindre, maintenant ou plus tard, les concepts de transitivité, d'implication, etc..... ?"

A propos du concept d'implication, le lecteur pourra se reporter au chapitre 5 avec l'exemple du parallélogramme qui peut avoir 4 angles droits.

La géométrie semble être le terrain privilégié de la mise en place de ces structures logiques. Il n'est peut-être pas nécessaire d'attendre la classe de 4ème pour faire prendre conscience aux élèves de ces "liens logiques" qui prépareront la démonstration. On constate généralement que les élèves de 4ème ou 3ème ne savent pas faire de démonstration. Or la question est mal posée. Il ne s'agit pas de dire "Pourquoi ne savent-ils pas faire des démonstrations ?" mais plutôt "quelles activités pourraient les amener

progressivement depuis la classe de 6ème jusqu'à la classe de 3ème à acquérir les structures logiques indispensables à la réalisation de la démonstration".

La rédaction des programmes de 6ème et de 5ème qui insiste sur le mot "observation" des objets du plan et de l'espace nous paraît dangereuse dans la mesure où elle n'insiste pas sur l'action de l'élève sur ces objets. Inversement de nombreux professeurs ne comprennent pas que leurs élèves soient bloqués par des notions qui leurs semblent simples.

Prenons un exemple : En 6ème : "Observation" de triangles. On amène aux élèves un paquet de spaghettis. On leur donne comme consigne : "Prenez un spaghetti, coupez le en trois morceaux. Pouvez-vous toujours, avec ces trois morceaux, construire un triangle ?". Les élèves manipulent, constatent que dans certains cas, c'est possible, dans d'autres non. Ils finissent à peu près tous par découvrir que les deux "petits" morceaux doivent "à eux deux", être au moins aussi longs que le grand. Alors le professeur tout fier, de conclure au tableau : Dans un triangle ABC, on a $AB \leq AC + CB$! Catastrophe, il a lâché tout le monde. Plus personne ne comprend. Il a formalisé à un âge où l'élève ne peut pas le suivre. Et pourtant, tout avait si bien commencé !

La difficulté est donc de trouver les activités qui permettront aux élèves de mettre en place leurs propres structures logiques, petit à petit, dès la classe de 6ème, en les faisant agir sur des objets géométriques par exemple, mais surtout sans vouloir formaliser trop vite.

Plus tard, beaucoup plus tard, lorsque l'élève aura à sa disposition l'ensemble des structures logiques, alors on pourra se consacrer à la transitivité !

6-2 Piaget et la proportionnalité

Toutes les idées et citations de ce paragraphe sont tirées de [L.E.A]

Piaget a étudié de nombreuses situations où intervient la proportionnalité (directe ou inverse). Par exemple il donne à ses sujets une balance. L'enfant peut disposer des masses plus ou moins lourdes à des distances plus ou moins grandes sur les deux bras de la balance.



Au sous-stade II B (9-11 ans) les sujets conçoivent la relation comme étant additive et ils supposent $P - P' = L' - L$ au lieu de $\frac{P}{P'} = \frac{L'}{L}$ (remarquons que dans cette expérience, on a des grandeurs inversement proportionnelles).

"La compréhension des proportions n'intervient qu'au sous-stade III A (12-13 ans) mais le passage de la différence au produit s'effectue rarement sous une forme d'emblée métrique :

"la quantification numérique de la proportion est en général précédée par un schème qualitatif fondé sur la notion de produit logique, c'est-à-dire par l'idée que deux facteurs agissant ensemble équivalent à l'action de deux autres facteurs réunis". [L.E.A - p 154]

"Ces multiplications logiques sont déjà esquissées au niveau II B, mais sans généralisation à tous les cas possibles. D'où vient alors la généralisation propre aux niveaux III A et III B ? C'est sans doute ici qu'interviennent les notions de compensation et de réciprocité attachées au groupe I N R C" [L.E.A - p 154]

A partir du groupe I N R C et de ses propriétés, le sujet peut comprendre que $IN = RC \Rightarrow \frac{I}{R} = \frac{C}{N}$ qui n'est pas autre chose que la proportionnalité.

"De ce schème qualitatif de proportions logiques, qui correspond sans doute à l'intuition globale de proportionnalité dont part le sujet, il est facile de passer à des proportions logiques plus détaillées, et de là aux proportions numériques". [L.E.A - p 156]

"Ce qui est commun à toutes les formes de proportionnalité découvertes par le sujet est l'intervention de jugements de compensation. C'est lorsqu'il comprend, en présence de deux variables indépendantes, que l'accroissement de l'une produit un résultat identique à celui dû à la diminution de l'autre, que le sujet construit le schème qualitatif de la proportionnalité".

"La structure des proportions comporte toujours un élément de compensation : lorsque l'on a $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, l'égalité $xy' = x'y$ constitue un système de compensation tel que toute modification de valeur de x doit être compensée, si l'on conserve l'égalité, par une modification de l'un au moins des autres termes."

"Cette notion de compensation s'impose avec une évidence intuitive bien différente selon les cas. Elle est d'abord plus sensible lorsque la compensation assure la conservation d'un effet matériel (grandeur d'une ombre.....) que d'un simple rapport (conservation du parallélisme dans Thalès.....)"

"La proportionnalité elle-même est plus ou moins facile à dégager, selon qu'il s'agit de proportions directes ou inverses et de facteurs plus ou moins aisés à comparer du point de vue de leurs unités".

[L.E.A - p 191]

"Le schème de la compensation précède celui de la proportionnalité, ce qui revient à dire que le sujet a besoin de dégager au préalable la conservation possible d'un même résultat pour trouver des proportions, tandis qu'il aurait pu partir des rapports en jeu et de leurs proportions pour en tirer l'idée d'une compensation possible".

[L.E.A - p 192]

"Le schème de la compensation est plus directement accessible que celui de la proportionnalité.

La 1ère raison en est que la compensation est directement fondée sur des rapports qualitatifs et logiques, tandis que les proportions n'acquièrent une structure expérimentalement vérifiable qu'avec leur quantification numérique. C'est pourquoi il y a toujours une sorte d'anticipation logique de la proportion avant sa mise en forme métrique. Nous saisissons maintenant la signification de ce schème anticipateur puisqu'il est toujours dérivé de celui de la compensation.

En second lieu, la compensation peut-être additive comme multiplicative, ce qui est également le cas des proportions logiques

mais non pas des proportions métriques (d'où la constante tendance initiale de l'enfant à chercher la proportionnalité dans l'égalité des différences additives).

Enfin la compensation dérive directement de l'idée de réciprocité puisque $\bar{p}.q$ est la réciproque de $p.q$ et $\bar{p}.q$ est la réciproque de $p.\bar{q}$ (voir chapitre 5).

Or, dans le cas des relations, c'est la réciprocité qui constitue le fondement de la réversibilité et elle ne devient composable avec l'inversion N que par l'intermédiaire du groupe I N R C, fondement des proportions".

[L.E.A - p 194]

"les proportions mathématiques consistant simplement en doubles rapports $x/y = x'/y'$, le problème psychologique soulevé par la formation de cette notion est de comprendre pourquoi elle ne se constitue pas dès le niveau des opérations concrètes. En effet, le sujet de ce niveau parvient déjà à construire des fractions où rapports numériques, ainsi naturellement qu'à égaliser des quantités disposées différemment. Du point de vue qualitatif, d'autre part, il existe dès le niveau concret une opération que Spearman a appelé l'"éducation des corrélats" et qui revient à présenter d'une manière qui annonce les proportions les liaisons inhérentes à une table à double entrée ; par exemple "Rome est à l'Italie comme Paris est à la France". On peut donc se demander pourquoi les sujets de 8 à 11 ans ne parviennent pas à découvrir l'égalité de deux fractions, ce qui constitue une proportion, et pourquoi il faut attendre pour cela le niveau des opérations formelles. Non seulement, en effet, nous avons constaté à plusieurs reprises, au cours des expériences précédentes, que la notion de proportion n'est pas acquise avant le stade III A, mais encore c'est ce que nous avait déjà montré l'analyse de cette notion dans les domaines les plus divers (espace, vitesses, probabilités, etc...). Invoquer les programmes scolaires (car il s'agit cette fois d'une notion enseignée par l'école) ne suffirait nullement à résoudre le problème, car, d'une part, nous avons vu des sujets construire cette notion avant de l'avoir apprise, et, d'autre part, si elle pouvait être comprise plus tôt, on peut être certain que les programmes scolaires en avanceraient les dates d'acquisition ! Il faut donc chercher l'explication de cette compréhension tardive dans la structure même des opérations accessibles aux sujets des divers niveaux".

[L.E.A - p 278]

Conséquence sur l'enseignement de la proportionnalité

a/ La notion de proportion dépend de la mise en place du groupe INRC. Elle ne peut pas précéder cette mise en place.

b/ la notion $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$ est précédée par $xy' = x'y$ et non le contraire. On pourrait donc réfléchir à l'introduction qui est faite dans les manuels.

c/ Il semble, après ces lectures, présomptueux de croire que l'on peut enseigner la proportionnalité à un élève de 6ème. On peut le "mettre sur le chemin" en lui fournissant des situations où apparaissent des compensations, des proportions logiques, des proportions métriques. A son heure et seulement son heure (par exemple lorsque le groupe I N R C sera mis en place) l'élève pourra accéder au concept de proportionnalité. Avant cette heure, il pourra utiliser des recettes, reproduire des modèles, sans rien comprendre.

d/ l'enseignement de la proportionnalité devrait donc s'étaler sur tout le 1er cycle, de façon très progressive, en respectant la progression naturelle de l'enfant : compensation → proportion logique → proportion métrique.

le concept de proportion pourrait peut-être être considéré comme acquis en fin de 3ème ou même de 2nde mais sûrement pas en fin de 6ème (pour la majorité des élèves, bien entendu, il y a toujours des exceptions !).

Nous proposons donc, pour conclure ce sous-chapitre, quelques éléments de réflexion sur une progression possible "vers la proportionnalité" étalée tout au long du 1er cycle.

Pour préparer la proportionnalité : (en classe de 6ème)

- exercice préparant la "réversibilité" des opérations x et :

Un rectangle a pour aire 24 cm^2 . Sa longueur est 4 cm . Que vaut sa largeur ?

L'élève prendra conscience des équivalences

$$4 \times 6 = 24 \Leftrightarrow 6 = \frac{24}{4} \Leftrightarrow 4 = \frac{24}{6}$$

La formalisation n'est pas nécessaire, elle interviendra en 4ème avec la construction des rationnels.

ces équivalences n'ont rien d'évident pour l'élève puisque les collègues de Physique obligent parfois les élèves à apprendre les 3 formules car les élèves ne sont pas capables de passer de l'une à l'autre.

(exemple : $v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow d = vt \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$) (ou masses volumiques).

on peut, plus tard, reprendre les mêmes calculs avec des volumes, ou avec un trapèze..... (en 5ème par exemple).

exercices faisant manipuler la notion de "compensation"

Un rectangle a pour côtés 3 et 4 cm. Trouver d'autres rectangles ayant la même aire.

Le travail porte sur la conservation de l'aire : Si la longueur est multipliée par un nombre, la largeur doit être divisée par le même nombre. (il s'agit là de grandeurs inversement proportionnelles).

On peut remarquer ici le rôle fondamental que peut jouer la géométrie qui permet de manipuler (dessiner, mesurer, comparer) pour introduire des notions nouvelles, mêmes algébriques.

- exercices faisant manipuler la "conservation possible d'un même résultat"

Deux pains coûtent 3F. Combien coûtent 7 pains ?

le "facteur constant" que l'élève peut dégager est le prix de 1 pain qu'il peut obtenir de deux façons :

$$\text{prix de 1 pain} = \frac{\text{prix de 2 pains}}{\text{nombre de pains (2)}}$$

$$\text{ou.. prix de 1 pain} = \frac{\text{prix de 7 pains}}{\text{nombre de pains (7)}}$$

$$\text{d'où prix de 7 pains} = \text{prix de 1 pain} \times \text{nombre de pains (7)}$$

↓
(ce nombre pouvant donc être de la forme $\frac{a}{b}$)

l'élève utilise ici la réversibilité vue dans le premier exercice.

Exercices à ne pas proposer en 6ème :

0,6 Kg de pommes de terre coûtent 1,10F. Combien coûtent 7,5 Kg ?

les élèves ne comprennent pas que 1 Kg coûte $\frac{1,10}{0,6}$. Ils ne sont pas capables de retrouver le prix de l'unité qui nécessiterait un raisonnement du type :

prix de 1 Kg = $\frac{1,10 : 0,6}{0,6 : 0,6}$ pour ramener le dénominateur à l'unité. ce type de raisonnement est lié à la notion de rationnel qui n'apparaît dans les programmes qu'en 4ème. (Voir Durrande page 106 qui se croit obligé de dire "on écrit quelque chose qui n'existe pas !!!).

x et y sont deux grandeurs proportionnelles. Compléter le tableau :

x	:	2	:	6	:	2 + 6	:
y	:	5	:	:	:

On prépare là une belle confusion entre compensations "additives" et compensations "multiplicatives"

La propriété $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} = \frac{x + x'}{y + y'}$ peut se démontrer, plus tard, en 3ème par exemple, après avoir été précédée de ce type de manipulation (mais, pas en 6ème).

Et que signifient donc x et y pour un élève de 6ème ? A ce niveau, tout exercice doit faire appel à des signifiants évocateurs.

En résumé, nous proposons un étalement de l'apprentissage de la proportionnalité sur tout le premier cycle :

En sixième

- exercices très simples de proportionnalité (prix - échelles....) sur des notions concrètes, choisis de façon que les élèves puissent retrouver eux-même les unités (ne serait-ce pas la bonne vieille règle de trois ?)
- autres exercices introduisant la réversibilité de la multiplication (voir ci-dessus : rectangle dont on connaît l'aire et un côté).
- exercice de compensations (ex : rectangles ayant la même aire)

En cinquième

- mêmes exercices qu'en 6ème avec des données moins simples (échelles, pourcentages....).
- premiers tableaux de proportionnalité pour introduire la propriété $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Leftrightarrow xy' = x'y$ (attention à une formalisation trop précoce).
- mêmes exercices qu'en 6ème en remplaçant aire par volume.
(a x b x c) = a x ($\frac{b}{2}$) x (c x 2) "si l'une des deux dimensions est doublée, l'autre doit être divisée par deux pour obtenir le même volume".

En quatrième

- suites proportionnelles (sans formalisation excessive)
- manipulation de tableaux
- exercices utilisant les notions récemment conceptualisées (masses volumiques par exemple) ou à un niveau légèrement plus difficile que l'année

précédente (pourcentage....)

- exercices préparant l'assimilation et l'accommodation de l'ensemble Q

En troisième (on peut même envisager en Seconde)

- Formalisation (démonstration par exemple $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$)

- Problèmes

- Thalés

- Equilibration de la notion de proportion et de la notion de rationnel.

6-3 La notion de vecteur

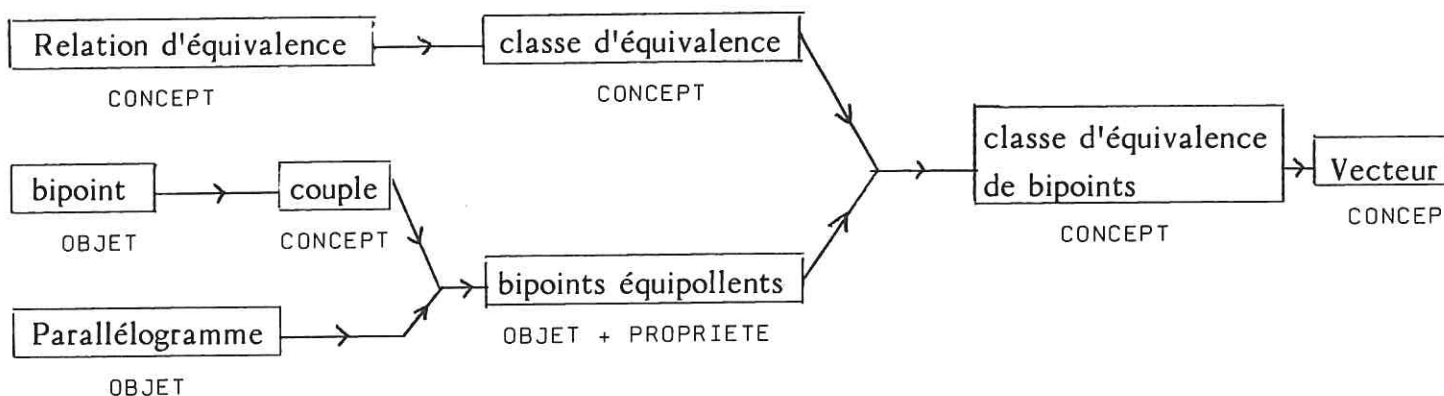
La notion de vecteur, introduite en classe de 4ème, pose de sérieux problèmes. Pour s'en convaincre, il n'est qu'à remarquer qu'un élève moyen de 1ère S est incapable de résoudre la plupart des problèmes que l'on pose aux élèves de 4ème.

