I R E M d e R E I M S
Moulin de la Housse
BP 347
51062 REIMS CEDEX
Tel : 26 05 32 08

I N T R O D U C T I O N

A L A

G E O M E T R I E M E T R I Q U E P L A N E

J.P. CORTIER
R. GARCIN
Y. HAUBRY

"Mieux vaut le cristal que la fumée"

INTRODUCTION :

Cette publication est un exposé des notions élémentaires de géométrie métrique plane. Il ne s'agit pas d'un cours destiné aux élèves, mais d'un "livre du maître", prenant comme base les programmes actuels de 4ème et 3ème.

Au début, il nous a semblé utile d'étudier assez précisément la droite métrique pour préparer la définition du plan métrique. Nous présentons celui-ci de manière axiomatique : il a été mis en valeur la notion de symétrie orthogonale (qui nous donnera toutes les isométries du plan), et celle de demi-plans convexes qui nous paraissent des "notions naturelles". L'exposé se déroule ensuite sans problème...

Le lecteur pourra comparer avec la présentation partant de la notion d'espace vectoriel.

Toute critique, suggestion, etc... peuvent être adressées au Centre de Troyes de l'I.R.E.M. de Reims :

- soit au Lycée Marie de Champagne,
  118, avenue Pasteur.

- soit au L.E.G.T.
  12, avenue des Lombards.

Nous souhaitons que le dialogue s'ouvre.

MODE D'EMPLOI

Nous avons choisi un système d'axiomes définissant le plan métrique § 5, système qui aurait pu, peut-être, être réduit (?) ou augmenté. Dans ce dernier cas, l'exposé serait simplifié en choisissant les axiomes suivants :
A_1 à A_4 inchangés,

A_5 : Soit $O \in P$ $\quad \begin{array}{l} P \xrightarrow{S_O} P \\ M \longmapsto S_O(M) = M' \end{array}$ tel que O soit le milieu de(M,M

S_O est une isométrie de P.

A_6 : Soit D une droite de P. Il existe une <u>unique</u> isométrie $S_D : P \longrightarrow P$ telle que D soit l'ensemble des points fixes de S_D et telle que S_D <u>échange les deux demi-plans créés par D.</u>

et la définition du plan métrique serait :
Si $(P,d,\mathcal{D})$ vérifie A_1 à A_6, on dira que c'est un plan métrique.

La lecture de l'exposé est inchangée jusqu'au § 7 inclus ; puis, § 8 :
8.1. Orthogonalité à partir de la Prop.3.
8.2. Projection orthogonale, distance d'un point à une droite, médiatrice.
§ 9. Symétrie centrale : le cor.1 de la prop.1 est satisfait par A_5.
§ 10. Parallèlogramme. Ce paragraphe peut-être notablement simplifié en considérant dans P1, P2, P3, P4 non pas les droites (A,B), mais les segments $[A,B]$.
§ 11. Rectangle, triangle rectangle, losange, carré : inchangé.

1 - ESPACES METRIQUES

Déf.1 : Soit E un ensemble, une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance si :

D1 : $\forall x, y \in E\ (d(x,y) = 0) \Longleftrightarrow (x = y)$
D2 : $\forall x, y \in E\ d(x,y) = d(y,x)$
D3 : $\forall x,y,z \in E\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Dans ce cas on dit que (E, d) est un espace métrique.
Voici quelques exemples d'espaces métriques :

Ex 1 : E un ensemble quelconque $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $d(x,y) = 0$ si $x = y$
$d(x,y) = 1$ si $x \neq y$

Ex 2 : $E = \mathbb{R}$ $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $d(x,y) = |x-y|$

Ex 3 : $E = \mathbb{R}$ $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ " " $d(x,y) = \max(|x|,|y|)$ si $x \neq y$ et $d(x,y) = 0$ si $x = y$

Ex 4 : $E = \mathbb{R}^2$ $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$d((x,y),(x'y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

2 - ISOMETRIES

Déf 1 : Soit (E,d) et (E', d') deux espaces métriques

$f : E \longrightarrow E'$ est une isométrie si :

$$\forall x,y \in E \quad d'(f(x), f(y)) = d(x,y).$$

On peut remarquer que pour tout espace métrique (E, d) $Id_E : E \longrightarrow E$ est une isométrie.

Prop 1 : Une isométrie est une application injective.

Si $f(x) = f(y)$: $d'(f(x), f(y)) = 0 = d(x,y)$ d'où $x = y$.

Prop 2 : a) la composée de deux isométries est une isométrie.
b) si f est une isométrie bijective, f^{-1} est une isométrie.

a) Soit (E,d), (E',d'), (E",d") trois espaces métriques
$f : E \longrightarrow E'$ et $g : E' \longrightarrow E''$ deux isométries
$d''((g_o f)(x), (g_o f)(y)) = d''(g(f(x)), g(f(y))) = d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$

b) Si f est bijective f possède un inverse f^{-1} et :
$d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) = d'(f(f^{-1}(x')), f(f^{-1}(y'))) = d'(x',y')$

Cor 1 : Soit (E, d) un espace métrique
Isom.(E) l'ensemble des isométries bijectives de E dans E.
(Isom.(E), o) est un groupe.

D'après la propriété précédente Isom (E) est un sous-groupe du groupe des bijections de E dans E.

3 - ISOMETRIES DE LA DROITE REELLE.

Dans tout ce qui suit on considèrera $\mathbb{R}$ muni de la distance
$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $d(x,y) = |x - y|$

On remarque alors que les applications suivantes sont des isométries bijectives :

a) la translation de vecteur a :
$t_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $t_a(x) = x + a$

b) la symétrie de centre a : $S_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $S_a(x) = -x + 2a$

<u>Prop 1</u> : Soit a et b deux nombres réels distincts.
Il existe un seul point m de $\mathbb{R}$ tel que $d(m,a) = d(m,b)$
$m = \dfrac{a+b}{2}$ est dit milieu de (a,b).

$|m - a| = |m - b|$ est équivalant à $m - a = b - m$ car $a \neq b$, d'où l'on obtient une solution unique $m = \dfrac{a+b}{2}$.

<u>Rq 1</u> : Soit a et b deux réels.
$d(a,x) = d(b,x)$ équivaut à x est le milieu de (a,b) ou $a = b$.

<u>Prop 2</u> : Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1) si f possède au moins deux points fixes : $f = Id_{\mathbb{R}}$
2) Si f possède un seul point fixe b : $f = S_b$
3) Si f ne possède pas de point fixe f est une translation de vecteur non nul.

1) Soit u et v deux points fixes de f et x un nombre réel, on a :
$d(u,x) = d(u,f(x))$ et $d(v,x) = d(v, f(x))$
si on avait $f(x) \neq x$, u et v seraient milieu de $(x,f(x))$ ce qui est impossible car $u \neq v$. Ainsi : $\forall x \in R \quad f(x) = x$ et $f = Id_R$

2) Si f possède un seul point fixe b :
$\forall x \in R \quad |f(x) - b| = |x - b|$
si x est distinct de b : $f(x) \neq x$ et $f(x) - b = b - x$ d'où $f(x) = -x + 2b$
cette égalité est encore vraie si $x = b$ d'où $f = S_b$.

3) Si f ne possède pas de point fixe :
soit $c \in R$ et $d = f(c)$ $(d \neq c)$
$g = t_{c-d} o f$ est une isométrie et : $\forall x \in R \quad g(x) = f(x) + c - d$
d'où $g(c) = c$, g n'étant pas une symétrie car sinon $g(x) = -x + a$ et $f(x) = -x + a + d - c$ serait aussi une symétrie et possèderait un point fixe.
Donc $g = Id_R$ et ainsi : $\forall x \in R \; f(x) = x + d - c \quad f = t_{d-c}$.

<u>Th 1</u> : Toute isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective.
Isom $(\mathbb{R})$, est l'ensemble des symétries et translations de $\mathbb{R}$
Cela résulte de la propriété 2.

<u>Prop 3</u> : 1) $S_b o S_a = t_{2(b-a)}$
2) $t_b o t_a = t_{b+a}$

<u>Rq 1</u> : Toute isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un produit de symétries.
<u>Rq 2</u> : Toute isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone.
<u>Rq 3</u> : L'ensemble des translations $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif de Isom $(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$
<u>Rq 4</u> : Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
a) $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$
b) $f([a, +\infty) = [f(a), +\infty[$ ou $]-\infty, f(a)]$
c) Si o est le milieu de (A, B), $f(o)$ est le milieu de $(f(A), f(B))$.

<u>Prop 4</u> : Soit f et g deux éléments de Isom$(\mathbb{R})$
1) Si $f(a) = g(a)$: $f = g$ ou $f = g_o S_a$
2) Soit $a \neq b$ tels que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$: $f = g$.

On considère l'isométrie $g^{-1}{}_o f$:
1) $g^{-1}{}_o f = S_a$ et alors $f = g_o s_a$
ou $g^{-1}{}_o f = Id_R$ et alors $f = g$.
2) $f_o g^{-1}$ possède au moins deux points fixes a et b, donc $f_o g^{-1} = Id_R$ et $f = g$

Prop 5 : Soit xo, yo des éléments de $\mathbb{R}$.

1) il existe une seule translation t telle que t(xo) = yo.
2) il existe une seule symétrie s telle que s(xo) = yo.

1) on doit avoir t(xo) = xo + a = yo d'où a = yo - xo
2) On doit avoir s(xo) = - xo + b = yo d'où b = xo + yo, on remarque alors que le point fixe de s est le milieu de (xo,yo).

4 - LA DROITE METRIQUE -

Déf 1 : Soit (D,d) un espace métrique, on dit que D est une droite métrique réelle, s'il existe une isométrie bijective $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a ainsi : $\forall A, B \in D \ |f(B) - f(A)| = d(A, B)$ (1)

dans la suite le terme droite désignera une droite métrique réelle. f est aussi appelée une graduation.

Tout ensemble en bijection avec $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de droite métrique, d étant définie par l'égalité (1) .

Rq 1 : $\mathbb{R}$ étant un ensemble infini, D étant en bijection avec $\mathbb{R}$ est aussi infini.

Rq 2 : Si g est une isométrie de D dans $\mathbb{R}$, f une isométrie bijective de D dans $\mathbb{R}$, gof^{-1} est une isométrie de $\mathbb{R}$, elle est donc bijective et il en est de même de $g = gof^{-1} of$. Toute isométrie de D dans $\mathbb{R}$ est donc bijective.

Prop 1 : Soit f et g deux isométries de D dans $\mathbb{R}$ il existe un nombre réel a tel que : $g = t_a of$ ou $g = S_{a/2} of$.

Ces éventualités sont exclusives.

gof^{-1} est une isométrie de $\mathbb{R}$ donc : $gof^{-1} = t_a$ ou (exclusif) $gof^{-1} = S_{a/2}$

Ainsi ou : $\forall M \in D \ g(M) = f(M) + a$
ou : $\forall M \in D \ g(M) = - f(M) + a$

4.1 : ABSCISSE, ORIENTATION, MESURE ALGEBRIQUE -

Déf.1 : Soit D une droite réelle métrique, f une isométrie de D dans $\mathbb{R}$. Si M est un point de D, f(M) que l'on note x_M est l'abcisse de M relativement à f.

Rq 1 : Soit y un nombre réel il existe un seul point M de D tel que $x_M = y$.

Rq 2 : Soit A un point de D, u un nombre réel strictement positif. L'équation d(M,A) = u possède deux solutions. En effet : $|x_M - x_A| = u$ équivaut à $x_M = u + x_A$ ou $x_M = - u + x_A$

Prop 1 : Soit A et B deux points de D tels que d(A,B) = u. Il existe une seule isométrie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f(A) = o et f(B) = u.

Existence : Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une isométrie; on a $|x_B - x_A| = u$

Dans ce cas : $(t_{-x_A} og)(A) = x_A - x_A = o$ et $(t_{-x_A} og)(x_B) = x_B - x_A$

si $x_B - x_A = u$, on prendra $f = t_{-x_A} og$

si $x_B - x_A = - u$, on prendra $f = So\ ot_{-x_A} og$

Unicité : Si f' possède les mêmes propriétés, $f'of^{-1}$ est une isométrie de $\mathbb{R}$ possédant o et u comme points fixes donc $f'of^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$;

Déf.2 : On appelle repère (euclidien) de D un couple de points (A,B) tel que d (A,B) = 1. A est dit origine du repère.
L'abcisse d'un point M de D dans ce repère est f(M) où f est l'unique isométrie de D dans $\mathbb{R}$ telle que f(A) = o et f(B) = 1

Rq 1 : Se donner un repère revient donc à se donner une isométrie de D dans $\mathbb{R}$.

Rq 2 : Il existe deux repères d'origine donnée.

Rq 3 : Soit (A,B) et (A'B') deux repères, si M est un point de D on note x_M son abscisse dans le premier et x'_M son abscisse dans le second.
On a :
ou $\forall M \in D \quad x'_M = x_M + a$ ou $\forall M \in D \quad x'_M = -x_M + a$

Prop 2 : La relation sur l'ensemble des isométries de D dans $\mathbb{R}$ définie par : $(f \sim g) \Longleftrightarrow (\exists a \in \mathbb{R} \quad g = t_a o f)$
est une relation d'équivalence.
L'ensemble quotient comporte deux classes d'équivalence cl(f) et cl(-f) (f étant une isométrie de D dans $\mathbb{R}$).

On remarque que $f \sim g$ équivaut au fait que gof^{-1} est une translation. Comme l'ensemble des translations forme un groupe, $\sim$ est une relation d'équivalence. Etant donné que $-f = S_o of$, f et $-f$ ne sont pas équivalents (4.Prop 1) il existe donc au moins deux classes d'équivalence. Si $g \not\sim f$: $g = S_a of = S_a o S_o o(-f) = t_{2a} o(-f)$ donc $g \sim -f$: il existe donc au plus deux classes d'équivalence.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une isométrie; on peut définir sur D une relation d'ordre par : $(M \prec_f M') \Longleftrightarrow (f(M) \leq f(M'))$ (f est croissante).

Si $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi une isométrie :
ou $g = t_a of$ et $(M \prec_g M') \Longleftrightarrow (M \prec_f M')$
ou $g = S_a of$ et $(M \prec_g M') \Longleftrightarrow (M' \prec_f M)$

On voit donc qu'il existe deux manières de mettre ainsi une relation d'ordre total sur D. Ce qui nous amène à la notion d'orientation :

Déf 3 : Soit f et g deux isométries de D dans $\mathbb{R}$.
Si $f \sim g$ on dit que f et g définissent la même orientation sur D.
Si $f \not\sim g$ " " " une orientation inverse sur D.
Orienter la droite c'est choisir une des deux relations d'ordre sur D transportées de $\mathbb{R}$ ou encore choisir une des deux classes cl(f) ou cl(-f).
La droite orientée est ainsi un couple $(D, \prec_f)$.

Prop 3 : Soit $(D, \prec_f)$ une droite orientée; f et g deux isométries de D dans $\mathbb{R}$.
1) Si f et g définissent la même orientation :
$\forall M,N \in D \quad f(M) - f(N) = g(M) - g(N)$.

2) Si f et g définissent deux orientations distinctes :
$\forall M, N \in D \quad f(M) - f(N) = -(g(M) - g(N))$

1) $f = t_a og$: $f(M) = g(M) + a$ et $f(N) = g(N) + a$ d'où le résultat
2) $f = S_{a/2} og$: $f(M) = -g(M) + a$ et $f(N) = -g(N) + a$ d'où le résultat.

Déf.4 : Soit $(D, \alpha f)$ une droite orientée.
On définit une application $m_a : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$m_a(A,B) = g(B) - g(A)$ où $g \in cl(f)$.

On note $m_a(A,B) = \overline{AB}$ que l'on appelle la mesure algébrique de (A,B).

Rq 1 : Si l'on change l'orientation de D, la mesure algébrique de (A,B) est changée en son opposée.

