UNIVERSITÉ DE REIMS
Institut de Recherche Sur L'enseignement des Mathématiques
Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

Bulletin
de liaison n° 6

vecteur

1994

UNIVERSITÉ DE REIMS
Institut de Recherche Sur L'enseignement des Mathématiques
Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

Bulletin
de liaison n° 6

vecteur

1994

EDITORIAL

Chers Abonnés,

votre Bulletin achève sa troisième année et vous avez en main le sixième numéro de la série remise en route fin 1991, sous l'impulsion de la Directrice Hélène Authier.

Vous y trouverez un article que Marcel David, ancien Directeur de l'IREM de Reims, nous a confié en toute amitié ; de même André Viricel, qui fut Professeur d'Ecole Normale, nous y donne une de ses productions.

Les textes concernant l'organisation des Baccalauréats et les programmes des nouvelles Terminales générales, tels qu'ils ont été publiés dans les B.O. de l'été, vous sont présentés. Les rubriques habituelles et les annonces qui nous ont paru importantes - dans la mesure où nous en avions été avisés - leur font suite.

Il apparaît maintenant que cette nouvelle série de $\vec{V}$ecteur s'arrêtera - peut-être provisoirement - avec ce numéro

Le manque relatif de matière, le nombre restreint d'abonnés fait que la rédaction a ressenti que le Bulletin ne paraissait pas être un moyen adapté – au moins sous sa forme actuelle de rédaction et de contenu – à la diffusion des idées et des travaux qui se font dans l'Académie.

Si l'arrêt de la parution de $\vec{V}$ecteur permettait à chacun de faire le point sur cette question, nous serions prêts à recevoir des suggestions pour aider à la mise en place d'une nouvelle rédaction sur d'autres objectifs.

Que les abonnés des numéros 6 et 7 se rassurent, ils recevront un courrier qui leur exposera comment obtenir la contrepartie de leur souscription tronquée.

Nous souhaitons aux Collègues une année scolaire satisfaisante et... une nouvelle idée pour un nouveau $\vec{V}$ecteur !

26 octobre 1994

La Rédaction

S O M M A I R E   D U   N U M E R O   S I X   (1994)

SOMME DES PUISSANCES ENTIERES D'UN ENTIER

POLYNOMES ET NOMBRES DE BERNOUILLI

par MARCEL DAVID

L'auteur a été Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Reims et Directeur de l'IREM .

Ancien Professeur de classes spéciales à Paris, il a été appelé en 1956 à Reims, pour la création du Collège Scientifique, à l'époque où l'Académie de Paris régissait encore les enseignements de notre ville.

Marcel David a été Doyen de la Faculté des Sciences où il a enseigné jusqu'en 1980 .

Il a pris le temps - sa retraite est active - de rédiger cet article pour nous; ce faisant, il s'est certainement souvenu de l'époque où il créait " L'injectif " , premier Bulletin de liaison de l'IREM de Reims.

Qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

Merci aussi à Brigitte Chaput qui a assuré la frappe et la mise en page de l'article.

La Rédaction

La première partie de cet article expose une méthode simple fournissant, en fonction de l'entier naturel n, les sommes $S_k(n) = \sum_{p=0}^{n} p^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Dans une deuxième partie, la théorie des polynômes de Bernoulli, notés $B_k(n)$, et des nombres de Bernoulli, $\beta_k = B_k(0)$, permet de préciser la forme générale des coefficients de $S_k(n)$.

Les coefficients du binôme sont notés C_k^m (et non pas $\binom{k}{m}$ comme dans les pays anglo-saxons) : $C_k^m = \dfrac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m} = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$.

I - Etude de $S_k(n) = 1 + 2^k + \dots + (n-1)^k + n^k$ pour k entier naturel

On a évidemment $S_0(n) = n$ et chacun connaît $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ qui peut s'obtenir en formant :

$$2\ S_1(n) = [1+n] + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \dots + [(n-1)+2] + [n+1]$$
$$= n\ (n+1)$$

Relations de récurrence

L'identité du binôme donne :

$$(p+1)^{k+1} = p^{k+1} + C_{k+1}^{k}\ p^k + C_{k+1}^{k-1}\ p^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{2}\ p^2 + C_{k+1}^{1}\ p + 1.$$

En ajoutant membre à membre, les égalités précédentes pour p variant de 1 à n, on obtient la relation (1) :

$$\boxed{(n+1)^{k+1} - (n+1) = C_{k+1}^{1} S_k(n) + C_{k+1}^{2} S_{k-1}(n) + \dots + C_{k+1}^{k-1} S_2(n) + C_{k+1}^{1} S_1(n)}$$

Cette première relation de récurrence permet de calculer de proche en proche les $S_k(n)$.

Par exemple, la relation $(n+1)^3 - (n+1) = 3\ S_2(n) + 3\ S_1(n)$ donne :

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On trouve de même $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Cette méthode de calcul des $S_k(n)$ devient cependant rapidement très lourde.

