IREM de REIMS
Moulin de la Housse
BP 347
51062 REIMS CEDEX
Tel : 26 05 32 08

L'INTRODUCTION DES FRACTIONS

AU COURS MOYEN

2ème Edition
1989

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION

Ce qui a motivé la "recherche"

Conscients des problèmes que soulevait la notion d'opérateur à l'Ecole Elémentaire, les membres du groupe ont voulu étudier les problèmes d'ordre théorique et pédagogique qu'elle suscitait. Le constat étant établi que c'était, pour les maîtres concernés, plus un outil pédagogique que mathématique (dont les excès d'utilisation étaient sensibles), nous avons choisi de tenter d'insérer cette présentation dans une "progression" plus vaste. Si le thème général de l'étude est "les fractions", il est bien entendu que nous considérons que l'activité mathématique ne doit pas être cloisonnée par les objectifs divers qu'elle se fixe. C'est pourquoi le but de ce document est de montrer (s'il en est besoin) un certain nombre d'activités centrées sur le même noyau, de nombreux appendices pouvant bien sûr s'y accoler.

Les objectifs de la recherche

Ils sont purement expérimentaux. Nous avons écarté à priori les données épistémologiques du problème (il semble d'ailleurs, que l'introduction des rationnels au niveau de la quatrième ne pose pas de problème de cet ordre). Nous avons par contre adopté le principe qu'il est possible d'utiliser un outil qui n'a pas encore été construit rigoureusement. Dans ce but, les activités proposées peuvent très bien avoir des prolongements au niveau du cycle d'observation des collèges, de façon à familiariser l'enfant avec une écriture et opérer sur celle-ci.

Nous nous sommes donc proposés de recenser les diverses possibilités d'emploi des fractions et, grâce aux séquences réalisées, de voir s'il était possible de provoquer des liens entre ces différentes utilisations.

FRACTION ET ECRITURE FRACTIONNAIRE : ASPECTS THEORIQUES

1- Pour comprendre le problème posé par la signification éventuelle du mot fraction, il semble nécessaire de revenir à une construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$; cette construction sera éclairée par le rappel préalable d'une construction de $\mathbb{Z}$ à partir d'une partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, construction qui sous-tend l'introduction de $\mathbb{Z}$ en 6e - 5e.

2 - Une construction de $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers)

On connaît $\mathbb{N}$ (ensemble des naturels) ainsi que l'addition dans cet ensemble.

Dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ensemble des couples de naturels, on définit une relation qui sera notée $\mathcal{R}$ par :

"Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pour tout couple (c, d) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ signifie $a + d = b + c$"

ex : $(3,15) \mathcal{R} (0,12)$ car $3 + 12 = 15 + 0$

On vérifie que cette relation est réflexive, symétrique et transitive c'est-à-dire une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence d'un couple est l'ensemble des couples en relation avec celui-ci.

ex : $Cl\ (3,15) = \{(x,y)\ /\ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $(x, y) \mathcal{R} (3, 15)\}$

$(x, y) \mathcal{R} (3, 15)$ signifie $x + 15 = y + 3$ c'est-à-dire $x + 12 = y$

Les éléments de Cl (3, 15) sont les couples de la forme $(x, x + 12)$ $x \in \mathbb{N}$

ex : $Cl\ (7, 5) = \{(y + 2, y),\ y \in \mathbb{N}\}$

$Cl\ (6, 6) = \{(x, x),\ x \in \mathbb{N}\}$

On appelle chaque classe d'équivalence un ENTIER (ou entier relatif). Chacune d'elle contient un couple du type (x, o) ou (o, y). La classe contenant (x, o) est un entier dit positif qui sera noté entre autres $\overset{+}{x}$ ou $+x$

ex : $Cl\ (7, 5) = + 2$

La classe contenant (o, y) est un entier dit négatif qui sera noté entre autres $\overset{-}{y}$ ou $-y$

ex : $Cl\ (3, 15) = - 12$

remarque : $Cl\ (6, 6) = Cl\ (o, o) = +o = -o$

3 - $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$

L'ensemble des entiers n'aurait pas d'intérêt si l'on n'y définissait pas deux opérations nommées addition et multiplication.

(+) qu'appelle-t-on somme de deux entiers ?

Revenons à la somme de deux couples. Par définition la "somme" de deux couples (a, b) et (c, d) est le couple (a + c, b + d). On constate et on démontre qu'en choisissant (a, b) quelconque dans une classe Cl_1 fixée, (c, d) quelconque dans une classe Cl_2 fixée elle aussi, le couple "somme" appartient toujours à la même classe Cl_3. (On dit que la relation d'équivalence est compatible avec cette addition des couples.)

ex : La "somme" d'un couple quelconque de +2 et d'un couple quelconque de -4 est un couple de -2

La somme des entiers Cl_1 et Cl_2 est alors, par définition, l'entier Cl_3.

ex : $+2 \; (+) \; -4 = -2$

Des règles pratiques faisant intervenir signe et valeur absolue permettent des calculs n'utilisant plus de couples.

(+) qu'appelle-t-on produit de deux entiers ?

Par définition, le "produit" des couples (a, b) et (c, d) est le couple (ac + bd, ad + bc). On constate et on démontre une propriété analogue à la précédente : en choisissant (a, b) quelconque dans une classe Cl_1 fixée et (c, d) quelconque dans Cl_2 fixée, le couple "produit" appartient toujours à une même classe Cl_3.

ex : Le "produit" d'un couple quelconque de +3 et d'un couple quelconque de -7 est un couple de -21

Le produit des entiers Cl_1 et Cl_2 est, par définition Cl_3.

ex : $+3 \; (\times) \; -7 = -21$

Ici encore des règles pratiques sont dégagées.

4 - Une construction de $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels)

On connaît $\mathbb{Z}$ ainsi que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on définit une relation notée $\mathcal{S}$ par

"Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, pour tout couple (c, d) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$(a, b) \; \mathcal{S} \; (c, d)$ signifie $a \; (\times) \; d = b \; (\times) \; c$

ex : $(-3, 4) \; \mathcal{S} \; (15, -20)$ car $-3 \; (\times) \; -20 = 4 \; (\times) \; 15$

La relation est une relation d'équivalence

ex : $Cl\,(1, 2) = \{(x, y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ et } (x, y) \; \mathcal{S} \; (1, 2)\}$

$(x, y) \; \mathcal{S} \; (1, 2)$ signifie $x \; (\times) \; 2 = y \; (\times) \; 1$ c'est-à-dire $y = 2 \; (\times) \; x$

Les éléments de Cl (1, 2) sont les couples de la forme $(x, 2 \; (\times) \; x)$, $x \in \mathbb{Z}^*$

On appelle chaque classe un RATIONNEL. Il n'y a pas de notation spéciale pour chaque rationnel.

5 - Opération dans $\mathbb{Q}$

Comme $\mathbb{Z}$, on munit $\mathbb{Q}$ d'une addition et d'une multiplication en suivant le même principe.
La "somme" de deux couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, (a, b) et (c, d) est le couple (ad + bc, bd)
Leur "produit" est (ac, bd)
Comme précédemment, la relation d'équivalence $\mathcal{S}$ est compatible avec ces opérations sur les couples ce qui permet de définir la somme et le produit des rationnels.

6 - Quelques éclairages de la fraction

Un entier est donc un ensemble de couples. Mais qui aura l'idée de représenter +3 par Cl (150, 147) ou même (150, 147) ? Puisque l'on dispose d'une écriture spéciale pour la classe d'équivalence, on n'utilise pas de couple représentant.

Pour les rationnels, il n'en est pas de même.
Pour désigner un rationnel on peut utiliser un quelconque de ses représentants, c'est-à-dire un couple mais la confusion provient du fait que l'on ne distingue pas au niveau des écritures un couple de sa classe.

De par son écriture, la fraction semble être un couple, (a,b), $\frac{a}{b}$ ou a/b étant des moyens graphiques permettant, à partit de la paire $\{a, b\}$ de distinguer a de b. (Première composante du couple : numérateur ; deuxième : dénominateur). Mais alors, que doit signifier $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$? Que les écritures désignent le même couple c'est-à-dire a = c et b = d. Mais on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$!...
Si une fraction est un couple $\frac{1}{2} \mathcal{S} \frac{2}{4}$ est plus correct mais nous voici ramenés au coeur de la construction et l'idée de rationnel est perdue.

Pour lever cette difficulté, on PEUT considérer qu'une fraction ou plutôt, une ECRITURE FRACTIONNAIRE désigne la classe d'équivalence du couple numérateur-dénominateur.

ex : $\frac{1}{2}$ désigne la classe d'équivalence des couples du type (x, 2 x x) $x \in \mathbb{Z}^*$

$\frac{1}{2}$ est une écriture de rationnel.

Un rationnel a donc une infinité d'écritures fractionnaires et $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ se lit au niveau des signifiés ($\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ sont deux écritures du même rationnel).

Il n'y a d'ailleurs pas de contradiction avec une autre manière de considérer une fraction : écriture d'un quotient, $\frac{a}{b}$ désignant l'élément de $\mathbb{Q}$ dont le produit par b est égal à a.

Les équations dans Q bx = a et nbx = na $n \in \mathbb{Z}^*$ ayant le même ensemble de solutions, $\frac{a}{b}$ et $\frac{nb}{na}$ désignent le même élément de $\mathbb{Q}$.

Parmi les écritures fractionnaires, certaines sont privilégiées (lorsqu'elles existent pour un rationnel donné).

(+) Celles dont le dénominateur est 1 - le rationnel correspondant sera assimilé à un naturel ou à un entier ($\frac{2}{1} = 2$)

(+) Celles dont le dénominateur est une puissance de 10, le rationnel correspondant sera assimilé à un décimal (qui admet d'ailleurs un autre type d'écriture utilisant la virgule : $\frac{17}{100} = 0,17$).

(+) Celles dont numérateur et dénominateur sont premiers entre eux : les écritures irréductibles (une seule par rationnel).