Comment se fait-il que, malgré ce constat d'échec évident, l'on continue à présenter dans les programmes et les cours, les vecteurs à partir de concepts difficiles, non intégrés et non intégrables par les élèves de ce niveau.

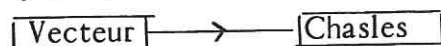
En faisant un bilan des habitudes actuelles et des contenus des manuels, nous avons schématisé ci-dessous les différentes notions nécessaires à l'élaboration du concept "vecteur", en précisant chaque fois s'il s'agit d'un objet, d'une propriété ou d'un concept.

Ce schéma montre clairement l'absence quasi-totale d'objets manipulables.

Classe de 4ème :



Pour certains élèves il peut y avoir conceptualisation de la notion de vecteur (rare en 4ème, 3ème) mais intervient presque simultanément la relation de Chasles sans laquelle la notion de vecteur n'a pas d'intérêt.



Il se produit une rupture avec le "naturel" car la somme vectorielle ne correspond pas à la somme des longueurs.

D'où déséquilibre et nécessité d'une rééquilibration qui prend du temps.

Citons Piaget (la prise de conscience - p 261 et p 271)

"L'action constitue la source de la conceptualisation".

"La prise de conscience d'un schème d'action transforme celui-ci en un concept".

(Au départ, l'élève agit, mais il ne sait pas qu'il sait. A l'arrivée, l'élève sait qu'il sait. Il y a eu conceptualisation à travers une prise de conscience de la notion).

"le mécanisme de la prise de conscience apparaît comme un processus de conceptualisation reconstruisant, puis dépassant, au plan de la sémiotisation et de la représentation, ce qui était acquis à celui des schèmes d'action".

Il apparaît donc nécessaire de s'appuyer sur des actions pour construire une notion.

Or les élèves de 4ème entrent tout juste dans le stade III, c'est-à-dire dans la période des opérations formelles. La plupart d'entre eux ont encore besoin de s'appuyer sur des manipulations d'objets pour pouvoir raisonner. Ils ne sont pas capables de réfléchir sur des concepts abstraits (relation d'équivalence, classe.....). Ce n'est pas parce que quelques élèves sont capables de réussir cette conceptualisation précoce que les programmes scolaires doivent tenter de l'imposer à tous.

Piaget fait remarquer encore que la perception est sujette à la déformation et à l'erreur par le fait même qu'elle est induite par nos sens. Par conséquent, c'est à travers l'action que s'opèrera la régulation de la perception. Ainsi la prise de conscience de la notion s'effectuera jusqu'à sa conceptualisation, ce qui correspond au schéma :

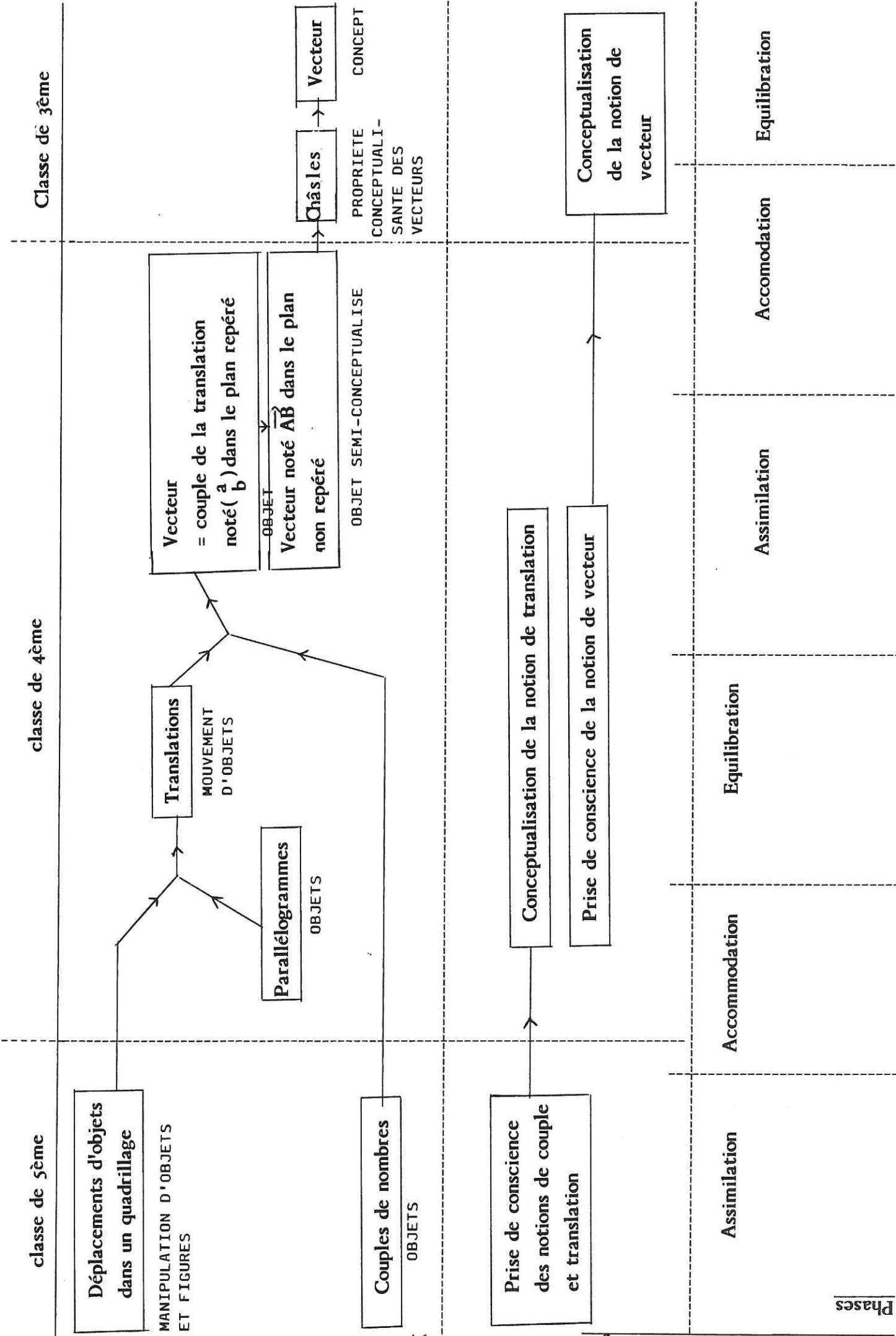
perception → action → régulation → prise de conscience → conceptualisation

On retrouve ici le schéma piagétien :

assimilation → accommodation → équilibration.

Pour introduire la notion de vecteur au Premier cycle, nous présentons ici un autre schéma possible, faisant appel aux objets et à leur manipulation, préalable nécessaire à la compréhension de la notion et à sa conceptualisation. Le vecteur apparaît "naturellement" comme un objet manipulable, tangible dans le plan repéré, et non comme un concept véhiculant une lourde charge d'esotérisme.

Ces schéma fait apparaître également les différents processus intellectuels mis en jeu.

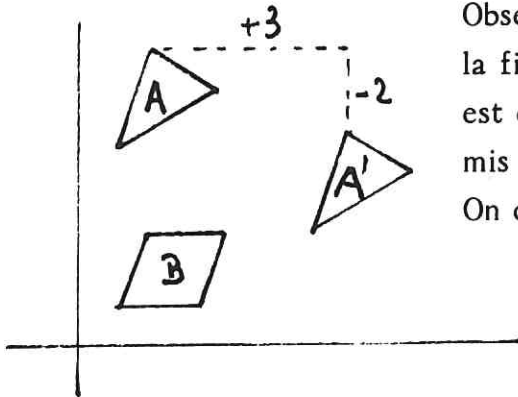


Pour concrétiser la présentation précédente nous proposons une trame de cours sur les vecteurs pour ne pas dire un squelette, trame sur laquelle chaque professeur peut insérer ses propres exercices ou commentaires, ou additifs etc...

Mais il faut garder à l'esprit qu'à vouloir trop en dire on finit par embrouiller les choses alors qu'on voulait les rendre claires.

Cette étude sur les vecteurs propose un étalement sur trois années, classes de 5ème, 4ème, 3ème, mais l'important en fait réside davantage dans le respect des rythmes - assimilation - accommodation - équilibration et des manipulations d'objets, plutôt qu'en des périodes précises prédéterminées.

II Déplacement d'un objet dans un quadrillage



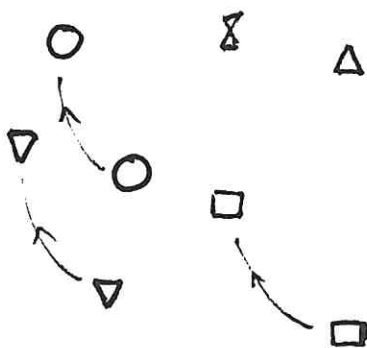
Observons : le déplacement de la figure A vers la figure A' est effectué grâce à 2 nombres mis entre parenthèses : $(\begin{smallmatrix} +3 \\ -2 \end{smallmatrix})$
On dit le couple $(\begin{smallmatrix} +3 \\ -2 \end{smallmatrix})$

(il aura fallu étudier auparavant le repérage d'un point dans le plan)

- déplacer de même la figure B
- inventer différents exemples de déplacements de ce type pour l'objet A
- déplacer l'objet B (ou la figure B) grâce aux mêmes couples.

Dans toute la suite on considérera des déplacements de ce type, c'est-à-dire définis par un couple de nombres.

2 - On donne différents objets (dessins) et leurs images lors d'un déplacement D



- quel est le couple qui permet de connaître ce déplacement ?
- dessiner les images de \square et Δ par ce déplacement
- dessiner les objets dont $\square, \nabla, \square, \Delta$ sont les images par le déplacement D

3-soit $D(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix})$ un déplacement

soit le dessin F (toujours dans un quadrillage)

dessiner l'image F_1 de F par $D(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix})$

" " F_2 de F_1 " "

" " F_3 de F_2 " "

manipulation de l'objet de translation qui n'est encore qu'un couple.

accommodation à la notion de translation.

réversibilité du déplacement

- quel est le déplacement qui fait passer directement de F à F_2 , de F à F_3 , de F_I à F , de F_2 à F , de F_3 à F , de F_3 à F_2 , F_3 à F_I .

- peut-on faire quelques remarques ?

4 - soient $D \begin{pmatrix} -3 \\ I \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2 déplacements

On les notera D_I pour $D \begin{pmatrix} -3 \\ I \end{pmatrix}$ et D_2 pour $D \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour simplifier.

Soit le dessin F

- dessiner l'image F_I de F par D_I puis l'image F_2 de F_I par D_2

- quel est le déplacement qui permet de passer directement de F à F_2 ? de F_2 à F ?

5 - même exercice avec 3 déplacements D_I, D_2, D_3 .

On peut introduire la composition (sans le dire) de D_I et D_2 en notant D_I suivi de D_2 puis plus simplement $D_I \otimes D_2$.

- dessiner l'image de F par $D_I \otimes D_2 \otimes D_3$

- remarquer que $(D_I \otimes D_2) \otimes D_3 = D_I \otimes (D_2 \otimes D_3)$

puis $D_I \otimes D_2 = D_2 \otimes D_I$

6 - remarque à propos de $D_I \otimes D_2$

On a vu que $D \begin{pmatrix} -3 \\ I \end{pmatrix} \otimes D \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} I \\ 3 \end{pmatrix}$

on remarque que $-3 + 4 = +1$ et $1 + 2 = 3$

on peut donc ajouter les couples

$$\begin{pmatrix} -3 \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 3 \end{pmatrix}$$

-effectue : $\begin{pmatrix} 3 \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} \dots \dots \dots$ etc puis $\begin{pmatrix} -2 \\ I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
etc...

- trouver les couples $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \dots \dots \dots$ etc
(manipuler sur les couples)

manipulation de couples
assimilation de la notion
d'addition de couples donc
de la composition des
translations.

transfert de la soustraction
dans \mathbb{D}

réversibilité de l'addition.

Classe de Quatrième

(faire au préalable une étude pratique et métrique des parallélogrammes [on mesure - on observe....])

On travaille toujours sur un quadrillage

1 - rappels sur les déplacements vus en 5ème

manipulation action

2 - sur une frise simple (grecque ou autre) se donner un quadrillage de façon à trouver différents déplacements possibles.

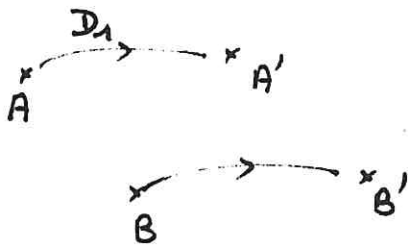
3 - même exercice avec des dessins de Escher ou autres dans R^2

4 - (les élèves ont déjà la notion physique de parallélogramme)

- sur un pavage (carrelage ou autre) repérer 2 déplacements D_I et D_2 par leur couple.

- choisir des points et leurs images

- recherche des parallélogrammes



(introduire les notations

* $A \xrightarrow{D_I} A'$

* et $A' = D_I(A)$

* le mot image réapparaît)

- montrer que D_I détermine le parallélogramme (A, A', B', B) et que (A, A', B', B) détermine des nouveaux déplacements - lesquels ?

prise de conscience des notions associées de parallélogramme et translations.

- remarquer que les phrases suivantes sont vraies en même temps (c'est-à-dire : si l'une est vraie, l'autre aussi))

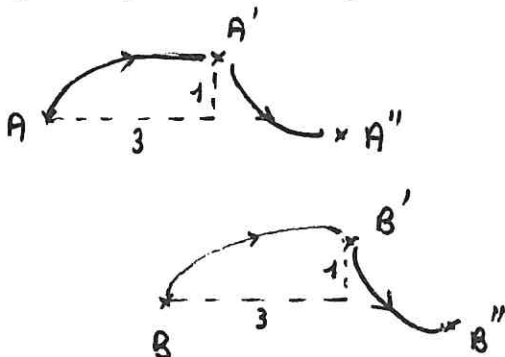
- le déplacement de A vers A' est égal au déplacement de B vers B' (car ils utilisent le même couple)

- (A, A', B', B) est un parallélogramme

- le déplacement de A vers B est égal au déplacement de A' vers B'.

(on peut agrémenter la leçon par des déplacements physiques réels d'élèvesetc)

5 - composition de 2 déplacements D_I et D_2



- effectuer $D_I \circ D_2$ quel déplacement obtient-on ?

- écrire et dessiner tous les parallélogrammes de la figure.

accommodation des notions associées de parallélogrammes et translations

- écrire toutes les égalités que vous pouvez trouver.
- écrire des phrases qui sont vraies en même temps.
- de tels déplacements s'appellent des translations

On notera $\vec{t}_{AA'}$ = translation de A vers A'
 = déplacement de A vers A'
 = translation de couple $(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix})$

(3 et 1 sont lussur le quadrillage)

- quel est le couple de $\vec{t}_{BB'}$?
 c'est le même que celui de $\vec{t}_{AA'}$
 on peut noter aussi $\vec{t}(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix})$
 donc c'est le couple $(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix})$ qui détermine exactement le déplacement (ou la translation) de A vers A', mais aussi de B vers B'.

Ce couple est donc très important, on l'appel vecteur $(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix})$
 le couple $(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix})$ est donc appelé vecteur de la translation $\vec{t}_{AA'}$

- remarque : seuls les points de départ A et d'arrivée A' interviennent pour définir le vecteur $(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix})$
- quel est le vecteur de $\vec{t}_{BB'}$, $\vec{t}_{A'A''}$, $\vec{t}_{B'B''}$?
- trouver d'autres vecteurs correspondant à des couples de points dessinés.
- quel est le vecteur de $\vec{t}_{AA'}$, $\vec{t}_{A'A''}$, $\vec{t}_{AA'} \otimes \vec{t}_{A'A''}$, $\vec{t}_{AA''}$?
 remarque ?
- idem avec \vec{t}_{AB} et \vec{t}_{BA} .