On a, de plus, les relations suivantes selon la parité de k :

- si k est pair

$$(p+1)^k + (p-1)^k = 2\ p^k + 2\ C_k^2\ p^{k-2} + 2\ C_k^4\ p^{k-4} + \dots + 2\ C_k^{k-2}\ p^2 + 2$$

- si k est impair et $k \geqslant 3$:

$$(p+1)^k + (p-1)^k = 2\ p^k + 2\ C_k^2\ p^{k-2} + 2\ C_k^4\ p^{k-4} + \dots + 2\ kp.$$

En ajoutant membre à membre les égalités précédentes pour p variant de 1 à n, on obtient les relations suivantes utiles pour ce qui suit :

- si k est pair

$$\boxed{(2')\quad (n+1)^k - (1+n^k) = 2\ C_k^2\ S_{k-2}(n) + 2\ C_k^4\ S_{k-4}(n) + \dots + 2\ C_k^{k-2}\ S_2(n) + 2n}$$

- si k est impair et $k \geqslant 3$

$$\boxed{(2'')\quad (n+1)^k - (1+n^k) = 2\ C_k^2\ S_{k-2}(n) + 2\ C_k^4\ S_{k-4}(n) + \dots + 2\ k\ S_1(n)}$$

Les $S_k(n)$ sont des polynômes en n, étudions quelques-unes de leurs propriétés :

Divisibilité

Pour k pair et $k \geqslant 2$, soit $k = 2m$ avec $m \geqslant 1$:

Le polynôme $(n+1)^{2m} - (1+n^{2m}) - 2n$ s'annule pour $n = 0$, $n = -1$ et $n = -\frac{1}{2}$, il est donc divisible par $n(n+1)(2n+1)$.

Comme $S_2(n)$ est divisible par $n(n+1)(2n+1)$, il en sera de même, d'après la relation de récurrence (2') pour tous les $S_{2m}(n)$ avec $m \geqslant 1$:

$$\boxed{S_{2m}(n) \text{ est divisible par } n(n+1)(2n+1) \text{ pour tout } m \geqslant 1.}$$

Pour k impair et $k \geqslant 3$, soit $k = 2m + 1$ avec $m \geqslant 1$:

$$(n+1)^{2m+1} - (1+n^{2m+1}) - 2(2m+1)\ S_1(n) = (n+1)^{2m+1} - (1+n^{2m+1}) - (2m+1)n^2 - (2m+1)n$$

Cette expression s'annule, ainsi que sa dérivée, pour $n = 0$ et pour $n = 1$, elle est donc divisible par $n^2(n+1)^2$.

Comme $S_3(n)$ est divisible par $n^2(n+1)^2$, il en sera de même, d'après la relation de récurrence (2") pour tous les $S_{2m+1}(n)$ avec $m \geqslant 1$:

$$\boxed{S_{2m+1}(n) \text{ est divisible par } n^2(n+1)^2 \text{ pour tout } m \geqslant 1.}$$

Dérivation

$S_k(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la relation de récurrence (1) permet de dire que

$S_k(n)$ est un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est $\frac{n^{k+1}}{k+1}$.

Désignons par $S'_k(n)$ le polynôme dérivé $\frac{d}{dn}[S_k(n)]$.

On a en utilisant la définition de $S_k(n)$: $S_k(n+1) - S_k(n) = (n+1)^k$

d'où : $$S'_k(n+1) - S'_k(n) = k\ (n+1)^{k-1}.$$

(On remarquera ici, en rigueur, que $S'_{k+1}(n+1)$ est bien égal à $\frac{d}{dn}[S_k(n+1)]$.)

Comme $(n+1)^{k-1} = S_{k-1}(n+1) - S_{k-1}(n)$, on a :

$$S'_k(n+1) - S'_k(n) = k\ [S_{k-1}(n+1) - S_{k-1}(n)].$$

D'où $S'_k(n+1) - k\ S_{k-1}(n+1) = S'_k(n) - k\ S_{k-1}(n)$.

Le polynôme $S'_k(n) - k\ S_{k-1}(n)$, de degré au plus égal à k, reste donc identique à lui même lorsque l'on change n en n+1 ; c'est donc un polynôme prenant une infinité de fois la même valeur : il est constant.

On a donc : $$S'_k(n) - k\ S_{k-1}(n) = S'_k(0) - k\ S_{k-1}(0).$$

Sachant que $S'_1(0) = \frac{1}{2}$, que $S'_{2m+1}(0) = 0$, car S_{2m+1} est divisible par n^2, et que $S_k(0) = 0$ pour tout k, on peut en déduire :

$$\boxed{S'_1(n) = S_0(n) + \frac{1}{2}}$$

et pour $m \geqslant 1$:

(3') $S'_{2m+1}(n) = (2m+1)\ S_{2m}(n)$	(3") $S'_{2m}(n) = 2m\ S_{2m-1}(n) + S'_{2m}(0)$

Calcul des $S_k(n)$ par intégrations

Nous noterons $S'_{2m}(0) = \lambda_{2m}$ et nous partons de $\boxed{S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Calcul de $S_2(n)$

$S'_2(n) = 2\ S_1(n) + \lambda_2$, ainsi S_2 est la primitive de $2\ S_1 + \lambda_2$ s'annulant en 0

$$S_2(n) = \int_0^n (t^2 + t)\ dt + \lambda_2 n \quad \text{soit} \quad S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \lambda_2 n$$

λ_2 s'obtient grâce à la divisibilité par (n+1) qui impose $-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\lambda_2=0$

soit $\lambda_2=\frac{1}{6}$.

$$\boxed{S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Calcul de $S_3(n)$

$S_3'(n) = 3\ S_2(n) = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$ $\qquad S_3(n)=\int_0^n\left(t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{t}{2}\right)dt$

$$\boxed{S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Calcul de $S_4(n)$

$S_4'(n) = 4\ S_3(n)+\lambda_4$ $\quad$ d'où $S_4(n)=\int_0^n (t^4+2t^3+t^2)\ dt+\lambda_4 n$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}+\lambda_4 n$$

La divisibilité par (n+1) impose $-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\lambda_4=0$ d'où $\lambda_4=\frac{-1}{30}$.

$$\boxed{S_4(n)=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}}$$

On poursuivra cette technique, la divisibilité par (n+1) n'étant d'ailleurs utile que pour k pair. On obtient ainsi, par exemple :

$$\boxed{S_5(n)=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n+1)}{12}}$$

$$\boxed{S_6(n)=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}}$$

Parité et imparité de $S_k(n) - \frac{n^k}{2}$

D'après la relation de récurrence (1), les deux termes de plus hauts degrés de $S_k(n)$ sont $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ et $\frac{n^k}{2}$.