On obtient les propriétés classiques suivantes :

Prop 4 : 1) $\forall A,B \in D \quad \overline{BA} = -\overline{AB}$, $d(A,B) = |\overline{AB}|$

2) $\forall A,B,C \in D \quad \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

3) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall A \in D \quad \exists !\ B \in D \quad \overline{AB} = a$

4.2. DEMI-DROITE, SEGMENT -

Prop 1 : Soit D une droite réelle métrique, O un point de D f une isométrie de D dans $\mathbb{R}$.

On note : $D^+_f = \{ M \in D \ ;\ f(O) \leq f(M) \}$,

$D^-_f = \{ M \in D \ ;\ f(M) \leq f(O) \}$.

L'ensemble $\{ D^+_f, D^-_f \}$ est indépendant du choix de f.

Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une isométrie :
ou $g = t_a \circ f$ et dans ce cas g et f définissent la même relation d'ordre sur D et l'on a : $D^+_f = D^+_g$ et $D^-_f = D^-_g$.

ou $g = S_a \circ f$ dans ce cas g et f définissent deux relations d'ordre inverses sur D et alors : $D^+_f = D^-_g$ et $D^-_f = D^+_g$.

Rq 1 : $D^+_f = f^{-1}([f(O), +\infty[)$, $D^-_f = f^{-1}(]-\infty, f(O)])$ chacun de ces ensembles est image réciproque par f d'une demi-droite de $\mathbb{R}$.

Rq 2 : Si on oriente D par f $D^+_f = \{ M \in D \ ;\ 0 \leq \overline{OM} \}$ et $D^-_f = \{ M \in D \ ;\ \overline{OM} \leq 0 \}$

Déf 1 : L'ensemble $\{ D^+_f, D^-_f \}$ est l'ensemble des deux demi-droites d'origine O.

Prop 2 : Soit O et A deux points de D, il existe une seule demi-droite d'origine O contenant A. On la notera $D_O(A)$.

$\mathbb{R}$ étant totalement ordonné ou $x_O < x_A$ et alors D^+_f est la seule demi-droite contenant A ou $x_A < x_O$ et D^-_f est la seule demi-droite contenant A.

Prop 3 : Soit A et B deux points de D
On pose : $[A,B] = D_A(B) \cap D_B(A)$

$[A,B] = \{ M \in D \ ;\ x \in [\min(x_A, x_B), \max(x_A, x_B)] \}$

$= \{ M \in D \ ;\ d(A,B) = d(A,M) + d(M,B) \}$

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une isométrie. Supposons que $f(B) = x_B < x_A = f(A)$.

On a : $D_A(B) = \{ M \in D \ ;\ x_M \leq x_A \}$; $D_B(A) = \{ M \in D \ ;\ x_B \leq x_M \}$

d'où : $[A,B] = \{ M \in D \ ;\ x_M \in [x_B, x_A] \}$.

Soit M un point de D tel que $x_B \leq x_M \leq x_A$: $d(A,B) = x_A - x_B = (x_A - x_M) + (x_M - x_B)$
$= d(A,M) + d(M,B)$.

Réciproquement si $d(A,B) = d(A,M) + d(M,B)$
on a $x_A - x_B = |x_A - x_M| + |x_M - x_B|$

Si $x_M < x_B$: $x_A - x_B = x_A - x_M + x_B - x_M$ et $x_M = x_B$, ce qui est absurde.
Si $x_A < x_M$: $x_A - x_B = x_M - x_A + x_M - x_B$ et $x_M = x_A$, ce qui est absurde.

Ainsi $x_B \leqslant x_M \leqslant x_A$.

Déf. 2 : Soit A et B deux points de D. On dit que $[A,B]$ est l'intervalle AB de la droite D ou le segment AB.
On posera : $[A, A] = \{A\}$

Rq 1 : Soit $f : D \dashrightarrow \mathbb{R}$ une isométrie, si $x_A \leqslant x_B$: $[A,B] = f^{-1}([x_A, x_B])$.

Un intervalle de D est l'image réciproque par f d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Rq 2 : $[A,B] = [B,A] = \{M \in D \; ; \; (x_M - x_A)(x_M - x_B) \leqslant 0\}$
Si on oriente D, on a donc :
$[A, B] = \{M \in D \; ; \; \overline{AM} \times \overline{BM} \leqslant 0\}$

4.3. MILIEU, PARALLELOGRAMME APLATI -

Prop 1 : Soit A et B deux points de D, il existe un point unique O de D tel que $d(O,A) = d(O,B)$. On a $x_O = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$.

Soit f une isométrie de D dans $\mathbb{R}$: $(d(O,A) = d(O,B)) \Longleftrightarrow (|x_A - x_O| = |x_B - x_O|)$ ce qui équivaut à dire que x_O est le milieu de (x_A, x_B). Nous obtenons donc l'existence et l'unicité du point O (3.prop 1) et $x_O = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$.

Déf.1 : Ce point est dit milieu de (A,B).
Le milieu de (A,A) est le point A.

Rq 1 : Le milieu de (A,B) est l'image réciproque par f du milieu de (x_A, x_B)

Rq 2 : $d(A,M) = d(B,M)$ équivaut à M est le milieu de (A,B) ou $A = B$.

Rq 3 : Le milieu de (A,B) appartient au segment $[A,B]$ car x_O appartient à l'intervalle des bornes x_A, x_B.

Rq 4 : Si on oriente D : O est le milieu de (A,B) équivaut à $\overline{AO} = \overline{OB}$.
En effet, si O est le milieu de (A,B), O étant un point du segment $[A,B]$ $\overline{AO}$ et $\overline{OB}$ sont du même signe (4.2.Déf.2 Rq.2) et égaux en valeur absolue car $d(A,O) = |\overline{AO}| = d(O,B) = |\overline{OB}|$.
Réciproquement si $\overline{AO} = \overline{OB}$: $d(A,O) = d(O,B)$, O est le milieu de (A,B).

Prop 2 : Soit O un point de D, pour tout point M de D il existe un point unique M' tel que O soit le milieu de (M,M').
On définit alors une application $S_O : D \dashrightarrow D$ par $S_O(M) = M'$ que l'on appellera la symétrie par rapport au point O.

Soit f une isométrie de D dans $\mathbb{R}$. On vient de voir que $x_O = \frac{1}{2}(x_M + x_{M'})$ d'où $x_{M'} = -x_M + 2x_O = S_{xO}(x_M)$.

Prop 3 : Soit O un point de D, S_O est une isométrie involutive dont le seul point fixe est le point O.

D'après ce qui précède, si f est une isométrie de D dans $\mathbb{R}$: $S_{xO} = f \circ S_O \circ f^{-1}$
Donc $S_O = f^{-1} \circ S_{xO} \circ f$ est une isométrie comme composée d'isométries.

Pour tout point M de D : $S_{x0}(S_{x0}(x_M)) = x_M$ donc $(S_0 o S_0)(M) = M$. S_0 est involutive.
$S_0(M) = M$ équivaut à $S_{x0}(x_M) = x_M$ d'où $x_M = x_0$ et $M = 0$.

<u>Prop 4</u> : Soit (A,B,C,E) un élément de D_4, il y a équivalence entre :

AP1 : (A,C) et (B,E) ont même milieu.
AP2 : $\begin{cases} d(A,B) = d(C,E),\ d(B,C) = d(A,E) \\ (A = C \text{ et } B = E) \Longrightarrow (A = B = C = E) \end{cases}$
AP 3 : $\overline{AB} = \overline{EC}$
AP 4 : $\overline{AE} = \overline{BC}$

AP 1 ==> AP2 :

Soit I le milieu commun de (A,C) et (B,E)
On a $S_I(A) = C$ et $S_I(B) = E$, S_I étant une isométrie :
$d(S_I(A), S_I(B)) = d(A,B)$ d'où $d(C,E) = d(A,B)$.
de même $S_I(B) = E$ et $S_I(C) = A$
$d(S_I(B), S_I(C)) = d(B,C)$ et $d(E,A) = d(B,C)$
Si $A = C$; $A = C = I$, si $B = E$: $B = E = I$
donc si $A = C$ et $B = E$ on a : $A = B = C = E = I$.

AP 2 ==> AP 3 : On a $|\overline{AB}| = |\overline{EC}|$ et $|\overline{BC}| = |\overline{AE}|$
Si $\overline{AB} = -\overline{EC}$: $|\overline{BC}| = |\overline{BA} + \overline{AC}| = |\overline{EC} + \overline{AC}|$
$|\overline{AE}| = |\overline{AC} - \overline{EC}|$

Ainsi : $|\overline{AC} - \overline{EC}| = |\overline{AC} + \overline{EC}|$
ou $\overline{EC} = 0$ et dans ce cas $\overline{AB} = -\overline{EC} = \overline{EC}$
ou $\overline{AC} = 0$ d'où $A = C$ et $\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{AE}$: $B = E$ d'où $A = B = C = E$ et $\overline{AB} = 0 = \overline{EC}$.

AP 3 ==> AP 4 : $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{EC} + \overline{BE} = \overline{BC}$

AP 4 ==> AP 3 : Soit I le milieu de (A,C) on a $\overline{AI} = \overline{IC}$
d'où $\overline{BI} = \overline{BC} + \overline{CI} = \overline{BC} - \overline{AI} = \overline{AE} - \overline{AI} = \overline{IE}$, I est le milieu de (B,E).

<u>Déf.2</u> : Si (A,B, C,E) vérifie une de ces propriétés, on dira que c'est un parallèlogramme aplati.

<u>Rq 1</u> : Soit A, B, C des points de D. Il existe un seul point E de D tel que (A, B, C, E) soit un parallèlogramme aplati. De même il existe un seul point C (A, B et E étant donnés) tel que (A, B, C, E) soit un parallèlogramme aplati, etc ...
En effet, dans le premier cas : si I est le milieu de (A, C) :
$E = S_I(B)$.

4.4. ISOMETRIES DE LE DROITE :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] & D \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{R} \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[r, "\bar{h}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

<u>Prop 1</u> : Soit f une isométrie de D dans $\mathbb{R}$.
a) h est une isométrie de D si et seulement si $\bar{h} = f o h o f^{-1}$ est une isométrie de $\mathbb{R}$.
b) Toute isométrie de D est bijective.
c) L'application I : Isom (D) --> Isom ($\mathbb{R}$) définie par $I(h) = f o h o f^{-1}$ est un isomorphisme de groupe .

a) On remarque que $h = f^{-1} O \bar{h} O f$ et on se souvient que la composée d'isométries est une isométrie.

b) Toute isométrie de $\mathbb{R}$ étant bijective et f étant bijective : toute isométrie de D est bijective.

c) On a : $I(hOh') = fOhOh'Of^{-1} = fOhOf^{-1}OfOh'Of^{-1} = I(h)OI(h')$ et
$I^{-1}(\bar{h}) = f^{-1}O\bar{h}Of$.

<u>Prop 2</u> : Soit f une isométrie de D dans $\mathbb{R}$.

a) $\tilde{t} = f^{-1}Ot_a Of$ est une isométrie de D sans point fixe que l'on appellera translation de D.

b) $\mathcal{E}(D)$ l'ensemble des translations de D est un sous-groupe commutatif de Isom (D).

c) $\forall M \in D \quad d(M, \tilde{t}(M)) = |a|$
$\forall M \in D \quad d(M, \tilde{t}^{(n)}(M)) = n\,|a| \qquad (n \in \mathbb{N})$.

a) $\tilde{t}$ est une isométrie d'après la propriété précédente. $\tilde{t}(M) = M$ équivaut à $t_a(x_M) = x_M$ donc $\tilde{t}$ ne possède pas de point fixe.

b) $\mathcal{E}(D) = I^{-1}(\mathcal{E}(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif puisque $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ l'est et que I est un isomorphisme de groupes.

c) On a : $\tilde{t}^{(n)} = f^{-1}O\, t_a^{(n)}Of = f^{-1}Ot_{na}Of$

d'où $d(M, \tilde{t}^{(n)}(M)) = d(x_M, t_{na}(x_M)) = d(x_M, x_M + na) = |na| = n|a|$

<u>Prop 3</u> : Soit $t : D \dashrightarrow D$. Il y a équivalence entre :

t1 : t est une translation.
t2 : $\forall M, N \in D$ (M, t(M), t(N), N) est un parallèlogramme aplati.
t3 : $\exists A, B \in D\ \forall N \in D$ (A,B, t(N), N) est un parallèlogramme aplati.

t1 $\Longrightarrow$ t2 :

On a : $x_{t(M)} = x_M + a$ et $x_{t(N)} = x_N + a$ d'où

$$x_{t(N)} - x_{t(M)} = x_N - x_M .$$

En orientant D, on obtient : $\overline{t(N)t(M)} = \overline{NM}$ la condition AP4 est vérifiée.

t2 $\Longrightarrow$ t3 :

Il suffit de prendre B = t (A).

t3 $\Longrightarrow$ t1 :

On a d'après AP4 : $x_{t(N)} - x_B = x_N - x_A$ d'où
$x_{t(N)} = x_N + (x_B - x_A)$.
t est une translation.

<u>Prop 4</u> : Soit h une isométrie de D

1) Si h possède au moins deux points fixes : $h = Id_D$.

2) Si h possède un seul point fixe O : $h = S_O$.

3) Si h ne possède pas de point fixe : h est une translation.

On remarque que h (M) = M' équivaut à $\bar{h}(x_M) = x_{M'}$.

1) $\overline{h}$ possède au moins deux points fixes : $\overline{h} = Id_{\mathbb{R}}$ d'où $h = Id_D$.
2) $\overline{h}$ possède un seul point fixe x_0 : $\overline{h} = S_{x0}$ d'où $h = S_0$.
3) $\overline{h}$ ne possède pas de point fixe, c'est une translation : h est une translation.

On peut alors reprendre les résultats obtenus pour les isométries de $\mathbb{R}$.

1) Le produit de deux symétries est une translation.
2) Si f_2 est une isométrie : $f_2 ([A,B]) = [f_2(A), f_2 (B)]$

$$f_2 (D_0(A) \quad) = D_{f_2(0)} (f_2(A)$$

Si O est le milieu de (A,B), f_2 (O) est le milieu de ($f_2(A)$, $f_2(B)$).

3) Si f et g sont deux éléments de Isom (D) :

a) Si f(O) = g(O) : f) g ou f = $S_0 0 g$.

b) Soit $A \neq B$ si f(A) = g(A) et f(B) = g(B) : f = g.

4) Soit A et B deux points de D :

a) il existe une seule translation t telle que t(A) = B.
b) il existe une seule symétrie S telle que S(A) = B.

Démontrons par exemple que si h est une isométrie de D : $h\ (D_0(A)) = D_{h(0)}(h(A))$

il existe une isométrie f de D dans R telle que : $D_0(A) = f^{-1}([x_0, + \infty[)$
$x_A > x_0$

Soit $\overline{h} = f0h0f^{-1}$, $\overline{h}$ est un élément de Isom ($\mathbb{R}$) :

Si $\overline{h}$ est croissante : $\overline{h} ([x_0 , + \infty [ ) = [\overline{h} (x_0), + \infty [$

et $\overline{h} (x_0) < \overline{h} (x_A)$.

$(f0h0f^{-1}) ([x_0, + \infty [ ) = [\overline{h}(x_0), + \infty [$

d'où $h\ (D_0(A)) = f^{-1} ([\overline{h} (x_0), +\infty [ ) = \{ M \in D \ ; \ x_M > \overline{h} \ (x_0) \}$

$h\ (D_0(A)$ est une demi-droite et $x_{h(A)} = (f0h)(A) = \overline{h} (x_A) > \overline{h}(x_0)$

donc h (A) appartient à cette demi-droite et ainsi $h\ (D_0(A)) = D_{h(0)}(h(A))$.

L'on procède de même lorsque $\overline{h}$ est décroissante.