Classe de Troisième

1 - révision sur la translation et le vecteur

2 - dans un plan sans repère

$\begin{matrix} & x & \\ & B & \\ x & & \\ A & & \end{matrix}$

quel est le vecteur de \vec{t}_{AB} ?
 - on ne le sait pas puisqu'il n'y a pas de quadrillage.

mais on sait qu'il ne dépend que de A et B.

On le notera donc \vec{AB}
 \vec{AB} est le vecteur de \vec{t}_{AB}

Mise en ordre des connaissances:
 Synthèse des découvertes faites par les élèves.

On donne un nom aux choses.

Prise de conscience de la notion de vecteur

Assimilation de la notion de vecteur

Accommodation de la notion de vecteur-couple.

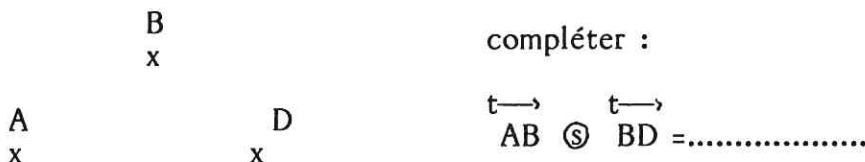
Equilibration de la notion de de translation

(résultat obtenu précédemment)

- on donne 4 points A, B, C, D,
on sait que (A, B, C, D) est un parallélogramme
- nommer des translations qui ont le même vecteur.

compléter : $t_{\vec{AB}} = \dots$ donc $\vec{AB} = \dots$
 $t_{\vec{DA}} = \dots$ donc $\vec{DA} = \dots$

3 - trois points A, B, D :



(souvenez-vous des résultats de 4ème sur les quadrillages)
 donc $\vec{AB} + \vec{BD} = \dots$ (souvenez-vous des additions de couple)

- de même pour 5 points A, B, C, D, E, compléter :

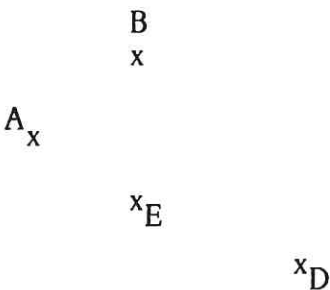
$\vec{BD} + \vec{DC} = \dots$ $\vec{ED} + \vec{DA} = \dots$
 $\vec{AB} + \vec{BA} = \dots$ $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC} = \dots$

- la propriété $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ s'appelle la relation de Châsles

4 - on donne 4 points A, B, E, D

pouvez vous compléter

$\vec{AB} + \vec{ED} = \dots$ non car $B \neq E$



mais on peut trouver l'image

F de A par $t_{\vec{AB}} \oplus t_{\vec{ED}}$

- que vaut alors $\vec{AB} + \vec{ED}$?

- comment peut-on construire le point F ? trouver un parallélogramme qui nous aidera.

5 - exercices de constructions de points grâce à des vecteurs, additions de vecteurs etc... sans oublier la translation.

6 - des phrases vraies en même temps, donc fausses en même temps, sont appelées équivalentes

accommodation à la notion de vecteur classe

assimilation de la relation de Châsles

accommodation à la relation de Châsles

nécessité de contre exemple

manipulation action
 accommodation à la notion de vecteur et à la relation de Châsles

on donne la phrase :

- (A, B, C, D) est un parallélogramme, écrire des phrases équivalentes à la phrase précédente, ou interviendront des vecteurs ou des translations.

- même exercice en partant de

$$\overline{EF} = \overline{GH}$$

trouver des phrases équivalentes faisant intervenir des parallélogrammes ou des translations.

- idem avec

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{t} \rightarrow \quad \overrightarrow{t} \rightarrow \\ IJ = KL \end{array}$$

et parallélogrammes et vecteurs.

7 - retour au plan repéré

composantes (ou coordonnées) de vecteurs

- cette notion est déjà mise en place par la présentation même de la notion de vecteur, grâce à la notation $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que l'on peut noter aussi $\overrightarrow{AB} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$

- il n'y a plus qu'à le dire

8 - coordonnées d'un point dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})

les coordonnées de M sont celles du vecteur \overrightarrow{OM} c'est donc immédiat :

si $\overrightarrow{OM} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$ alors $M(x, y)$

9 - milieu d'un segment [AB]

c'est le point M s'il existe tel que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

(même déplacement de A vers M que de M vers B)

donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

etc....

10 - reste à faire des exercices "d'accommodation" classique :

dans un plan repéré :

coordonnées de milieux, de vecteurs etc....

équations.

dans un plan non repéré :

différence de vecteurs, produit par un réel, constructions, centre de gravité, etc.....

accommodation aux notions associées de parallélogrammes, vecteurs et translations

équilibration progressive de la notion de vecteur

Remarques générales

Dans tout le déroulement du cours l'effort a été porté sur la simplicité du langage, les mots nouveaux arrivant au compte-goutte.

par contre, dès que ces mots nouveaux sont introduits, ils sont employés et répétés pour favoriser leur assimilation.

Tout le cours doit être agrémenté de nombreux dessins. Il s'agit de manipuler des objets géométriques.

Notons également l'absence des notions de bipoints, de relation d'équivalence, d'équipollence de classe d'équivalence etc..., qui n'empêche nullement d'aboutir à une notion de vecteur qui se tient. Le mot "équivalentes" n'intervient qu'une fois à la fin, car il faut bien l'introduire un jour, mais est clairement explicité auparavant. Et si la notion de relation et de classe est sous jacente, elle ne l'est que pour le professeur, mais certainement pas pour l'élève qui se fie à l'explication qu'on lui a donnée.

on pourrait discuter sur la rigueur de la présentation mais c'est justement par excès de rigueur dans le premier cycle qu'on a véritablement raté l'enseignement des mathématiques à ce niveau. Un enfant n'est pas un adulte, encore moins un professeur de mathématiques, la rigueur viendra en son temps.

6-4 Les opérations dans \mathbb{D} en 6ème et 5ème

Beaucoup d'élèves de 5ème ne manipulent pas encore correctement l'addition et la soustraction dans \mathbb{D} . Or les programmes leur imposent l'apprentissage de 2 autres lois : la multiplication et la division. Essayons d'examiner quelles formes de structures logiques sont mises en jeu dans l'apprentissage de ces opérations.

1 - la multiplication dans \mathbb{D} (apprise en 5ème)

(pour simplifier le passage de p à \bar{p} nous travaillons dans \mathbb{D}^*)

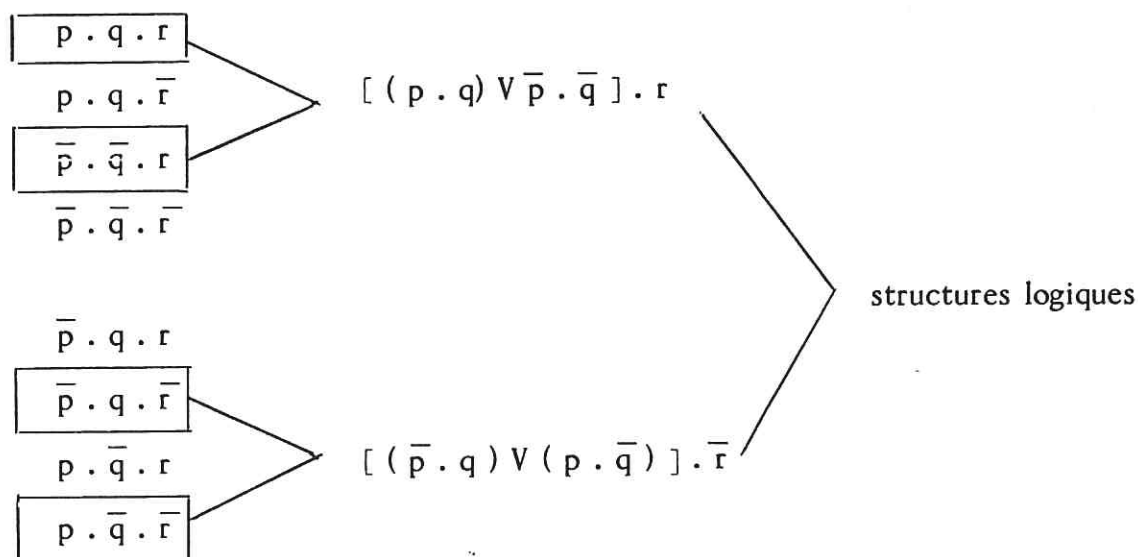
soit $a \in \mathbb{D}^*$ et $b \in \mathbb{D}^*$

Posons $p = (a > 0)$ $q = (b > 0)$ $r = (ab > 0)$

donc $\bar{p} = (a < 0)$ $\bar{q} = (b < 0)$ $\bar{r} = (ab < 0)$

Posons " . " = "et" "V" = "ou"

il y a les 8 possibilités suivantes à repérer :



Parmi ces 8 possibilités, 4 seulement donnent des phrases vraies qui correspondent aux 2 structures logiques ci-dessus.

Si l'enfant a assimilé ces structures logiques, il est censé comprendre la multiplication dans \mathbb{D} et la pratiquer sans trop de problèmes.

remarque :

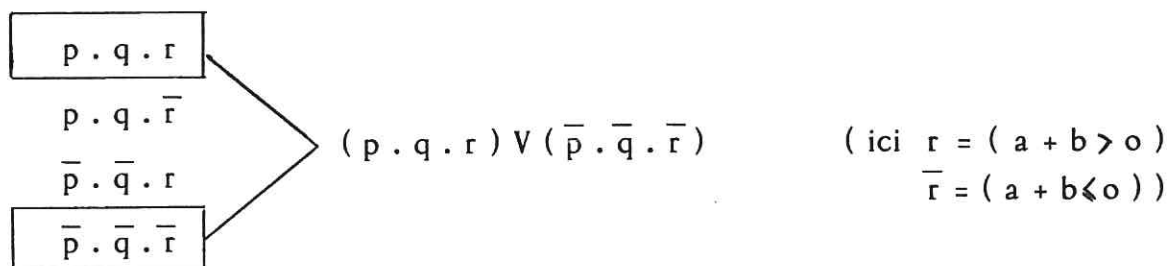
Le schéma ci-avant et les structures qui en découlent ne sont qu'une manière de voir les choses. Les conclusions que l'on en tire n'ont de sens qu'en comparaison avec d'autres conclusions obtenues avec le même procédé (voir

l'addition ci-après) l'enfant n'a évidemment pas conscience de ces structures et il n'est pas question de dire que le cerveau fonctionne selon ce schéma, la neurologie et la neurophysiologie sont encore loin de pouvoir donner des réponses à ce sujet.

Mais l'essentiel pour nous était de trouver un procédé pour comparer des processus opératoires.

2 - l'addition dans \mathbb{D} (apprise en 6ème)

On retrouve les 8 possibilités précédentes à priori, dont les 4 premières aboutissent à une structure différente :

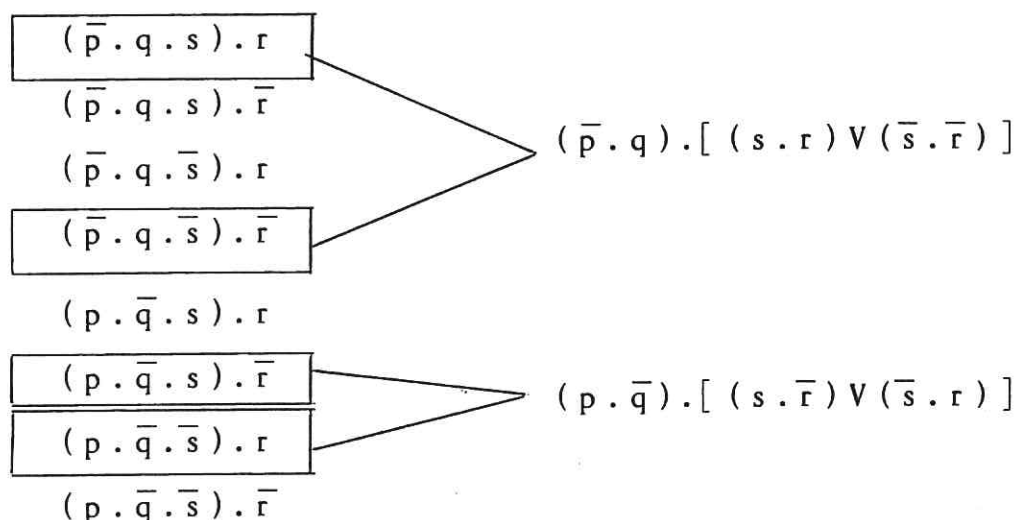


Cette fois seules la première et la dernière phrase sont vraies.

Mais les 4 dernières font intervenir les valeurs absolues de a et b.

Posons donc $s = (|a| < |b|)$ d'où $\bar{s} = (|a| \geq |b|)$

les 4 dernières possibilités se dédoublent et deviennent :



On obtient 4 phrases vraies parmi ces 8 phrases.

On aperçoit tout de suite que l'addition dans \mathbb{D} représente une difficulté plus grande que la multiplication :

- Elle fait intervenir davantage de possibles, donc davantage de structures qui sont par ailleurs plus compliquées.
- Elle fait intervenir un élément (ou une variable) supplémentaire qui

est la valeur absolue, difficilement acquise en 6ème, pour ne pas dire pas acquise du tout.

- Elle est apprise en 6ème alors que la multiplication l'est en 5ème.

" Une compréhension satisfaisante des entiers négatifs comme éléments symétriques des nombres positifs correspondants demande un niveau d'abstraction plus élevé, analogue à ce que Piaget a appelé le niveau de raisonnement formel "

[BP - p 275]

Compte-tenu de ces observations, ne pourrait-on pas envisager l'apprentissage de l'addition et de la multiplication dans D^+ en 6ème ; et commencer par la multiplication dans D en 5ème pour envisager l'addition dans D en fin de 5ème, voire début 4ème.

3 - Soustraction et division dans D

la division dans D et la soustraction menent à des schémas tout à fait semblables aux schémas précédents.

Peut-on conclure que les nouvelles structures qu'elles mettent en jeu, qui sont d'ailleurs parfois les mêmes (multiplication et division), doivent, au même titre que les précédents, être toutes intégrées? difficile à dire car en fait ce sont les opérations inverses des précédentes et c'est alors le principe de la réversibilité des opérations qui va opérer.

4 - en conclusion

Il semblerait que la multiplication ne dût pas poser de problème par rapport à l'addition et la soustraction puisqu'apprise plus tard et faisant appel à des structures moins nombreuses et plus simples.

Or en arrivant en 5ème les élèves n'ont pas encore assimilé les structures correspondant à l'addition et la soustraction, et les combinaisons nouvelles qui interviennent avec la multiplication font qu'il se produit une rupture, un déséquilibre supplémentaire alors que l'équilibration de l'étape précédente n'était pas achevée.

Les élèves sont confrontés brutalement à un grand nombre de possibles qu'ils mélangent, ce qui explique les difficultés rencontrées.

5 - Un point de vue psychologique

Les signes opératoires sont également des signifiants, dont les signifiés sont propres à chaque enfant. Ce sont des symboles pouvant troubler leur

inconscient qui leur fait perdre leur sens premier.

Pour la soustraction, le signe "-" signifie "oter" ou "retrancher" dans son sens mathématique, c'est-à-dire celui que le professeur de mathématique conçoit naturellement et presque exclusivement.

Mais pour un enfant vivant dans un milieu dévalorisant, pour un enfant faisant des complexes d'infériorité, à qui on souligne la valeur supérieure du frère ou de la soeur ou à qui le professeur fait remarquer la "bêtise", pour cet enfant certains signes se transforment en symboles. C'est ainsi qu'un signe "-" va frapper l'inconscient, lui rappeler qu'il est "moins" ceci ou cela. Il va alors s'efforcer d'éliminer ces symboles qui sont des signifiants troublants, quitte à les remplacer par d'autres plus gratifiants. Ainsi le signe "-" se transforme en signe "+" sans raison apparente, mais c'est l'inconscient qui a décidé en vertu de ce que la psychologie freudienne appelle le principe de plaisir, c'est-à-dire qu'entre 2 solutions l'inconscient choisira toujours la plus gratifiante pour le moi ou celle qui apportera le plus de plaisir.