On a $\boxed{S_k(n) - \frac{n^k}{2} \text{ est de la parité de } (k-1)}$ c'est-à-dire que :

$S_{2m+1}(n)$ ne contient que des termes d'exposants pairs, sauf $\frac{n^{2m+1}}{2}$

et $S_{2m}(n)$ ne contient que des termes d'exposants impairs, sauf $\frac{n^{2m}}{2}$.

Démonstration par récurrence

$S_4(n)$ vérifie cette propriété.
Supposons que cette propriété est vraie pour $S_k(n)$, alors on prouve qu'elle est vraie pour $S_{k+1}(n)$ en utilisant :

- la relation (3') si k est pair,
- la relation (3") et le fait que $S_{k+1}(0) = 0$ si k est impair.

La récurrence est bien établie.

Formule générale des $S_k(n)$

Cette formule générale découle du théorème suivant :

Théorème

Soit une suite de polynôme $(P_k(n))$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de $P_k(n)$ est égal à $(k+1)$ et $P_k(0) = 0$, donc $P_0(n) = an$.

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P'_k(n) = k\, P_{k-1}(n) + \mu_k$ où μ_k est une constante dépendant de k, on peut écrire :

$$\boxed{P_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[an^{k+1} + (k+1)\mu_1 n^k + C_{k+1}^2 \mu_2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1}\mu_{k-1} n^2 + (k+1)\mu_k n\right]}$$

ou encore :

$$\boxed{P_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[a\, n^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} C_{k+1}^{p}\, \mu_p n^{k+1-p}\right]}$$

Démonstration par récurrence

En effet, $P_1'(n) = P_0(n) + \mu_1$ donne bien $P_1(n) = \frac{1}{2}[a\ n^2 + 2\ \mu_1 n]$.

Supposons la formule vraie pour k, on obtient $P_{k+1}(n)$ en intégrant $P'_{k+1}(n) = (k+1)\ P'_k(n) + \mu_{k+1}$.

Ceci fournit la même formulation, relative à (k+1) car le terme général en

est $\frac{1}{k+2}\ \frac{(k+2)\ C^p_{k+1}\ \mu_p\ n^{k-p+2}}{k-p+2}$ qui n'est autre que $\frac{1}{k+2}\ C^p_{k+2}\ \mu_p\ n^{k-p+2}$.

Ce théorème s'applique aux $S_k(n)$ dont on a établi les formules de dérivation.
On a :

$a = 1$ car $S_0(n) = n$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_{2m+1} = 0$ pour $m \geqslant 1$ et $\mu_{2m} = \lambda_{2m} = S'_{2m}(0)$.

d'où :

- si k est impair

$$\boxed{S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[n^{k+1} + \frac{k+1}{2}\ n^k + C^2_{k+1}\ \lambda_2 n^{k-1} + C^4_{k+1}\ \lambda_4 n^{k-3} + \ldots + C^{k-1}_{k+1}\ \lambda_{k-1} n^2\right]}$$

- si k est pair

$$\boxed{S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[n^{k+1} + \frac{k+1}{2}\ n^k + C^2_{k+1}\ \lambda_2 n^{k-1} + C^4_{k+1}\ \lambda_4 n^{k-3} + \ldots + (k+1)\ \lambda_k n\right]}$$

On retrouve ici la propriété de parité et imparité établie plus haut. Dans la deuxième partie de cet exposé, nous établirons que, pour $k \geqslant 2$, les λ_k sont les nombres de Bernoulli, qui seront notés β_k.

$\lambda_2 = \frac{1}{6}$ $\qquad \lambda_4 = -\frac{1}{30}$ $\qquad \lambda_6 = \frac{1}{42}$ $\qquad \lambda_8 = -\frac{1}{30}$ $\qquad \lambda_{10} = \frac{5}{66}$

$\lambda_{12} = -\frac{691}{2\ 730}$ $\qquad \lambda_{14} = \frac{7}{6}$ $\qquad \lambda_{16} = -\frac{3\ 617}{510}$ $\qquad \lambda_{18} = \frac{43\ 867}{798}$ $\qquad \lambda_{20} = -\frac{174\ 611}{330}$

$\lambda_{22} = \frac{854\ 513}{138}$ $\qquad \lambda_{24} = -\frac{236\ 364\ 091}{2\ 730}$

On justifiera aussi que $\mu_1 = \beta_1 + 1$ où $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ est le seul nombre de Bernoulli d'indice impair qui soit non nul.

II - Polynômes de Bernoulli, nombres de Bernoulli

Polynômes de Bernoulli

Nous les noterons $B_k(n)$ $k \geqslant 0$. Ils sont définis par :

$$\boxed{B_0 = 1 \quad ; \quad B_k'(n) = k\, B_{k-1}(n) \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_k(t)\, dt = 0 \quad \text{pour} \quad k \geqslant 1.}$$

Remarquons que ceci entraîne, pour $k \geqslant 2$, $B_k(1) = B_k(0)$ car :

$$B_k(1) - B_k(0) = \int_0^1 B_k'(t)\, dt = k \int_0^1 B_{k-1}(t)\, dt = 0.$$

$B_1'(n) = 1$ donne $B_1(n) = n + \beta_1$ et $\int_0^1 B_1(t)\, dt = 0$ donne $\frac{1}{2} + \beta_1 = 0$ soit $\beta_1 = -\frac{1}{2}$;

$B_2'(n) = 2n - 1$ donne $B_2(n) = n^2 - n + \beta_2$ et $\int_0^1 B_2(t)\, dt = 0$ donne $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \beta_2 = 0$ soit $\beta_2 = \frac{1}{6}$;

$B_3'(n) = 3n^2 - 3n + \frac{1}{2}$ donne $B_3(n) = n^3 - \frac{3}{2} n^2 + \frac{n}{2} + \beta_3$ et $\int_0^1 B_3(t)\, dt = 0$ conduit à $\beta_3 = 0$.