(+) Pour deux rationnels, celles qui ont le même dénominateur (ce qui permet d'avoir rapidement une écriture fractionnaire du rationnel somme).

....

"Simplifier une fraction" devient "trouver une écriture fractionnaire du même rationnel utilisant des entiers plus proches de O."

"Multiplier une fraction par un entier" c'est multiplier le rationnel par cet entier, le produit ayant à son tour une écriture fractionnaire.

OBJECTIFS GENERAUX

Ils se placent dans le cadre de la démarche mathématique suivante :

1 Modélisation de situations familières (ou qu'on rend telles)

2 Comparaison des modèles obtenus pour en percevoir "l'isomorphisme"

3 Notion de structure

4 Etude de la structure

L'étude de la structure de $\mathbb{Q}$ n'étant pas précédée dans le premier cycle par les points 1 et 2, tout se passe comme si on priait pour que 4 soit suivi par 3, et tout le monde sait, dès le cours préparatoire, qu'il n'arrive jamais que le quatrième précède le troisième.

Nous formulons donc l'hypothèse suivante : "A l'école élémentaire, il s'agit de proposer des situations à modéliser, chacun comparant à son rythme ; et une façon de favoriser cette découverte d'isomorphisme est de multiplier les situations".

Si bien qu'aucune situation proposée ne peut être rejetée ; toutes sont bonnes, car nous restons persuadés que de nombreux (sinon tous) élèves de cours moyens restent accrochés à la situation d'origine, même s'ils donnent l'impression de travailler sur le modèle quand ils écrivent

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{5} < \frac{3}{7}$$

Rien ne permettant de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse dans notre expérience, nous nous contentons d'en narrer les grandes étapes, les réussites et les échecs (mais y en a-t-il eu ?) laissant à chacun faire son classement et son rangement.

Tout en expérimentant dans des classes diverses avec des points de départ différents, nous avons fait un tri quand cela était possible des séquences en fonction de l'aspect de la fraction que nous voulions introduire, étant bien entendu qu'aucun à notre sens n'est là privilégié.

Les différents aspects d'une fraction

L'idée de fraction à travers différentes situations (Mathématiques ou de la vie courante) peut présenter les aspects suivants.

1. "<u>Couple de deux nombres entiers</u>"

Ex : <u>les notes</u> "Eric a douze sur vingt en orthographe"

2. "<u>Aspect quotient</u>"

Ex 1 : "$\frac{96}{4} = 24$" quotient entier

Ex 2 : "$\frac{3}{4} = 0,75$" quotient décimal

Ex 3 : "$\frac{121}{6} \simeq 20$" ordre de grandeur .

"$\frac{121}{6} = 20,166....$" quotient décimal.

3. "<u>Aspect nombre rationnel</u>"

Ex : "$\frac{4}{6}$ est un des représentants de la classe d'équivalence qui définit le rationnel deux-tiers"
(voir chapitre théorique)

<u>Remarque</u> : La confusion entre nombre rationnel et fraction amène quelque fois à considérer la fraction comme étant un nouveau nombre. (point de vue souvent adopté à l'Ecole Elémentaire).

4. "<u>Aspect rapport</u>"

Ex : toutes les situations de proportionnalité.
Le rapport $\frac{1}{3}$ dans des engrenages...
Les proportions

5. "<u>Fraction et opérateurs</u>"

Ex : trois quart d'heure. (la fraction agit comme opérateur)

<u>Remarque</u> : La fraction $\frac{3}{4}$ agit comme opérateur sur une heure et $\frac{3}{4}$ apparaît dans l'écriture de l'opérateur multiplié par trois quarts.

6. "<u>Aspect langage courant</u>"

Ex : "une heure et demie"

7. "<u>Graphismes</u>"

Ex: $\frac{3}{4}$, 3/4 , 75 % ,.....

QUE PEUT-ON FAIRE A L'ECOLE ELEMENTAIRE ?

1. Les différents modes d'introduction

a) opérateur fractionnaire et fraction : le programme officiel

b) introduction de la notion de nombre rationnel avec ses règles d'écritures.

c) Privilégier les liens entre : fraction - mesure - partage.

2. Quelque soit le mode d'introduction choisi, il nous semble important :

- de ne pas négliger les liens : fraction - mesure - partage
- de ne pas rejeter les opérateurs fractionnaires
- de ne pas installer les enfants dans des techniques injustifiables dans l'immédiat.
- d'utiliser au maximum le langage courant pour obtenir des écritures mathématiques et inversement donner un éclairage mathématique à certaines expressions du langage courant.

Par ailleurs, il semble souhaitable de donner aux enfants des moyens de mieux maitriser la proportionnalité (éviter les mécanismes)

Ex : reconnaître a dans "3 x a = 4"

LES FRACTIONS DANS DES ACTIVITES DE MESURAGE

COMPTE RENDU DU TRAVAIL REALISE DANS DEUX COURS MOYENS DE CHAUMONT (HAUTE-MARNE)

1. Motivation de cette recherche

Le mode d'introduction actuellement proposé aux instituteurs par le programme et les commentaires officiels fait que :

. l'écriture fractionnaire apparaît dans la notation de l'opérateur fractionnaire avant même que de connaître la fraction.

. alors que l'enfant du C.M. ne connaît comme ensemble de nombres que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{D}^+$ des tableaux du type suivant :

$\times \frac{2}{3}$ $\quad$ $\times \frac{4}{5}$

8	.	.
12	.	.

(commentaires officiels Ex n° 10 p 28)

font en réalité apparaître des nouveaux nombres.

. la liaison entre fraction - mesure - partage est trop souvent laissée au second plan

. une confusion permanente existe entre fraction et opérateur fractionnaire.

2. Trois postulats de départ

. A l'école élémentaire les fractions peuvent être introduites avant les opérateurs fractionnaires.

. Dans cette optique les fractions sont directement et souvent liées à des activités de mesurage.

. On accepte l'idée que les fractions apparaissent comme de nouveaux nombres qu'on sera éventuellement amené à additionner et multiplier.
(l'aspect fractions égales passant au second plan)

Doit-on pour autant éliminer les opérateurs fractionnaires ?

Non, car ils nous seront utiles pour introduire la multiplication de deux fractions.
(et aussi, peut-être, pour dégager la notion de fractions égales).

Remarque : Ce nouveau mode d'introduction des fractions nous permettra plus facilement d'ordonner et d'additionner certaines fractions. (ce qui est actuellement exclus).

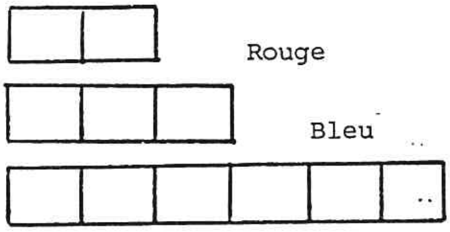
Trois séquences réalisées dans un CM_2 :

Ecole Jules Ferry

CM_2 - CHAUMONT

Instituteur : M. Robert GUILLEMIN

- L'idée est de faire mesurer des trains de cubes
- Le matériel est toujours le même :



Rouge "R"

Bleu "B"

Jaune "J"

- Les élèves de cette classe n'ont pas vu les fractions auparavant
- Les opérateurs fractionnaires n'ont pas été traités
- Dans un premier temps, chacun en est conscient, la difficulté tient à la notion de mesure et non à celle de fraction :

Exemple : J - mesure de B = $\frac{1}{2}$

J est l'unité de mesure

B est la barre mesurée

(distinction entre mesuré et mesurant)

I - Première séquence : 14 janvier 1978

Phase 1 - Travail de groupe à l'aide de cubes emboitables pour approcher les notions courantes de moitié, demi
tiers, triple
quart,...

Tous les groupes fabriquent 1 barre jaune à l'aide de 6 cubes
1 barre bleue à l'aide de 3 cubes
1 barre rouge à l'aide de 2 cubes.

Consigne : Observer la barre B et la barre J.

"La B est la moitié de la J. On dit aussi "demi"

A la demande du maître sont rescensées les autres expressions qui contiennent le mot "moitié" ou "demi" :

"Une moitié d'orange" "une demi-baguette" "un demi-mètre",..

Apparaît alors aussi le mot quart

"Quart d'heure" "les trois quart"...

On observe maintenant la R et J

"la J est presque le double", "le triple"
"la rouge est triple fois plus petite que la J"
"un petit plus que le quart"
enfin "la R est le tiers de la J"

Phase II - Distribution de polycopiés (le polycopié a été reproduit au tableau)
Le maître aide à remplir les cases de la "deuxième diagonale"

		Unité de mesure R	B	J
Barre mesurée	R	1	?	?
	B	?	1	?
	J	3	2	1

Remarque : ce que nous écrivons X - mesure Y est lu par les enfants "mesure de la barre Y, la barre X étant prise pour unité". C'est un codage pour nous qui n'est jamais écrit par les enfants.

(J-mes (J) = 1 ; B-mes (B) = 1 ; R-mes (R) = 1).
Puis il renvoie les enfants à la manipulation pour remplir les autres cases.
On commence par R-mes (B) qui est la plus difficile pour faire sentir qu'il y a problème. Pourquoi est-ce que c'est difficile maintenant ? Un certain nombre de réponses sont proposées qui ne permettent pas d'avancer on revient donc à des cases plus faciles à remplir.

J-mes (B) : en distinguant bien barre mesurée de barre qui sert à mesurer, on obtient facilement un-demi et son écriture $\frac{1}{2}$ déjà connue par les enfants (emballage de produits d'alimentation).

Un enfant dit alors c'est "comme une fraction". Le mot fraction est adopté.

J-mes (R) un tiers arrive plus facilement, aucune difficulté pour l'écriture par analogie.

Retour à R-mes (B) on a très vite la proposition un et demi mais on ne sait pas l'écrire jusqu'au moment où on demande aux enfants comment s'écrivait le résultat de la mesure si l'on voulait tout exprimer en demi - "trois demi" vient spontanément ainsi que son écriture $\frac{3}{2}$.
Explication d'une élève : "si un cube fait un demi, trois cubes font trois demi".