D'ailleurs Piaget lui-même, qui ne voit pas les choses sous le même angle que Freud, parle aussi "du primat des positifs" et dit :

les observables apparaissent perceptivement sous leurs aspects positifs.

6 - le danger du "pret-apporté"

Il est tentant dans les petites classes d'introduire des phrases à faire apprendre par coeur aux élèves, ce qui, dans certains cas, facilite bien certains apprentissages.

Mais il faut se garder d'abuser de tels procédés car on risque d'introduire des confusions dans les esprits.

Par exemple : la règle des signes est souvent énoncée comme suit :

+ par + = +

- par + = - etc....

mais que signifie "par" pour l'élève.

Le mot "par" apparaît comme un nouveau signifiant dont le signifié a été perdu en cours de route. Si bien qu'il y a mélange des lois. Ou si l'élève fait l'effort de reconnaître la loi et ses règles d'application, il en oublie alors le nombre.

Inversement s'il calcule d'abord le produit des valeurs absolues, il va oublier le signe. L'élève disjoint les facteurs valeur absolue et signe, ce qui multiplie les possibilités, ou les néglige purement et simplement.

Conclusion

Après ces quelques réflexions on ne doit plus s'étonner de rencontrer encore en 4ème et 3ème des élèves qui n'ont pas encore intégré la multiplication ou l'addition dans D. En effet, dans la plupart des cas les rythmes d'apprentissage n'ont pas été respectés, introduisant une notion alors que l'équilibration de la notion précédente n'était pas terminée.

D'autre part le vécu des enfants, et en particulier de leur petite enfance, les a marqués à jamais et peut influencer leurs réactions devant les problèmes rencontrés.

Toutes ces données compliquent la tâche de l'enseignant qui doit dépasser sa matière pour privilégier dans certains cas les aspects pédagogiques et psychologiques.

6-5 Géométrie en 6ème et 5ème

le sens de notre travail c'est d'avancer vers une pédagogie par objectifs, c'est-à-dire une pédagogie fondée sur l'acquisition de notions, par opposition à une pédagogie de programmes.

Nous avons alors cherché ce qui permet de mettre en relation les différentes notions de géométrie au 1er cycle.

I - Niveau 6ème :

Nous proposons de construire une démarche à partir du vécu de l'élève. Or le vécu c'est l'espace. Nous partons donc dans l'espace pour aller au plan, à l'inverse de la démarche classique. Car les manipulations sur des objets concrets sont le point de départ des connaissances, de l'abstraction progressive..... : " Ce qu'a pressenti Poincaré dans le rôle attribué par lui aux mouvements, sources des connaissances spatiales les plus élémentaires....." (Dans "la Représentation de l'Espace chez l'Enfant" de Jean Piaget et Bärbel Inhelder - p 524)

I - 1 Manipuler des volumes :

On part d'une collection de volumes simples : le cube, la pyramide, le tétraèdre, le parallélépipède rectangle, parallélépipède oblique.....

Pour pratiquer des observations : sur les voisinages, les formes (carré, rectangle, parallélogramme, losange). Piaget justifie ces choix ainsi :

".....Le rapport spatial le plus élémentaire que puisse appréhender la perception semble être celui de voisinage correspondant lui-même à la condition la plus simple de toute structuration perceptive, c'est-à-dire à la "proximité" des éléments perçus dans un même champ..." pp 15 - 16

".....Un second rapport spatial élémentaire est celui de la séparation...." p 16

".....Un troisième rapport spatial essentiel est celui qui s'établit entre éléments à la fois voisins et séparés lorsqu'ils sont distribués les uns à la suite des autres : c'est le rapport d'ordre (ou de succession spatiale)....." pp 16 - 17

".....Sur le terrain perceptif, il est en particulier, une relation essentielle dont les rapports d'ordre constituent l'élément : c'est la relation de symétrie....." p 17

".....Un quatrième rapport spatial donné dans la perception élémentaire est celui d'entourage (ou d'enveloppement)."

p. 17

".....Enfin, il intervient évidemment, dès le départ de toute perception, un certain rapport de continuité dans les cas de lignes et des surfaces données, mais la question est de savoir en quel sens l'ensemble d'un champ perceptif constitue un champ spatial continu."

p. 18

On dénombre les arêtes, les faces, et on examine s'il y a parallélisme ou non (sans approfondir la notion d'angle). Notons que la notion de parallélisme est issue de l'idée de conservation d'une même direction, et construite quasi simultanément à celle de la droite, acquise vers 7-8 ans. (cité p 370).

Après l'étape de l'analyse on passe à l'étape inverse : celle des constructions. Dans ce cadre on envisage les différents développements, et grâce aux découpages, à tous les assemblages possibles. Piaget note à ce sujet (cité , p. 341)

" il ne suffit pas de percevoir correctement un objet à trois dimensions, ni de prolonger cette perception en une image adéquate de l'objet non déplié, pour parvenir à imaginer le rabattement correct des côtés de cet objet. En d'autres termes, l'intuition d'une figure développée n'est pas un produit de la simple perception : la perception de six faces carrées d'un cube ne suffit pas à engendrer l'image de ces six côtés rabattus sur un même plan. ce qui intervient dans l'image du développement, en plus de la perception du volume non déplié, c'est une action, donc une modification motrice de la perception, et c'est même l'anticipation représentative d'une action non-exécutée, donc le passage d'un état perceptif à un état perceptible, mais non-encore perçu".

les réalisations obtenues permettent l'acquisition d'un vocabulaire simple.

On peut encore procéder à des séances de constructions au compas, à l'équerre et au double décimètre pour "entraîner" les élèves à reproduire les formes simples.

La capacité de maîtriser ces différents outils est nécessaire pour la suite du processus d'appropriation de la géométrie. De plus "la représentation ne remplace vraiment l'action qu'après avoir été suffisamment informée par l'action elle-même, et l'on ne saurait ainsi, sans une coupure artificielle, la détacher de son contexte actif, pas plus que l'on ne peut dissocier une perception de son contexte sensori-moteur"

(cité p. 529).

I - 2 Effectuer des Recherches :

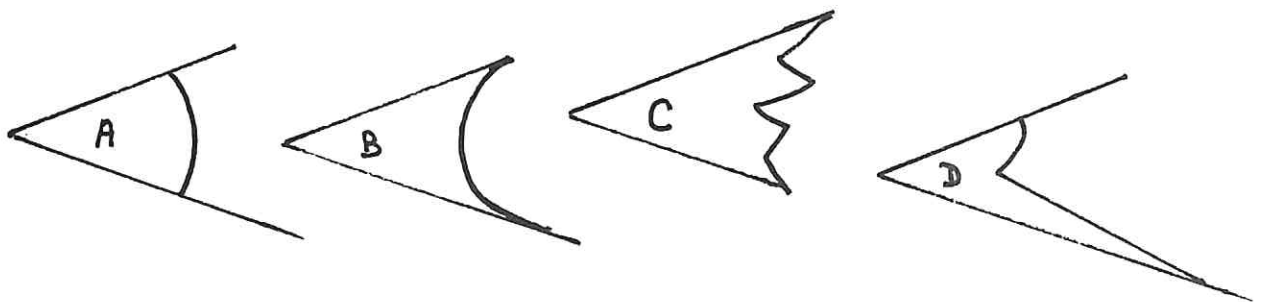
Partant de ces volumes, il est en effet possible d'émettre des hypothèses et de tenter de les vérifier. Il ne s'agit pas à cette âge, à ce stade du développement, de faire comme si l'enfant était capable de fonctionner sur le mode de la pensée formelle, mais de dépasser "le niveau intuitif élémentaire" (cité p. 523 et 524) pour le guider peu à peu au delà de la réalité physique et lui permettre de "constituer des schémas opératoires susceptibles d'être formalisés".....

Dans le cube, de nombreuses expériences sont possibles, à l'aide de certains matériels : blocs de polystyrène et filicoupeur, qui permettent d'obtenir un grand nombre de formes différentes à partir de certains angles de découpe du cube. A ce stade il est intéressant d'aborder très sérieusement la notion d'angle. Nous proposons de le faire à partir de manipulations par très petits groupes auxquels sont distribués des objets en cartons de couleur.

I - 2.1 Permanence de l'angle (1ère enveloppe avec 4 angles) :

On distribue à chaque groupe des "angles" A, B, C, D de même couleur, mais de forme différente.

Il faut les comparer.



Par superposition on aboutit à la définition :

"L'angle c'est le coin. Il ne dépend ni de la forme de la découpe, ni de la longueur des côtés, ni de la surface interceptée par les 2 côtés, mais de l'écartement des 2 côtés". La notion est ainsi déduite : "deux droites forment entre elles un angle sitôt qu'elles cessent d'être parallèles".... (cité p. 367)

Dans notre exercice, la même couleur pour A, B, C, D renforce l'idée d'égalité : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$

I - 2.2 Opérations sur les angles :

* I.2.2.1. Classement : (2ème enveloppe : 7 angles).

On distribue ensuite à chaque groupe des "angles" K, E, F, G, H, I, J

de couleurs différentes tels que $K = 15^\circ$; $E = 30^\circ$; $F = 45^\circ$; $G = 60^\circ$; $H = 90^\circ$; $I = 135^\circ$; $J = 180^\circ$. (les élèves remarquent que J est un angle "plat"). Chaque groupe a un angle de chaque mesure et doit les classer dans l'ordre des grandeurs croissantes /ou/et/dans l'ordre de grandeurs décroissantes.

* I 2.2.2. Composition par addition ou soustraction d'angles : (3^{ème} enveloppe : 15 angles).

Chaque groupe dispose de 3 K, 3 E, 2 F, 3 G, 2 H, 1 I, 1 J

Il s'agit de retrouver par exemple \hat{F} par composition d'angles, puis de retrouver \hat{G} , puis \hat{H} , puis \hat{I} , puis \hat{J}

Alors on peut dire qu'il faut trouver "l'angle droit", tel qu'ajouté à lui-même il donne un "angle plat"..... (ne pas brandir H et dire "c'est un angle droit", ce qui ressort d'une conception magique de l'enseignement).

Ces opérations sur les angles se poursuivront encore au niveau 5^{ème} (mesures) et après. Piaget montre que cette notion se construit tout au long d'un processus très long.

- On peut alors revenir à l'étude systématique des produits des découpes du cube à partir de certaines problématiques telles :

existe-t-il d'autres carrés que les faces ? et en partant des sommets ?

existe-t-il des rectangles ? et en joignant des sommets ?

et qu'est-ce que ça donne en coupant selon les diagonales ?

On peut mettre en évidence les propriétés du rectangle, du triangle..... etc

- On procède de la même façon sur les autres volumes.

I - 3 Constructions géométriques dans le Plan :

Par pliages, découpages, puis à l'aide du compas, de l'équerre, de la règle....

On essaie de trouver un procédé de construction pour la médiatrice, la bissectrice, le cercle, les triangles, les droites parallèles.....

On procède alors aux conclusions qui permettent de retrouver systématiquement les procédés qui correspondent à ces notions et à ce vocabulaire de base

"C'est donc une activité sensori-motrice générale qui conduit le sujet, par la manipulation des objets, leur déplacement, leur rotation, etc....., à attribuer

à ceux-ci une forme et une grandeur constante; outre la permanence substantielle dont ils sont dotés lorsqu'ils disparaissent du champ perceptif. Dans la suite, c'est la même activité, mais, spécialisée dans l'organisation des mouvements de l'oeil, etc...., qui rend compte des régulations déterminant l'évaluation des grandeurs à distance ou des formes en perspective.", nous permettent de conclure cette partie, Jean Piaget et Bärbel Inhelder (cité p . 527)

II - Niveau 5ème :

La construction des connaissances géométriques s'appuie sur les acquisitions permises aux niveaux élémentaire et 6ème.

On s'attache ici à la structuration dans le domaine de la géométrie projective et euclidienne qui succède à la topologie (cité p. 546), c'est-à-dire à mesurer des objets différents : des longueurs, des surfaces, des volumes.

II - 1 Notion de longueurs et mesures :

Il s'agit là de réviser des notions de droite et d'entourage de figures différentes : carré, rectangle, triangle, polygone.....

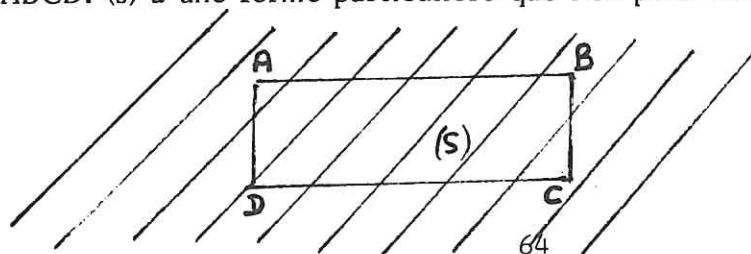
On revoit les classements de longueurs, les différentes unités, la notion de périmètre pour chacune des formes étudiées précédemment. On pratique des exercices de conversions dans les mesures de longueur, sur la base de la permanence des distances.

II - 2 Notion de surfaces et mesures :

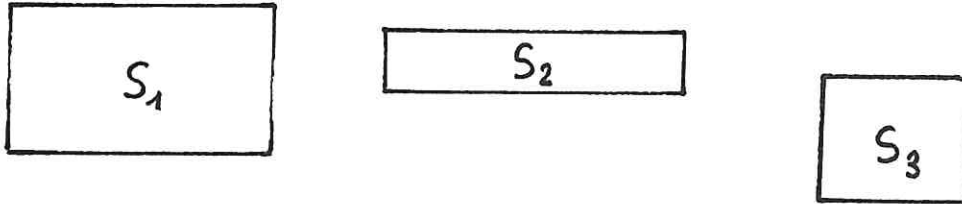
A cet âge, la notion de surface peut encore se révéler une abstraction difficile, car il s'agit de mettre " en correspondance des points ordonnés de l'espace, mais obéissant à un autre principe multiplicatif, celui des correspondances bi- univoques à plusieurs dimensions selon des axes de coordonnées rectangulaires". La difficulté de telles coordinations, tout ce qu'elles supposent d'acquis préalables expliquent pourquoi leur construction est si tardive (cité p. 484-485)

Il convient donc de procéder d'abord à des exercices de structuration appropriés.

Prenons une étendue hachurée . (s) est une surface limitée par le périmètre de ABCD. (s) a une forme particulière que l'on peut analyser.....



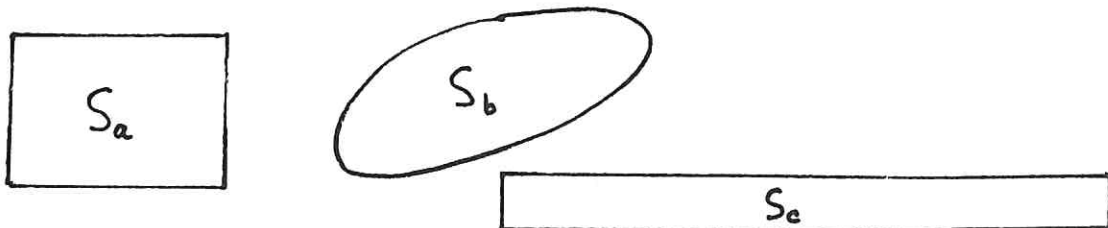
II - 2.1 Comparaison de différentes surfaces :



Par superposition les élèves pourront réussir à composer différentes formes semblables entre elles ou voisines. (carrés, rectangles, losanges, cercles, parallélogrammes)

II - 2.2 Classements :

Mais ils arriveront bien vite aux limites de cette méthode, à la nécessité de se donner une unité pour des surfaces hétérogènes.



On doit alors présenter les mêmes figures sur papier quadrillé. les élèves peuvent choisir une unité, par exemple : un carreau. En évaluant la grandeur de la surface par valeur approchée (en carreaux) ou exacte, les élèves peuvent alors effectuer un classement par ordre croissant ou décroissant. On pourra ensuite passer au cm^2 , etc.....

II - 2.3 Découverte de méthode de calcul de l'aire de différentes surfaces :

carré, rectangle, parallélogramme, losange.....

On utilise du papier quadrillé - unité : le carreau.

- pour le carré, il suffit de compter le nombre de carreaux. Ensuite on peut demander aux élèves, sans compter tous les carreaux à l'intérieur de la figure, comment obtenir ce résultat ?