Poursuivant ainsi, on obtient $\beta_4 = -\frac{1}{30}$; $\beta_5 = 0$; $\beta_6 = \frac{1}{42}$ et $\beta_7 = 0$. D'où :

$$B_0(n) = 1 \quad ; \quad B_1(n) = n - \frac{1}{2} \quad ; \quad B_2(n) = n^2 - n + \frac{1}{6} \quad ;$$

$$B_3(n) = n^3 - \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \quad ; \quad B_4(n) = n^4 - 2n^3 + n^2 - \frac{1}{30} \quad ;$$

$$B_5(n) = n^5 - \frac{5}{2} n^4 + \frac{5}{3} n^3 - \frac{1}{6} n \quad ; \quad B_6(n) = n^6 - 3n^5 + \frac{5}{2} n^4 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{42} \quad ;$$

$$B_7(n) = n^7 - \frac{7}{2} n^6 + \frac{7}{2} n^5 - \frac{7}{6} n^3 + \frac{1}{6} n.$$

Nombres de Bernoulli

Ce sont les $\beta_k = B_k(0)$.

Nous allons montrer que les $\lambda_k = S_k'(0)$ pour $k \geqslant 2$ qui ont été introduits dans le calcul des $S_k(n)$, sont égaux à β_k et que $\mu_1 = S_1'(0)$ est égal à $(\beta_1 + 1)$.

Formule générale des $B_k(n)$

Pour $k \geqslant 1$, on a $\boxed{B_k(n+1) - B_k(n) = k\, n^{k-1} \quad (4)}$.

Démonstration par récurrence sur k

$$B_1(n+1) - B_1(n) = \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right) = 1\ ;$$

$$B_2(n+1) - B_2(n) = \left((n+1)^2 - (n+1) + \frac{1}{6}\right) - \left(n^2 - n + \frac{1}{6}\right) = 2n.$$

Supposant la relation vraie pour l'indice k, on peut écrire :

$$\frac{1}{k+1}\,[B'_{k+1}(n+1) - B'_{k+1}(n)] = k\, n^{k-1}.$$

Intégrant ceci de 0 à n, on a :

$$\frac{1}{k+1}\,[B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(n) - B_{k+1}(1) + B_{k+1}(0)] = n^k$$

soit $\quad B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(n) = (k+1)\, n^k \quad$ car $B_{k+1}(1) = B_{k+1}(0)$.

La récurrence est bien établie.

Ajoutant membre à membre les égalités (4) pour n variant de 1 à m, on obtient :

$$B_k(m+1) - B_k(1) = k\, S_{k-1}(m).$$

Nous avons donc, pour $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 0$ et pour $k = 1$ et $n \geqslant 1$,

$$B_k(n+1) = k\, S_{k-1}(n) + \beta_k \quad \text{car} \quad B_k(1) = B_k(0) = \beta_k.$$

Ceci s'écrit aussi : $\boxed{B_k(n) = k\, S_{k-1}(n) + \beta_k - k\, n^{k-1}}$.

Dans l'expression de $S_{k-1}(n)$ le terme d'exposant (k-1) est $\mu_1\, k\, n^{k-1}$ avec $\mu_1 = \frac{1}{2}$. Il devient donc, dans $B_k(n)$ $(\mu_1 - 1)\, k\, n^{k-1}$ avec $\mu_1 - 1 = -\frac{1}{2}$.

D'où :

- si k est pair

$$\boxed{B_k(n) = n^k - \frac{k}{2}\, n^{k-1} + C_k^2\, \lambda_2\, n^{k-2} + C_k^4\, \lambda_4\, n^{k-4} + \ldots + C_k^{k-2}\, \lambda_{k-2}\, n^2 + \lambda_k}$$

- si k est impair

$$\boxed{B_k(n) = n^k - \frac{k}{2}\, n^{k-1} + C_k^2\, \lambda_2\, n^{k-2} + C_k^4\, \lambda_4\, n^{k-4} + \ldots + k\, \lambda_{k-1}\, n}$$

Ceci démontre que : $\begin{cases} \lambda_k = \beta_k & \text{pour k pair} \\ \lambda_k = \beta_k = 0 & \text{pour k impair supérieur ou égal à 3} \\ \mu_1 = \beta_1 + 1 & \end{cases}$

résultats que nous annoncions à la fin de la première partie.

On remarquera que l'expression de $B_k(n)$ peut également s'obtenir en montrant que le polynôme $P_k(n) = \frac{1}{k+1}[B_{k+1}(n) - \beta_{k+1}]$ vérifie les conditions du théorème ayant conduit à l'expression des $S_k(n)$.

Récurrences sur les nombres de Bernoulli

Ecrivant $B_k(1) = \beta_k$, il vient :

$$\boxed{0 = 1 - k\,\beta_1 + C_k^2\,\beta_2 + C_k^4\,\beta_4 + C_k^6\,\beta_6 + \ldots + \begin{cases} C_k^{k-2}\,\beta_{k-2} & \text{si k pair} \\ k\,\beta_{k-1} & \text{si k impair} \end{cases}}$$

qui permet le calcul, de proche en proche, des β_{2m} de deux façons, soit avec k pair, soit avec k impair.

On aurait d'autres formules également utilisables, en écrivant, par exemple $B_k(2) = \beta_k + k$ ou $B_k(3) = \beta_k + k + k\,2^{k-1}$ et ainsi de suite.