B-mes R, deux tiers et son écriture $\frac{2}{3}$ sont vite trouvés. Les enfants n'arrivent pas à expliquer pourquoi.

Un des enfants se justifie en remarquant la symétrie :

R-mes B = $\frac{2}{3}$ B-mes R = $\frac{2}{3}$

Phase III

Exercice : attacher au choix une des trois barres à l'autre.

On obtient suivant le cas les assemblages J-B ; J-R ; B-R ;
On peut ainsi prolonger le tableau.
On obtient sans peine :
(J-B)-mes (J-B) = 1
B-mes (J-E) = 3.

Les enfants ne perçoivent pas à ce niveau-là l'additivité de la mesure.

B-mes (J-B) = B mes J + B-mes B

Par contre pour

R-mes (J-B) ils proposent d'abord 4 + $\frac{1}{2}$ puis $\frac{9}{2}$ puisqu'il y a neuf cubes et que chacun d'eux "font un demi".

- L'activité est nouvelle et le contenu est difficile. Il va falloir, dans la séquence suivante, tout reprendre afin de bien se familiariser avec
  - les consignes de mesurage
  - le langage de cette mesure
- Les fractions, chaque fois qu'elles apparaissent, ont un effet rassurant sur les élèves :

"$\frac{1}{2}$" fait partie du langage courant... plus que "La barre jaune étant prise pour unité..."

II - Deuxième séquence : 27 janvier 1978

. Deux semaines ont passé : il faut tout reprendre. Plusieurs types de cubes avaient été utilisés lors de la première séance : on reprend les mêmes pour un travail individuel.

. Le maître insiste particulièrement sur le langage.
"En prenant comme unité la barre JAUNE, la mesure de la barre JAUNE est 1".

. Rappel d'une partie du tableau réalisé

Les élèves ont des réactions diverses :

- par exemple : dans la réalisation du tableau, ils ne vont pas tout de suite vers les cases où il y a un nombre entier.

Ils vont souvent vers l'écriture $1/2$ $1/3$ et lisent "un troisième..." correction $\frac{1}{3}$, "un tiers".

. Pour la J-mes (R) une fille dit "$\frac{2}{6}$" en expliquant

"L'unité est le cube...

"Le $\frac{1}{6}$ de jaune, c'est le cube... (et inversement)

D'où J mes(R) $\nearrow \frac{1}{3}$, $\searrow \frac{2}{6}$

$\longrightarrow$ pour $\frac{1}{3}$: "la rouge est trois fois plus petite que la jaune"

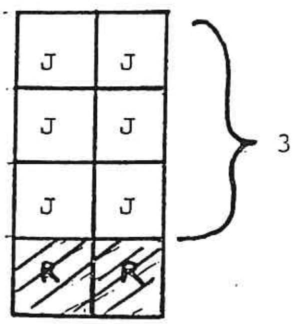
- idée de quotient -

$\longrightarrow$ pour $\frac{2}{6}$: "c'est le cube qui est l'unité... on reporte"

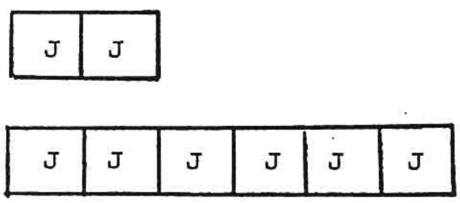
. Une autre élève a découpé sa barre jaune en 3 barres de 2 cubes. Chacune est posée sur la barre rouge pour comparer.

Elle conclut :

J mes (R) $= \frac{1}{3}$



. On remarque au passage



$\frac{1}{3}$ de barre jaune ou $\frac{2}{6}$ de barre jaune

$\frac{3}{3}$ de barre jaune ou

$\frac{6}{6}$ de barre jaune

idem pour $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ (réponses collectives)

Pour $\frac{5}{6}$ quelqu'un dit "$\frac{2 \text{ et demi}}{3}$"

... On a finalement refait toute la séquence de la dernière fois mais cela était nécessaire. De plus on a pour chaque case obtenu toutes les fractions égales possibles avec ce matériel.

3 conclusions intéressantes à la fin de cette 2ème séquence

1. Il faut pour remplir le tableau obligatoirement PRENDRE UNE FRACTION

1 $\frac{2}{2}$	2	3
$\frac{3}{6}$ $\frac{1}{2}$	1 $\frac{3}{3}$	
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$	1 $\frac{6}{6}$

2. L'idée de l'encadrement

$$1 < J\ \text{mes}\ (R) < 2$$

3. Le tableau suivant à exploiter pour la mesure et pour les fractions (numérateur 1)

le $\boxed{\text{cube}}$
- Jaune est l'unité : c'est $\frac{1}{6}$ de barre J
- rouge est l'unité : c'est $\frac{1}{2}$ de barre R
- Bleu est l'unité : c'est $\frac{1}{3}$ de barre B

III - Séquence du 31 janvier 1978

Pour 3 ou 4 élèves, il faut faire un rappel et une manipulation sur les exercices et les résultats des séquences précédentes.

1. On fabrique des trains de cubes (assemblages Barres)

Exemple : BR

B	B	B	R	R

le train BR

on observe que BR = RB

et donc plus tard BBR = RBB = BRB etc...

L'essentiel est le résultat

$$\boxed{J\text{-mes (BR)} = \frac{5}{6}}$$

2. Les enfants travaillent ensuite en groupes de 4

Chaque groupe dispose d'une boite de cubes multicolores et des 3 étalons J, B, R

Chaque groupe doit faire un train de 10 cubes et noter les résultats de ses mesures sur un tableau :

Unité de mesure	Mesure du train	Autre écriture de la mesure
R	5	$\frac{10}{2}$
B	$\frac{10}{3}$	/
J	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{6}$

- les difficultés $\longrightarrow$ la B mes (T)
  $\searrow$ l'encadrement

  $3 < \quad < 4$

- les explications
  - 1 cube correspond à $\frac{1}{3}$ de barre (T)
  - la barre (T) mesure $\frac{10}{3}$ de bleue

- quand on écrit

  $\frac{10}{6}$ on pense à l'unité cachée : CUBE $\boxed{}$

  $\frac{5}{3}$ écriture élaborée qu'on rattache à $\boxed{}\boxed{}$

- les enfants expliquent bien que

  $\frac{10}{3}$ c'est 5 fois $\frac{2}{3}$ après avoir pris $\boxed{B}\boxed{B}$ c'est-à-dire "deux tiers" de $\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}$

- des enfants confondent $\frac{3}{10}$ et $\frac{10}{3}$

  au niveau de l'écriture

- la comparaison, l'encadrement : deux problèmes soulevés dans la manipulation

$$3 < \frac{10}{3} < 4$$

- Pour la J-mes (T), le maître propose d'abord l'encadrement

$$1 < \qquad < 2$$

. Vient en premier $\frac{5}{3}$ (5 fois $\frac{1}{3}$ de jaune)

. Ensuite $2 \times \frac{5}{6}$ $\longrightarrow$ $\frac{10}{12}$ (c'était à craindre !)

$\searrow$ $\frac{10}{6}$ (expliqué longuement avec la manipulation)

. On écrit $\frac{2 \times 5}{6} = 2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$

3. Un travail collectif rapide et très réussi avec :

Unité de mesure	train mesuré	mesure du train
J	J	1
	JJ	2
	JJJ	3

4. Même exercice avec

Unité de mesure	train mesuré	mesure du train	autre écriture de la mesure
J	B	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{6}$ sont proposées aussi facilement l'une que l'autre

Ensuite on mesure BB

J	BB	1	$\frac{6}{6}$

Une élève propose aussi $\frac{4}{4}$ (elle rectifie en disant $\frac{3}{3}$. L'explication "on ne peut pas répondre en quarts" est bien justifiée.

Enfin

J	BBB	$\frac{9}{6}$	$\frac{3}{2}$

3 fois $\frac{3}{6}$

- La manipulation d'une fraction par un nombre est abordée : il nous semble facile de continuer dans cette direction.

- Le problème reste entier quant à l'addition de deux fractions même si dans plusieurs cas ou a écrit des fractions équivalentes.

Trois séquences réalisées dans un CM_1

Ecoles Cavalier

CHAUMONT

Classe de

Denis DEMOUGEOT

Cette première séquence a eu lieu alors que les trois précédentes faites au CM_2 étaient déjà terminées.

L'idée était : - 1) de faire une première leçon d'introduction aux fractions, analogue à celle faite au CM_2

- 2) en tenant compte des réactions nouvelles propres à cette classe de donner des suites à cette première leçon.

I - Première séquence (4 mars 1978)

Le CM_1 utilisé n'a pas encore entendu parler d'opérateurs fractionnaires, ni de fractions.

L'idée est de faire mesurer des longueurs de bandes de papier de couleurs différentes.

Toute la séquence s'est faite en recherche de groupes.

Phase 1

a) Le maître M distribue 2 bandes de papier superposables (une verte et une orange). Les enfants doivent les comparer jusqu'à formuler les "deux bandes ont même longueur", "sont superposables".

Puis à la demande du M la bande orange est pliée et coupée en deux.

On compare maintenant la bande verte (b.v.) avec une des deux moitiés de la bande orange.

Les enfants proposent : "la longueur de la b.o. est la moitié de la longueur de la b.v." le mot "demi" sera aussi proposé.

M demande alors d'écrire maintenant cela sans utiliser des lettres mais des chiffres. Les enfants sont familiarisés avec l'écriture $1/2$ qu'ils proposent (emballages de produits divers du commerce) M rectifie en $\frac{1}{2}$ et justifie cette écriture auprès des élèves par la phrase suivante : "on a gardé un morceau sur les deux" (il s'agit de la b.o. bien entendu).