On en viendra à multiplier le nombre de carreaux dans une bande et dans une colonne. Le maître peut alors donner la formule : $S = C \times C = C^2$.

- pour le rectangle la même méthode :

multiplication du nombre de carreaux par bande et du nombre de carreaux par colonne et formule : $S = L \times l$.

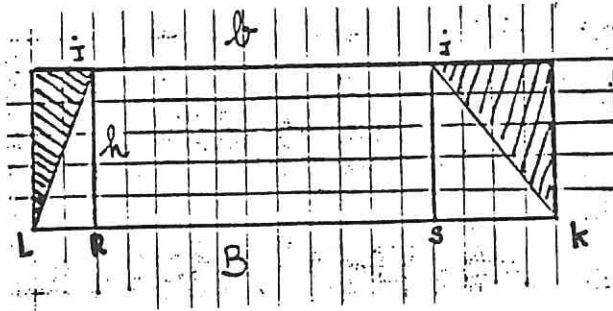
- pour le triangle 2 méthodes sont possibles :

* 2.3.1 - évaluer le nombre de carreaux entiers à l'intérieur du triangle évaluer le nombre de carreaux entiers, à l'extérieur compris, additionner les 2 et faire la moyenne. (un élève de SES a proposé cette solution).

*2.3.2 - compter le nombre de carreaux du carré (dont le triangle est la moitié) ou du rectangle et diviser par 2.

On arrive de toute manière à faire comprendre que : $S = \frac{B \times H}{2}$

- pour le trapèze, on peut décomposer la surface en plusieurs simples (3 rectangles dans la figure ci-dessous) ; découper selon les hauteurs de façon à isoler chaque rectangle et montrer qu'on a un rectangle entier et 2 demi-rectangles. On peut calculer la surface totale.



donner alors la formule $S = \frac{(B + b) \times H}{2}$

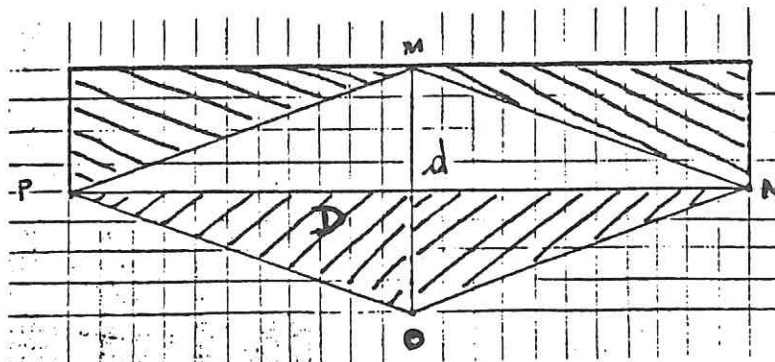
- pour le losange, on peut l'inscrire dans un rectangle dont les sommets (du losange) marquent le milieu des côtés (du rectangle) ; faire trouver la surface de ce rectangle.

On fait tracer les diagonales (grande = D ; petite = d) et découper le losange selon ses côtés et ses diagonales. On obtient 4 éléments triangulaires identiques. On donne la consigne de les rassembler de façon à former une figure simple et prenant le moins de place possible. (c'est un rectangle).

On fait alors compter ses carreaux. C'est la moitié du rectangle de départ.

On s'aperçoit alors que $d = l$ et $D = L$.

Si MNOP vaut $\frac{L \times l}{2}$ donc on a la formule $S = \frac{D \times d}{2}$.



- par la suite, organisation d'exercices faisant systématiquement appel à l'application des formules apprises.

III - mesures d'Angles :

- III - 1. Manipulations : dans le prolongement de ce qui a été fait au niveau 6ème et avec le matériel de la 3ème enveloppe, on part de l'acquis suivant : "angles aigus" ; "angles obtus" ; "angles plats" ; "angles droits" ; un plat = 2 droits.

On fait déduire la valeur de K ; E ; F ; G ; I ; H ; sachant que $\dot{J} + \dot{J} = 360^\circ$.

On fait constituer un tableau de classement de ces angles (ordre croissant ; ordre décroissant).

- III - 2. Mesure et outil : pour mesurer les angles on peut faire construire l'instrument qui mesure les angles par superposition et transparence, avec du papier calque, ou du rhodoïd.

Le rapporteur artisanal peut au départ être gradué de 15° en 15° ou autrement et on peut déboucher sur le rapporteur "du commerce" par l'exigence de mesures plus fines (de degré en degré).

Il est important de bien choisir le rapporteur "commercial" et de donner des indications précises à l'élève qui doit acheter son outil :

pas de double graduation grades-degrés (ou l'un, ou l'autre) ;

pas de base du rapporteur en ligne-brisée (partir de l'angle plat).....

III - 3. Opérations sur les angles : Il est alors possible d'aborder les notions d'angles "adjacents" ; d'angles "complémentaires" ; d'angles "supplémentaires"....

On pourra déboucher sur la somme des angles du triangle ;

la somme des angles d'un quadrilatère ;

la somme des angles de divers polygones.....

et essayer d'en déduire une loi.....

IV - Comparaisons et mesures de Volumes :

On parvient là à un niveau très difficile dans le fait qu'on introduit une troisième dimension et que le système de coordonnées se complique. Il faut donc passer au maximum par les manipulations et par l'utilisation du matériel évoqué (dans I.1 et I.2).

- IV - 1. Dessin des volumes simples : cube, prisme, pyramide.....

- dans le dessin en perspective cavalière (dessin technique) on fait apparaître la 3ème dimension.

- dans le dessin vue "d'avion", ou en développé, on fait changer le point de vue de l'élève.

Cette expérience (pratiquée par Piaget dans l'ex. cité) fait apparaître la maturité de chaque élève et permet au maître d'aborder les difficultés de façon plus personnalisée.

IV - 2. Recherche d'une unité de mesure :

IV 2.1 Le principe de la comparaison des volumes est le même que pour les surfaces. On ira à la recherche de la formule du volume du cube :

$$V = C^3.$$

Il est possible d'utiliser un matériel créé en atelier SES ou EMT en bois, avec un cube de 10 cm de côté réalisé ainsi :

- 9 plaques d'1 cm d'épaisseur et de 10 cm x 10 cm ;
- 9 barres de section carrée d'1 cm de côté et de 10 cm de long ;
- 10 cubes d'1 cm de côté. (le cube - petit - étant l'unité de volume).

IV 2.2 Recherche de mesures de volumes simples :

on construit un cube de 10 cm de côté ;

une pyramide de 10 cm d'arête ;

un prisme de 10 cm d'arête ; etc.....

on compare les différents volumes en remplissant chacun de sable qu'on pèse respectivement pour chaque volume.

De là une évaluation de chaque volume par rapport au cube et une approche des formules permettant de calculer le volume à partir de la surface de base.

IV 2.3 Exercices d'application des formules ;

tableau pour la conversion des volumes et exercices de conversion, systématiques.

- * Peu à peu sera acquise et consolidée la notion de volume et la permanence des volumes.

Pour conclure, nous souscrivons pleinement à l'opinion émise par Piaget (cité p. 534), "les opérations constructrices de l'espace sont de caractère infralogique et non pas logique (ce qui n'exclut nullement que des êtres spatiaux puissent être soumis par ailleurs à des opérations logiques)". C'est précisément là ce que nous avons tenté d'illustrer.

6-6 Géométrie en 4ème et 3ème

I - Introduction :

- classe de 4ème : 13 - 14 ans
- plein milieu de la phase de maturation du stade formel
- ceci n'est qu'une moyenne : c'est-à-dire que certains élèves dominent déjà l'hypothético-déductif, alors que d'autres quittent à peine le stade des opérations concrètes. Certains ne le quitteront jamais. (Ceux là ne peuvent pas raisonner sur des idées mais seulement sur des objets qu'ils manipulent).
- l'enseignement doit pouvoir s'adresser à tous :
d'où l'individualisation de la progression et la diversification nécessaire des activités.

II - La démonstration :

On entend toujours : "les élèves ne savent pas démontrer". Or un grand nombre d'élèves n'ont pas intégré les structures logiques indispensables à la construction des démonstrations.

Nos objectifs doivent être compatibles avec le développement de l'enfant. (par exemple : la démonstration par l'absurde est en dehors des capacités normales d'un élève du premier cycle).

Une démonstration doit résulter d'un besoin. Quel intérêt à démontrer des évidences ? sinon ennuyer et rebuter les élèves.

Par contre, certains résultats semblent évidents sur une figure donnée (celle de l'élève), mais si l'on change de figure ? la preuve que le résultat supposé ne dépend pas de la figure s'impose, d'où la nécessité de la démonstration. D'autre part les élèves de premier cycle n'ont aucune idée de ce que peut être une démonstration. Prouver ? d'accord ! mais comment ? quelle est la démarche ? quels sont les arguments ? - "quand le prof fait la démonstration je comprends, mais comment a-t-il su qu'il fallait dire ceci et utiliser cela ?".

A ce niveau il n'est pas vraiment question de démontrer mais on peut amener les élèves sur la voie de la démonstration, leur en donner l'idée par des manipulations d'implications et des exercices d'organisation de données :

- on peut fabriquer des petites démonstrations à trous où il faut chercher le chaînon qui manque (mais il n'est pas question d'enseignement programmé).

On peut écrire une démonstration dans le désordre, il s'agira de retrouver

l'ordre logique des phrases données (toujours pour des démonstrations très simples).

- Un autre type d'exercice est proposé ci-après :

exemples d'activités préparant les démonstrations

Énoncé :

Soient (A, B, C, D) et (C, D, E, F) deux parallélogrammes
montrer que (A, B, F, E) est un parallélogramme

1 - On considère les diverses propriétés utiles à la démonstration :

P_1 : un quadrilatère qui a deux cotés opposés parallèles et égaux est un parallélogramme.

P_2 : un parallélogramme a ses cotés opposés parallèles .

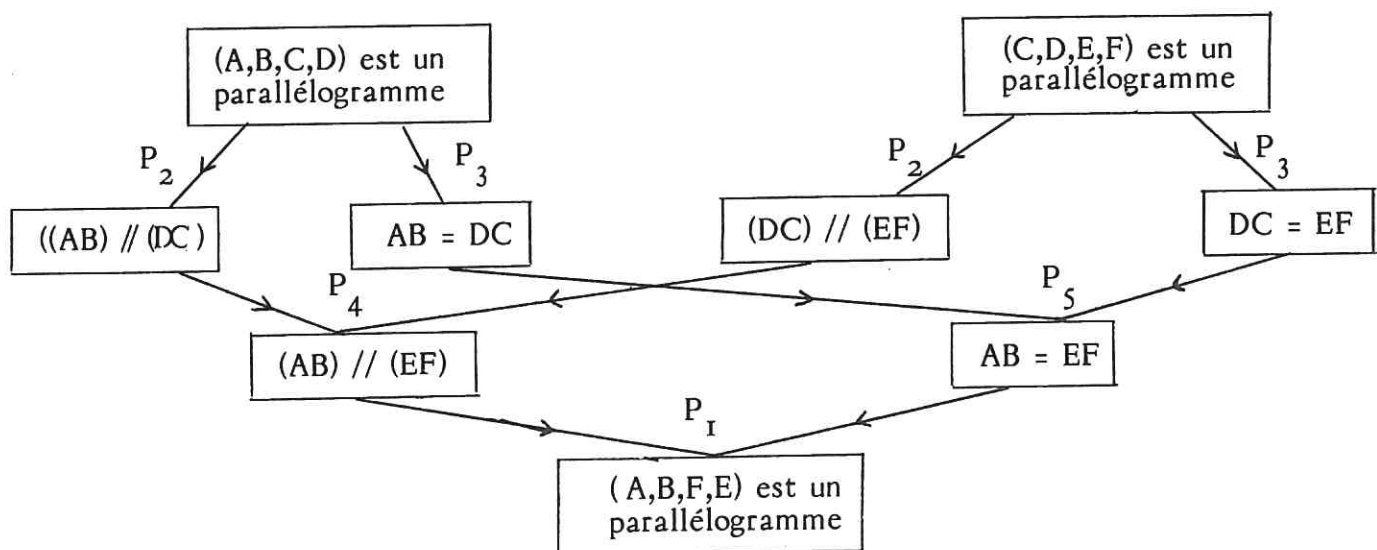
P_3 : un parallélogramme a ses cotés opposés égaux.

P_4 : deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

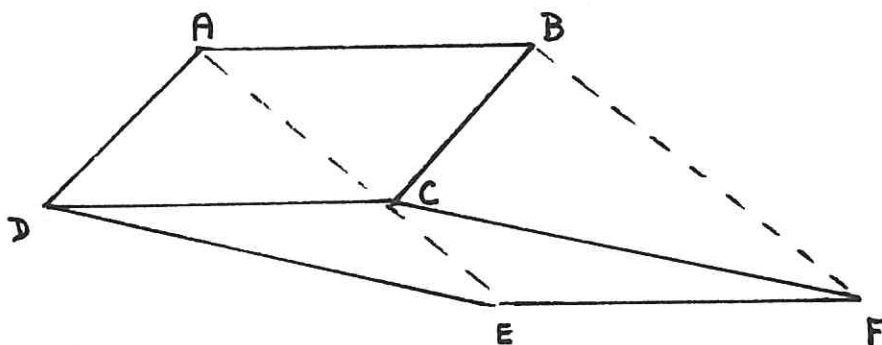
P_5 : deux segments égaux à un même troisième sont égaux.

remarque : égaux signifie ici : ont même longueur.

2 - on considère l'organigramme :



3 - On considère la figure :



à partir de ces données, on peut fabriquer des tas de problèmes, plus ou moins compliqués :

* exemple 1 :

- on donne l'énoncé.
- on donne l'organigramme où seules les propriétés P_i ne sont pas indiquées.
- on donne la liste des P_i .

question : placer les P_i aux bons endroits.

* exemple 2 :

- on donne l'énoncé.
- on donne l'organigramme avec seulement les deux premiers rectangles remplis ainsi que les P_i .
- on donne la liste des P_i .

question : compléter l'organigramme

* exemple 3 : (plus difficile)

- on donne l'énoncé.
- on donne l'organigramme complet

question : retrouver et écrire les phrases correspondantes aux P_i .

* exemple 4 : (difficile)

- on donne l'énoncé.
- on donne les P_i .

question : dessiner l'organigramme

On peut varier à loisir les combinaisons possibles. Chaque professeur choisira en fonction de sa classe ce qu'il peut faire.

On peut aussi chercher d'autres exemples, plus simples ou plus compliqués, toujours en fonction de nos élèves.

III - Le Langage.

Un des gros blocages rencontrés est la manipulation du langage.

c'est en fonction de cette influence de la langue et de la communication que parler apparaît en soi comme activité intellectuelle qui va contribuer - et seulement contribuer - à la construction des opérations. Parler en effet, c'est s'engager à effectuer les différenciations impliquées par les classifications contenues dans la langue. C'est - à la différence de ce qui se passe dans les fictions - soumettre ses représentations au contrôle des autres, considérer ces représentations du point de vue des autres, et ainsi les objectiver. C'est s'engager personnellement dans la distinction du réel et de l'imaginaire, en effectuer la comparaison, et la conclure par un jugement-constat.

[BP p. 287]

Le langage n'est pas la base de la structuration de la pensée mais il lui est intimement lié.

Toute démonstration débute par une démonstration verbale : On s'explique à soi-même puis on confronte avec les autres, puis on rédige (!).

On peut aider les élèves à améliorer leur "langage" : Construire avec eux des définitions, décrire des figures, apprendre par coeur des phrases bien structurées qui serviront de modèle..... sans tomber dans l'excès inverse : l'avalanche de définitions, axiomes, théorèmes conduit les élèves à l'asphyxie.

Il s'agit plutôt de bien organiser les connaissances sans tomber dans un verbalisme superflu.

travail interdisciplinaire possible (Français-Maths)

Construction de phrases, lecture et compréhension d'énoncés, description de figures ou de situations, distinction de la cause (hypothèse) et de l'effet (conclusion),.... (On voit encore beaucoup d'élèves qui ne distinguent pas le sujet de l'objet).

Compléter des phrases du type si..... alors..... ou.... plus généralement des phrases faisant appel à la logique.

exemple :

..... il pleut.....la chaussée est mouillée

compléter par le mot qui convient : donc, car, parceque, etc.....