C'est toutefois la relation issue de $B_k(1) = \beta_k$ qui va permettre de lier les nombres de Bernoulli à la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$.

Développement de $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$

Les nombres de Bernoulli sont souvent définis à partir du développement en série entière de f(t) sous la forme :

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 + \frac{a_1}{1!}\,t + \frac{a_2}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{a_k}{k!}\,t^k + \ldots$$

Identifiant à t le produit $(e^t - 1)\left(1 + \frac{a_1}{1!}\,t + \frac{a_2}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{a_k}{k!}\,t^k + \ldots\right)$,

c'est-à-dire :

$$\left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \ldots\right)\left(1 + a_1 t + \frac{a_2}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{a_k}{k!}\,t^k + \ldots\right) = t$$

on obtient, par exemple, $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{6}$; $a_3 = 0$.

L'annulation du terme en t^k dans le produit donne :

$$\frac{1}{k!} + \frac{a_1}{(k-1)!} + \frac{a_2}{2!\ (k-2)!} + \frac{a_3}{3!\ (k-3)!} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} = 0$$

et ceci n'est autre que la relation liant les β_m, que l'on a obtenue à partir de $B_k(1) = \beta_k$.

Finalement, cela démontre donc que $a_k = \beta_k$ pour tout k.

$$\boxed{\frac{t}{e^t - 1} = 1 + \frac{\beta_1}{1!} t + \frac{\beta_2}{2!} t^2 + \frac{\beta_3}{3!} t^3 + \ldots + \frac{\beta_k}{k!} t^k + \ldots}$$

étant entendu que les β_{2k+1} sont nuls pour $k \geqslant 1$.

Ce dernier point correspond au fait que $\frac{t}{e^t - 1} - \beta_1 t$ est pair. En effet

$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = t \frac{e^t + 1}{2(e^t - 1)}$ reste inchangé lorsqu'on change t en $-t$.

Notons enfin que certains auteurs appellent "polynômes de Bernoulli" les polynômes $P_k(n)$ définis par :

$$P_1(n) = n - \frac{1}{2} \quad ; \quad P'_k(n) = P_{k-1}(n) \quad \text{et} \quad P_k(1) = P_k(0)$$

Ceci correspond à $P_k(n) = \frac{B_k(n)}{k!}$ car

$$P'_k(n) = \frac{1}{k!} B'_k(n) = \frac{k}{k!} B_{k-1}(n) = \frac{1}{(k-1)!} B_{k-1}(n) = P_{k-1}(n).$$

Les nombres de Bernoulli sont alors donnés par $k!\ P_k(0) = \beta_k$.

Marcel DAVID

A.P.M.E.P. ADHÉSIONS - ABONNEMENTS - COMMANDES BROCHURES

Partie à retourner à : **APMEP, 26 rue Duméril, 75013 PARIS,** *accompagnée de votre règlement.*

NOM : ....
Adresse : ....
....
....

I- ADHÉSIONS-ABONNEMENT

Indiquez ci-contre, pour la formule que vous avez choisie, le CODE et le MONTANT
Frais d'envoi éventuels →

Code	Montant de l'adhésion et/ou de l'abonnement
	F
	F

II-BON DE COMMANDE

A- SERVEUR TELEMATIQUE

En cas de réabonnement → *Mot de passe :* ....

15

Serveur : .... F

B-BROCHURES

Reporter ci-contre les numéros des brochures que vous désirez commander.

N°Brochures	Montant

III- *Joindre à l'ordre de l'A.P.M.E.P. un chèque postal* ☐ *, bancaire* ☐

TOTAL ....

ADHESIONS-ABONNEMENTS-ANNEE CIVILE 1995

DIVERSES FORMULES

I.Tarifs préférentiels pour les enseignants

TARIFS 1995 (Membres adhérents et associés)	Adhésion + BGV	Adhésion + abonnement
Adhérents enseignant en préélémentaire et élémentaire. Adhérents en disponibilité. Adhérents en retraite ou demi service. 1ère adhésion.	105F(C1)	225F(A1)
Autres membres	225F(C2)	345F(A2)

II.Tarifs spéciaux pour professeurs polyvalents (réservé aux enseignants)

Autres disciplines	Français (AFEF)	Biologie Géologie (APBG)	Physique Collège (APISP)	Physique (UDP) *service complet*	Physique(UDP) *Service réduit Collège*
	360F(F)	475F(S)	395F(P)	555F(U)	385F(D)

L'abonnement AFEF, dans l'abonnement jumelé APMEP/AFEF est de 1 an à compter de l'inscription.
Pour l'abonnement APMEP/UDP à l'étranger, ajouter 80F pour envoi par voie de surface (Avion, voir UDP).

III.Abonnement aux publications (tarif général établissements).

Abonnement au Bulletin APMEP	400F	Code B1
Abonnement au BGV (feuille d'actualité)	85F	Code B2
Abonnement au Bulletin et BGV	460F	Code B3