A ce stade de la leçon un lien avec le vécu de l'enfant est réalisé :
- un demi-litre, une demi-baguette, un demi-franc etc...
- fais faire à cette table un demi-tour
- on balaye avec la grande aiguille la moitié du cadran d'une horloge.

....

b) Une démarche analogue est utilisée par le M pour amener la fraction $\frac{1}{3}$ (pour couper la bande violette en trois, M a tracé au préalable les traits).

A l'issue de la manipulation, les élèves n'ont pas de peine à écrire $\frac{1}{3}$ (un morceau sur les trois) mais ils ne savent pas le lire. Parmi les propositions qu'ils font figure <u>un troisième</u>.

Ici aussi on cherchera des expressions et des situations familières qui contiennent ou utilisent le mot <u>un</u> tiers.

c) Travail et démarche analogue pour obtenir $\frac{1}{4}$ (bande noire pliée en accordéon).

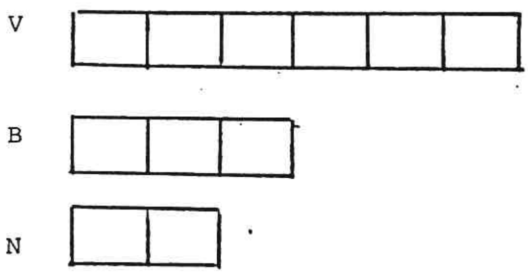
<u>Remarque</u> :

A l'issue de cette dernière phase une enfant parle pour la première fois de fractions.

Le mot est repris par M et donné à tous.

<u>Phase 2</u> : <u>Activités de mesurage, fractions "plus grandes que 1"</u>

Chaque enfant reçoit la feuille polycopiée suivante (le tableau étant à compléter)



compléter le tableau ci-dessous

Mesure de la longueur	Unité bande noire	Unité Bande bleue	Unité Bande violette
B. violette			
B. bleue			
B. noire			

On complète ce tableau d'abord collectivement puis individuellement.
Il doit se lire de la manière suivante :

<u>exemple</u> : Unité étant la bande bleue, la mesure de la longueur de la bande noire est :.... $\frac{2}{3}$

La case la plus intéressante à compléter a été semble-t-il celle qui permet de mesurer la longueur de la bande bleue à l'aide de la bande noire.

Les différentes propositions faites ont été dans l'ordre :

1,5 ; $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$

<u>Phase 3</u>

M n'a eu aucune peine à associer aux phrases
"un égale un demi et un demi"
et
"un égale un tiers et un tiers et un tiers"

les écritures :

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

Cette première leçon inspire un certain nombre de commentaires :

1) il semble bon comme dans le cas présent d'introduire le mot fraction après avoir étudié quelques fractions.

2) Les prolongements possibles de cette leçon sont des plus divers :

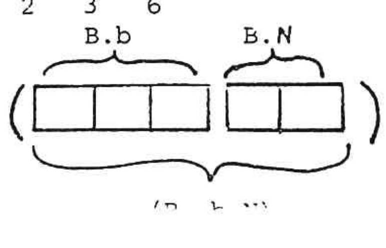
a) lien possible avec les décimaux ($1{,}5 = \frac{3}{2}$)

b) mise en évidence de l'additivité des mesure et addition de quelques fractions.

Ex.

	Unité B. Violette	
B. bleue	$\frac{1}{2}$	
B. Noire	$\frac{1}{3}$	
B. bleue-Noire	$\frac{5}{6}$	

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$



c) il apparaît vite indispensable de détacher la fraction de son support :

- avec le même matériel utiliser des grandeurs différentes (ex. : si l'on utilise des cubes, prendre d'un groupe à l'autre différentes tailles)

- avec un autre matériel (pièces de monnaie, masses, quadrillages, etc...)

3) Il est manifeste ici que la fraction apparaît aux yeux de l'enfant comme un nouveau nombre.

4) quelques orientations possibles dans les leçons futures :

- somme de deux fractions (décomposition de 1)
- les opérateurs
- produit de deux fractions (se rattacher à l'opérateur fractionnaire)
- les décimaux
- les fractions équivalentes (vers le nombre rationnel)
- ordre de grandeur de quelques fractions

....

II - <u>Deuxième séquence (7 mars 1978)</u>

Objectifs : - introduction de l'addition
- notion de "fractions équivalentes"

<u>1ère proposition</u> : étude à partir d'une figure dessinée sur feuille quadrillée.

a) rappel

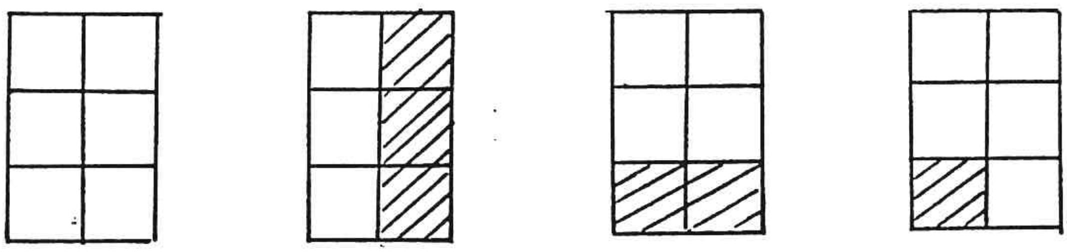
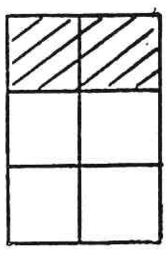


figure départ — colorier $\frac{1}{2}$ — colorier $\frac{1}{3}$ — colorier $\frac{1}{6}$

b) introduction . Notion d'addition et de fractions équivalentes



. consigne : colorier $\frac{1}{6}$ puis encore $\frac{1}{6}$

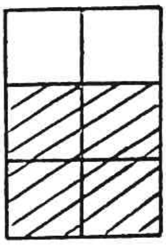
(remarque : plusieurs cas sont possibles mais il est possible de les ramener au cas où les 2 carrés sont juxtaposés).

. comparaison → par superposition des surfaces
→ en utilisant les carrés et en

les comptant $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)$ avec $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ égalité

Notation additive introduite : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

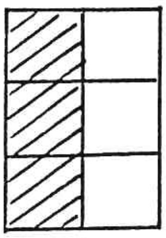
$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



. même travail avec $\left(\frac{4}{6}\right.$ et $\left.\frac{2}{3}\right)$

$\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



. comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{6}$

Notations au tableau $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

. Travail d'additions successives puis comparaison à l'unité.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

<u>Quelques remarques à propos de cette démarche</u> :

1) Elle ne permet pas de dégager une technique opératoire pour l'addition des fractions.

Depuis l'enfant ne rencontre qu'occasionnellement quelques cas de fractions équivalentes.

En revanche, l'utilisation de surfaces colorées permet une bonne visualisation et les élèves n'ont alors aucune difficulté pour additionner et comparer les fractions $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ en réunissant et superposant les surfaces correspondantes jusqu'à obtenir des écritures telles que : "$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$"

2) Cette démarche n'envisage pas les comparaisons de $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$

et les fractions qui sont ici utilisées sont toutes plus petites que l'unité.

<u>Problème qui reste posé</u> : Vaut-il mieux dépasser dès le départ le cas particulier pour en arriver rapidement à l'acquisition d'une technique mathématique ? (ici l'addition des fractions) ou est-il préférable d'utiliser quelques cas particuliers pour mieux visualiser les notions étudiées ?

III - Troisième séquence (18 mars 1978)

Point de départ :

A l'issue des deux premières leçons, tous les enfants du CM_1 savent écrire des fractions même compliquées telles que cent cinquante un douzième par exemple.

Mais ne possédant pas le lien fraction/division l'ordre de grandeur n'est pas perçu.

Objectifs de la séquence :

. ordre de grandeur de la fraction, place par rapport à l'unité

. approche de l'addition dans des cas particuliers (objectif secondaire)

Déroulement de la leçon

A. Phase de rappels

B. A l'aide de polycopiés (v. fig 1) faire hachurer $\frac{1}{4}$ de l'unité.

Puis $\frac{1}{4}$ de plus...... (v. fig. 2)

Comparaison des différentes surfaces obtenues

Rangement des surfaces $\Longrightarrow$ rangement des fractions correspondantes

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \cdots\cdots < \frac{11}{4}$$

Règle dégagée : lorsque le dénominateur de la fraction reste fixé."plus le numérateur est grand plus la fraction est grande".