Enfin, nous pouvons remarquer que si h est une isométrie de D et (A, B, C, E) un parallèlogramme aplati, alors (h(A), h(B), h(C), h(E)) est un parallèlogramme aplati. Ceci résulte de AP1 et du fait que h conserve le milieu.

5. LE PLAN METRIQUE.

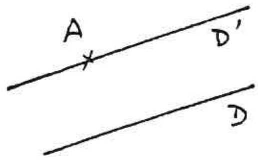
Soit P un ensemble non vide, muni d'une distance d,
$\mathcal{D}$ une famille de sous ensembles propres de P, telle que tout élément D de $\mathcal{D}$ soit tel que $(D, d_{/D \times D})$ est une droite métrique,
vérifiant les conditions suivantes :

A1 : $\forall A \neq B \in P \quad \exists ! \ D \in \mathcal{D} \quad A, B \in D$

Par deux points A et B il passe une et une seule droite que l'on notera AB.

On remarque que ceci implique que P contient trois points non alignés.

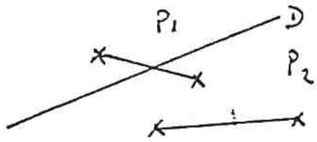
Il en résulte que si D et D' sont deux droites, elles sont disjointes ou se coupent en un point.
Si A et B sont deux points de P, on désignera par $[A,B]$ le segment $[A,B]$ de la droite AB et on appellera milieu de (A,B) le milieu de (A,B) couple de points de la droite AB.



A2 : $\forall D \in \mathcal{D} \quad \forall A \in P \setminus D \quad \exists!\, D' \in \mathcal{D} \quad A' \in D' \quad D \cap D' = \emptyset$

A3 : $\forall A,B,C \in P \; (d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)) \Longrightarrow (C \in [A,B])$

D'après la propriété 3 du 4.2., il y a équivalence entre ces deux propositions.
D'autre part, si C n'appartient pas à $[A,B]$: $d(A,B) < d(A,C) + d(C,B)$.



A4 : $\forall D \in \mathcal{D} \quad P \setminus D = P_1 \cup P_2$

$\forall i \in \{1,2\} \; \forall A,B \in P_i \; [A,B] \subset P_i$

$\forall A \in P_1 \quad \forall B \in P_2 \quad [A,B] \cap D \neq \emptyset.$

<u>Rq 1</u> : P_1 et P_2 sont disjoints : en effet, si A est un point de $P_1 \cap P_2$, le segment $[A,A]$ coupe D en un point, d'où A est un point de D, ce qui est contradictoire.

<u>Rq 2</u> : P_1 et P_2 sont non vides : puisque P contient trois points non alignés P_1 ou P_2 est non vide; soit A un point de P_1. Soit B un point de D; il existe sur la droite AB un point A' tel que B soit le milieu de (A,A'). Le segment $[A,A']$ coupe donc D en un point, donc A' est un élément de P_2.

Il y a unicité de ces deux sous-ensembles de $P \setminus D$: supposons que $P \setminus D = P_1' \cup P_2'$

P_1' et P_2' vérifiant A4 : $P_1' \cap P_1 \neq \emptyset$ ou $P_1' \cap P_2 \neq \emptyset$

Supposons que A soit un point de $P_1' \cap P_1$: soit B un point de P_1. Le segment $[A,B]$ ne coupe pas D, donc le Point B n'appartient pas à P_2, c'est un point de P_1. On montre ainsi que P_1 est inclus dans P_1' , de même P_1' est inclus dans P_1, donc : $P_1' = P_1$. D'autre part : $P \setminus D = P_1 \cup P_2 = P_1 \cup P_2'$ comme la réunion est disjointe, on obtient que $P_2 = P_2'$.

<u>Déf.1</u> : P_1 et P_2 sont les deux demi-plans créés par la droite D.

A5 : Pour toute droite D de $\mathcal{D}$, il existe une isométrie S : P ⟶ P, possédant D comme ensemble de points fixes.

<u>Déf.2</u> : Si $(P, d, \mathcal{D})$ vérifie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , on dira que c'est un plan métrique.

<u>Déf.3</u> : Soit $(P, d, \mathcal{D})$ un plan métrique.

a) (A,B,C) est un triangle si les trois points A,B et C ne sont pas alignés. A, B et C sont les sommets du triangle, $[A,B]$, $[A,C]$ et $[A,D]$ sont les côtés.

b) (A, B, C, D) est un quadrilatèrs si $\{A,B,C,D\}$ ne comporte pas trois points alignés. A,B, C et D sont les sommets; $[A,B]$ ... $[D,A]$ sont les côtés, $[A,C]$ et $[B,D]$ sont les diagonales.

6. POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES.

Déf.1 : On définit sur $\mathcal{D}$ la relation
$(D \,/\!/\, D') \Longleftrightarrow (D = D' \text{ ou } D \cap D' = \emptyset)$
et on dit que D est parallèle à D'.

Prop.1 : Cette relation est une relation d'équivalence.

a) $D \,/\!/\, D$: en effet, $D = D$.
b) $(D \,/\!/\, D') \Longrightarrow (D' \,/\!/\, D)$: si $D = D'$, $D' = D$ d'où $D' \,/\!/\, D$;
si $D \cap D' = \emptyset$, $D' \cap D = \emptyset$ d'où $D' \,/\!/\, D$.
c) $(D \,/\!/\, D' \text{ et } D' \,/\!/\, D'') \Longrightarrow (D \,/\!/\, D'')$:
si $D = D'$ ou $D' = D''$ on a $D \,/\!/\, D'$
si $D \cap D' = \emptyset$ et $D' \cap D'' = \emptyset$: si $D \cap D'' = \emptyset$ alors $D \,/\!/\, D''$, dans le cas contraire, soit A un point de $D \cap D''$ d'après l'unicité de A2 : $D = D''$ d'où $D \,/\!/\, D''$.

Rq 1 : $/\!/$ étant reflexive, on peut dire lorsque $D \,/\!/\, D'$ que D et D' sont parallèles.

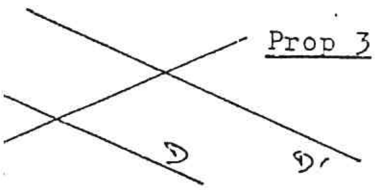
Rq 2 : A2 peut se traduire par : soit D une droite de P, A un point non situé sur D. Il existe une seule droite parallèle à D passant par A.

Nous rappelons la remarque faite au 9. après l' énoncé de A1:

Prop 2 : Soit (D,D') un couple de droites de P. Ou D et D' sont parallèles, ou D et D' se coupent en un point.

Ces deux propriétés sont exclusives.

Nous en déduisons :



Prop 3 : Soit D et D' deux droites parallèles, Δ une droite de P. Si Δ coupe D en un point, Δ coupe D' en un point.

En effet, dire que Δ coupe D en un point, signifie que Δ n'est pas parallèle à D d'après la transivité de la relation n'est pas parallèle à D', donc coupe D' en un point.

7. ISOMETRIES DU PLAN.

Prop 1 : Soit P un plan métrique, f une isométrie de P.

1) $\forall A,B \in P \quad f([A,B]) = [f(A), f(B)]$

2) $\forall O,A \in P \quad f(D_O(A)) = D_{f(O)}(f(A))$

3) $\forall A,B \in P \quad f(AB) = f(A)\, f(B)$.

4) f transforme un triangle en triangle, un quadrilatère en un quadrilatère.

5) f conserve le parallélisme :
$(D \,/\!/\, D') \Longleftrightarrow (f(D) \,/\!/\, f(D'))$.

6) f conserve le milieu :
(O milieu de(A, B)) $\Longrightarrow$ (f (O) milieu de (f (A), f (B)).

Soit X un point de $[A,B]$: $d(A,B) = d(A,X) + d(X,B)$).
f étant une isométrie : $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(X)) + d(f(X), f(B))$
donc f (X) est un point du segment $[f(A), f(B)]$.

Soit A, B, C trois points alignés f (A), f (B), f (C) sont alignés : en effet, si A, B et C sont alignés, un des points appartient au segment formé par les deux autres. Si C est un point de $[A,B]$, f(C) sera un point de $[f(A), f(B)]$ et donc f (A),f (B), f (C) sont alignés.

Si D est une droite de P, f (D) est inclus dans une droite D'. On a donc $g = f_{/D}$; D ---> D' qui est une isométrie. Soit u : $\mathbb{R}$ ---> D et v : $\mathbb{R}$ ---> D' deux isométries. $v^{-1} {}_o g_o u$ est une isométrie de $\mathbb{R}$, elle est bijective. Il en est de même de g. On obtient ainsi que g (D) = D' d'où f (AB) = f (A) f (B).

Soit $\varphi = v^{-1} {}_o g_o u$. On a : $g = v_o \varphi_o u^{-1}$.

Soit A et B : f ([A, B]) = g ([A, B])

$u^{-1}([A,B]) = [u^{-1}(A), u^{-1}(B)]$, $\varphi([u^{-1}(A), u^{-1}(B)]) = [\varphi(u^{-1}(A)), \varphi(u^{-1}(B))]$

et $g([A,B]) = v[\varphi(u^{-1}(A)), \varphi(u^{-1}(B))] = [(v_o\varphi_o u^{-1})(A), (v_o\varphi_o u^{-1})(B)] = [g(A), g(B)]$.

En utilisant le même procédé, on montre que $f(D_o(A)) = D_{f(o)}(f(A))$.

Pour démontrer le 4), il suffit de remarquer que si A, B et C ne sont pas alignés, f(A), f (B) et f (C) ne sont pas alignés.
En effet, f étant injective si C n'appartient pas à AB, f (C) n'appartient pas à f (AB) = f (A) f (B). Donc f (A), f (B) et f (C) ne sont pas alignés.

Si D est parallèle à D' : ou D = D' et f (D) = f (D')
ou $D \cap D' = \emptyset$ et $f(D \cap D') = f(D) \cap f(D') = \emptyset$
f étant injective.

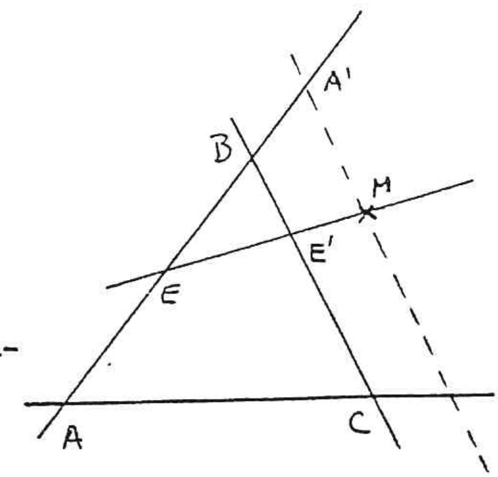
Si M est le milieu de (A,B) : d (M,A) = d (M, B) d'où d (f (M), f (A) = d (f (M), f (B))
f (M) est le milieu de (f (A), f (B)).

Prop 2 : Soit f une isométrie de P, F l'ensemble de ses points fixes.

1) Si F contient deux points, il contient la droite passant par ces deux points.
2) Si F contient trois points non alignés F = P et f = Idp.
3) Si F est non vide : F est réduit à un point ou F est une droite ou F est le plan.

1) Soit A et B deux points fixes de f, d'après la propriété 1 : f (AB) = f (A) f (B) = AB
la droite D = AB est invariante par f et $f_{/D}$: D ---> D est une isométrie de D possédant au moins deux points fixes, donc (4.4.Prop 4) $f_{/D} = Id_D$.

2°)Soit A, B et C trois points de F non alignés, les droites AB, BC et AC sont des droites de points fixes(d'après 1).
Soit M un point du plan qui n'appartient pas à ces droites. Soit Δ la parallèle à BC passant par M : elle coupe AB en un point A'.
Soit E un point de AB distinct de B et de A' la droite ME n'étant pas parallèle à BC coupe cette droite en un point E' distinct de B (d'après le choix de E). E et E' sont donc deux points fixes, la droite E, E' est une droite de points fixes : M est un point fixe.
Ainsi F= P et f = Id_p.



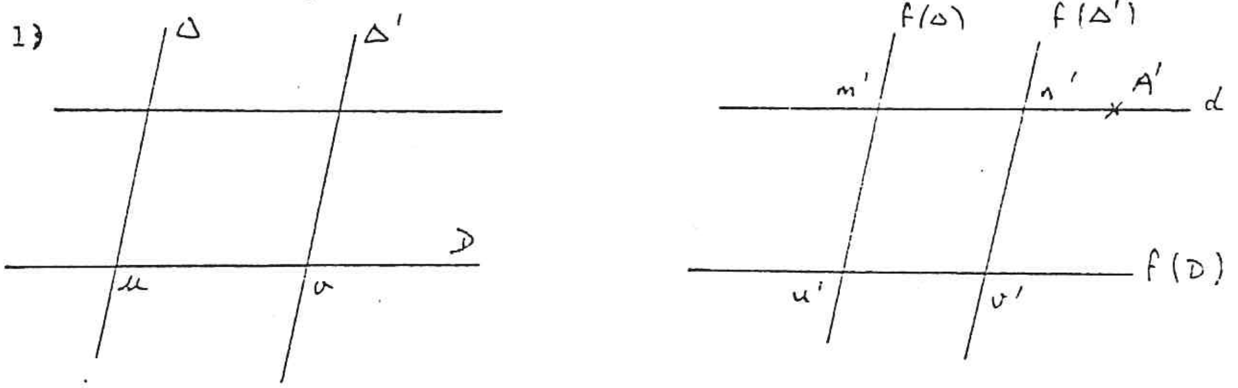
3) Cela résulte de 1) et 2).

Prop 3 : 1) Toute isométrie de P est bijective.

2) Si deux isométries coïncident en deux points A et B, elles coïncident sur la droite AB.

3) Si deux isométries coïncident en trois points non alignés, elles sont égales.

1)



Soit A' un point de P. On va montrer qu'il existe un point M de P tel que f (M) = A'.

Soit D une droite de P, si A' est un élément de f (D), la condition est réalisée. Sinon , soit d la droite passant par A' parallèle à f (D).

Considérons u et v deux points de D, Δ une droite passant par u distincte de D, Δ' la parallèle à Δ passant par v.

f étant injective, f (Δ) est une droite coupant f (D) au point u' = f (u) ; f (Δ) coupe d en un point m' = f (m),(m $\in \Delta$). De même f (Δ') coupe d en un point n' = f (n),(n $\in \Delta'$). f étant injective : m' $\neq$ n'. On a ainsi f (mn) = d. Il en résulte que A' possède un antécédent par f.

f est donc surjective. On sait d'autre part qu'elle est injective : f est bijective.

2) et 3) : Soit f et g deux isométries de P. Dire que f (M) = g (M) équivaut à: $(g^{-1} \circ f)$ (M) = M. On applique alors la propriété 2 à $g^{-1} \circ f$.

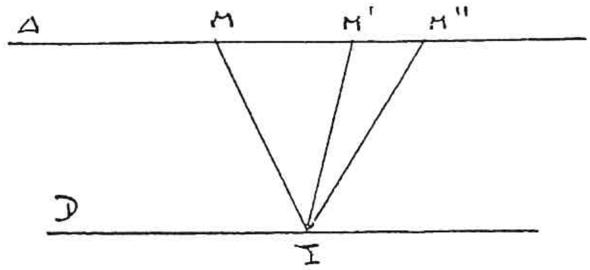
8. SYMETRIE ORTHOGONALE.

8.1. ORTHOGONALITE.

Prop 1 : Soit S une isométrie de P, ayant une droite D comme ensemble de points fixes. S échange les deux demi-plans créés par D.