La facture ne pourra être datée que de 1993

IV.Abonnement au serveur télématique 36-14 *(voir BGV n°57 de juin 94 pour le mode d'emploi)*

abonnement à titre expérimental 50F

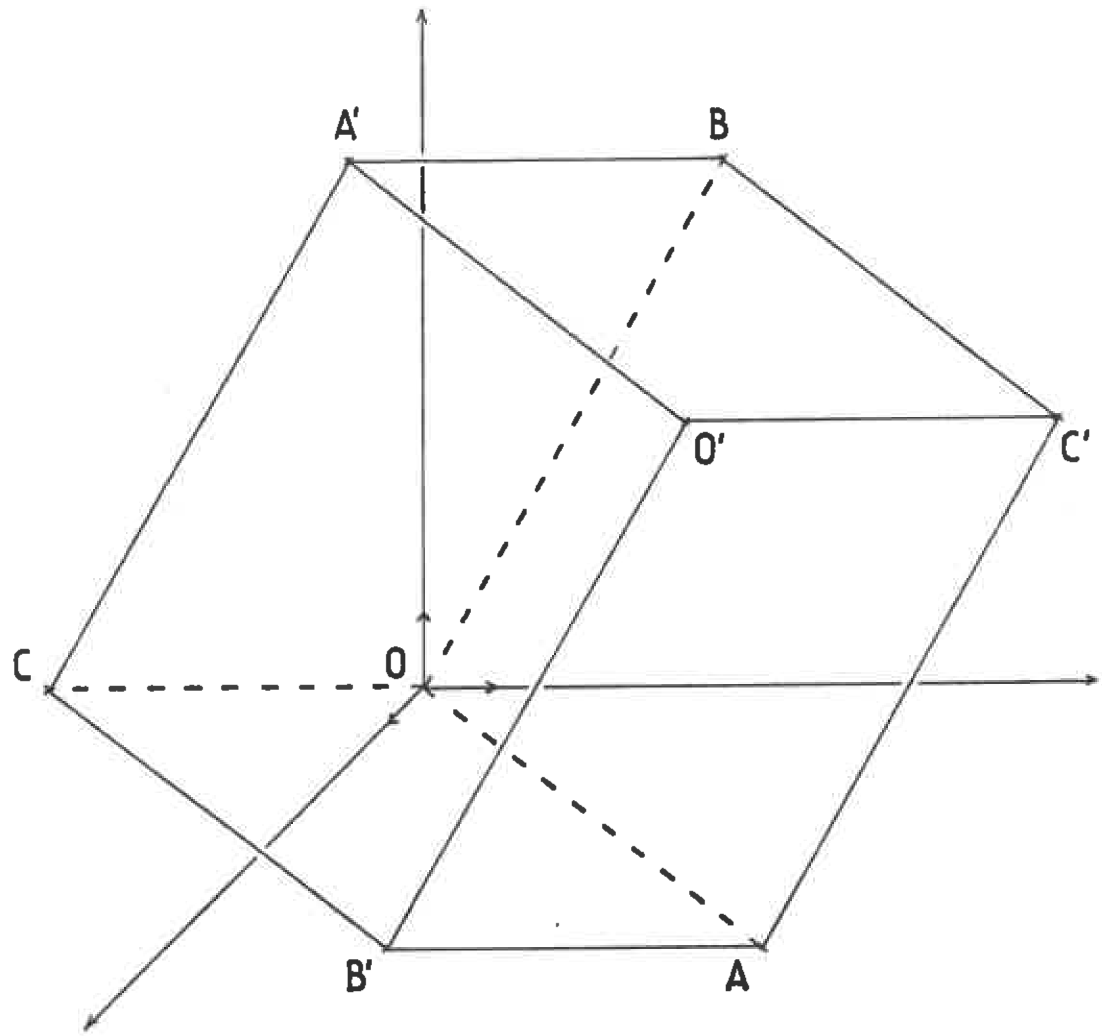
V. Vous pourrez commander des brochures à prix réduit *(réduction valable pour cette seule commande, prise sur la liste suivante - 1 exemplaire de chaque et 10 exemplaires maximum dans la limite des stocks disponibles).*

N°	Titre des brochures	Prix réduit
36	Elem-math VI : le triangle à l'école élémentaire, 1980, 60 pages	10
49	Elem-math VII : aides pédagogiques pour le cycle moyen, 1983, 116 pages	20
84	Actualisation des brochures EVAPM 6° et 5°, 1991, 160 p., format A4	90
89	Actualisation des brochures EVAPM 4° et 3°, 1993, 192 p., format A4	90
70	Ces problèmes qui font les mathématiques ; la trisection de l'angle, 1993, 100 p.	50
92	Les problèmes de l'APMEP, Tome I, arithmétique, 1993, 152 pages	65
93	Les problèmes de l'APMEP, Tome II, géométrie, 1994, 168 pages	65
94	Les problèmes de l'APMEP, Tome III, probabilités, ... , 1994 168 pages	65
41	Fragments d'histoire des mathématiques, tome 1, 1983, 176 pages	35
65	Fragments d'histoire des mathématiques, tome 2, 1987, 212 pages	50
86	Fragments d'histoire des mathématiques, tome 4, 1992, 202 pages	80
78	Jeux 3 : jeux pour la tête et les mains, 1990, 158 pages	65

Frais d'envoi pour expédition hors CEE : 150 F.

André Viricel est né le 1 Juillet 1913. Il fut professeur dans plusieurs Ecoles Normales d'Alsace. Retraité depuis 1973, il a participé activement à l'élaboration du **Petit Archimède.** Il vient de publier, en 1993, **le théorème de Morley** avec la collaboration de Jacques Bouteloup (éditions A.D.C.S. BP222 80002 AMIENS CEDEX 1).

L'article qui suit apporte une solution au problème des **cubes entiers** : placer dans un repère orthonormal huit points à coordonnées entières qui soient les sommets d'un cube. (Il suffit de connaitre quatre de ces points O A B C).