IV - L'abstraction.

"ne sont assimilables par l'enfant et par conséquent n'ont valeur didactique pour lui que des expériences simples, limitées à un seul problème..... Les expériences trop complexes sont saisies globalement et superficiellement".

[NO - p. 147]

"l'abstraction simple est celle qui dégage les propriétés communes aux objets et les généralise en concepts.... par ex. l'observation de quadrilatères de dimensions et d'orientation spatiale différente, mais ayant tous leurs côtés égaux, sous-tend la formation du concept de losange, même quand les côtés sont perpendiculaires : le carré est aussi un losange"

[NO - p 141 - 142]

(niveau observation des objets)

"l'abstraction réfléchissante porte, pour sa part, non plus sur les caractères de l'objet, mais sur les conditions de l'action. Elle consiste, chaque fois, à prendre conscience des conditions d'une action pour inventer de nouvelles actions..... Piaget a montré que ce qui compte, ce ne sont pas les propriétés sensorielles des objets représentés, ce sont les actions qu'on exerce sur eux. Cela signifie que le sujet doit combiner et transformer au lieu d'illustrer et contempler"

(niveau observation de ses propres actions)

[NO - p. 142]

"C'est précisément parce que ces connaissances sont tirées des actions et non pas des objets comme tels qu'elles peuvent dans la suite être traduites en opérations symboliques et en langage"

[PCP - p. 68]

exemple : les fiches qui suivent ont été créées pour une classe de seconde mais sont aisément adaptables à une classe de 3ème ou 4ème.

Dans un premier temps, avant toute leçon, l'élève est invité à observer des figures, à construire des axes de symétrie, à trouver des centres....(abstraction simple).

Dans un second temps l'élève est invité à créer lui-même une chaîne de transformations. Il doit donc réfléchir sur ses propres actions (abstraction réfléchissante).

La première phase correspond à peu près à l'assimilation selon Piaget, la seconde phase à l'accommodation.

L'équilibration se fera au fur et à mesure d'exemples, de synthèses au tableau, de mises au point des définitions, propriétés, théorèmes, etc.....

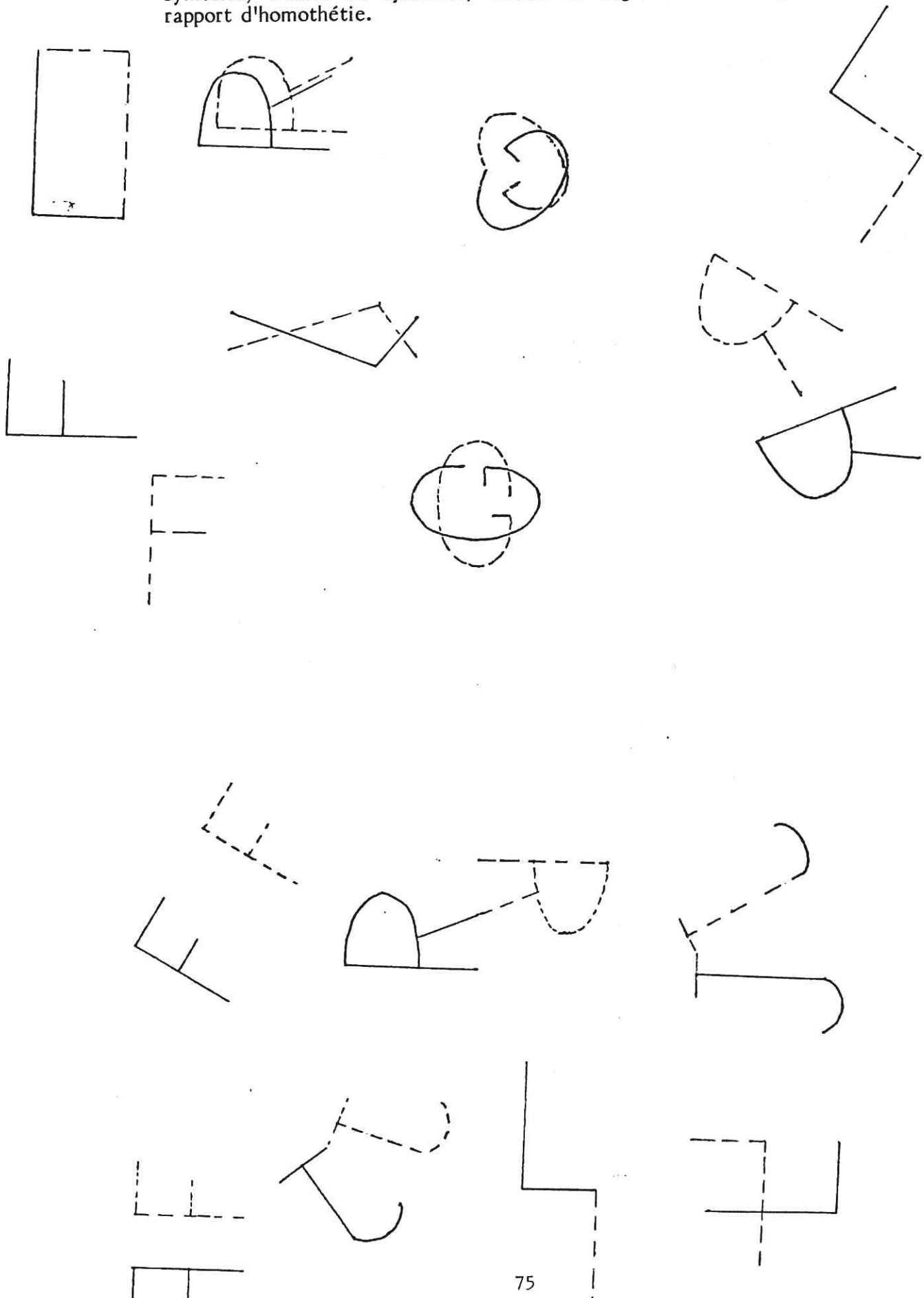
A noter qu'en seconde interviennent 2 autres phases :

- 1 - une phase analytique avec application de formules de transformation pour reproduire des figures dans le plan repéré et retrouver les propriétés vues lors de la manipulation, par l'observation (intuition) et le calcul (recherche des invariants)
- 2 - la phase théorique (conceptualisation) où intervient le vectoriel pour synthétiser les résultats précédents

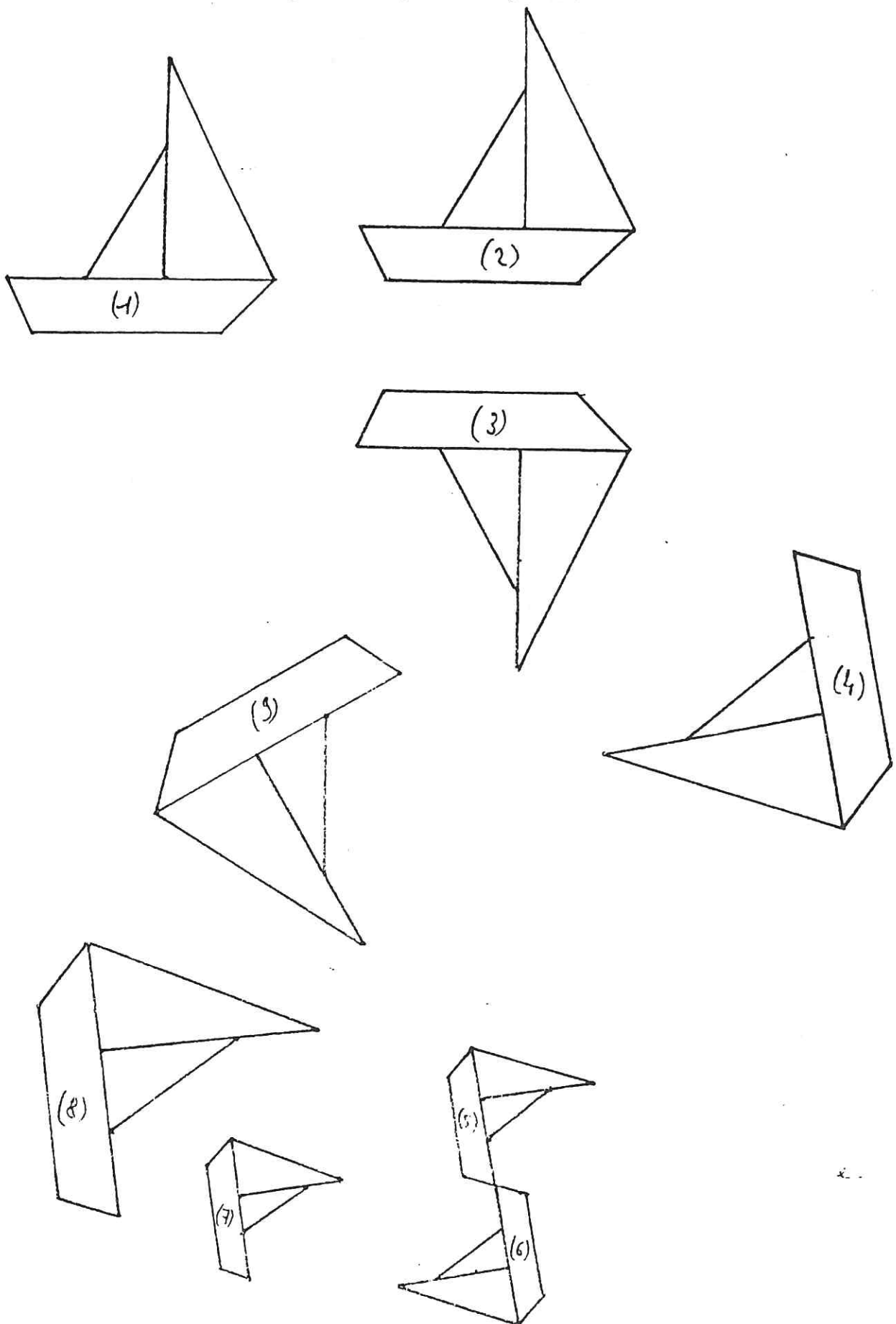
TRANSFORMATION du PLAN : PHASE GRAPHIQUE

I - Voici des dessins en traits pleins et leurs images par une transformation du plan, en traits pointillés.

Déterminez ces transformations et dessinez s'il y a lieu, vecteur, axe de symétrie, centre de symétrie, centre et angle de rotation, centre et rapport d'homothétie.



II - Même exercice que précédemment pour les transformations permettant de passer de (1) à (2), de (2) à (3),.....etc - en suivant la chaîne :
 (1) → (2) → (3) → (4) → (5) → (6) → (7) → (8) → (9) → (1).



III - Avec un dessin de votre choix reproduisez une chaîne comme précédemment où vous devrez incorporer au moins 2 translations, 1 symétrie centrale, 1 symétrie axiale, 1 rotation, 2 homothéties.

V - Exemples en classe de 4ème.

1) les définitions :

- en nombre limité, mais construites par et avec les élèves.
- basées sur l'observation et l'intuition

exemple : segment (ligne droite limitée par 2 points)

droite (ligne droite non limitée)

point (intersection de 2 segments)

polygone (ligne brisée fermée)

2) Observation - Manipulation :

* polygones particuliers (carré, losange.....)

- questions : - quels sont parmi eux ceux qui possèdent le plus de propriétés.
 - quels sont ceux qui sont les plus faciles à reconnaître ? Pourquoi ?
- classement des propriétés de chacun (quelles propriétés faut-il avoir pour être un carré et réciproquement).
- pour chaque figure y a-t-il des propriétés superflues (ou des groupes de propriétés prouvant la même chose)
- recherche de définitions.

* angles complémentaires, supplémentaires, rentrants.

angles adjacents (exemples et contre-exemples)

somme des angles d'un triangle

angles en "Z" (définis par 2 parallèles et une sécante)

3) Entraînement au si.... alors.....

* du type $p \Rightarrow q$

exemple : si un parallélogramme a un angle droit alors.....

si (A,B,C,D) est un rectangle, alors ses diagonales.....

etc.....

* du type $p \text{ et } q \Rightarrow r$

exemple : si un quadrilatère a ses 4 cotés égaux et 1 angle droit, alors.....

etc

Des raisonnements de ce type peuvent constituer un objectif maximal pour la classe de 4ème. Il faut trouver des exemples nombreux, variés, obliger les élèves à exprimer clairement leurs énoncés, leur apprendre à distinguer la cause (si....) et l'effet (alors....)

C'est là que se situe la vraie rigueur et non pas dans un formalisme abusif.

4) Démonstrations :

L'objectif en 4ème ne devrait pas être trop ambitieux :

* Voir exercice du type :

"Deux triangles ABC et AEF ont une même hauteur (AH). Que peux-tu dire des droites (BC) et (EF) ?"

[Hachette 4ème - p. 45]

constitue un objectif normal pour la 4ème.

Il constitue un modèle simple pour la construction d'un organigramme.

Il fait appel à un seul théorème et une seule définition (hauteur). C'est suffisant pour une "première année" de démonstration.

* attention aux énoncés de lecture difficile :

"Dessine 4 points A,B,C,D puis I milieu de [BC] et J milieu de [AD] . Soit I' le projeté de I sur (BD) parallèlement à (CD) , et J' le projeté de J sur (BD) parallèlement à (AB). Que dis-tu de I' et J' ?"

[Hachette 4ème - p. 77]

* l'exercice du type (vu précédemment)

(A,B,C,D) est un parallélogramme

(C,D,E,F) est un parallélogramme

Démontrer que (A,B,E,F) est un parallélogramme peut constituer un objectif maximal pour les 3ème.

VI - Projections - Symétries - Translations.

C'est le chapitre idéal pour manipuler . Mieux vaut manipuler que copier.

On peut multiplier les activités permettant de :

* observer :

exemple : cherchez l'erreur dans une symétrie ou une translation.

[Hachette 4ème - p. 195 et p. 229]

* manipuler :

exemple : compléter des dessins par symétrie,.....

Quelques axiomes admis après observation (ex : conservation des distances par symétrie) peuvent servir de base à des démonstrations simples.

* utiliser des outils de dessin :

exemple : la construction (d'un symétrique) avec un compas seul oblige à "réfléchir" (abstraction réfléchissante) sur les propriétés de la symétrie.

* limiter le nombre de définitions, théorèmes, etc.....

Pour chaque notion, insister sur tous les aspects : langage, figure, démonstrations, constructions, organigrammes, propriétés..... le tout devant rester très simple.

VII - A propos de la droite.

L'étude des vecteurs que nous avons proposée aboutit seulement en fin de troisième au concept de vecteur. Il semble donc un peu prématuré d'envisager en troisième une étude vectorielle précise de la droite fondée sur la relation $\vec{AM} = \lambda \vec{v}$, les déterminants, etc

par contre des manipulations de relations du type $3x - y + 4 = 0$ ou $x^2 - y = 5$ (pour le contre-exemple) avec constructions dans un repère des points dont les coordonnées vérifient ces relations, mènent à l'observation que certains points sont alignés (pour la droite) et d'autres pas (parabole).

Réciproquement pour une droite dessinée dans un plan repéré, et d'équation simple, on peut faire chercher la (ou les) relation(s) existant entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point, changer de point et recommencer.

La droite (A, \vec{v}) définie comme l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $\vec{AM} = \lambda \vec{v}$ sera vue en seconde.

les élèves de troisième n'auront pas mélangé tous les aspects que l'on rencontre actuellement dans cette classe : droite physique, équations de deux types, droite vectorielle ou autre.

Ils se seront contenté de faire le lien entre les coordonnées des points de la droite, l'alignement de ces points et l'équation proposée.

Nous avons rencontré en classe de terminale A des élèves qui traçaient une droite (difficilement) connaissant son équation et qui demandaient ensuite au professeur : "Mais monsieur, à quoi correspondent x et y ?" . Une telle question prouve que la notion de droite n'a pas été intégrée, les élèves mélangeant tous les éléments qu'ils ont rencontrés au cours de l'étude de la droite. Pour eux, cette étude s'est faite trop vite, le temps d'accommodation a été insuffisant.

Pour augmenter ce temps, l'étude de la droite formalisée peut se faire en seconde.

D'ailleurs on s'aperçoit qu'en classe de seconde il faut dans tous les cas, refaire l'étude complète.

La géométrie, source de la mathématique

Il ne faut pas dire comme M. Dieudonné : "A bas Euclide, plus de triangle !" mais plutôt comme M. Boursin : "il faut remettre la géométrie à l'honneur" et "lui rendre son irremplaçable pouvoir formateur".