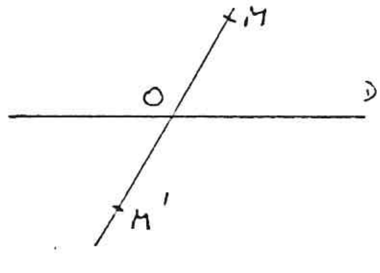
Soit M un point de P_1. On pose M' = S(M) (M' $\neq$ M car M $\notin$ D).

a) La droite MM' ne coupe pas D : Nous allons montrer que ceci est absurde. Soit Δ la droite MM'. Δ est parallèle à D donc S (Δ) est parallèle à S(D) = D, comme M' est un point de S (Δ), il en résulte que S (Δ) = Δ . La restriction de S à Δ est une isométrie sans ~~sans~~ point fixe. C'est une translation. Il existe alors un nombre réel a, tel que : d (M, $S^{(n)}$(M)) = n |a|.



Soit I un point de D : $d(I,M) = d(S^{(n)}(I), S^{(n)}(M)) = d(I,S^{(n)}(M))$
Les points $M, S^{(n)}(M)$, I n'étant pas alignés, on obtient :
$d(M, S^{(n)}(M)) < d(M,I) + d(I,S^{(n)}(M))$ d'où : $nd(M,M') < 2d(M,I)$
Ceci ayant lieu pour tout n est absurde, R étant archimédien : c.a.d :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tq $x < nu$)

b) La droite MM' coupe donc D :
Soit O le point d'intersection de ces deux droites.
On a : $d(O,M) = d(S(O), S(M)) = d(O,S(M))$.
O est le milieu de MM'. Le segment $[M,M']$ coupe D donc M' est un point de P_2.



Rq 1 : La droite MM' est invariante pas S. En effet,
$S(OM) = S(O)\,S(M) = OM' = OM$

Rq 2 : La restriction de S à MM' est une isométrie ayant $\{O\}$ comme ensemble de points fixes, c'est donc la symétrie par rapport à O.
On a alors $S(M) = M$, c'est-à-dire $S(S(M)) = M$.
S est involutive, c'est-à-dire $S o S = Id_P$
ou encore : $S = S^{-1}$

Prop 2 : Il existe une seule isométrie de P possédant D comme ensemble de points fixes.

Soit S une telle isométrie, M un point de P_1, $S(M) = M'$. La droite MM' coupe D en un point I. Soit N un point de D distinct de I
$d(N,M) = d(S(N), S(M)) = d(N,M')$
$d(I,M) = d(S(I), S(M)) = d(I,M')$
N n'appartient pas au segment $[M,M']$
(car celui-ci coupe D en I) :
$d(M,M') < d(M,N) + d(N,M')$
I étant le milieu de (M,M') : $d(M,M') = 2d(M,I)$
Ainsi : $2d(M,I) < 2d(M,N)$.
D'où : $\forall N \in D \setminus \{I\} \quad d(M,I) < d(M,N)$.
Il en résulte que le point I est indépendant de S et comme I est le milieu de (M,M') il en est de même de M'.

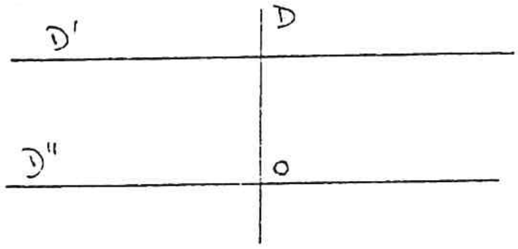
Déf.1 : On appelle symétrie orthogonale par rapport à (la droite) D, l'unique isométrie ayant D comme ensemble de points fixes. On la notera S_D.

Déf. 2 : On dit qu'une droite D' de P est orthogonale par rapport à D si :
$$D' \neq D \text{ et } S_D(D') = D'$$
Dans ce cas on notera : $D' \perp D$. On dit aussi que D' est parpendiculaire à D.

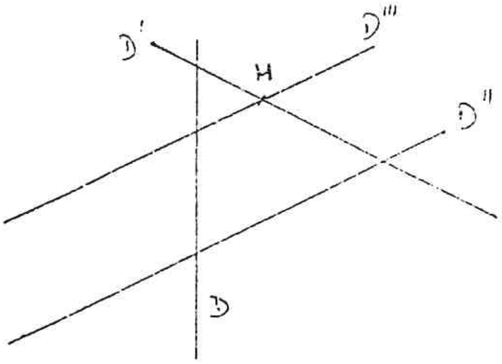
Rq 1 : Soit M un point de $P \setminus D$, $M' = S_D(M)$; la droite MM' est orthogonale à D (Prop 1-Rq 1).

Prop 3 : 1) Si D' est orthogonale à D : D et D' se coupent en un point.
2) Si D' est orthogonale à D : $(D'' \,//\, D') \Longleftrightarrow (D'' \perp D)$.
3) Soit O un point de P. Il existe une seule perpendiculaire à D passant par O.
S désigne la symétrie orthogonale par rapport à D.

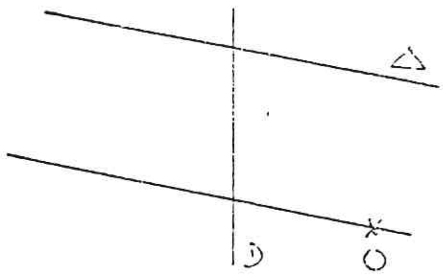
1) Si D' ne coupe pas D, D' est parallèle à D et située dans un demi-plan créé par D. S (D') est donc une droite parallèle à S (D) = D (7.Prop 1) et située dans l'autre demi-plan créé par D (8.Prop 1). On ne peut donc avoir S (D') = D'.
Ainsi, lorsque D' est perpendiculaire à D, D' coupe D et comme D' est distincte de D, l'intersection est réduite à un point.



2) Si D" est parallèle à D' :
D' coupe D en un point, donc D" coupe D en un point O. D" étant parallèle à D' S(D") est parallèle à S(D') = D' et ainsi à D". D'autre part, S(D") contient le point O = S(O) d'où S(D") = D". D" étant distincte de D, son intersection avec D étant réduite à un point, D" est orthogonale à D.
Di D" n'est pas parallèle à D' :
Soit M un point de D' n'appartenant pas à D, on désigne par D"' la parallèle à D" passant par M. Si D" est orthogonale à D, D''' est aussi orthogonale à D d'après la première partie. D' et D" n'étant pas parallèles, il en est de même de D' et D"'.
Ainsi : D' ∩ D"' = { M } , D' et D" sont invariantes par S, le point M est donc un point fixe, mais ceci est absurde car M n'est pas sur D.



3) Soit Δ une perpendiculaire à D. Une droite est perpendiculaire à D si et seulement si elle est parallèle à Δ . On déduit alors de A2 qu'il existe une seule droite perpendiculaire à D passant par O (la parallèle à Δ passant par O).



Prop 4: Soit (D et Δ) un couple de droites.
$S_D o S_\Delta\ o S_D = S_{SD}\ (\Delta)$

Soit M un point de $S_D(\Delta)$: $M = S_D(X)$, X étant un point de Δ
$S_D(M) = S_D(S_D(X)\ ) = X \qquad S_\Delta(S_D(M)\ ) = S_\Delta(X) = X$
et $(S_D o S_\Delta o S_D)\ (M) = S_D(X) = M$.
Les points de $S_D\ (\Delta\ )$ sont des points fixes de $S_D o S_\Delta\ o S_D$.
On ne peut avoir : $S_D o S_\Delta\ o S_D = Id_p$ car alors $S_\Delta\ o S_D = S_D$ et $S_\Delta = Id_p$,
ce qui est absurde.
D'après la propriété 2 du numéro 7, l'ensemble des points fixes de $S_D o S_\Delta\ o S_D$ est la droite $S_D(\Delta\ )$, par conséquent : $S_D o S_\Delta\ o S_D = S_{S_D(\Delta\ )}$

Cor 1 : S_D et $S_{D'}$ commutent si et seulement si D' est orthogonale à D ou D' est égale à D.

Nous avons : $S_{D'} o S_D = S_D o S_{S_D(D')}$. S_D et $S_{D'}$ commutent équivaut à :
$S_D o S_{S_D(D')} = S_D o S_{D'}$ c'est-à-dire $S_{S_D(D')} = S_{D'}$ ou encore $S_D\ (D') = D'$.

Cor 2 : Si D' est perpendiculaire à D, D est perpendiculaire à D'.
Si D' est perpendiculaire à D, S_D et $S_{D'}$ commutent et D' est distincte de D.
$S_{D'}$ et S_D commutent et D est distincte de D' : D' est orthogonale à D'.

Cor 3 : S_D conserve l'orthogonalité

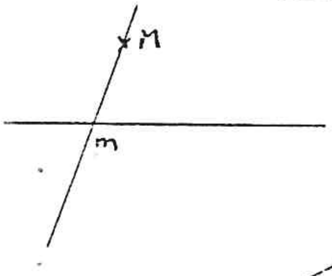
$$(\Delta \perp \Delta') \Longrightarrow (S_D(\Delta) \perp S_D(\Delta'))$$

Si Δ est orthogonale à Δ' : $S_{\Delta'}(\Delta) = \Delta$ et $\Delta \neq \Delta'$.

On a : $S_{S_D(\Delta')}(S_D(\Delta)) = (S_D o S_{\Delta'} o S_D)(S_D(\Delta)) = (S_D \circ S_{\Delta'})(\Delta) = S_D(\Delta)$.

et $S_D(\Delta')$ est distincte de $S_D(\Delta)$ (car S_D est injective).

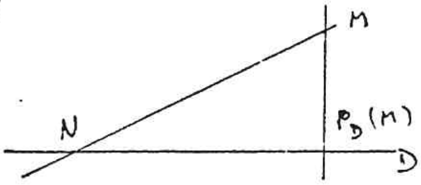
8.2. PROJECTION ORTHOGONALE, DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE, MEDIATRICE.



Déf.1 : Soit D une droite de P.
Pour tout point M de P, il existe une deule droite D' perpendiculaire à D, cette droite coupe D en un point m que l'on appelle la projection orthogonale de M sur D.
On définit ainsi une application :

$$p_D : P \dashrightarrow P \quad \forall M \in P \quad p_D(M) = m$$

la projection orthogonale sur D.



Prop 1 : Soit D une droite de P, M un point de P.

$$\forall N \in D \setminus \{p_D(M)\} \quad d(M,N) > d(M, p_D(M))$$

Si M est sur D : $p_D(M) = M$ et la condition devient $D < d(M,N)\ \forall N \in D \setminus \{M\}$

Si M n'est pas un point de D, il suffit de se reporter à la démonstration de la propriété 2 du 8.1.

Prop 2 : Soit A et B deux points de P. Il existe une seule symétrie S_D telle que $S_D(A) = B$.

Dire que $S_D(A) = B$ équivaut à dire que AB est perpendiculaire à D et coupe cette droite au milieu de (A,B). D'après 8.1. Cor.2), ceci est équivalent à dire que D est perpendiculaire à AB et passe par le milieu I de (A,B). D'après 8.1.Prop.3, nous obtenons l'existence et l'unicité de D.

Déf. 2 : Soit A et B deux points de P. On appelle médiatrice de (A,B) la perpendiculaire à AB passant par le milieu de (A,B).

Rq 1 : On vient de voir que $S_D(A) = B$ si et seulement si D est la médiatrice (A,B).

Prop.3 : Soit A et B deux points de P, D la médiatrice de (A,B).

$$D = \{ M \in P \ ; \ d(M,A) = d(M,B) \}$$

Soit P_A le demi-plan créé par D contenant A
P_B " " " B

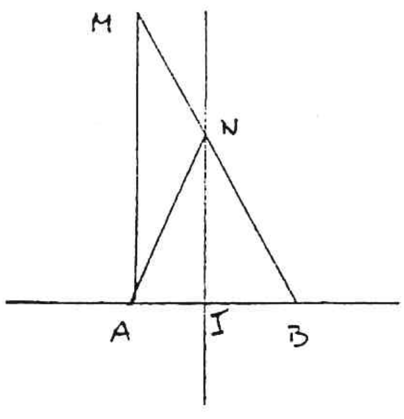
$$P_A = \{ M \in P \ ; \ d(M,A) < d(M,B) \} \quad P_B = \{ M \in P \ ; \ d(M,B) < d(M,A) \}$$

Soit M un point de P, d'après la propriété 2 :
$S_D(A) = B$ d'où :

$$d(M,A) = d(S_D(M), S_D(A)) = d(M,B).$$

Soit M un point de P_A, le segment $[M,B]$ coupe D en un point N. $d(M,B) = d(M,N) + d(N,B)$.
$[M,A]$ est inclus dans P_A donc M, N et A ne sont pas alignés :

$$d(M,A) < d(M,N) + d(N,A)$$



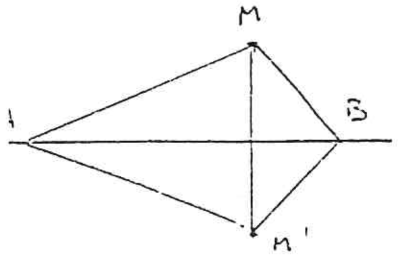
N étant sur D : $d(N,A) = d(N;B)$ d'où $d(M,A) < d(M,B)$.

On montre de même que si M est dans P_B : $d(M,B) < d(M,A)$.
On obtient aussi l'égalité : $D = \{ M \in P \; ; \; d(M,A) = d(M,B) \}$

<u>Cor.1</u> : Soit (A,B,C) un triangle. Il y a équivalence entre :
1) $d(A,B) = d(A,C)$
2) A est situé sur la médiatrice de (A,C).

Cela résulte du fait que la médiatrice de (B,C) est l'ensemble des points M de P, tel que $d(M,B) = d(M,C)$.

<u>Déf.3</u> : Si le triangle vérifie une de ces conditions, on dira que c'est un triangle isocèle.

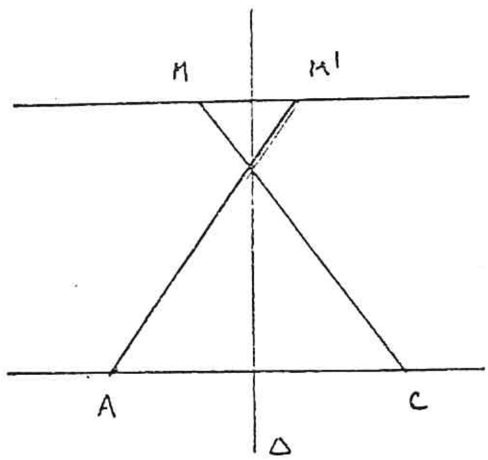


<u>Prop.4</u> : Soit A et B deux points du plan P, D la droite AB, a et b deux nombres réels positifs a et b.
Dans un demi-plan créé par D il existe au plus un point M tel que : $d(M,A) = a$ et $d(M,B) = b$.
Si M est une solution dans P, l'ensemble solution dans P est : $\{ M, S_D(M) \}$.

Soit M' un point distinct de M tel que : $d(M,A) = d(M,A)$ et $d(M,B) = d(M'B)$.
A et B sont deux points de la médiatrice de (M,M') d'où $M' = S_D(M)$; M et M' sont dans deux demi-plans créés par D.

<u>Prop.5</u> : Soit A et C deux points de P, P_1 un demi-plan créé par AC.
Soit M et M' deux points de P_1 tels que :
$d(M,A) = d(M',C) = a$ et $d(M,C) = d(M',A) = b$.

1) MM' est parallèle à AC.
2) La médiatrice Δ de (A,C) est aussi celle de (M, M').
3) Si $a < b$: [M,C] et[M',A] se coupent sur Δ .
4) Si MA et M'C se coupent, c'est en un point de Δ.



D'après la propriété précédente $a \neq b$.
Soit $M'' = S \;(M)$, M'' est dans P_1 car MM'' étant orthogonale à Δ est parallèle à AC.

$$d(A,M) = d(S_\Delta(A), S_\Delta(M)) = d(C,M'') = a = d(M',C)$$

et $d(C,M) = d(S_\Delta(B), S_\Delta(M)) = d(A,M'') = b = d(M'A)$.