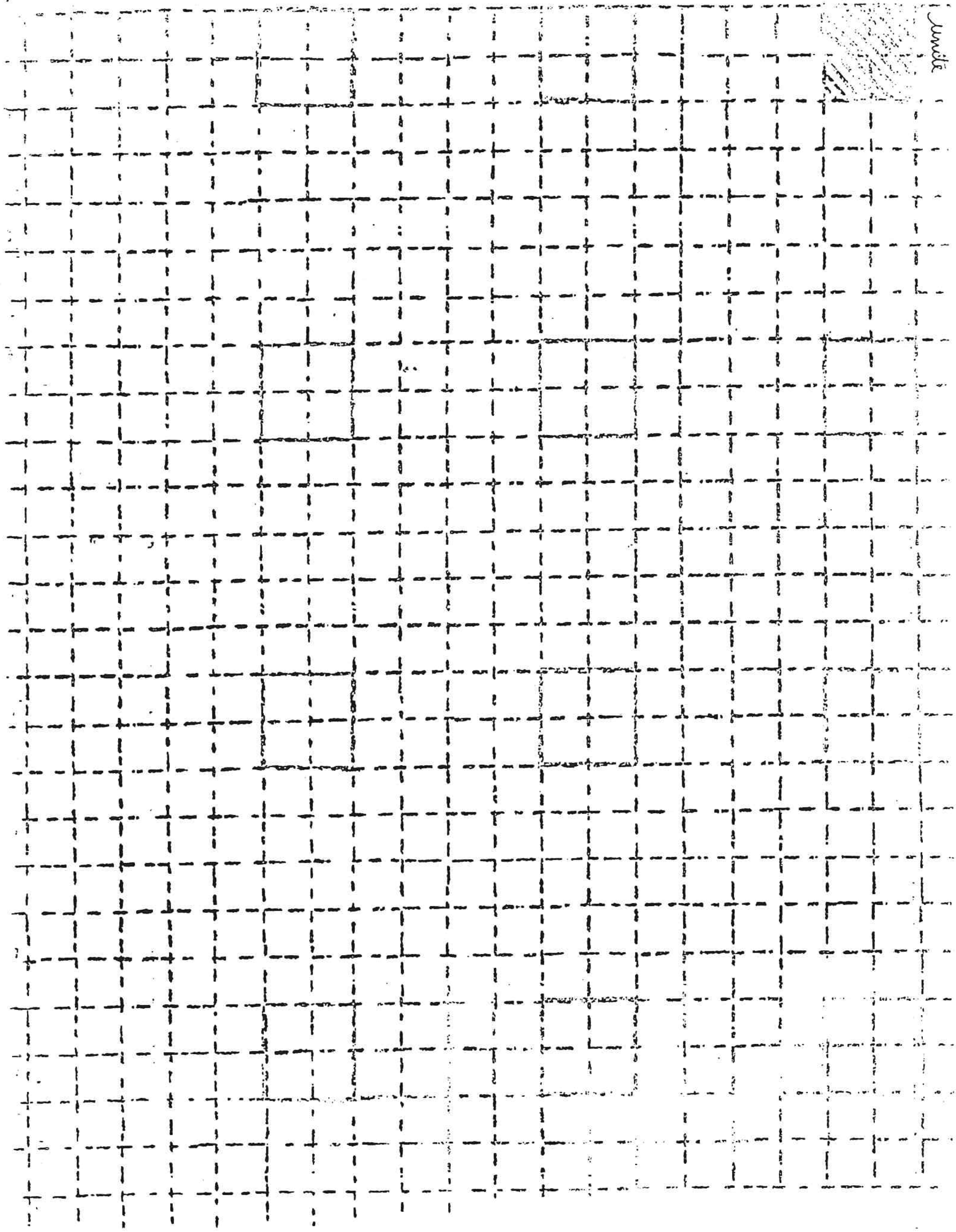


fig 1.

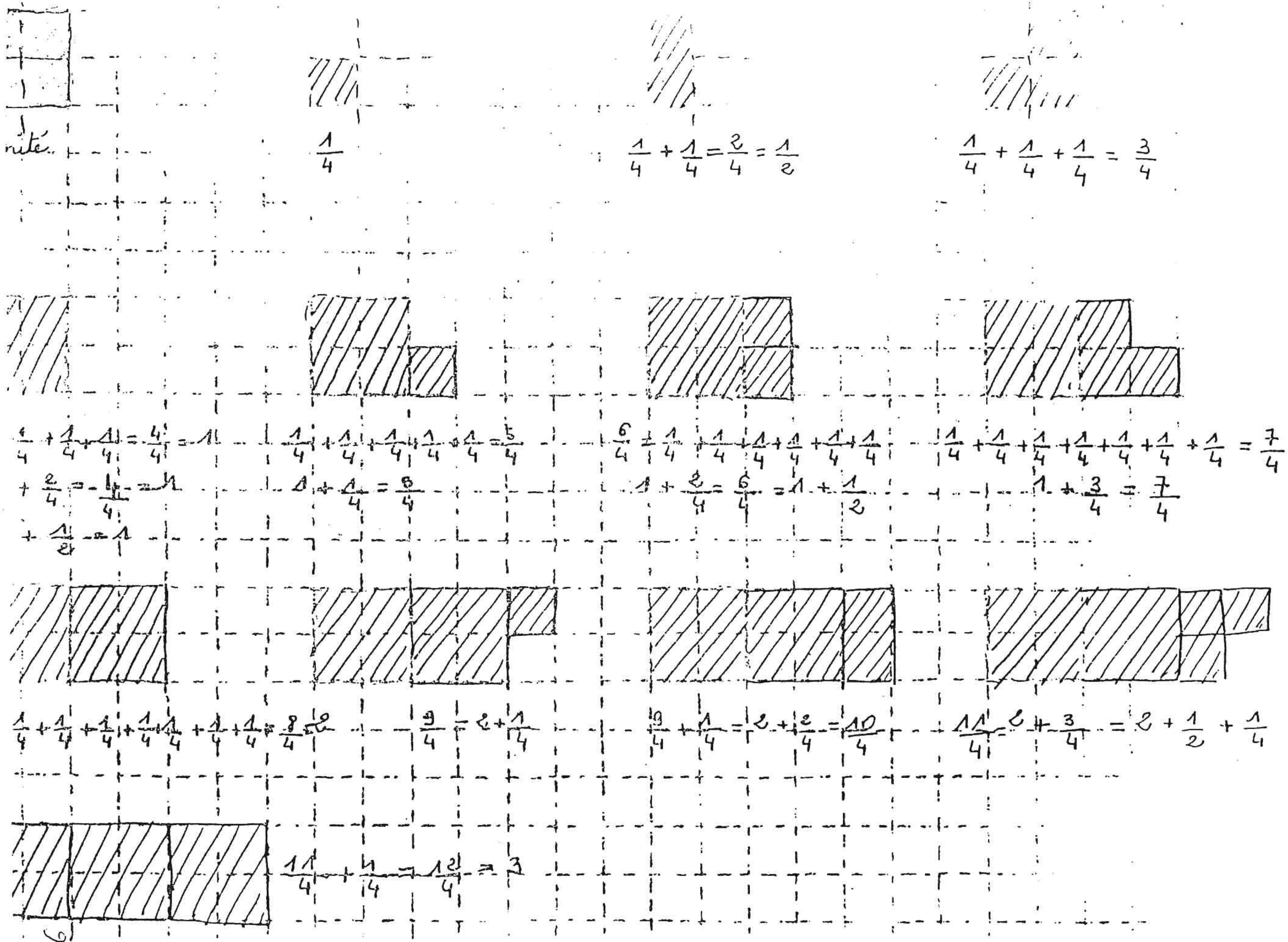

unité
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$
$+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1$
$+\frac{1}{2}=1$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
$\frac{6}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
$1+\frac{2}{4}=\frac{6}{4}=1+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
$1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$
$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}$
$\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=2+\frac{2}{4}=\frac{10}{4}$
$\frac{11}{4}=2+\frac{3}{4}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{11}{4}+\frac{1}{4}=\frac{12}{4}=3$

fig 2

Progression possible

1. Introduction des fractions à travers une activité de mesurage (bandes, surfaces, durées,...)

   Exemple de fractions introduites :

   $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$;.......

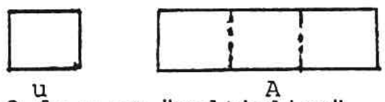
 Pour l'enfant la fraction apparaît comme étant un nouveau nombre.
 L'enfant est sensibilisé à l'emploi et à la manipulation de fractions.

2. Ordre de grandeur des fractions. Comparaisons à 1, 2, 3,...

3. Addition de fractions de même dénominateur

4. Multiplication d'une fraction par un nombre - lien avec les opérateurs fractionnaires.

   Exemple : si u est l'unité et si u - mes(A) = 3



prendre les $\frac{2}{3}$ de A, c'est prendre les $\frac{2}{3}$ de u et "multiplier" par 3

$$\underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots\ldots + \frac{a}{b}}_{\text{n fois}} \quad \text{est réductible à} \quad \frac{a}{b} \times n = \frac{na}{b}$$

analogie avec la multiplication des entiers

C'est ici que peut se faire le lien avec les opérateurs fractionnaires et donc avec le programme actuel, c'est le point délicat de la progression.

5. Lien avec la notion de quotient

6. Fractions équivalentes - simplification de fractions grâce aux chaînes d'opérateurs

7. Lien avec les décimaux.

LES FRACTIONS A PARTIR DU LANGAGE COURANT

Les activités décrites ci-dessous ont été réalisées dans des classes différentes. Elles ont toutes pour objectifs l'utilisation du langage familier aux fins d'écritures fractionnaires. Les supports des séquences peuvent être extrêmement variés. Nous en avons toutefois privilégié deux : les probabilités et la durée.

Il reste bien entendu que les buts immédiats visés, étaient de manipuler et d'opérer sur des écritures mathématiques sans toutefois avoir l'ambition de dégager les enfants de la situation proposée.

CYCLE DE SEQUENCES REALISEES A L'ECOLE NORMALE DE CHARLEVILLE

Dans les séquences qui suivent, notre but a été de présenter la notion intuitive de fraction en nous basant uniquement sur le langage courant.

I Dans la première séquence, au travers d'exemples différents, le codage fractionnaire s'est dégagé assez facilement. Une difficulté est apparue lorsque l'élève était amené à prendre une "fraction" d'une certaine quantité discontinue.

L'utilisation du cadran de l'horloge a permis, sans référence à la notion de surface, mais uniquement à l'aide des divisions en cinq minutes du cadran, de trouver les fractions équivalentes et de les classer.

II La deuxième séquence a essayé de lever la difficulté rencontrée lors du fractionnement de quantités discontinues. Le matériel utilisé fut une grille de 12 cases (en référence à l'horloge et à la richesse du nombre 12 en diviseurs). Un jeton sur une case signifiant que celle-ci est retenue.

Les élèves sont rapidement arrivés aux classes de fractions et j'en ai profité pour aborder l'addition de fractions inférieures à l'unité à l'aide de la réunion des ensembles de jetons sur une même grille. Les résultats ainsi que leur simplification furent écrits en utilisant le matériel, certains élèves purent se dégager du support.

III La troisième séquence a eu pour but d'introduire les fractions supérieures à l'unité en utilisant pour matériel, deux grilles. La principale difficulté a été de montrer que l'on utilisait toujours des douzièmes et non des vingt quatrièmes.