La géométrie donne un moyen de voir et de sentir les abstractions algébriques. Quant aux résultats géométriques, ils sont souvent rendus plus précis et plus clairs quand on les traduit en langage algébrique.

La géométrie est un intermédiaire naturel et irremplaçable entre le langage usuel et le langage algébrique.

Elle permet un éclatement psychologique de la syntaxe, sans avoir à sacrifier le sens, toujours donné par l'intuition spatiale.

De tous les jeux, la géométrie, qui se réfère constamment à un donné intuitif sous-jacent, est le moins gratuit et le plus riche en signification.

Ne perdons pas de vue que dans le 1er cycle, la géométrie en est l'école à la fois d'imagination et de raisonnement.

le langage usuel a pour fonction primaire de décrire les processus spatio-temporels qui nous entourent.

Avec la géométrie, on retrouve la même fonction du langage.

La géométrie apparaît donc comme un intermédiaire naturel et irremplaçable entre la langue usuelle et le langage formalisé des Maths. Le stade de la pensée géométrique est un stade impossible à omettre dans le développement normal de l'activité rationnelle de l'adolescent.

la géométrie dans les différentes classes du 1er cycle :

- * En 6ème : le cours de géométrie devrait se situer, dans sa grande partie, au niveau de l'expérimentation, mais le professeur pourrait introduire lorsque cela paraîtra possible, quelques morceaux de raisonnement déductif.
- * En 5ème : L'observation expérimentale des résultats devrait être suivie d'une initiation très progressive à la pratique de la démonstration
- * En 4ème et en 3ème : C'est là que doit se situer le passage de l'expérimental au démontré.
- * La démonstration en géométrie : Toute démonstration est une maïeutique. C'est donc par un entraînement progressif aux démonstrations que l'on habituera l'enfant à s'exprimer.
Si l'on veut y parvenir, toute démonstration doit passer par 3 stades.

* 1er stade : LA RECHERCHE

Là , il est indispensable de considérer deux moments principaux :

I - Les connaissances (a) information de l'énoncé
(b) celles supposées connues par l'élève

II - la démarche, le travail de l'élève

"Apprenons à nos enfants à deviner" (Polya)

* 2ème stade : DEMONSTRATION VERBALE

"Il y a toujours dans le discours humain une intention définie de passer quelque chose à quelqu'un, de modifier sa conduite, ses pensées ou son attitude générale face à une situation" se plaisait à préciser Chomsky

* 3ème stade : DEMONSTRATION ECRITE

"..... les démonstrations géométriques sans lesquelles je suis aveugle."
(Kepler).

CHAPITRE 7

PIAGET ET LA DIDACTIQUE

7-1 La Profession d'Éducateur

Piaget compare la profession de Maître d'École à celles d'avocat, médecin, professeur d'université.....

"La vérité est que la profession d'éducateur n'a pas encore atteint, dans nos sociétés, le statut normal auquel elle a droit dans l'échelle des valeurs intellectuelles. Le maître d'école n'est pas considéré, ni par les autres, ni, ce qui est pire, en général, par lui-même comme un spécialiste du double point de vue des techniques et de la création scientifique, mais comme le simple transmetteur d'un savoir à la portée de chacun. Autrement dit, on estime qu'un bon maître fournit ce que l'on attend de lui lorsqu'il est en possession d'une culture générale élémentaire et de quelques recettes apprises lui permettant de l'inculquer dans l'esprit des élèves.

on oublie aussi simplement que l'enseignement sous toutes ses formes soulève trois problèmes centraux dont la solution est loin d'être connue et dont il reste même à se demander comment ils seront résolus si ce n'est avec la collaboration des maîtres :

- 1) Quels sont les buts de l'enseignement ?*
- 2) Ces buts étant choisis, quelles sont les branches qui sont nécessaires pour les atteindre ?*
- 3) Ces branches choisies, il reste à connaître les lois du développement mental pour trouver les méthodes les plus adéquates au type de formation éducative désirée"*

[PP - p. 23]

Piaget évoque la situation du corps enseignant par rapport à la recherche et les obstacles sociaux qui empêchent les maîtres de se livrer à cette recherche de connaissances élémentaires :

"Le public ne sait pas que la pédagogie est une science et même très difficile..... En second lieu, le maître doit se conformer à un

programme et appliquer des méthodes qui lui sont dictées par l'Etat... On ne peut qu'être frappé du manque habituel de dynamisme de ces corporations d'éducateurs souvent spécialisées dans la discussion de problèmes exclusivement syndicaux.... Dans de nombreux pays, seuls les maîtres du secondaire se forment à l'université, mais presque exclusivement du point de vue des matières à enseigner, la préparation proprement pédagogique étant nulle ou réduite au minimum"

[PP - p. 24 à 26]

7-2 A propos de la Formation des Maîtres

"Plus on recherche à perfectionner l'école, plus la tâche du maître est lourde ; et meilleur sont les méthodes, plus elles sont difficiles à appliquer"

"On rencontre aujourd'hui d'excellents maîtres qui enseignent les mathématiques les plus modernes en débutant par les procédés pédagogiques les moins à jour..... en oubliant simplement la différence psychologique fondamentale qui existe entre la capacité d'utiliser spontanément et inconsciemment une opération et le pouvoir de réfléchir sur elle pour en tirer une formation abstraite".

"La Conférence Internationale de l'Instruction Publique a insisté sur la nécessité d'une initiation psychologique à la hauteur de la préparation portant sur les branches mêmes à enseigner".

"Il arrive souvent que de futurs maîtres de sciences éprouvent un mépris non dissimulé pour la psychologie du développement jusqu'au moment où l'on parvient à leur faire saisir la portée épistémologique des lois de ce développement".

7-3 Evaluation et Orientation

Que veut-on mesurer : l'aptitude au langage ? ou l'aptitude à structurer ?

"l'enseignement des mathématiques a toujours posé un problème assez paradoxal. Il existe, en effet, une certaine catégorie d'élèves par ailleurs intelligents et qui peuvent même témoigner en d'autres domaines d'une intelligence supérieure, mais qui échouent plus ou

moins systématiquement en mathématiques. Il est difficile de concevoir que des sujets bien doués dans l'élaboration et l'utilisation des structures logico-mathématiques spontanées de l'intelligence se trouvent handicapés dans la compréhension d'un enseignement portant exclusivement sur ce que l'on peut tirer de telles structures"

[PP - p. 68]

"L'enseignement des mathématiques convie au contraire les sujets à une réflexion sur les structures, mais il le fait au moyen d'un langage technique comportant un symbolisme très particulier et exigeant un degré plus ou moins haut d'abstraction. La soi-disant aptitude aux mathématiques peut donc fort bien porter sur la compréhension de ce langage lui-même, par opposition aux structures qu'il décrit, ou sur la vitesse d'abstraction en tant qu'elle est liée à un tel symbolisme et non pas en tant que réflexion sur des structures par ailleurs naturelles".

[PP - p. 69]

"De plus, comme tout se tient en une discipline entièrement déductive, l'échec ou l'incompréhension portant sur tel ou tel chaînon entraîne une difficulté croissante dans la suite des enchaînements, de telle sorte que l'élève désadapté sur un point ne comprend plus la suite et en vient à douter de plus en plus sur lui-même. Des complexes affectifs, souvent renforcés par l'entourage, finissent alors par bloquer une initiation qui eût pu être toute différente".

[PP - p 70]

A quel âge l'orientation ?

"L'âge de 11 à 13 ans pour un cycle d'orientation est un âge minimum : Ce n'est que l'âge du début des opérations propositionnelles ou formelles, dont le palier d'équilibre se constitue vers 14-15 ans, de telle sorte que bien des traits spontanés peuvent ne se manifester qu'ensuite".

Sur les méthodes d'évaluation :

"La 1ère méthode d'évaluation est l'observation suivie du travail de l'élève par le maître. La valeur de ce jugement est naturellement proportionnelle à celle du maître.... l'évaluation est alors relative aussi aux méthodes employées..... : ce n'est que dans une ambiance de méthodes actives que l'élève fournit son plein rendement, tandis qu'en toute situation propre aux méthodes réceptives, le danger est de surestimer les forts en thèmes et les esprits scolaires".

"Une seconde méthode d'évaluation est celle des examens scolaires. On souligne de plus en plus le rôle néfaste des examens dans le travail de l'école parce qu'ils polarisent sur la poursuite de résultats éphémères et en bonne partie artificiels la plupart des activités qui devraient être consacrées à la formation de l'intelligence et des méthodes de travail..... De plus, admissible en principe si l'on pouvait se borner à une estimation du degré de compréhension d'une matière, l'examen y mêle fatalement des questions de mémoire, et d'une mémoire qui n'a en général pas de rapport avec celle qu'on utilise à bon escient dans la vie, puisqu'il s'agit en fait d'une accumulation provoquée et momentanée, c'est-à-dire d'un artéfact mental. Le seul examen sérieux serait, à condition de neutraliser les perturbations affectives, celui que le candidat passerait avec ses livres et sa documentation, à faire un travail prolongeant ceux qu'il a déjà fournis : autrement dit une branche de son travail quotidien, ce qui ramène à la première méthode."

"La troisième méthode est celle des "tests" habituels, qui relèvent de la psychologie scolaire. On dira qu'il s'agit encore d'examens, mais examens pour examens, ils ont l'avantage de n'être pas préparés artificiellement par l'élève, et par conséquent de donner des résultats beaucoup plus stables, avec convergence beaucoup plus sûre et objective entre les divers examinateurs. L'inconvénient est par contre que les tests ne mesurent que des résultantes ou "performances" sans atteindre leur mécanisme fonctionnel ou formateur. Il en résulte que, valables à titre de diagnostique, ils sont insuffisants comme instruments pronostiques".

"La quatrième méthode consistera donc en un examen psychologique qualitatif serrant de près le fonctionnement de la pensée du sujet et mettant en évidence les structures opératoires qu'il parvient à dominer. Il s'agira donc d'épreuves au cours desquelles un problème posé est résolu progressivement, ce qui donne prise à l'analyse et permet les comparaisons en se référant à une échelle de développement plus ordinale que métrique. C'est ainsi que, sous l'impulsion de M. Reuchelin, l'Institut National d'orientation professionnelle a mis au point des épreuves inspirées par nos analyses opératoires, notamment aux niveaux de la préadolescence et de l'adolescence."

"D'une manière générale, les services que peut rendre la psychologie scolaire semblent d'autant plus valables qu'ils s'appuient sur une

psychologie plus générale et mieux structurée théoriquement. La psychologie a trop souvent lâché la proie pour l'ombre en cherchant l'application et en particulier la mesure avant de comprendre les mécanismes formateurs et la signification des facteurs mesurés. Dans ce domaine et en analogie avec bien d'autres on peut dire qu'il n'y a pas de psychologie appliquée mais que toute bonne psychologie est susceptible d'applications".

[PP - p. 60 et 61]

7-4 Les Programmes

"la question pédagogique internationale la plus urgente est celle de la surcharge des programmes d'enseignement"

"le développement ininterrompu des connaissances et des techniques et le désir de tenir compte de tous les courants sans négliger un tronc commun de culture générale aboutissent dans la plupart des cas à une surcharge importante des programmes, qui finalement peut nuire à la santé physique et intellectuelle des élèves et retarder leur formation dans la mesure où on désire l'accélérer ou la perfectionner.

Piaget cite les recommandations de la Conférence Internationale de l'Instruction Publique (1958 et 1960)

"A l'encyclopédisme des programmes, il convient de substituer les notions essentielles..... il importe que l'introduction des notions nouvelles soit compensée par la suppression d'autres notions ayant perdu leur importance...."

"Les instances chargées de l'élaboration des programmes doivent prévoir une étape préliminaire de documentation, portant entre autres :

- a) sur les caractéristiques et le rythme de développement de l'enfant à un âge qui est affecté par la crise de l'adolescence ;
- b) sur les progrès scientifiques les plus marquants qui ont été réalisés dans les différents domaines constituant les matières d'enseignement ;
- c) sur les données nouvelles de la didactique, tant générale que spécialisée
- d) sur le degré de préparation scientifique et pédagogique des maîtres chargés de l'enseignement ;
- e) sur les tendances qui régissent l'évolution culturelle, sociale et économique du monde moderne ;
- f) sur les études comparées concernant les programmes appliqués en d'autres pays ;
- g) sur le résultat des expériences réalisées à cet égard dans le pays même et en d'autres pays".

La surcharge des programmes peut être influencée par des facteurs affectifs ou même économiques liés aux enseignants eux-mêmes :

"En ce qui concerne la surcharge des programmes secondaires, il n'est pas inutile de rappeler un facteur affectif ou même économique dont on a parfois signalé l'influence en comparant les systèmes de traitement des maîtres spécialisés. Chacun tient, en effet, à sa branche pour des raisons multiples où l'ardeur intellectuelle peut se combiner avec des raisons de dignité et de position dans l'école. Il est donc parfois apparu que des traitements calculés au prorata exact du nombre des heures d'enseignement peuvent aboutir tôt ou tard à une augmentation du nombre de ces heures, tandis que des traitements globaux rendent plus aisés certains allègements".

7-5 Intelligence et Mathématiques

Ce paragraphe contient exclusivement des citations de Piaget qui se suffisent à elles-mêmes. Il nous a paru superflu et trop lourd d'y ajouter des commentaires.

- * *intelligence* : terme générique désignant les formes supérieures d'organisation ou d'équilibre des structurations cognitives.
- * *L'intelligence constitue l'état d'équilibre vers lequel tendent toutes les adaptations successives d'ordre sensori-moteur et cognitif ainsi que tous les échanges assimilateurs et accomodateurs entre l'organisme et le milieu.*
- * *L'acte complet d'intelligence suppose ainsi 3 moments essentiels :*
 - la question qui oriente la recherche,*
 - l'hypothèse qui anticipe les solutions,*
 - le contrôle qui les sélectionne.*

Seulement on peut distinguer 2 formes d'intelligence, l'une pratique (ou "empirique"), l'autre réfléchie (ou "systématique"). Dans la première, la question se présente sous les espèces d'un simple besoin, l'hypothèse, d'un tâtonnement sensori-moteur, et le contrôle, d'une pure suite d'échecs ou de réussites. C'est dans la seconde que le besoin se réfléchit en question, que le tâtonnement s'intériorise en recherches d'hypothèses et que le contrôle anticipe la sanction des relations, suffisant à écarter les hypothèses fausses et à retenir les bonnes.

- * le tâtonnement n'est donc jamais pur, mais ne constitue que la marge d'accommodation active compatible avec les coordinations assimilatrices qui constituent l'essentiel de l'intelligence.
- * La tendance la plus profonde de toute activité humaine est la marche vers l'équilibre ; et la raison, qui exprime les formes supérieures de cet équilibre, réunit en elle l'intelligence et l'affectivité.
- * Un besoin est toujours la manifestation d'un déséquilibre.
- * l'intelligence c'est l'adaptation par excellence, l'équilibre entre une assimilation continue des choses à l'activité propre et l'accommodation de ces schèmes assimilateurs aux objets eux-mêmes....
Puis au fur et à mesure que l'assimilation se combine davantage avec l'accommodation, la première se réduit à l'activité déductive elle-même, la seconde à l'expérimentation et l'union des 2 devient cette relation indissociable entre la déduction et l'expérience, relation qui caractérise la raison.
- * L'intérêt n'est autre chose que l'aspect dynamique de l'assimilation.
- * Le développement des opérations intellectuelles procède de l'action effective au sens le plus complet (c'est-à-dire intérêts compris, ce qui ne signifie en rien que ceux-ci soient exclusivement utilitaires), car la logique est avant tout l'expression de la coordination générale des actions ; et que cette coordination générale des actions comporte nécessairement une dimension sociale, car la coordination inter-individuelle des actions et leur coordination intra-individuelle constituent un seul et même processus, les opérations de l'individu étant toutes socialisées et la coopération consistant au sens strict à une mise en commun des opérations de chacun.
- * Toute conduite est une assimilation du donné à des schèmes antérieurs (avec, à des degrés divers de profondeur, assimilation à des schèmes héréditaires) et toute conduite est en même temps accommodation de ces schèmes à la situation actuelle.
- * L'intelligence est une assimilation du donné à des structures de transformations, des structures d'actions élémentaires aux structures opératoires supérieures, et que ces structurations consistent à organiser le réel, en acte ou en pensée, et non pas à le copier simplement.