Comme M' et M'' sont dans P_1, d'après la propriété précédente : $M' = M'' = S_\Delta(M)$. Δ est donc la médiatrice de (M,M') et MM' est parallèle à AC.

Supposons que $a < b$: M et A d'une part, M' et C d'autre part, sont dans le même demi-plan créé par Δ . [M,C] coupe Δ en un point J, comme $S_\Delta([M,C]) = M'A$.
ce segment coupe Δ au point $S_\Delta(J) = J$.

Si MA et M'C sont sécantes, soit I leur point d'intersection : $S_\Delta(I)$ est un point de $S_\Delta(MA) \cap S_\Delta(M'C) = M'C \cap MA = \{ I \}$, d'où $S_\Delta(I) = I$, I est un point de Δ .

<u>Rq</u> : Si M et M' sont dans P_1 tel que $d(M,A) = d(M'C) = a = d(M'C) = d(M'A)$ d'après la propriété 4 : $M = M'$.

-3
PRODUIT de SYMETRIES

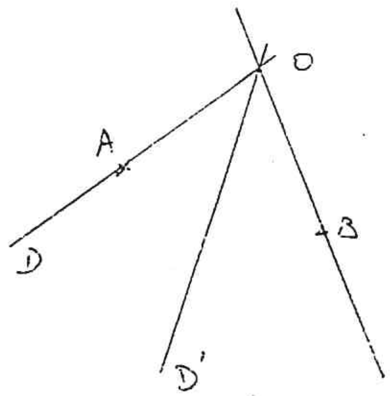
<u>Prop.1</u> : Soit f et g deux isométries de P coïncidant sur une droite D: $f = g$ ou $g = f \circ S_D$.
D est un ensemble de points fixes pour $f^{-1} \circ g$. ou $f^{-1} \circ g = Id_P$ ou $g = f^{-1} \circ S_D$.

8.3. PRODUIT DE SYMETRIES.

Prop 2. Soit D et D' deux droites sécantes en O, $S_D o S_{D'}$ ne possède que O comme point fixe.

O est un point fixe de $S_D o S_{D'}$: $S_D(S_{D'}(O)) = S_D(O) = O$.

Soit M un point de P, si $(S_D o S_{D'})(M) = M$: $S_{D'}(M) = S_D(M)$. Comme D et D' sont distinctes, d'après 8.2.Prop.2, on a : $S_{D'}(M) = S_D(M) = M$. M est un point de l'intersection de D et D' : M= O.



Prop.3 : Soit R une isométrie de P ne possédant que le point O comme point fixe.
Soit D une droite de P passant par O.
Il existe une droite unique D' telle que $R = S_{D'} o S_D$.

Soit A un point de D distinct de O, R (A) = B : B est distinct de A.
Si D' est la médiatrice de (A,B), D' passe par O et $S_{D'}(A) = B$.
$S_{D'} o S_D$ et R coïncident sur A et O, donc sur D.
Si $S_{D'} o S_D$ et R sont distincts : $S_{D'} o S_D = R o S_D$; d'où $R = S_{D'}$, ce qui est absurde puisque R ne possède qu'un seul point fixe.
D'autre part, si $R = S_{D''} o S_D = S_{D'} o S_D$; on obtient : $S_{D'} = S_{D''}$ et D' = D".

Cor.1 : Soit trois points O, A et B, tels que d (O,A) = d (O,B). Il existe une seule isométrie ne possédant que O comme point fixe telle que R (A) = B.

Soit D la droite OA, D' la médiatrice de (A,B) d'après la démonstration précédente : $R = S_{D'} o S_D$.

Soit Ro l'ensemble formé des isométries ne possédant que O comme point fixe et de Id_P. Selon les propriétés 2 et 3, Ro est aussi l'ensemble des produits de symétries $S_D o S_{D'}$ où D et D' passent par O. On appelle rotation de centre O un élément de Ro distinct de Id_P.

Prop.4 : Ro est un sous-groupe commutatif de Isom.P.

Ro est un ensemble non vide car il contient Id_P.

Soit R un élément de Ro : $R = S_{D'} o S_D$ où D et D' passent par O.

On a : $R^{-1} = (S_{D'} o S_D)^{-1} = S_D o S_{D'}$: R^{-1} est un élément de Ro.

Soit R' appartenant à Ro : on peut écrire $R' = S_{D''} o S_{D'}$ ou D" passe par O.

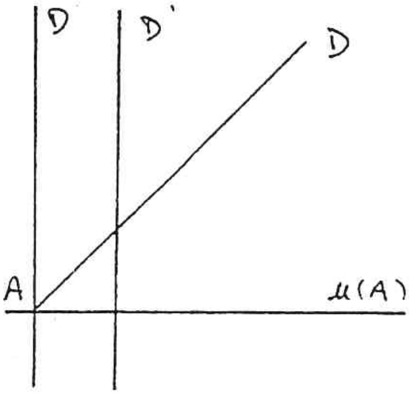
$R'oR = S_{D''} o S_{D'} o S_{D'} o S_D = S_{D''} o S_D$, R'oR est donc un élément de Ro.

De même RoR' est un élément de Ro, il existe alors une droite Δ passant par O, telle que : $RoR' = S_\Delta o S_{D'}$ ou $S_{D'} o S_D o S_{D''} o S_{D'} = S_\Delta o S_{D'}$. On en tire que : $S_\Delta = S_{D'} o S_D o S_{D''}$ et S_Δ étant involutive :

$$S_\Delta = (S_{D'} o S_D o S_{D''})^{-1} = S_{D''} o S_D o S_{D'}$$

Ainsi : $RoR' = S_{D''} o S_D o S_{D'} o S_{D'} = S_{D''} o S_D = R'oR$.

Prop.5 : Soit u une isométrie sans point fixe
ou $u = S_{D'} o S_D$ où D est parallèle à D'
ou $u = S_{D'} o S_{D''} o S_D$ où D' est parallèle à D".



Soit A un point de P, soit D' la médiatrice de (A, u(A)). $S_{D'}ou)$ (A) = A

- ou $S_{D'}ou$ possède une droite de point fixe D et: $S_{D'}ou = S_D$ d'où $u = S_D o S_{D'}$ (avec D' parallèle à D, car u ne possède par de point fixe).
- ou $S_{D'}ou$ ne possède que A comme point fixe : soit D" la droite parallèle à D' passant par A, on a alors une droite D passant par A, telle que $S_{D'}ou = S_{D''} o S_D$ et $u = S_{D'} o S_{D''} o S_D$.

L'éventualité $S_{D'}ou = Id_P$ n'est pas possible, car, sinon $u = S_{D'}$ possède une droite de point fixe.

<u>Prop.6</u> : 1) Toute isométrie de P est soit une symétrie, soit le produit de deux ou trois symétries.

2) Toute isométrie de P conserve l'orthogonalité.

1) Soit f une isométrie de P, F l'ensemble de ses points fixes.
   Si F= P : $f = Id_P = S_D o S_D$, D étant une droite quelconque.
   Si F = D une droite de P : $f = S_D$
   Si $F = \{O\}$ O étant un point de P : $f = S_{D'} o S_D$, D et D' étant sécante en
   Si $F = \emptyset$ on est ramené à la propriété 5.

2) Nous avons vu qu'une symétrie conserve l'orthogonalité (8.1.Prop.4,Cor.3), d'après le 1), toute isométrie conserve l'orthogonalité.

9. <u>LA SYMETRIE CENTRALE</u>.

<u>Déf.1</u> : Soit O un point de P. Pour tout point M de P il existe un seul point M' de P tel que O soit le milieu de (M,M'). On définit alors une application $S_O : P \dashrightarrow P$ par :

$$\forall M \in P \quad S_O(M) = M'$$

que l'on appelle la symétrie centrale par rapport à O.

<u>Rq 1</u> : Si deux symétries points coïncident en un point, elles sont égales. Si $S_O(M) = S_I(M) = M'$, O et I sont le milieu de M,M'

<u>Prop.1</u> : Soit D et D' deux droites orthogonales se coupant en O : $S_D o S_{D'} = S_{D'} o S_D = S_O$

a) $S_D o S_{D'}$ est involutive : $(S_D o S_{D'})^{-1} = S_{D'} o S_D = S_D o S_{D'}$ d'après 8.1,Prop.4, Cor.1.

b) $S_D o S_{D'}$ possède un seul point fixe O d'après 8.3. Prop.2.

c) $f = S_D o S_{D'}$ étant une involution, le milieu de (M, f(M)) est un point fixe le milieu de (M, f(M)) étant transformé en le milieu de (f (M), f^2 (M)) = (f (M), M). Ainsi, pour tout point M de P, O est le milieu de (M, f(M)) : $f = S_O$.

<u>Cor.1</u> : La symétrie par rapport à un point O est une isométrie.

S_O étant la composée de deux isométries, est une isométrie. On peut remarquer que S_O est une rotation de centre O.

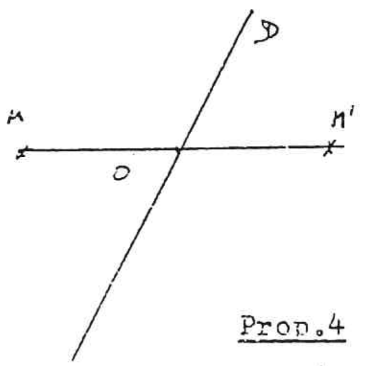
<u>Prop.2</u> : Soit D une droite de P, O un point de P.

1) Si D contient O : $S_O(D) = D$.

2) Si D ne contient pas O : $S_O(D)$ est une droite strictement parallèle à D.

1°) Soit D une droite passant par O, M un point de D différent de O : les points O, M, $S_o(M)$ sont des points alignés, $S_o(M)$ est donc un point de D. Ainsi, $S_o(D)$ est inclus dans D; comme $S_o(D)$ est une droite , $S_o(D) = D$.

2°) Si D est une droite qui ne contient pas le point O : soit M un point de D tel que $M' = S_o(M)$ appartienne à D, O, M et M' sont trois points (distincts) alignés, donc O appartient à la droite MM', c'est-à-dire à D, ce qui est contradictoire.



<u>Prop.3</u> : Soit D une droite de P, P_1 et P_2 les deux demi-plans créés par D, O un point de D.
S_o échange P_1 et P_2.

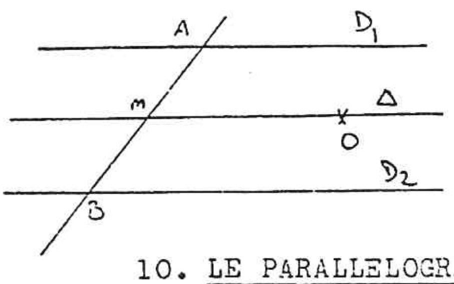
Soit M un point de P_1, le segment $[M, S_o(M)]$ coupe D en O. $S_o(M)$ est un point de P_2. On obtient que $S_o(P_1) \subset P_2$.
On a de même : $S_o(P_2) \subset P_1$. Comme S_o est involutive :
$S_o(S_o(P_2)) = P_2 \subset S_o(P_1)$ et $S_o(S_o(P_1)) = P_1 \subset S_o(P_2)$
d'où $S_o(P_2) = P_1$ et $S_o(P_1) = P_2$.

<u>Prop.4</u> : Soit D_1 et D_2 deux droites strictement parallèles.
$\mathcal{H} = \{ m \in P$; m est le milieu de $(M,N) \in D_1 \times D_2 \}$.

$\mathcal{H}$ est une droite parallèle à D_1 et D_2.

a) Si O et I sont deux points de $\mathcal{H}$, montrons que la droite OI = D est parallèle à D_1.
Si O est le milieu de (A,B), A étant un point de D_1, B un point de D_2, S_o transforme la droite D_1 en une droite passant par B parallèle à D_2, c'est-à-dire en D_2. S_o échange donc D_1 et D_2, il en est de même de S_I.
D'autre part, ces deux applications conservent D, ainsi :
$(S_o o S_I)(D \cap D_1) = D \cap D_1$. D étant distincte de D_1, $D \cap D_1$ est au plus réduit à un point C, mais dans ce cas $(S_o o S_I)(C) = C$ et $S_I(C) = S_o(C)$ ce qui contredit le fait que O soit distinct de C.
Nous venons de démontrer que $\mathcal{H}$ est inclus dans la droite Δ , la parallèle à D passant par O.

b) Montrons maintenant que Δ est inclus dans $\mathcal{H}$.

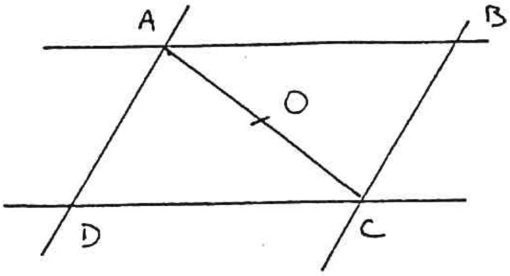


Soit m un point de Δ ; on considère une droite passant par m non parallèle à D_1. Elle coupe D_1 en un point A et D_2 en un point B. Le milieu I de (A,B) est un point de Δ ; d'après le a) c'est aussi un point de la droite AB, on a donc I = m. m est un point de $\mathcal{H}$.

10. <u>LE PARALLELOGRAMME</u>.

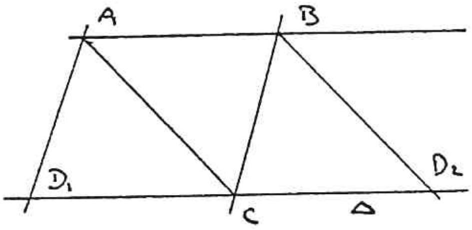
<u>Prop.1</u> : Soit (A,B,C,D) un quadrilatère. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
P_1 : AB et CD sont parallèles, AD et BC sont parallèles.
P2 : (A,B) et (C,D) ont même milieu O.
P3 : $d(A,B) = d(D,C)$, $d(A,D) = d(B,C)$
AC et BD sont sécantes.
P4 : $d(A,B) = d(D,C)$, AB et CD sont parallèles
AC et BD sont sécantes.

P1 $\Longrightarrow$ P_2 : Soit O le milieu de (A,C). S_o transforme AB en une droite parallèle passant par C : $S_o(AB) = CD$, de même S_o transforme BC en une droite parallèle passant par A : $S_o(BC) = AD$. Le point B, intersection de AB et BC est transformé par S_o en l'intersection CD et et AD : $S_o(B) = D$. O est le milieu de (B,D) et (A,C).



P2 $\Longrightarrow$ P3 : S_o étant une isométrie, on a : $d(S_o(A), S_o(B)) = d(A,B)$ et $d(S_o(B), S_o(C)) = d(B,C)$, d'où l'on obtient : $d(C,D) = d(A,B)$ et $d(D,A) = d(B,C)$.

P3 $\Longrightarrow$ P4 : D'après la propriété 5 du 8.2, ($M = B$, $M' = D$, $B \neq D$ sont dans deux demi-plans distincts créés par AC, car BD n'est pas parallèle à AC. Soit P_1 le demi-plan contenant B, P_2 l'autre demi-plan. Si O est le milieu de(A,C), on a : $d(S_o(B), S_o(C)) = d(B,C)$ et $d(S_o(B), S_o(A)) = d(B,A)$ d'où $d(S_o(B), A) = d(B,C)$ et $d(S_o(B), C) = d(B,A)$. S_o échange P1 et P2, $S_o(B)$ est donc un point de P2 et, d'après la prapriété 4 du 8.2 : $S_o(B) = D$. Il en résulte que $S_o(AB) = CD$; AB et CD sont deux droites parallèles.



P4 $\Longrightarrow$ P1 : Notons Δ la droite CD. La parallèle à BC passant par A coupe Δ en un point D1. (A,B,C,D1) vérifie P1 et donc aussi P3 : $d(C,D1) = d(A,B)$ et BD1 coupe AC. La parallèle à AC passant par B coupe Δ en un point D_2 : (A,B,D_2,C) vérifie P1 et donc P3 : $d(C,D_2) = d(A,B)$.