Donc il faut bien montrer dès le départ que l'unité reste la même, à savoir la grille de douze cases. En prenant un support comme celui constitué par les emballages de douzaines d'oeufs au lieu de grilles, nous pensons que cette difficulté est amoindrie car on compte les oeufs par douzaines, on dira donc ici deux douzaines.

Dans une deuxième phase, nous avons voulu aborder l'addition des fractions supérieures à l'unité et la décomposition. Les élèves nous ont amené à l'écriture du quotient et de l'égalité entre nombres naturels et certaines fractions en découvrant l'unité comme équivalente à toutes les fractions écrites avec des nombres égaux.

Cette approche a été intéressante car la nécessité de trouver un dénominateur commun a été ressentie pour l'addition de deux fractions, la méthode arithmétique n'ayant pas été dégagée, certains enfants en ont eu l'intuition puisque la notion de multiple commun des dénominateurs a été découverte. Dans d'autres séquences, je pense que la réduction au même dénominateur et l'addition des fractions sans support matériel aurait pu être amenée, mais les enfants du CM_2 me semblent plus aptes à comprendre et à utiliser la méthode arithmétique.

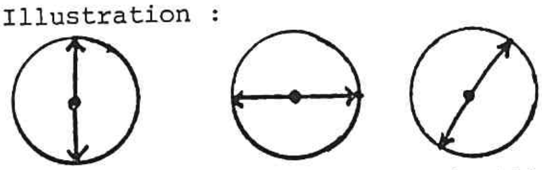
Première approche de la fraction

CM$_1$

1) <u>Idée de fraction en utilisant un cadran d'horloge et les divisions en 5 minutes.</u>

Les élèves emploient oralement le mot demi dans demi-heure.

Illustration :



On fait varier la disposition des aiguilles pour que la demi-heure apparaisse.

Codage trouvé : $\frac{1}{2}$

que représente 1 ?

que représente 2 ?

Réponse : on a pris 1 part sur 2

Précision du langage :

2 : signifie que l'on a partagé le cadran en 2 parties qui comportent le même nombre de divisions.

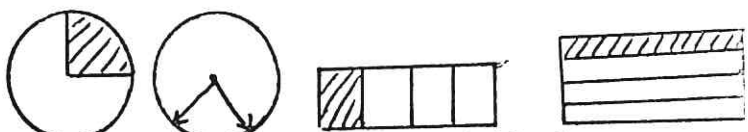
1 : signifie que l'on ne considère que l'une d'entre elles.

2) <u>Autres exemples</u> :

Montrer ce que représente $\frac{1}{2}$ sur un segment, un rectangle, un sac de billes. Le dernier exemple étant très important car étant de nature discontinue.

3) <u>Autres codages fractionnaires</u> :

. $\frac{1}{4}$ associé à



Quelles sont les autres fractions que l'on peut indiquer à l'aide des aiguilles de l'horloge ?

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ ....

4) <u>Relations entre les fractions</u> :

Que représente $\frac{2}{4}$ sur l'horloge ? équivalence avec $\frac{1}{2}$

. Trouver d'autres fractions équivalentes.

. Fractions différentes.

5) Classer les fractions différentes en s'aidant de l'horloge

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{3}{12}$	
$\frac{6}{12}$			

6) Peut-on continuer le tableau ? Ecrire d'autres fractions abstraites

---

Fin de la première séquence : objectif de la prochaine leçon :

7) Ordonner les fractions différentes et les classes.

a

$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1
	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{6}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{10}{12}$		$\frac{2}{2}$
		$\frac{3}{12}$			$\frac{3}{6}$		$\frac{8}{12}$				$\frac{3}{3}$
			$\frac{4}{12}$		$\frac{4}{8}$						$\frac{4}{4}$
					$\frac{6}{12}$						$\frac{6}{6}$
											$\frac{8}{8}$
											$\frac{12}{12}$

b compléter le tableau en utilisant des écritures fractionnaires sans rapport avec les divisions en 5 minutes de l'horloge.

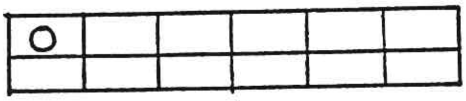
Les fractions 2ème séquence

Matériel : - Chaque enfant dispose d'une grille rectangulaire divisée en douze carrés isométriques.

- une grille semblable est tracée sur un tableau métallique.
- les enfants disposent de jetons de 2 couleurs, le maître de jetons aimantés.

1) En se référant à la leçon précédente, montrer diverses fractions sur la grille. Pour celà, les enfants utiliseront les jetons.

ex.

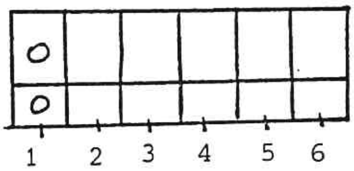


$\frac{1}{12}$ "une case sur 12"

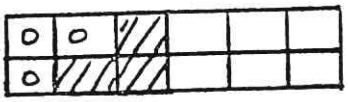
Ecrire d'autres fractions.

2) Retour sur les fractions équivalentes :

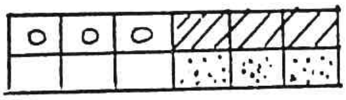
$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$



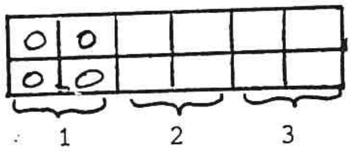
$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$



ou



$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$



$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

3) Addition des fractions

a) figurer la fraction $\frac{3}{12}$ avec des jetons verts

" $\frac{1}{6}$ " " jetons rouges

quelle fraction représente la réunion des jetons ?

on écrit $\frac{3}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

Ecrire d'autres additions ainsi que le résultat.

$\frac{4}{12} + \frac{6}{12}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

que remarque-t-on ?

1) Les enfants dépassent vite le cadre du matériel
pour trouver les fractions équivalentes

2) pour additionner deux fractions de même dénominateur.

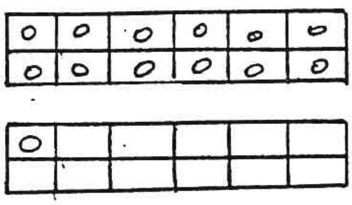
Ils ne font pas la liaison avec les fractions équivalentes pour réduire au même dénominateur avant d'additionner les fractions mais utilisent le matériel.

3ème séquence

<u>Fractions supérieures à l'unité</u> :

1 - Comment, en utilisant le matériel précédent, figurer la fraction $\frac{13}{12}$?

Les enfants trouvent l'utilité d'une autre grille divisée en douzièmes.



erreur rencontrée : on obtient alors des vingt quatrièmes.
Le choix de l'unité est donc très important et on convient de choisir.

le rectangle formé par une grille comme unité lorsqu'il est couvert de pions. Ecriture de fractions équivalentes à 1.

2 - <u>Décomposition des fractions</u> :

$$\frac{13}{12} = \frac{12}{12} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12}$$

$$\frac{14}{12} = \frac{12}{12} + \frac{2}{12}$$

$$\frac{14}{12} = 1 + \frac{1}{6}$$

...........etc

ainsi on arrive à l'écriture $\frac{24}{12} = \frac{12}{12} + \frac{12}{12}$

$= 1 + 1$

$= 2$

Une analogie avec la recherche du quotient entier est trouvée par certains enfants.

Extension : $\frac{25}{12} =$?

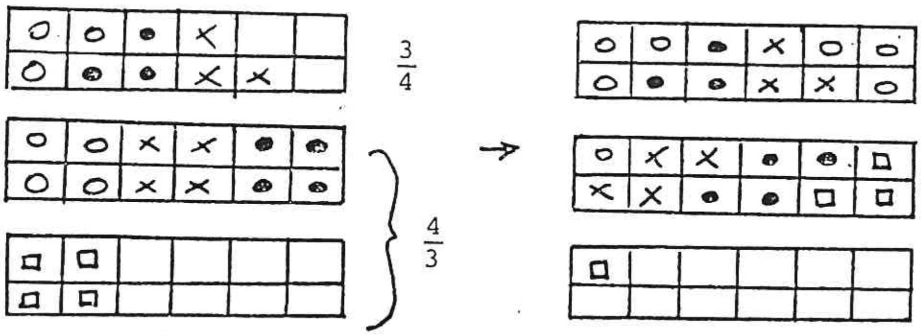
$\frac{30}{12} =$

$\frac{34}{12} =$

$\frac{36}{12} =$

3 - Addition des fractions :

Problème posé : trouver $\frac{3}{4} + \frac{4}{3}$



$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$

d'autres exercices sont proposés.

Remarques :

Quelques enfants trouvent, après plusieurs exercices, intuitivement, la réduction au même dénominateur ici toujours en douzièmes :

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$ $\qquad \frac{9}{12} + \frac{16}{12} = \frac{25}{12}$

Dans le cas de fractions du type :

$\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ la réduction est aussi faite en douzièmes. Le support du matériel est ici primordial.

Comme matériel, des boîtes compartimentées seraient plus adoptées : ex:boîtes de douzaines d'oeufs. La boîte pleine symbolisant l'unité : la douzaine.

AUTRE CYCLE DE SEQUENCES REALISEES A

CHARLEVILLE MEZIERES (Classe de Mr BADEROT - CM 1)

L'idée de ce cycle était de proposer aux élèves des activités aussi diverses que possibles centrées toutes sur la notation de "fraction" (dans un de ses aspects décrits précédemment et sans en favoriser un seul) jusqu'à ce que se dégage l'idée de rassembler les divers résultats obtenus.

1ère séquence : objectif : manipuler des écritures "fractionnaires"

La situation proposée était la correction de deux dictées réalisées dans des classes différentes. L'une comportait 3 fautes et était notée 7/10 et l'autre 4 fautes et était notée "sur 20". Au nom de l'équité, fut admis que dans le deuxième cas les fautes devaient "valoir" deux points. Imaginez, donc 10 fautes dans chacun des cas! y aurait-il 2 sortes de nullités?