CUBES ENTIERS

Certaines relations entre nombres réels peuvent,lorsqu'on les remplace par des nombres complexes en engendrer d'autres

On part,par exemple,de l'équation diophantienne de Pythagore : $x^2 = y^2 + z^2$

Les solutions en sont bien connues $x = m^2 + n^2$; $y = m^2 - n^2$; $z = 2mn$

(m et n étant des entiers ;on ne se préoccupe pas d'obtenir des nombres premiers entre eux

On donne maintenant à m et à n des valeurs complexes

$$m = a + ci$$
$$n = b + di$$

Alors : $x = (a+ci)^2 + (b+di)^2 = (a^2+b^2-c^2-d^2) + 2(ac+bd)i$

$y = \quad '' \quad - \quad '' \quad = (a^2-b^2-c^2+d^2) + 2(ac-bd)i$

$z = 2(a+ci)(b+di) = 2[(ab-cd)+(ad+bc)i]$

On remplace x,y,z par ces valeurs dans l'équation initiale

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 4(ac+bd)^2 + 4(a^2+b^2-c^2-d^2)(ac+bd)i$$
$$= (a^2-b^2-c^2+d^2)^2 - 4(ac-bd)^2 + 4(a^2-b^2-c^2+d^2)(ac-bd)i$$
$$+4(ab-cd)^2 - 4(ad+bc)^2 + 8(ab-cd)(ad+bc)i$$

En égalant les parties réelles et imaginaires,on est conduit à :

$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 4(ac-bd)^2 + 4(ad+bc)^2 = (a^2-b^2-c^2+d^2)^2 + 4(ac+bd)^2 + 4(ab-cd)^2 \quad (1)$

et à : $(a^2+b^2-c^2-d^2)(ac+bd) - (a^2-b^2-c^2+d^2)(ac-bd) + 2(ab-cd)(ad+bc) = 0 \quad (2)$

La 1° relation peut exprimer que les normes de deux vecteurs sont égales

La 2° que leur produit scalaire est nul

Il reste à choisir l'ordre d'écriture des composantes

Par exemple,pour l'un d'eux, U ,

$a^2+b^2-c^2-d^2$ en faisant deux permutations circulaires successives sur b, c d

$2(ad+bc)$ on obtient les composantes de deux autres vecteurs

$-2(ac-bd)$

On obtient pour l'un : $a^2-b^2+c^2-d^2 \quad 2(ab+cd) \quad -2(ad-bc)$

et pour l'autre : $a^2-b^2-c^2+d^2 \quad 2(ac+db) \quad -2(ab-cd)$

C'est ce dernier qui a déjà été mentionné,à l'ordre près des composantes.

On rétablit cet ordre ,en nommant les vecteurs

Vecteur U	Vecteur V	Vecteur W
$a^2+b^2-c^2-d^2$	$-2(ad-bc)$	$2(ac+bd)$
$2(ad+bc)$	$a^2-b^2+c^2-d^2)$	$-2(ab-cd)$
$-2(ac-bd)$	$2(ab+cd)$	$a^2-b^2-c^2+d^2$

On peut s'assurer que les normes des trois vecteurs sont égales

et que les produits scalaires deux à deux sont nuls

Ainsi,l'égalité de Pythagore en nombres entiers a conduit à considérer un triplet de vecteurs de meme norme,deux à deux perpendiculaires .Les paramètres a,b,c,d sont des nombres réels quelconques.

En leur donnant des valeurs prises dans Z, les composantes appartiennent à Z Dans ces conditions,dans un système orthonormé OXYZ ,les points A , B ,C dont les coordonnées sont les composantes des vecteurs U,V,W et le point O sont quatre sommets d'un cube dont tous les sommets ont des coordonnées entières

La matrice 3 x 3 dont les colonnes sont les composantes de U,V,W caractérise un. cube ,dit " **cube entier** "

Les formules trouvées ont été données pour la première fois par un professeur de Bordeaux au 19 ° Siècle ,**Olinde Rodrigues**.Elles donnaient la solution d'un problème de Mécanique sans qu'il apparaisse que son auteur ait songé à des cubes entiers.

Remarques : L'arête d'un cube entier est entière ; elle est égale à la racine carrée de la somme des carrés des termes d'une ligne ou d'une colonne de la matrice

Le produit matriciel des matrices de deux cubes entiers est la matrice d'un cube entier dont l'arete est le produit des aretes des deux cubes.

A . Viricel

La raison de cette propriété tient au fait que la matrice d'un cube entier est une matrice de similitude .Faire agir même plusieurs fois de telles matrices conserve la propriété initiale .

N.D.L.R. : On vérifie aisément que l'arête d'un cube entier est entière :

$|U|^2 = (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 4(ad+bc)^2 + 4(ac-bd)^2$

$|U|^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)$

$|U|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

La matrice d'un cube entier est une matrice de similitude car elle transforme la base canonique en une base orthogonale U,V,W telle que : $|U| = |V| = |W| = a^2+b^2+c^2+d^2$.

Voici deux exemples de cubes entiers :

Pour $a = 2$, $b = c = d = 1$, on obtient A(3;6;-2) B(-2;3;6) C(6;-2;3).

Le cube a pour arête : $OA = OB = OC = \sqrt{9+36+4} = 7$.

La matrice $M = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ est une matrice de rotation dont l'axe est dirigé par le vecteur de coordonnées (1;1;1). (Il suffit de chercher le sous espace des vecteurs colonnes invariants par M).

Les autres sommets du cube sont O'(7;7;7) A'(4;1;9) B'(9;4;1) C'(1;9;4).

Pour $a = b = 1$, $c = 3$, $d = -2$, on obtient A(-11;2;-10) B(10;5;-10) et C(2;-14;-5). Le cube a pour arête 15.

MATHÉMATIQUES

Epreuve écrite :
Série L : enseignement de spécialité
Durée 3 h - coefficient 4
Série ES : enseignement obligatoire
Durée 3 h - coefficient 5
Enseignement obligatoire et enseignement de spécialité, durée 3 h - coefficient 7
Série S : enseignement obligatoire
Durée 4 h - coefficient 7
Enseignement obligatoire et enseignement de spécialité, durée 4 h - coefficient 9

MODALITÉS

Les enseignements de mathématiques suivis par les candidats au baccalauréat des trois séries de l'enseignement général sont évalués sous la forme d'une épreuve écrite.