D1 et D2 sont deux points de Δ dont la distance à C est égale à d (A,B) ; ce sont les seuls (4.1.Déf.1, Rq 1). D vérifie aussi cette propriété, comme D est distinct de D_2, car BD coupe AC : $D = D_2$. AD est parallèle à BC.

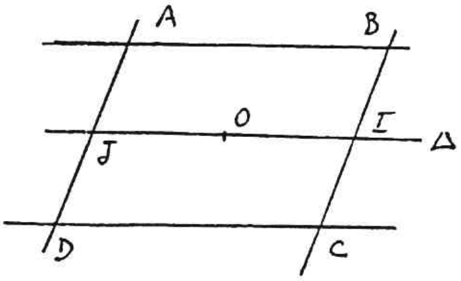
<u>Déf.1</u> : Si (A,B,C,D) vérifie une de ces propriétés, on dira que c'est un parallèlogramme.

<u>Rq 1</u> : Si f est une isométrie de P, (A,B,C,D) un parallèlogramme ; (f (A), f (B), f (C), f (D)) est un parallèlogramme car f conserve le parallèlisme.

<u>Rq 2</u> : O milieu commun de (A,C) et (B,D) s'appelle le centre du parallèlogramme.

<u>Rq 3</u> : (A,B,C,D) est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati si et seulement si (A,C) et (B,D) ont même milieu.

<u>Rq 4</u> : Il existe un seul parallèlogramme ayant trois sommets donnés. Si (A,B,C,D) est un parallèlogramme, si O est le milieu de (A,C) $D = S_o(B)$.



<u>Prop.2</u> : Soit (A,B,C,D) un parallèlogramme, I le milieu de (B,C), J le milieu de (A,D).
IJ est la droite parallèle à AB passant par O.

Soit Δ la droite parallèle à AB passant par O, d'après 9.Prop.4, I et J sont deux points de Δ.

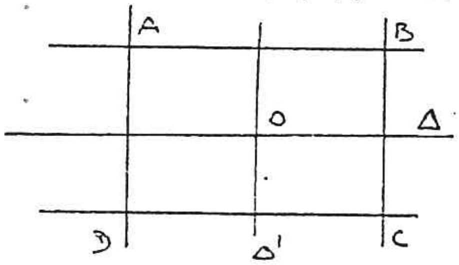
<u>Rq 1</u> : O est le milieu de (I,J). En effet, S_o transforme le milieu I de (B,C) en le milieu J de (D,A).

11. RECTANGLE, TRIANGLE RECTANGLE, LOSANGE, CARRE.

Prop.1 : Soit (A,B,C,D) un quadrilatère. Il y a équivalence entre :
R1 : AB est orthogonale à BC, BC est orthogonale à CD, CD est orthogonale à AD.
R2 : (A,B,C,D) est un parallèlogramme et AB est orthogonale à BC.
R3 : (A,B,C,D) est un parallèlogramme et d(A,C) = d(B,D).

R1 $\Longrightarrow$ R2 : AB est orthogonale à BC et CD est orthogonale à BC : AB et CD sont parallèles. De même BC est orthogonale à CD et AD est orthogonale à CD : BC et AD sont parallèles.

Dans la suite, Δ désigne la droite passant par le milieu de (B,C) et celui de (A,D), Δ' la droite passant par le milieu de (A,B) et celui de (C,D), O le centre de (A,B,C,D).



R2 $\Longrightarrow$ R3 : Δ est parallèle à AB, donc perpendiculaire à BC et AD : Δ est la médiatrice de (B,C) et (A,D). De même Δ' est la médiatrice de (A,B) et (C,D). O est un point de Δ et Δ', donc :

$$d(O,B) = d(O,A) = d(O,D) = d(O,C)$$

d'autre part O est le milieu de (A,C) et (B,D), donc :

$$d(A,C) = 2d(A,O) = 2d(O,D) = d(B,D).$$

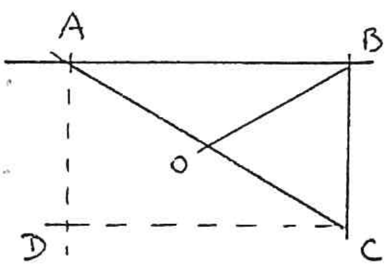
R3 $\Longrightarrow$ R1 : On a d(O,B) = d(O,A), Δ' est donc la médiatrice de (A,B), BC étant parallèle à Δ', BC est orthogonale à AB (et AD est aussi orthogonale à AB). AB étant parallèle à DC : DC est orthogonale à BC et à AD.

Déf.1 : Si (A,B,C,D) vérifie une de ces propriétés, on dira que c'est un rectangle.

Rq 1 : Dans ce cas S_Δ et $S_{\Delta'}$ conserve l'ensemble $\{A,B,C,D\}$.

Déf.2 : Soit (A,B,C) un triangle. On dit que c'est un triangl rectangle en B, si AB est orthogonale à BC.

Prop.2 : Soit (A,B,C) un triangle, O le milieu de (A,C). Il y a équivalence entre :

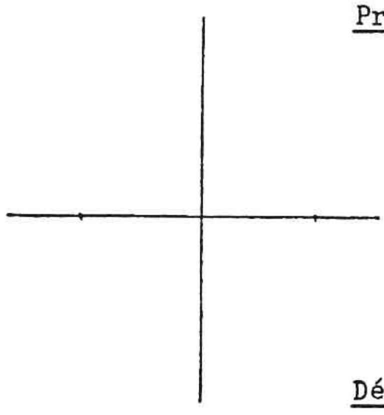


TR1 : (A,B,C) est un triangle rectangle en B.
TR2 : d (A,C) = 2 d (B,O)

TR1 $\Longrightarrow$ TR2 : Soit D = S_O(B), d'après R2 (A,B,C,D) est un rectangle donc d (A,C) = d (B,D) = 2 d (B,O).

TR2 $\Longrightarrow$ TR1 : Soit D = S_O(B), (A,B,C,D) est un parallèlogramme et d (B,D) = 2 d (B,O) = d (A,C). C'est un rectangle d'après R3. AB est orthogonale à BC.

Vocabulaire : [A,C] s'appelle l'hypothénuse du triangle rectangle (A,B,C).



Prop/3 : Soit (A,B,C,D) un parallèlogramme. Il y a équivalence entre :

L1 : d (A,B) = d (B,C)
L2 : AC et BD sont orthogonales .

L1 $\Longrightarrow$ L2 : on a d (A,B) = d (B,C) et d'après P_3, d (A,D) = d (C,D). B et D sont deux points de la médiatrice de (A,C). BD est orthogonale à AC.

L2 $\Longrightarrow$ L1 : BD passe par O le milieu de (A,C), BD est la médiatrice de (A,C) ainsi d(A,B) = d (B,C)

Déf.3 :

Déf.3 : Si un parallèlogramme vérifie une des propriétés précédentes, on dira que c'est un losange.

Rq 1 : Si (A,B,C,D) est un losange, S_{AC} et S_{BD} conservent $\{A,B,C,D\}$.

Déf.4 : Si un parallèlogramme est un rectangle et un losange, on dit que c'est un carré.

Rq : Si f est une isométrie, elle conserve l'orthogonalité : elle transforme donc un rectangle en un rectangle, un triangle rectangle en un triangle rectangle, un losange en un losange et un carré en un carré.

Existence de ces "êtres" :

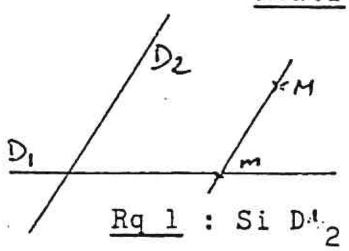
Triangle rectangle : on considère deux droites Δ et Δ' orthogonales, se coupant en un point B. On prend alors un point A sur Δ distinct de B et un point C sur Δ' distinct de B.
Le triangle (A,B,C) est rectangle en B.

Rectangle : on considère un triangle rectangle en B (A,B,C). Si O est le milieu de (A,C), on prend $D = S_o(B)$. (A,B,C) est un rectangle.

Losange : Soit deux points B et D, Δ la médiatrice de (B,D) coupant [B,D] en O. On considère un point A de Δ distinct de O et $C \doteq S_o(A)$. (A,B,C,D) est un losange.

Carré : Il suffit de reprendre la construction précédente en choisissant un point A de Δ tel que d (O,A) = d (O,B).

12 - PROJECTION.



Déf.1 : Soit D_1 et D_2, deux droites se coupant en un point. Si M est un point de P, il existe une seule droite passant par M parallèle à D_2. Cette droite coupe D_1 en un point m. On définit ainsi une application p : P ---> P
$\forall M \in P$ p (M) = m, que l'on appelle projection sur D_1 parallèlement à D_2.

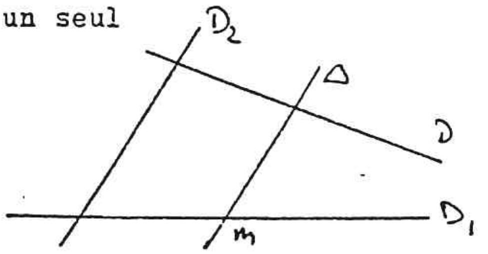
Rq 1 : Si D'_2 est parallèle à D_2, on obtient la même application.

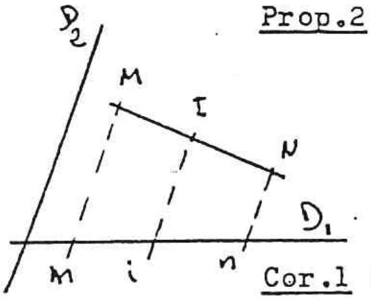
Rq 2 : Si D_2 est orthogonale à D_1, on obtient la projection orthogonale sur D_1.

Prop.1 : Soit D une droite de P.
1) Si D est parallèle à D_2 :
$p(D) = \{m\}$ où m = p (M), M étant un point de D.
2) Si D est non parallèle à D_2 :
$q : D \dashrightarrow D_1 \quad \forall M \in D \quad q(M) = p(M)$ est une bijection.

1) Pour tout point M de D, p (M) est le point d'intersection de D et de D_1 d'où $p(D) = D \cap D_1$.

2) Soit m un point de D_1 : p (M) = m si et seulement si M est un point de Δ la parallèle à D_2 passant par m. Comme $D \cap \Delta$ est réduit à un point, il existe un seul point M de D tel que q (M) = m.



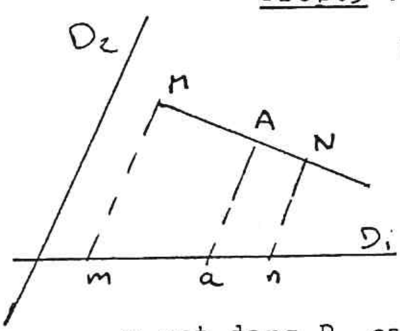


<u>Prop.2</u> : p conserve le milieu.

Soit M et N des points de P, Δ la parallèle à D_2 passant par M, Δ' la parallèle à D_2 passant par N. Si I est le milieu de (M,N), la parallèle à D_2 passant par I coupe $[m,n]$ au milieu de (m,n) (9.Prop.4).

<u>Cor.1</u> : Soit (A,B,C,D) un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati.
(P (A), P (B), P (C), P (D)) est un parallèlogramme aplati.

(A,C) et (B,D) ont même milieu O, P (O) est le milieu de (P (A), P (C))et de (P (B), P (D)).



<u>Prop.3</u> : Soit (M,N) un couple de points de P.

$$p([M,N]) = [p(M), p(N)].$$

Soit $M \neq N$ et MN non parallèle à D_2.

a) $p([M,N]) \subset [p(M), p(N)]$:

Soit A un point de $[M,N]$ et P (A) = a
P_1 le demi-plan déterminé par A a contenant N
P_2 le demi-plan déterminé par Aa contenant M

n est dans P_1 car Nn ne coupe pas Aa, m est dans P_2 car Mm ne coupe pas Aa : $[m,n]$ coupe donc Aa en a.

b) $[p(M), p(N)] \subset p([M,N])$:

Soit a un point de $[m,n]$, soit A le point de l'intersection de la droite MN avec la parallèle à D_2 passant par a. Considérons P_1 le demi-plan déterminé par Aa contenant n et P_2 celui contenant m. N est dans P_1 car N_n ne coupe pas Aa, de même M est dans P_2 car Mm ne coupe pas Aa. $[M,N]$ coupe donc Aa en A.
Si M = N ou si MN est parallèle à D_2 : $p([M,N]) = \{p(M)\} = [p(M), p(N)]$

13. <u>LE THEOREME DE THALES</u>.

<u>Prop.1</u> : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective telle que :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \quad f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ ou $[f(y), f(x)]$.

Il existe un couple de réels (a,b) ou a est non nul, tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - f(o)$. g est injective.
g vérifie 1) et 2) et de plus $g(o) = 0$

a) g est un morphisme de groupes :

En utilisant 1) avec y = 0 : $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{2}$ d'où $g(2x) = 2g(x)$

et $g(x+y) = g\left(\frac{2x+2y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(2x) + g(2y)) = g(x) + g(y)$.

b) $\forall r \in \mathbb{Q} \quad g(r) = ar$ où $a = g(1)$.
g étant un morphisme de groupe, l'on démontre que par récurrence sur n que :

$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad g(nx) = ng(x)$
puis que : $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall p \in \mathbb{Z} \quad g(px) = pg(x)$

On a alors : $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad g\left(\frac{1}{q}\right) = a\,\frac{1}{q}$.

et enfin : $\forall q \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{Z} \quad g\left(\frac{p}{q}\right) = p.g\left(\frac{1}{q}\right) = a.\frac{p}{q}$

g étant injective, on remarque que $a \neq 0$.

c) g est strictement monotone.

Supposons que $a = g(1) > 0 = g(0)$ et montrons que g est strictement croissante.

Soit $x > 0$. Montrons que $g(x) > 0$.

g étant injective, $g(x) \neq 0$.

Si $0 < x \leqslant 1$: $g(x) \in g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [0,a]$ d'où $0 < g(x)$

Si $1 < x$: $g(1) = a \in g([0,x])$ on ne peut avoir $g([0,x]) = [g(x), 0]$ car $a > 0$

d'où $g([0,x]) = [0, g(x)]$ et $0 < g(x)$.

Soit $x < y$: $y = x + h$ où $h > 0$.

$g(y) = g(x) + g(h) > g(x)$ car $g(h) > 0$

Ainsi, si $a > 0$, g est strictement croissante. On obtient de même que lorsque $a < 0$, g est strictement décroissante.

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = ax$

Supposons que $a > 0$

Soit x un nombre réel et r, r' deux éléments de $\mathbb{Q}$ tels que : $r \leqslant x \leqslant r'$

On a : $g(r) \leqslant g(x) \leqslant g(r')$ d'où $ar \leqslant g(x) \leqslant ar'$

d'autre part comme $a > 0$: $ar \leqslant ax \leqslant ar'$

On obtient alors : $|g(x) - ax| \leqslant a(r' - r)$

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$: $g(x) = ax$.

e) Conclusion :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(x) - f(0) = ax$

En posant $b = f(0)$, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$.

<u>Rq 1</u> : On peut alléger cette démonstration a) et b) en sachant que l'ensemble des dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

<u>Prop.2</u> : Soit D une droite de P
p la projection sur D_1 selon D_2
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux isométries.
Il existe un couple de réels (a,b) tel que :
$\forall M \in D \quad g(p(M)) = a f(M) + b$
C'est-à-dire que si M est un point de D d'abscisse x, l'abscisse x' de p (M) sera $x' = ax + b$.

a) Si D est parallèle à D_2 :

p (M) est indépendant de M, donc : $\forall M \in D \quad g(p(M)) = b$.

b) Si D est non parallèle à D_2 :

l'application $q : D \to D_1 \quad \forall M \in D \quad q(M) = p(M)$ est une bijection (12.Prop.1) qui transforme un segment $[A,B]$ de D en un segment $[q(A), q(B)]$ de D_1 et qui conserve le milieu.