D'autres notes furent proposées (pourquoi pas, même sur 40, sur 30 ?) et permirent de classer et de ranger des écritures. Si dans un premier temps, les enfants faisaient référence aux nombres de fautes, ils s'en détachèrent assez rapidement pour se conformer au seul domaine numérique.
"7/10 et 14/20" c'est la même note, on multiplie en haut et en bas par la même chose, 2.

Inconvénients retenus : On ne peut "faire des opérations" sur ces écritures mais simplement les comparer

- L'absence de surdonés a exclu des notes supérieures à 10/10, 20/20 etc...

Prolongements : Ils furent réalisés de façon autonome par les enfants à qui furent proposés

1 - d'afficher des feuilles dans la classe sur lesquelles étaient notées des écritures "pareilles".

2 - d'ordonner ces feuilles

Cette deuxième activité a donné des résultats intéressants dans la mesure où pour comparer par exemple 5/6 et 7/9 les enfants étaient amenés à compléter les classes respectives jusqu'à trouver une possibilité de comparaison (ex : 15/18 et 14/18)

2ème séquence : objectif : identifier les écritures fractionnaires de durée aux écritures précédentes.

A partir d'un cadran d'horloge, identifier une demi heure, un quart d'heure, l'écrire. (Tiens , ça pourrait ressembler graphiquement aux notes)

Bizarre ! deux quarts d'heure, c'est une demi heure, et si on écrivait 2/4 = 1/2 puisqu'on l'a déjà vu.

Cette séquence permit

1 - de pésenter des "fractions" supérieures à 1

2 - de faire quelques additions simples.

Profilèrent alors les écritures 3 730/271, 1/100 000, etc... dans votre classement.

3ème séquence : objectif : identifier les résultats d'une situation nouvelle à ceux déjà trouvé.

.../...

La situation proposée était la suivante :
n mains sont présentées à un joueur. P de ces mains contiennent un objet et un seul.

Classer les possibilités de trouver un objet en choisissant une main. Il fut, bien sûr, fait appel à la seule intuition enfantine qui dans bien des cas se trouve être la réalité mathématique.

Ex : situation A : 7 mains 3 objets
situation B : 7 mains 6 objets
situation C : 4 mains 3 objets
etc...

Au moment de ranger du plus facile au plus difficile ces cas, se posèrent des problèmes.
L'analogie avec les résultats précedents fut difficile à dégager mais vint tout de même.

Par la suite furent réalisées de nombreuses séquences du type de celles qui sont décritent dans ce dossier. Les résultats obtenus ne sont pas significatifs car, le PEN concerne ayant en commun avec le maître de la classe deux projets dont l'un portait sur la géométrie, les réactions des élèves étaient du type

"Tiens aujourd'hui, on ne fait pas de géométrie, c'est donc qu'on va faire des fractions".

En tout état de cause, l'activité fut réelle et nous sommes persuadés que, malgré le manque de rigueur mathématique auquel nous nous sommes laissé entrainer parfois (pardon ! monsieur le Directeur de l'I.R.E.M.), nous avons permis à de jeunes enfants de se familiariser avec un outil qu'ils auront peut-être bien du mal à manipuler ensuite.

Séquences réalisées à CHALONS/MARNE

dans un CM_1

Deux situations furent choisies, chacune d'elles permettront d'approcher de façon différente quelques aspects de cette structure de $\mathbb{Q}$
L'expérience est faite dans une seule classe dont les élèves ne furent pas triés.

1ère séquence

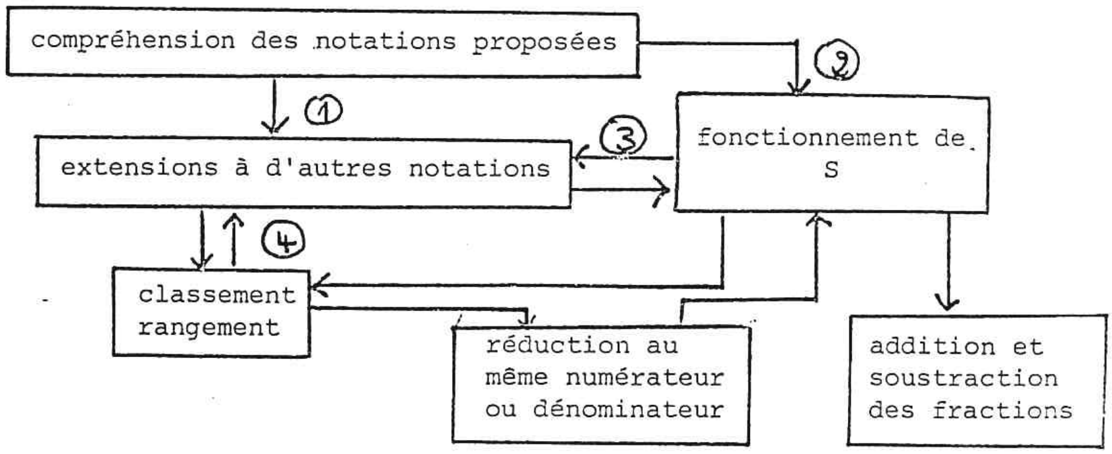
Point de départ

Connaissance des expressions "un demi", "un quart", "trois quarts" et du fonctionnement de la situation.

S / Heure de départ $\xrightarrow[\text{temps de parcours}]{}$ heure d'arrivée

Serait-ce un premier contact avec l'opérateur fractionnaire additif ?

Objectifs



Résultats de ↓ 1

"$\frac{1}{4}$ ou un quart d'heure, c'est quand on divise en quatre, ça fait quinze minutes".

"$\frac{1}{2}$ ou une demi-heure, c'est quand on divise par deux, ça fait 30 minutes".

"$\frac{3}{4}$ ou trois quarts d'heure, c'est 45 minutes".

Vient ensuite $\frac{1}{6}$ c'est 10 minutes, $\frac{1}{12}$, six puis $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{6}$

Les expressions "un sixième"... sont proposées, peu utilisées dans les exercices écrits et nous ne savons pas si elles fonctionnent seuls ou dans l'expression "un sixième d'heure" ce qui n'est pas forcément d'une importance capitale.

Résultats de ↓ 2 $\quad$ 2h $\frac{1}{4}$ $\xrightarrow{\frac{3}{4}}$ 3 h. Le "trou" est placé où l'on veut.

Les élèves se servent de leur montre et font tourner les aiguilles. Peu font le calcul mentalement et parmi ceux-là tous se trompent jusqu'à ce qu'on leur prête une montre.

Résultats de ← 3

Identification de "deux heures moins le quart" à "une heure $\frac{3}{4}$",

la notation 2h − $\frac{1}{4}$ n'ayant pas été retenue.

Quelques nouvelles fractions apparaissent qui avaient été oubliées dans 1 . Ce sont $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{4}$,.... dont on découvre avec étonnement qu'elles signifient 1h, 1h $\frac{1}{4}$ et qu'elles sont assez pratiques.

Résultats de → 3

Les élèves étant conviés à se poser de petits problèmes, les deux flèches 3 vont fonctionner simultanément.

En voici quelques exemples

3 h $\frac{3}{4}$ $\longrightarrow$ 4 h $\frac{1}{2}$

12 h $\xrightarrow{\frac{2}{2}}$

4 h $\frac{5}{4}$ $\longrightarrow$ 6 h

6 h $\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\frac{2}{4}}$

Il y a peu d'erreurs et l'heure de départ est rarement une inconnue.

Résultats de ↓↑ 4

Le classement commence par 1, $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ (et pourquoi pas $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$,... ?)

Tiens ! $\frac{1}{3}$ d'heure c'est 20 minutes, $\frac{1}{5}$ c'est douze, $\frac{1}{8}$ c'est embêtant mais c'est la moitié d'un quart d'heure ; c'est 7 minutes et demies. Comment l'écrire ? 7 et $\frac{1}{2}$? 7,5 ?

La comparaison de la durée des trajets a permis de constater que cela était facile quand on avait le même nombre "en bas".

Sans entrer dans les détails, les enfants trouvent que c'est facile pour le même nombre "en haut". Mais pour comparer $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{7}$, personne n'a l'idée de chercher deux autres représentants de ces classes.

Conclusion : A partir de ce moment, nous avons pensé que cette situation méritait d'être travaillée de façon plus détaillée au CM et nous avons essayé la seconde (probabilités).

2ème séquence : Probabilités

Objectif de la séquence

- notion de probabilité : essayer d'exploiter et de développer la notion intuitive de probabilité contenue dans le langage usuel : "j'ai une chance sur deux de gagner".

- symbolisme des fractions : faire fonctionner grâce à cette situation l'écriture fractionnaire d'une probabilité.

- classement et ordre dans les fractions : faire classer et ordonner des fractions à l'aide des probabilités pour évaluer l'équitabilité d'un jeu.

Déroulement de la séquence

1) Au moyen de cartes à jouer : on a préparé des jeux et les enfants tirent des cartes au hasard. Les enfants parlent de "chances".
"il a plus de chances que moi"
"il a 4 chances, j'en ai 2"

identification du nombre de chances avec le nombre de cartes favorables sans référence au nombre de cartes total.

2) Mise en échec de cette pseudomesure avec des jeux : tirer 4 as parmi 8 cartes
ou tirer 2 as parmi 3 cartes

les enfants se rendent compte que le 2e jeu est plus favorable.
"il a plus de chances mais comme il a plus de cartes, c'est moi qui ai le plus de chances".

3) Les élèves se rendent compte que le nombre de cartes total a de l'importance.

Le maître propose une formulation plus adaptée, adoptée par les enfants. On a "2 chances sur 3 de gagner".

4) On compare des "chances"

4 cas se présentent : $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{4}$

1) Les enfants sont tous d'accord pour dire que celui qui a 1 chance sur 4 est défavorisée par rapport à celui qui a 2 chances sur 4 d'où la notation :

1 chance sur 4 s'écrit naturellement $\frac{1}{4}$ et on écrit

$\frac{1}{4}$ mcq $\frac{2}{4}$ celui qui a le jeu à une chance sur quatre a moins de chance que celui qui a le jeu à 2 chances sur quatre).