- * Chaque nouvelle relation ou structure mathématique se caractérise par sa nécessité sitôt qu'elle est construite.
- * Les premières démarches mathématiques peuvent paraître empiriques..... Mais, contrairement à l'expérience physique où l'information est tirée des caractères appartenant en propre à l'objet, la lecture de ces "expériences logico-mathématiques" ne porte alors que sur les propriétés introduites par l'action dans l'objet (réunions, ordre, etc..) : il est alors naturel que ces actions, une fois intériorisées, puissent être exécutées symboliquement et donc déductivement.....
- * Dans le domaine de la physique spontanée de l'enfant, celui-ci arrive à prévoir les phénomènes bien avant de savoir les expliquer (la légalité issue de l'intelligence pratique précède la causalité qui nécessite la déduction réflexive) mais l'explication juste consiste en une prise de conscience progressive des motifs qui ont guidé la prévision.
On voit donc, en résumé, que l'adaptation pratique loin d'être chez les petits, une application de la connaissance conceptuelle, constitue au contraire la première étape de la connaissance elle-même et la condition nécessaire à toute connaissance réfléchie ultérieure.
C'est pourquoi les méthodes actives d'éducation des petits réussissent tellement mieux que les autres dans l'enseignement des branches abstraites telles que l'arithmétique et la géométrie : lorsque l'enfant a, pour ainsi dire, manipulé des nombres ou des surfaces avant de les connaître par la pensée, la notion qu'il en acquiert ultérieurement consiste véritablement en une prise de conscience des schèmes actifs déjà familiers, et non pas, comme dans les méthodes ordinaires, en un concept verbal s'accompagnant d'exercices formels sans intérêt, sans substructure expérimentale antérieure.
- * Sans que l'on puisse actuellement fixer avec certitude la limite entre ce qui provient de la maturation structurale de l'esprit et ce qui émane de l'expérience de l'enfant ou des influences de son milieu physique et social, on peut, semble-t-il, admettre que les 2 facteurs interviennent sans cesse et que le développement est dû à leur interaction continue. Du point de vue de l'école, cela signifie, d'une part, qu'il faut reconnaître l'existence d'une évolution mentale ; que toute nourriture intellectuelle n'est pas bonne indifféremment à tous les âges ; qu'on doit tenir compte des intérêts et des besoins de chaque période. Cela signifie aussi, d'autre part, que le milieu peut jouer un rôle

décisif dans le développement de l'esprit, que le déroulement des stades n'est pas déterminé une fois pour toutes, quant aux âges et aux contenus de la pensée ; que de saines méthodes peuvent donc augmenter le rendement des élèves et même accélérer leur croissance spirituelle sans nuire à sa solidité !.

7-6 Les méthodes pédagogiques

"Tout élève normal est d'un bon raisonnement mathématique si l'on fait appel à son activité"

[OVE - p. 93]

"Une vérité mathématique ne relève pas des contingences de la société adulte, mais d'une construction rationnelle accessible à toute intelligence saine"

[PP - p.]

Sur la pédagogie traditionnelle :

"Dans la plupart des leçons de mathématiques, l'élève est invité à recevoir du dehors une discipline intellectuelle déjà entièrement organisée qu'il comprend ou ne comprend pas tandis que dans un contexte d'activité autonome, il est appelé à découvrir par lui-même les rapports et les notions et à les recréer ainsi jusqu'au moment où il sera heureux d'être guidé et informé"

"Le principe de la pédagogie courante consiste à supposer que des opérations accessibles sur le plan concret sont immédiatement transposables en opérations formelles simplement racontées ; d'où les méthodes verbales qui remplacent l'appel à une activité effective de l'élève par une suite de conférences prononcées devant des adultes"

"Dès qu'il s'agit de la parole ou d'enseignement verbal, on part du postulat implicite que cette transmission éducative fournit à l'enfant les instruments comme tels de l'assimilation en même temps que les connaissances à assimiler en oubliant que de tels instruments ne peuvent s'acquérir que par une activité interne et que toute assimilation est une restructuration ou une réinvention"

"Toutes les notions mathématiques commencent par une construction qualitative avant d'acquérir un caractère métrique..... Il y a donc un grand intérêt à réaliser tout un ajustement des méthodes didactiques

aux données psychologiques du développement réel et on peut espérer de ce point de vue un renforcement considérable des appels à l'activité autonome de l'enfant"

[OVE - p. 97]

Piaget préconise une pédagogie active :

"L'enfant retient ce qu'il a compris et non pas ce qu'il a vu, et ce n'est pas si naturel qu'on pourrait le penser".

"Si l'on désire, comme le besoin s'en fait de plus en plus sentir, former des individus capables d'invention et de faire progresser la société de demain, il est clair qu'une éducation de la découverte active du vrai est supérieure à une éducation ne consistant qu'à dresser les sujets à vouloir par volontés toutes faites et à savoir par vérités simplement acceptées".

[PP - p.]

"L'action propre donne de meilleurs résultats que la perception et l'apprentissage dans l'ordre action → perception réussit mieux que dans l'ordre perception → action".

[PE - p.]

Piaget critique très sévèrement certaines méthodes "dites actives" :

"En bref, l'image, le film, les procédés audio-visuels dont toute pédagogie voulant se donner l'illusion d'être moderne nous rebat aujourd'hui les oreilles, sont des auxiliaires précieux à titre d'adjuvants ou de béquilles spirituelles, et il est évident qu'ils sont en net progrès par rapport à un enseignement purement verbal..... mais il existe un verbalisme de l'image comme un verbalisme du mot, et, confrontées avec les méthodes actives, les méthodes intuitives ne font que substituer, lorsqu'elles oublient le primat irréductible de l'activité spontanée et de la recherche personnelle ou autonome du vrai, ce verbalisme plus élégant et plus raffiné au verbalisme traditionnel".

"Les méthodes à programmation impliquent un progrès essentiel par rapport aux méthodes intuitives dans la mesure où sont exigés la compréhension et le raisonnement : pour comprendre la relation B, il est nécessaire de comprendre la relation A. Piaget néanmoins lui reproche de canaliser excessivement le raisonnement et d'exclure l'initiative. Il est nécessaire de trouver un équilibre entre

l'activité libre et l'enregistrement. Dans ces conditions, le maître aurait pour mission de compléter la machine par des activités de groupe qui comporteraient une incitation et un contrôle".

[JP - p. 215]

"Les nouvelles méthodes pédagogiques cherchent à offrir aux enfants les données intellectuelles qu'ils peuvent assimiler aux schèmes qui caractérisent leur âge mental".

"L'enfance n'est pas un mal. Elle est biologiquement utile en tant qu'elle est une adaptation progressive au milieu physique et social. Et qui dit adaptation, parle, en réalité, d'activité. Toute la pédagogie consiste à mettre un sujet en activité et non de faire le pitre, directement ou indirectement, devant lui... L'activité est une quête d'équilibre".

[JP - p. 217]

"on voit en quoi consistent les vraies méthodes actives par rapport aux méthodes "dites actives". Ces dernières situent la source de l'activité à l'extérieur du sujet (images visuelles ou auditives, manipulation d'objets,), celles-là mettent la source de l'activité dans le sujet lui-même, que cette activité soit sensori-motrice, ou organisatrice du concret, ou hypothético-déductive et formelle".

[JP - p. 219]

"Réussir n'est pas comprendre. Comprendre c'est précéder l'action et pouvoir l'intérioriser"

[RC - p. 242]

7-7 L'enseignement des mathématiques

"l'une des causes de la passivité des enfants en mathématiques, par opposition au libre épanouissement de l'activité intellectuelle dont elles devraient être l'occasion, tient à la dissociation insuffisante entre les questions de logique et les considérations numériques ou métriques..... Or, tant que la structure logique du problème n'est pas solidement assurée, les considérations numériques demeurent sans signification et voilent au contraire le système des relations en présence. mais comme le problème porte précisément sur ces nombres, l'enfant essaie souvent toutes sortes de calculs, en appliquant par tâtonnement les diverses opérations connues de lui, ce qui a pour effet de bloquer son raisonnement".

[OVE - p. 94]

"Dans le domaine de l'espace en particulier la représentation est, au

début, moins influencée qu'on ne pourrait le penser par les rapports métriques en jeu dans la perception : Elle part au contraire de ces sortes de relations que les mathématiciens appellent topologiques bien avant de se placer au point de vue de la géométrie d'Euclide".

[OVE - p. 97]

"La question de l'apprentissage des structures logiques se trouve résolue par la négative..... aucune intervention extérieure ne paraît pouvoir hâter la formation de ces structures. La seule possibilité qui s'offre est de permettre à l'enfant de différencier les structures qu'il est en train d'acquérir".

[PCP - p. 217]

CONCLUSION

Dans un récent numéro de la Revue Sciences et Avenir, Stella Baruk dénonce une nouvelle fois l'échec en mathématiques :

"On peut déjà réduire les traumatismes en arrêtant de traiter de nuls, de minables, de crétins ou de débiles des élèves qui ont répondu à côté de ce mince fil qu'est la bonne réponse. On peut aussi veiller à ce que tous accèdent au sens même si ce n'est pas au même rythme ni dans le même plaisir. On peut aborder autrement les erreurs".

[SA - p. 39]

La représentation que l'on se fait actuellement des mathématiques explique cet échec :

"On voit des enfants qui ont intégré l'idée que les maths n'ont pas de sens, qu'il s'agit de manipuler, avec plus ou moins de chance, des formules, afin d'obtenir des réponses qui peuvent être "bonnes" ou "mauvaises", mais pas nécessairement sensées".

[SA - p. 37]

Les questions qui se posent sont les suivantes :

- comment et de quelle manière transmettre un savoir mathématique aux enfants ?
- comment améliorer le rendement de notre enseignement ?

Nous avons tenté d'apporter quelques éléments de réponse en nous appuyant sur les principales idées trouvées dans les ouvrages de Piaget. Nous ne pensons pas donner des "recettes miracles" mais des éléments de réflexion pour un renouvellement en profondeur de l'enseignement des mathématiques au Collège.

La première idée repose sur le fait qu'un enseignement doit être adapté à l'élève et tenir compte de son évolution intellectuelle et mentale.

La deuxième consiste à respecter dans la plupart des activités mathématiques, le rythme d'acquisition de la notion, que résume le schéma : assimilation - accommodation - équilibration, et enfin l'idée fondamentale de la nécessité de l'action du sujet :

"En réalité, le point de départ de toute connaissance n'est nullement à chercher dans les sensations ou même les perceptions - simples indices dont le symbolisme est nécessairement relatif à un signifié - mais dans les actions,....."

..... et les actions conçues, non pas sous cet aspect utilitaire qu'ont exagéré le pragmatisme et le bergsonisme, mais comme la source de l'acte d'intelligence lui-même.

[PEP - p. 130]

La psychologie de Piaget conduit à une condamnation sans appel des méthodes traditionnelles quand ce terme signifie transmission de connaissance par un maître actif à des élèves tenus passifs. Écoutons Alain :

[NO - p. 136]

"Il n'y a de progrès pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait".

[NO - p. 138]

et Piaget pour conclure :

"En ce qui concerne l'action de l'expérience sur la formation des connaissances, c'est devenu depuis longtemps une banalité que de montrer en quoi l'esprit n'est pas une table rase sur laquelle viendraient s'inscrire des liaisons toutes faites imposées par le milieu extérieur : on constate au contraire, et les travaux récents l'on de plus en plus confirmé, que toute expérience nécessite une structuration du réel, autrement dit que l'enregistrement de toute donnée extérieure suppose des instruments d'assimilation inhérents à l'activité du sujet. Mais lorsqu'il s'agit de la parole adulte, transmettant ou cherchant à transmettre des connaissances déjà structurées par le langage ou par l'intelligence des parents ou des maîtres eux-mêmes, on s'imagine que cette assimilation préalable suffit et que l'enfant n'a plus qu'à incorporer ces nourritures intellectuelles déjà digérées, comme si la transmission n'exigeait pas une nouvelle assimilation, c'est-à-dire une restructuration dépendant cette fois des activités de l'auditeur. En un mot, dès qu'il s'agit de la parole ou d'enseignement verbal, on part du postulat implicite que cette transmission éducative fournit à l'enfant les instruments comme tels de l'assimilation, en même temps que les connaissances à assimiler, en oubliant que de tels instruments ne peuvent s'acquérir que par une activité interne et que toute assimilation est une restructuration ou une réinvention.

[PP - p. 64]

BIBLIOGRAPHIE

La liste suivante ne représente pas la totalité des oeuvres de Piaget ou sur Piaget mais tous les livres cités ont été lus par un ou plusieurs animateurs ou stagiaires et ont servi de base à ce fascicule.

Les ouvrages abondamment cités sont repérés dans les différents chapitres par des initiales placées entre crochets.

Oeuvres de Piaget et de ses collaborateurs :

- [EG] PIAGET : Epistémologie génétique. PUF (1970)
- [EM] PIAGET : L'enseignement des mathématiques
- [PEP] PIAGET : psychologie et épistémologie. GONTHIER - Paris (1970)
- [GEF] PIAGET : Six études de psychologie. GONTHIER - Genève (1964)
- [GN] PIAGET et SZEMINSKA : La genèse du nombre chez l'enfant.
DELACHAUX et NIESTLE - Genève (1941)
- [GS] PIAGET, INHELDER, SZEMINSKA : La géométrie spontanée de l'enfant.
PUF - Paris (1948)
- [JE] PIAGET : Le jugement moral chez l'enfant. PUF - Paris (1959)
- [JR] PIAGET : Le jugement et le raisonnement chez l'enfant. DELACHAUX
et NIESTLE - Genève (1924)
- [LEA] PIAGET et INHELDER : De la logique de l'enfant à la logique de
l'adolescent. PUF - Paris (1955)
- [PC] PIAGET : La prise de conscience. PUF - Paris (1974)
- [PE] PIAGET et INHELDER : La psychologie de l'enfant. PUF (1966)

- [PI] PIAGET : la psychologie de l'intelligence. A. COLIN - Paris (1947)
- [PP] PIAGET : Psychologie et Pédagogie. DENOEL (1969)
- [RC] PIAGET : Réussir et comprendre. PUF - Paris (1974)
- [RE] PIAGET et INHELDER : la représentation de l'espace chez l'enfant.
PUF - Paris (1948)
- [OVE] PIAGET : Où va l'Education - MEDIATIONS (1972)

Oeuvres sur Piaget :

- [FBP] COHEN : Faut-il brûler Piaget . RETZ - Paris
- [JP] NICOLAS : Jean Piaget. SEGHERS - Paris (1976)
- [LP] DROZ et RAHMY : Lire Piaget. DESSART - Bruxelles (1972)
- [PCP] DOLLE : Pour comprendre Piaget. PRIVAT - Toulouse (1974)
- [NO] NOT : Perspectives Piagésiennes. PRIVAT - Toulouse (1983)

Ouvrages divers :

- [BP] Bulletin de Psychologie : Hommage à Jean Piaget.
N° 327 - XXX - 3 - 9 (1976-1977)
 - [SA] Sciences et Avenir N°
Interview de Stella BARUK par Jacques GIRARDON (p. 37 à 41)
- Cahier de didactiques des mathématiques (N°2) : Quelques éléments
de théorie piagésienne par J. ROGALSKI - IREM Paris VII.

TITRE : PIAGET ET LES MATHEMATIQUES AU COLLEGE

AUTEUR : ANDRE ET MICHELE ARSENE

NIVEAU : COLLEGE ET LYCEE

DATE : DECEMBRE 1985

MOTS-CLÉ : spécialité MATHEMATIQUES ET EPISTEMOLOGIE GENETIQUE
autres PIAGET
MATHEMATIQUES AU COLLEGE

RESUME : Et si, pour une fois, les professeurs de mathématiques se posaient la question : "Qu'est-ce qu'un enfant du niveau de 1er cycle ?".

Cette étude a pour but de rechercher les possibilités réelles intellectuelles des enfants de ce niveau, indépendamment des apports psycho-sociaux, en se fondant sur les études de PIAGET.

Il s'agit d'un essai de mise en question des idées courantes concernant les aptitudes véritables des enfants, mais aussi des contenus des programmes qui n'apparaissent pas toujours adaptés à ces aptitudes.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	98	30 F	Re 14