L'application $h = g_o q_o f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, conserve le milieu et transforme un segment $[a,b]$ en un segment de bornes h (a), h (b), car f^{-1} q et g possèdent ces trois propriétés. Il en résulte (Prop.1) que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = ax + b$.

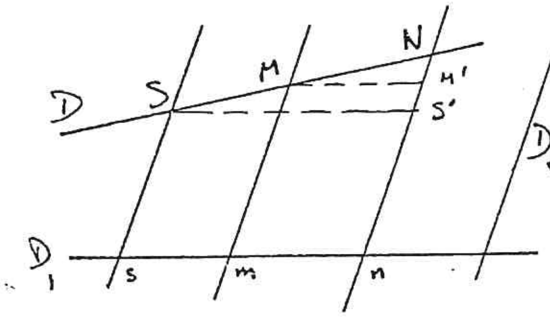
d'où $\forall M \in D \quad (g_o q_o f^{-1})(f(M)) = g(p(M)) = a\,f(M) + b$.

<u>Prop.3</u> : Soit D et D_1 deux droites orientées. Il existe un réel a tel que : $\forall\ M,N \in D \quad \overline{p(N)\ p(M)} = a\ \overline{NM}$

Soit D orientée par f et D_1 orientée par g : $\forall X \in D \quad g(p(X)) = a\ f(X)+b$
d'où : $\overline{p(N)\ p(M)} = g(p(M)) - g(p(N)) = a(f(M) - f(N)) = a\ \overline{MN}$

<u>Rq 1</u> : Si D et D_1 sont orientées, le a de la propriété 2 est indépendant du choix de f et de g à l'intérieur d'une même classe d'orientation. Si on change l'orientation d'une des droites, a est changé en $-a$. D'une manière générale, $|a|$ est invariant.

<u>Rq 2</u> : Si D et D_1 sont parallèles, $d(M,N) = d(p(M), p(N))$ donc $a = \pm 1$



<u>Prop.4</u> : Soit D et D_1 deux droites orientées.
S,M,N, trois points de D, s, m, n leurs projections sur D_1 suivant une droite D_2.
Si $\overline{SM} = \lambda . \overline{SN}$
1) $\overline{sm} = \lambda . \overline{sn}$
2) on peut orienter les droites concernées de manière à ce que :
$\overline{mM} = (1 - \lambda)\ \overline{sS} + \lambda\ \overline{nN}$
3) Si S appartient à D_1 : $\overline{mM} = \lambda\ \overline{nN}$.

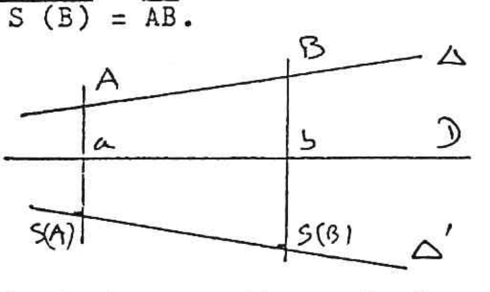
1) D'après la propriété 3 : $\overline{sm} = a\ \overline{SM}$ et $\overline{sn} = a\ \overline{SN}$
d'où : $\lambda\ \overline{sn} = a\ \lambda\ \overline{SN} = a\ \overline{SM} = \overline{sm}$

2) Soit Δ la parallèle à D_2 passant par N.
On considère p' la projection sur Δ selon D_1 : $M' = p'(M)$, $S' = p'(S)$
On peut orienter les parallèles à D_2 passant par S et M, de sorte que :
$\overline{sS} = \overline{nS'}$ et $\overline{mM} = \overline{nM'}$
D'après le 1) : $\overline{S'M'} = \lambda\ \overline{S'N}$
d'où : $\overline{mM} = \overline{nM'} = \overline{nS'} + \overline{S'M'} = \overline{sS} + \lambda\ \overline{S'N} = \overline{sS} + \lambda\ (\overline{s'n} + \overline{nN}) =$
$(1 - \lambda)\ \overline{sS} + \lambda\ \overline{nN}$.

3) Si S appartient à D_1 : $s = S$ d'où $\overline{mM} = \lambda\ \overline{nN}$.

<u>Prop.5</u> : Soit S la symétrie orthogonale par rapport à une droite D.
Soit Δ une droite et $\Delta' = S(\Delta)$.
On peut orienter Δ et Δ' de manière à ce que :
$$\forall A,B \in \Delta \qquad \overline{S(A)\ S(B)} = \overline{AB}$$

1) Si Δ est perpendiculaire à D : Soit O le point d'intersection de D et Δ. On a : $S_{/\Delta} = {}_O$. Si l'on oriente Δ et $\Delta' = \Delta$ de la même manière : $\overline{S(A)\ S(B)} = -x_B + x_A = -\overline{AB}$. En orientant Δ et Δ' de manière inverse, on obtient donc : $\overline{S(A)\ S(B)} = \overline{AB}$.



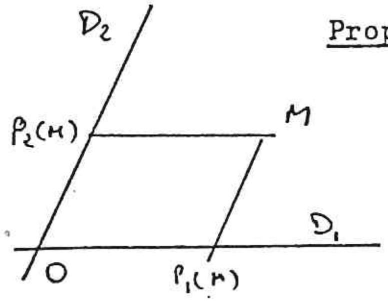
2) Si Δ n'est pas perpendiculaire à D :
On note a, b, les projections orthogonales de A et B sur D.
On oriente Δ, Δ' et D. On a :
$\overline{ab} = \alpha\ \overline{AB}$, $\overline{ab} = \beta .\ \overline{S(A)\ S(B)}$
Comme : $|\overline{AB}| = |\overline{S(A)\ S(B)}|$ on en déduit que $|\alpha| = |\beta|$. En changeant au besoin l'orientation de Δ' : $\alpha = \beta$. Comme Δ n'est pas orthogonale à D : $\alpha \neq 0$. D'où $\overline{AB} = \overline{S(A)\ S(B)}$.

Prop.6 : Soit f une isométrie de P.
Soit $\triangle$ une droite de P, $\triangle' = f(\triangle)$.
On peut orienter $\triangle$ et $\triangle'$ de manière à ce que :

$$\forall A, B \in P \quad \overline{f(A)\, f(B)} = \overline{AB}$$

C'est une conséquence de la propriété 5 et du fait que toute isométrie de P est produit de symétries orthogonales.

14. REPERES.



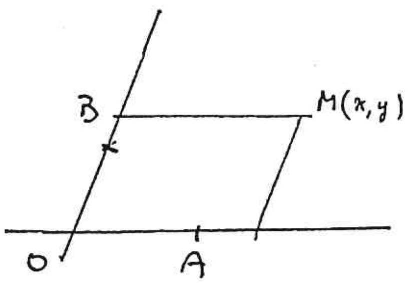
Prop.1 : Soit D_1 et D_2 deux droites se coupant en un point O.
p_1 la projection sur D_1 selon D_2,
p_2 la projection sur D_2 selon D_1.
L'application $F : P \longrightarrow D_1 \times D_2$ $\forall M \in P$ $F(M) \doteq (p_1(M), p_2(M))$
est bijective.

Soit (A,B) un élément de $D_1 \times D_2$.
Si $p_1(M) = A$, le point M est situé sur la parallèle à D_2 passant par A.
Si $p_2(M) = B$, le point M est situé sur la parallèle à D_1 passant par B.
Ainsi $F(M) = (A,B)$ si et seulement si M est le point d'intersection de ces deux droites.

Si D est une droite de P, O et A deux points de D, il existe une seule isométrie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(O) = 0$ et $f(A) = d(O,A)$ (isométrie associée à (O,A)).
A cette isométrie, on associe une application $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$\forall M \in D \qquad h(M) = \frac{1}{d(O,A)} \; f(M)$.
On dira que h est la mesure associée au couple (O,A).
On remarque que h est bijective et que : $h(O) = 0$ et $h(A) = 1$

Déf.1 : Un repère de P est un triplet R = (O,A,B) de points non alignés. On dit que O est l'origine du repère. La droite OA est l'axe de ces abscisses, la droite OB l'axe des ordonnées.

Rq 1 : Si $d(O,A) = d(O,B) = 1$, on dit que R est un repère normé.
Si OA et OB sont orthogonales, R est dit orthogonal.
Si R est orthogonal et normé, R est dit orthonormé.



Prop.2 : Soit R = (O,A,B) un repère de P.
p_1 la projection sur OA selon OB
p_2 la projection sur OB selon OA
h_1 la mesure associée à (O,A)
h_2 la mesure associée à (O,B)
L'application $C : P \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\forall M \in P$ $C(M) = (h_1(p_1(M)), h_2(p_2(M)))$ est une bijection.
On dira que C (M) est le couple des coordonnées de M dans le repère R.
Si C (M) = (x,y), on notera : M (x,y).

En considérant $D_1 = OA$ et $D_2 = OB$, C est la composée de l'application F et de l'application $K : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\forall (M,N) \in D_1 \times D_2$
$K(M,N) = (h_1(M), h_2(N))$ qui est bijective. C est donc une bijection.

Rc 2 : $C(O) = (0,0)$ $\quad C(A) = (1,0)$ $\quad C(B) = (0,1)$.
Orientons OA et OB de façon à ce que les isométries associées à (O,A) et (O,B) soient positives :

$\forall\, M,N \in P \quad \overline{p_1(M)\ p_1(N)} = a\,\overline{MN}\ ;\ \overline{p_2(M)\ p_2(N)} = b\,\overline{MN}$

Soit $C(M) = (x_M, y_M) \quad C(N) = (x_N, y_N) \quad \alpha = d(O,A) \quad \beta = d(O,B)$.

$\overline{p_1(M)\ p_1(N)} = f_1(p_1(M)) - f_1(p_1(N)) = \alpha\,(x_N - x_M)$ et $\overline{p_2(M)\ p_2(N)} = \beta(y_N - y_M)$

En posant $k = \dfrac{a}{\alpha}$, $\ell = \dfrac{b}{\beta}$, on obtient :

$\forall\, M,N \in P \quad x_N - x_M = k\,\overline{MN} \quad y_N - y_M = \ell\,\overline{MN}$

On obtient alors :

Prop.3 : Soit D une droite orientée de P.
M,N,I appartenant à D et tels que $\overline{MN} = \lambda\,\overline{MI}$
Soit R un repère :

$$x_N - x_M = \lambda\,(x_I - x_M)$$
$$y_N - y_M = \lambda\,(y_I - y_M)$$

$x_N - x_M = k\,\overline{MN} = \lambda k\,\overline{MI} = \lambda\,(x_I - x_M)$ et l'on procède de même pour les ordonnées.

Cor.1 : Si I est le milieu de (M,N)

$$x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_M + y_N)$$

Dans ce cas $\lambda = 2$: $x_N - x_M = 2\,(x_I - x_M)$ d'où $x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N)$

de même : $y_I = \frac{1}{2}(y_M + y_N)$.

Cor.2 : Soit R un repère, I (a,b) un point de P, S_I la symétrie centrale par rapport à I.
Soit M (x,y). On a $S_I(M)\ (2a - x,\ 2b - y)$.

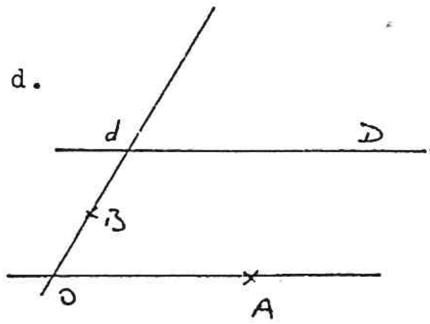
En effet, soit $S_I(M)\ (x',y')$. I est le milieu de $(M, S_I(M))$, d'où :

$ax = \frac{1}{2}(x + x')$ et $b = \frac{1}{2}(y + y')$.

15. EQUATIONS D'UNE DROITE DANS UN REPERE.

Soit R = (O,A,B) un repère de P.
Soit D une droite de P parallèle à OB, D coupe OA en d.
~~Et~~ : $(M \in D) \Longleftrightarrow (p_2(M) = d)$

D'où : $(M \in D) \Longleftrightarrow (h_2\,(p_2\,(M)) = h_2\,(d)$



Si (x,y) désigne le couple des coordonnées de M dans le repère R, on obtient :
$(M \in D) \Longleftrightarrow (y = h_2\,(d))$

On dit alors que "$y = h_2\,(d)$" est une équation de D.

Ainsi toute droite D est parallèle à OA si et seulement si elle a une équation de la forme "$y = y_0$"

De même toute droite D est parallèle à OB si et seulement si elle a une équation de la forme "$x = x_0$".

<u>Prop.1</u> : Soit $R = (O,U,V)$ un repère de P.
1) Soit D une droite de P. Il existe a,b non tous nuls, et c tels que :
$$D = \{ M\ (x,y)\ ;\ ax + by + C = 0 \}$$
2) Soit a, b et c tels que a et b sont non tous nuls :
$$\Delta = \{ M\ (x,y)\ ;\ ax + by + C = 0\}\ \text{est une droite.}$$

1) Soit D une droite déterminée par les points $A\ (x_A, y_A)$ et $B\ (x_B, y_B)$

Orientons D, si $M\ (x,y)$ est <u>un</u> point de D :
$x - x_A = k\ \overline{AM}$, $x_B - x_A = k\ \overline{AB}$, $y - y_A = \ell\ \overline{AM}$, $y_B - y_A = \ell\ \overline{AB}$
d'où : $(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A) = k\ell\ \overline{AB}.\ \overline{AM}$
Posons : $a = y_B - y_A$; $b = -(x_B - x_A)$; $C = -x_Ay_B + x_By_A$
On a : $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ car $A \neq B$.
Et : $ax + by + C = 0$.
Soit $M\ (x_o,y_o)$ tel que $ax_o + by_o + C = 0$
Supposons que $b \neq 0$: $y_o = -\frac{a}{b} x_o - \frac{c}{b}$

Comme $b = -(x_B - x_A) \neq 0$, la droite D n'est pas parallèle à OV, soit alors la droite d'équation "$x = x_o$". Elle coupe D en un point $X\ (x_o,y)$ où $y = -\frac{a}{b}\ x_o - \frac{c}{b} = y_o$, ainsi $X = M$ et donc $M\ (x_o, y_o)$ est un point de D.

2) Supposons que $a \neq 0$, les points $A\ (-\frac{c}{a},0)$ et $B(\frac{-b-c}{a}, 1)$ sont deux points de Δ.
D'après le 1), la droite AB a pour équation : $x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0$
d'où $\Delta = AB$.

<u>Rq 1</u> : $A\ (x_A, y_A)$, $B\ (x_B, y_B)$ et $M\ (x,y)$ sont alignés si et seulement si :
$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A).$$

<u>Prop.2</u> : Soit R un repère de P.
D une droite d'équation : $ax + by + C = 0$
D' une droite d'équation : $a'x + b'y + C' = 0$
1) $(D /\!/ D') \Longleftrightarrow (ab' - ba' = 0) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}^*\ (a'b') = (\lambda a, \lambda b))$
2) $(D = D') \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}^*\ (a',b',c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c))$

<u>Remarque préliminaire</u> : Soit α et β non tous nuls. On a :
$$(\alpha x + \beta y = 0) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in R\ (x,y) = (\lambda\beta, -\lambda\alpha))$$

1°) On remarque que D est parallèle à la droite d'équation $ax + by = 0$. en effet, le système : $ax + by + C = 0$, $ax + by=0$ ne possède soit aucune solution $(C \neq 0)$, soit les couples (x,y) tels que $M\ (x,y)$ soit un point de D. Dire que D et D' sont parallèles équivaut à dire que les droites d'équations : $ax + by = 0$ et $a'x + b'y = 0$ le sont, on encore dire qu'elles sont égales car ces deux droites contiennent le point $O\ (o,o)$. Le point de coordonnées $(b', -a')$ est un point de la deuxième droite, distinct de O. Dire que $ab' + b(-a') = 0$ équivaut à dire que ces deux droites possèdent deux points communs ou encore qu'elles sont égales.
La deuxième équivalence découle de la remarque préliminaire.