2) $\frac{2}{4}$ et $\frac{2}{8}$: les enfants sont là encore tous d'accord pour dire que celui qui tire 2 cartes parmi 4 a plus de chances de gagner que celui qui tire 2 cartes parmi 8.

Des règles générales sont énoncées par les enfants. <u>Plus</u> on a de chances (cartes favorables) et <u>moins</u> il y a de cartes au total, plus on a de chances de gagner.

3) $\frac{2}{4}$ et $\frac{4}{8}$. Cela pose problème aux enfants. La moitié de la classe pense que c'est pareil, l'autre moitié se laisse convaincre sans conviction !
beaucoup pensent en effet qu'avec le jeu $\frac{4}{8}$ on est favorisé mais certains "sentent" quand même qu'avec le jeu $\frac{4}{8}$ on aurait moins de chance qu'avec $\frac{2}{4}$ pourquoi ? parce que !
Avec du temps, en leur donnant du choix de jeu et en leur laissant essayer, nous pensons qu'ils se seraient convaincus eux-mêmes que c'est bien pareil .

4) $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ problème paraissant de prime abord insaluble aux enfants : ils ne pensent pas à utiliser ce qu'ils ont vu.

5) <u>Essais de classement des fractions</u>

On donne un jeu à chaque enfant et la consigne "fabriquer un autre jeu qui lui soit équitable". On commence alors un tableau avec les résultats obtenus :

$$\Bigg|\quad \frac{1}{2}\quad \frac{2}{4}\quad \frac{3}{6}\quad \Bigg|\quad \frac{2}{3}\quad \frac{4}{6}\quad \frac{6}{9}\quad \Bigg|$$

6) Début de rangement des classes

Certains élèves voient effectivement que dans les classes il y a des éléments comparables (ex. : $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{4}$) mais très peu en déduisent effectivement un ordre sur les classes.

Remarques et conclusion

Les enfants n'ont pas fait de rapprochement entre la 1ère et la 2e expérience bien qu'elles se soient déroulées à 1 semaine d'intervalle car les notations restent chargées de leur sens initial : dans le 1er cas $\frac{1}{2}$ signifie $1/2$ heure dans le 2e cas "1 chance sur 2". Ceci nous conforte dans l'idée qu'il faut multiplier les exemples de situation les plus diverses avant que les enfants découvrent le modèle.

LES FRACTIONS ET

LES OPERATEURS FRACTIONNAIRES

C'est bien sûr l'aspect que nous aurions pu laisser de côté tant il est connu. Mais, il nous a paru intéressant de proposer une activité où l'idée intuitive de fraction est le point de la "découverte" de l'opérateur fractionnaire.

I PLAN D'ENSEMBLE

1°) une chaîne de plusieurs opérateurs à multiplier et à diviser peut toujours se ramener à une chaîne formée seulement d'un opérateur à multiplier et d'un opérateur à diviser.

2°) Une chaîne formée de 2 opérateurs, l'un à multiplier, l'autre à diviser, peut se ramener, selon le cas à

. un opérateur à multiplier ou à diviser "entier"

. un opérateur à multiplier ou à diviser décimal

. un opérateur fractionnaire.

3°) Fractions usuelles

Le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{3}$, la moitié, les $\frac{3}{4}$.... d'une feuille de papier.

4°) Prendre une fraction d'un nombre : voir séquence détaillée.

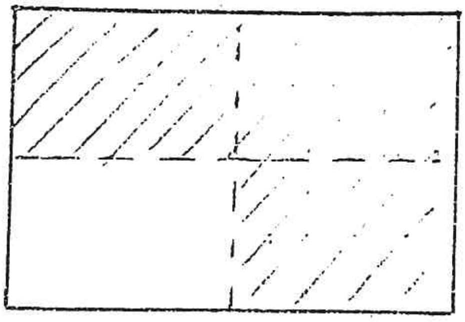
5°) Compléments

"comparaison à l'unité"

. fractions décimales...

II ETUDE DETAILLEE DE LA LECON 4

Les figures sur lesquelles les enfants vont travailler seront découpées ou simplement tracées sur papier quadrillé.



Chaque équipe disposera de 5 rectangles qui pourront avoir les dimensions suivantes : en cm :

A 6 x 4 ; B 8 x 4 ; C 6 x 6 ;
D 8 x 6 ; E 10 x 6.

En déterminant les 2 médianes de chaque rectangle (par pliage ou par tracé) on partage ce rectangle en 4 parties superposables. Dans chaque figure, 3 de ces parties sont coloriées :

quelle fraction du rectangle se trouve ainsi coloriée ? : "les $\frac{3}{4}$"

Le travail qui suit consistera à faire trouver aux élèves comment il est possible de calculer l'aire de la partie hachurée (nombre de petits carreaux) à partir du nombre total de carreaux de la figure et de la fraction $\frac{3}{4}$.

Au fur et à mesure que les différents rectangles sont partagés puis coloriés, chaque équipe compète le tableau ci-dessous

Combien de carreaux

	dans la fig. entière	dans $\frac{1}{4}$ de la figure	dans $\frac{3}{4}$ de la figure
Rectangle A	24	6	18
B	32	8	24
C	36	9	27
D	48	12	36
E	60	15	45

Observons le tableau complété

Comment passe-t-on de 24 à 6 ? de 32 à 8 ? de 36... etc

en divisant par 4

comment passe-t-on de 6 à 18 ? de 8 à 24 ? de 9 à... etc

en multipliant par 3

Le tableau peut alors prendre l'aspect ci-contre :

$$\xrightarrow{m\ \frac{3}{4}}$$

$$\xrightarrow{d.\ 4}\quad\xrightarrow{m.\ 3}$$

24	6	18
32	8	24
36	9	27
48	12	36
60	15	45

- nous savons que la chaîne

d. 4 m. 3

peut être remplacée par

l'opérateur m. $\frac{3}{4}$

- nous savons d'autre part que la partie coloriée de la feuille représente les $\frac{3}{4}$ de cette feuille.

Pour connaître le nombre de carreaux, on a multiplié par $\frac{3}{4}$ le nombre de carreaux de la figure entière.

Remarque :

L'énorme avantage de cette façon de faire est de ne pas imposer à la fraction de n'être seulement qu'une écriture issue de l'opérateur fractionnaire. Il y a prise de conscience réelle du pourquoi de la notation $\times \frac{3}{4}$ et de la décomposition de cet opérateur. Alors que l'habitude est de composer 2 opérateurs pour obtenir un opérateur fractionnaire.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES FUTURES

Ce travail du groupe P.E.N. de l'I.R.E.M. de REIMS n'a pas d'autre ambition que de décrire ce que fut son activité au cours de l'année scolaire 1977-1978. Il a permis à ses participants, au moment où s'élaborent les futurs programmes du cours moyen, de réfléchir sur une notion jugée assez "floue" au départ.

Les discussions, parfois vives, qui ont précédé ou suivi l'élaboration des séquences décrites prouvent bien que, dans ce domaine comme dans beaucoup d'autres, aucune vérité pédagogique ne prévaut. C'est dans cette optique que nous souhaitons que soit le lecteur, ce document n'ayant de valeurs que par ce qu'on voudra bien en faire.

En tout cas, nous espérons avoir fait sentir que ce qui nous préoccupait le plus, était l'activité de l'enfant.

Notre tâche (grandement facilitée, par les maîtres qui ont bien voulu se preter à notre expérience et que nous remercions) ne nous a pas permis de conclure sur les possibilités maximales des enfants de CM confrontés aux rationnels.

Il nous semble toutefois qu'il est parfaitement possible de réaliser la démarche pédagogique signalée dans les objectifs généraux et que l'étude de Q serait bien mieux ressentie en 4ème si les activités que nous avons proposé se continuaient au niveau du 1er cycle de l'enseignement secondaire. Il faut, dans ce cas, accepter comme préalable à toute séquence qu'elle ne débouchera pas obligatoirement sur un processus de contrôle ou d'évolution.

Il nous reste, avec la poursuite de notre travail, à accepter les critiques, remarques que tout lecteur intéressé voudra bien nous adresser à :

I.R.E.M. de REIMS
Groupe PEN

Moulin de la Housse

B.P. 347

51062 REIMS Cedex

Ont participé à l'expérience :

EN CHALONS/MARNE	BERU Guy VINCENT Jean
EN CHARLEVILLE MEZ.	BRUN Jean Louis MARECHAL Michel MATHIEU Claude
EN CHAUMONT	MUNIER Jean Marie SIRCOGLOU Basile
EN TROYES	LEDE Robert HABERT Danielle

TITRE : L'INTRODUCTION DES FRACTIONS AU COURS MOYEN

AUTEUR : Groupe P.E.N. - IREM de REIMS

NIVEAU : PRIMAIRE

DATE : Année scolaire 1977-1978 2ème édition 1989

MOTS-CLE : spécialité MATHEMATIQUES AU PRIMAIRE

autres FRACTIONS

RESUME : Ce travail du groupe PEN de l'IREM de Reims n'a pas d'autre ambition que de décrire ce que fut son activité au cours de l'année scolaire 1977-1978. Il a permis à ses participants, au moment où s'élaborent les futurs programmes du cours moyen, de réfléchir sur une notion jugée assez "floue" au départ.

Les discussions, parfois vives, qui ont précédé ou suivi l'élaboration des séquences décrites prouvent bien que, dans ce domaine comme beaucoup d'autres, aucune vérité pédagogique ne prévaut. C'est dans cette optique que nous souhaitons que soit le lecteur, ce document n'ayant de valeurs que par ce qu'on voudra bien en faire.

En tout cas, nous espérons avoir fait sentir que ce qui nous préoccupait le plus, était l'activité de l'enfant.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A 4	47	20,00 F	