2°) Dire que $D = D'$ équivaut à dire que D est parallèle à D' et que le système : $ax + by + C = 0$, $a'x + b'y + C' = 0$ possède au moins une solution, c'est-à-dire que le système : $ax + by = - C$, $ax + by = - \frac{C'}{\lambda}$ en possède au moins une, ce qui est équivalent à $C' = \lambda C$.

16. LE GROUPE DES TRANSLATIONS $\mathcal{E}(E)$.

Prop.1 : Soit $T : P \longrightarrow P$ il y a équivalence entre :

(T1) $T = S_{D'} \circ S_D$ D' et D étant parallèles.

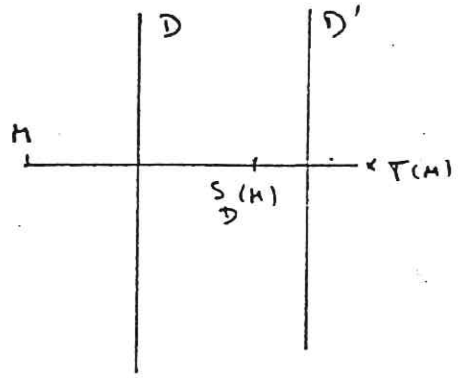
(T2) $T = Id_P$ ou T est une isométrie sans point fixe transformant toute droite en une droite parallèle.

(T3) $\forall M,N \in P$ $(M,T(M), T(N),N)$ est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati.

(T4) $\exists A,B \in P$ $\forall N \in P$ $(A,B,T(N), N)$ est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati.

T1 $\Longrightarrow$ T2 : Si T possède un point fixe M : $T(M) = M$, d'où $S_D(M) = S_{D'}(M) = M'$
Si M' est distinct de M : $D = D'$ (8.2.Prop.2), si $M' = M$, M est un point commun de D et D' qui sont parallèles, d'où $D = D'$. Ainsi $T = S_D \circ S_D = Id_P$.

Supposons maintenant que T soit distincte de Id_P.
Considérons un point M de P et montrons que : a) $MT(M)$ est perpendiculaire à D et D'.
En effet, $S_D(M)$ est sur la perpendiculaire à D issue de M et $T(M) = S_{D'}(S_D(M))$ est sur la perpendiculaire à D' (et à D) issue de $S_D(M)$. Les points M, $S_D(M)$, $T(M)$ sont alignés, $MT(M)$ est donc perpendiculaire à D et D'.

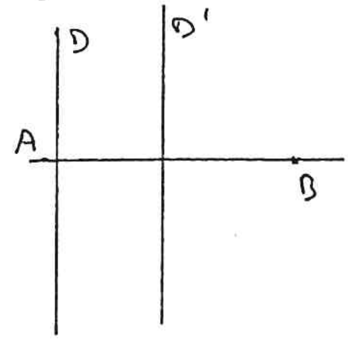


b) Soit Δ une droite de P, $T(\Delta)$ est parallèle à Δ :/
Si $\Delta \cap T(\Delta)$ est non vide, on a un point M de Δ tel que $T(M)$ appartienne à Δ, ainsi $\Delta = MT(M)$ et d'après ce que l'on vient de voir, est perpendiculaire à D et à D', d'où :
$T(\Delta) = S_{D'}(S_D(\Delta)) = S_{D'}(\Delta) = \Delta$.

T2 $\Longrightarrow$ T3 : Si $T = Id_P$: (N, M, N, N) est un parallèlogramme aplati.
Si $T \neq Id_P$: soit $\Delta = MT(M)$, on a $T(\Delta) = T(M)\,T^2(M)$ qui est une droite parallèle à Δ. Si N est un point de Δ : $t = T_{/\Delta}$ est une isométrie de Δ sans point fixe, c'est une translation et $(M, t(M), t(N), N)$ est un parallèlogramme aplati (.4.3.Prop.3).
Si N n'est pas sur Δ : $T(M) \cdot T(N) = T(MN)$ est parallèle à MN. D'autre part, Δ et $\Delta' = NT(N)$ sont invariantes par T; si Δ et Δ' n'étaient pas parallèles, elles se couperaient en un point fixe de T, ce qui est absurde. Ainsi $MT(M)$ et $NT(N)$ sont parallèles d'après 10.Prop.1 P1 : $(M, T(M), T(N), N)$ est un parallèlogramme.

T3 $\Longrightarrow$ T4 : Il suffit de prendre un point A quelconque et $B = T(A)$.

T4 ==> T1 : Si A = B (A,A,T(N),N) est nécessairement un parallèlogramme aplati, et dans ce cas : T(N) = N. Donc si A = B : T = Id_P.



Si A $\neq$ B soit D la perpendiculaire en A à AB et D' la médiatrice de (A,B). Soit T' = $S_{D'} o S_D$. On a :

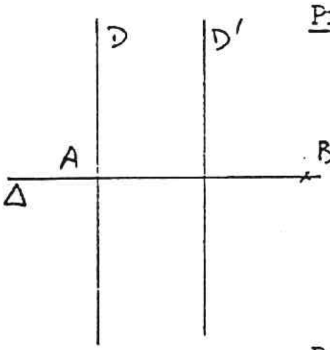
T' (A) = B et puisque T1 ==> T3 : (A,B,T'(N),N) est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati d'après 4.3.Déf.2,Rq.1 et 10,Déf.1,Rq.4 T'(N) = T (N). Ainsi, T = T' = $S_{D'} o S_D$.

<u>Déf.1</u> : Si T vérifie une de ces propriétés, on dira que T est une translation.

<u>Rq 1</u> : Si T = $S_{D'} o S_D$ où D et D' sont strictement parallèles, les seules droites invariantes par T sont les perpendiculaires à D et D'.

<u>Rq 2</u> : Si Δ est une telle droite, $T/_{\Delta}$ est une translation.

<u>Rq 3</u> : Soit A et B deux points de P. Il existe une seule translation T telle que T (A) = B (T4 ==> T1).

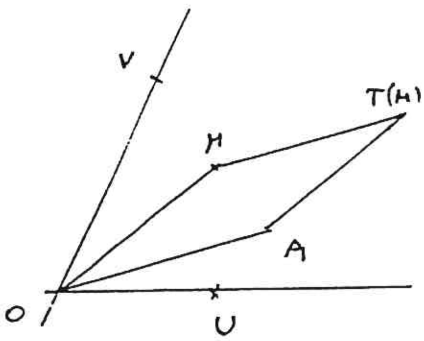


<u>Prop.2</u> : Soit T une translation distincte de Id_P.
Soit Δ une droite invariante par T (de la forme UT(U)).
Si D est une droite de P perpendiculaire à Δ , il existe une droite unique D', telle que $S_{D'} o S_D$ = T.

Soit A le point d'intersection de D et Δ et B = T(A), d'après la propriété 1 (T4 ==> T1). Si D' est la médiatrice de (A,B) : T = $S_{D'} o S_D$.

Il y a unicité de cette droite car : $S_{D'}$ = $T o S_D$.

<u>Rq 1</u> : De même si l'on se donne une droite D' perpendiculaire à Δ il existe une seule droite D telle que T = $S_{D'} o S_D$.



<u>Prop.3</u> : Soit R = (O,U,V) un repère de P, A (a,b).
Si T est la translation telle que T (O) = A,
Pour tout point M (x,y) de P on a T (M) (x + a, y + b).

(O,A,T (M),M) est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati. Il se projette sur OU selon OV en un parallèlogramme aplati : (o,a,x',x) est un parallèlogramme aplati, x' désignant la première coordonnée de T (M) :
x' - a = x - O, d'où x' = x + a.

Il se projette sur OV selon OU en un parallèlogramme aplati : (o,b,y',y) est un parallèlogramme aplati, y' désignant la seconde coordonnée de T (M) :
y' - b = y - O, d'où y' = y + b.

<u>Cor.1</u> : Soit T : P ---> P telle que si M (x,y) on a T (M)(x+a, y+b) T est la translation telle que T (O) = A où A (a,b).

Pour tout point A (a,b), il existe une seule translation T', telle que T' (O) = A et d'après la propriété précédente, T' = T.

<u>Cor.2</u> : Soit X_o (xo,yo), X_1 (x1,y1) deux points de P.
T l'unique translation telle que T (X_o) = X_1
Si M (x,y) l'on a : T (M) (x + (x1 - xo), y +(y1 - yo)

On a : T (M) (x + a, y + b) et donc : x1 = xo + a, y1 = yo + b
d'où : a = x1 - xo, b = y1 - yo.

Cor.3 : Il y a équivalence entre :
1) (A,B,C,D) est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati.
2) $(x_C - x_B, y_C - y_B) = (x_D - x_A, y_D - y_A)$.

Soit T la translation transformant A en B.
2) équivaut à : $x_C = x_D + (x_B - x_A)$ et $y_C = y_D + (y_B - y_A)$
c'est-à-dire : C = T (D).

Prop.4 : ($\mathcal{C}$(P), 0) est un sous-groupe commutatif de Isom (P).

1) $\mathcal{C}$(P) est non vide car Id_P est une translation.
2) Si T est une translation $T = S_{D'} o S_D$ où D est parallèle à D'. On a alors $T^{-1} = S_D o S_{D'}$ qui est aussi une translation.
3) Soit T et T' deux translations, TOT' est une isométrie qui transforme toute droite en une droite parallèle. Si TOT' possède un point fixe M : $T'(M) = T^{-1}(M)$. Comme T^{-1} et T' sont deux translations : $T^{-1} = T'$ d'où TOT' = Id_P.
4) Soit M un point de P, T et T' deux translations : (M,T'(M),T'(T(M)),T(M)), (M, T(M), T (T'(M)), T'(M)) et (M, T'(M), T (T'(M)), T (M)) sont des parallèlogrammes ou des parallèlogrammes aplatis, en comparant le premier et le dernier on obtient que : T (T' (M)) = T' (T(M)). T et T' commutent.

Rq 1 : L'application H : $\mathcal{C}$ (P) --> $\mathbb{R}^2$. H (T) = (a,b) (Si T(O) = A, A (a,b)) est un isomorphisme de groupe. On peut se servir de cette remarque pour démontrer la propriété 4.

17. NOTION DE VECTEUR.

Prop.1 : La relation sur P XP définie par
$((A,B) \sim (A'B')) \Longleftrightarrow (\exists T \in \mathcal{C}(P), T(A) = B$ et $T(A') = B')$
est une relation d'équivalence.
Si (A,B) $\sim$ (A',B') on dira que ces bipoints sont équipollents.

1°) (A,B) $\sim$ (A,B) : il existe une translation T telle que T (A) = B.
2°) $[(A,B) \sim (A',B')] \Longrightarrow [(A',B') \sim (A,B)]$:
Soit T une translation telle que T (A) = B et T (A') = B' ,
on a (A',B') $\sim$ (A,B).
3°) $[(A,B) \sim (A',B')]$ et $[(A',B') \sim (A'',B'')] \Longrightarrow [(A,B) \sim (A'',B'')]$
Soit T et T' les deux translations telles que : T (A) = B, T (A') = B',
T' (A') = B', T' (A'') = B''.
On a T = T', d'où (A,B) $\sim$ (A'',B'').

Rq 1 : (A,B) $\sim$ (A',B') est équivalent à (A,B,B',A') est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati.

Déf.1 : Un vecteur est une classe d'équivalence de bipoints modulo $\sim$.
On note $\overrightarrow{AB}$ = cl ((A,B)).
L'ensemble des vecteurs $\vec{P}$ est la direction de P.

Prop.2 : Soit R un repère de P.

1°) $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}) \Longleftrightarrow ((x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_{B'} - x_{A'}, y_{B'} - y_{A'})$

2°) L'application $L : \vec{P} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$L(\overrightarrow{AB}) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ est une bijection.

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ si et seulement si (A,B,B',A') est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati. On utilise alors le Cor.3 du 1).

2) D'après 1°), l'application L est bien définie est injective.
Soit (a,b) un élément de R^2, A (a,b) l'on a : $L(\overrightarrow{OA}) = (a,b)$.

Rq 1 : Si $L(\overrightarrow{AB}) = (x,y)$, on dit que (x,y) sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère R.
Soit O un point de P, v un élément de $\vec{P}$. Il existe un seul point M tel que $\overrightarrow{OM} = v$. En effet, dire que $\overrightarrow{OM} = v$ équivaut à $L(\overrightarrow{OM}) = L(v) = (x,y)$: la seule solution est le point M (x,y).
On obtient aussi :

Cor.1 : Soit O un point de P l'application
$K : P \longrightarrow \vec{P}$ $K(M) = \overrightarrow{OM}$
est bijective.

Prop.3 : Soit O un point de P l'application
$F : \mathcal{T}(P) \longrightarrow \vec{P}$ $F(T) = \overrightarrow{OT(o)}$
est bijective.

Pour démontrer ceci on peut se servir de la propriété 2 et de la remarque 1 Prop.4 du 1).
Voici une démonstration directe :
Soit $\overrightarrow{AB}$ un élément de $\vec{P}$, $F(T) = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si T (A) = B. On conclut en se souvenant qu'il existe une seule translation T, telle que T (A) = B.

Cor.1 : L'application $F^{-1} : \vec{P} \longrightarrow \mathcal{T}(P)$, $F^{-1}(v) = T_v$ est une bijection. On dit que T_v est la translation de vecteur v.

Déf.2 : On définit $A : \vec{P} \times \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$ $A(u,v) = u + v$ par $T_{u+v} = T_u o T_v$.

Rq 1 : On transporte la loi O de $\mathcal{T}(P)$ en une loi + sur $\vec{P}$ au moyen de la bijection F.

Prop.4 : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ si et seulement si (O,A,C,B) est un parallèlogramme ou un parallèlogramme aplati.

Soit T la translation telle que T (O) = A et T' celle qui transforme O en B.
D'après la définition de l'addition C = T (T' (O)) = T (B).

Prop.5 : $(\vec{P}, +)$ est un groupe commutatif.
Cela résulte du fait que ($\mathcal{T}$ (P),O) est un groupe commutatif et de la définition de + dans $\vec{P}$.

Prop.6 : Soit R un repère
L est un isomorphisme de groupe entre $(\vec{P}, +)$ et $(\mathbb{R}^2, +)$

Il suffit de montrer que L (u + v) = L (u) + L (v).
Soit $u = \overrightarrow{OA}$,
Soit $v = \overrightarrow{OB}$,
Soit C tel que : $u + v = \overrightarrow{OC}$.
D'après la propriété 4 et le Cor.3, Prop.3 du 1) :
$(x_C - x_A, y_C - y_A) = (x_B - 0, y_B - 0)$ d'où : $(x_C, y_C) = (x_A + x_B, y_A + y_B)$.

TITRE : INTRODUCTION A LA GEOMETRIE METRIQUE PLANE

AUTEUR : Groupe de Troyes "GEOMETRIE" de l'IREM de Reims

NIVEAU : Pour les Enseignants des Premier et Second Cycles

DATE : Année scolaire 1980-1981

MOTS-CLE : spécialité GEOMETRIE METRIQUE PLANE
autres NOTIONS ELEMENTAIRES

RESUME : Exposé des notions élémentaires de géométrie métrique plane. Il ne s'agit pas d'un cours destiné aux élèves mais d'un "livre du maître".

ISBN 2-910076-07-5

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	35	20 F	Re 5