NATURE DES ÉPREUVES

- L'épreuve comporte un problème et deux exercices indépendants les uns des autres. Le barème des points attribués au problème et aux exercices est indiqué sur le sujet. Il doit respecter les limites suivantes : de 8 à 12 points pour le problème, de 4 à 6 points pour chaque exercice.
- Pour la série L, l'épreuve porte sur le programme de l'enseignement de spécialité mathématiques spécifique à cette série.

Pour les séries ES et S, l'épreuve comporte une partie commune et une partie spécifique :
- la partie commune est constituée du problème et d'un des deux exercices ; elle porte sur le programme de l'enseignement obligatoire ;
- la partie spécifique est constituée du deuxième exercice qui est différent selon que le candidat a choisi ou non les mathématiques comme enseignement de spécialité. Il porte sur l'ensemble du programme (enseignement obligatoire et enseignement de spécialité) pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité et seulement sur l'enseignement obligatoire dans le cas contraire.

RECOMMANDATIONS

On veillera à garder aux épreuves une ampleur et une difficulté modérées. Il convient d'insister sur ce point lors de l'élaboration, du choix et du contrôle des sujets, car l'expérience des années récentes a montré que cette disposition n'a pas toujours été respectée.
Les notions rencontrées dans le programme obligatoire des classes antérieures à la classe terminale mais non reprises dans celle-ci ne constituent pas le ressort principal des sujets composant l'épreuve, mais elles doivent être assimilées par les candidats qui peuvent avoir à les utiliser.
Les démonstrations des théorèmes figurant au programme ne sont pas exigibles.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent des objectifs majeurs pour des épreuves écrites de mathématiques et entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le candidat doit éviter de recourir abusivement aux symboles logiques. Les formules mathématiques doivent être intégrées à des phrases correctement rédigées. Les tableaux numériques, les diagrammes et les figures doivent faire l'objet d'un commentaire qui en précise clairement la signification.
Dans toutes les séries, les épreuves peuvent comporter des calculs numériques et des tracés de figure. L'usage des calculatrices scientifiques programmables et d'instruments de dessin est autorisé sauf mention particulière sur le sujet. Il convient donc d'indiquer en tête de chaque sujet que l'usage des calculatrices ainsi que celui du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

LE PROBLÈME

Il est souhaitable que le problème porte sur une partie étendue du programme et que son thème recoupe le moins possible ceux des exercices.
Son énoncé doit être aussi progressif que possible et permettre au candidat de contrôler l'exactitude des résultats et surtout ceux dont dépendent les questions suivantes.
Il convient d'écarter résolument les sujets trop longs comportant un grand nombre de questions, où le candidat ne peut faire preuve d'aucune initiative ; il en est de même des sujets trop ambitieux sur le plan théorique et conceptuel qui, outre les défauts précédents, ne permettent pas au candidat de discerner la finalité des questions mathématiques qu'on lui demande de résoudre.
Le sujet du problème doit être suffisamment modeste pour laisser au candidat une certaine autonomie dans le choix des méthodes de résolution. Cela ne signifie pas qu'il doive consister en un enchaînement de situations bien répertoriées d'applications directes du cours : il s'agit en effet d'apprécier la capacité du candidat à mobiliser ses connaissances dans des contextes variés faisant intervenir plusieurs parties du programme et à utiliser de façon pertinente les indications fournies par l'énoncé.
Le problème comportant un ou plusieurs objectifs mathématiques : il est souhaitable qu'ils soient clairement explicités, par exemple dans un court préambule.

LES EXERCICES

Les deux exercices portent sur des domaines différents du programme. Ils peuvent éventuellement comporter plusieurs questions, mais celles-ci doivent être peu nombreuses.
Les questions posées doivent être des applications directes des résultats ou des méthodes figurant au programme. En revanche, les exercices peuvent exiger des initiatives pour l'organisation et la rédaction de la solution. En outre, pour le série S, la dernière question de l'un des exercices pourra prendre la forme d'un énoncé pour lequel le candidat doit indiquer s'il est vrai ou faux et proposer, selon le cas, une démonstration ou un contre exemple. Ici encore il ne peut s'agir que d'applications simples et directes du cours.
Dans toutes les séries, le thème de l'un des deux exercices sera choisi en rapport étroit avec les objectifs propres à chacune. Il pourra porter sur une question faisant appel à d'autres disciplines figurant au programme de la section considérée, à condition que les connaissances requises soient données dans l'énoncé.

Epreuve orale de contrôle :
Durée 15 minutes
Temps de préparation 15 minutes
Il s'agit d'apprécier si le candidat maîtrise les connaissances de base : à cet effet il sera interrogé sur au moins deux questions.

ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE

Epreuve écrite
Série L
Durée 1 h 30
coefficient 2
Série ES
Epreuve facultative
Durée 1 h 30
Le sujet de l'épreuve de baccalauréat comporte trois groupes de questions : un de mathématiques, un de physique chimie, un de sciences de la vie et de la terre. Les questions sont diverses, indépendantes les unes des autres. Leur forme n'est pas définie à priori. Elles appellent des réponses brèves.
Dans chaque discipline, les candidats sont tenus de répondre à un certain nombre de questions qu'ils choisissent à leur convenance parmi celles qui leur sont proposées : ce nombre est indiqué en tête de l'énoncé. Il est supérieur à la moitié du nombre total des questions posées. Dans chaque discipline une note sur 20 est attribuée ; la note totale sur 60 sera ramenée sur 20, en arrondissant en cas de besoin au point supérieur.
En sciences de la vie et de la terre, les candidats répondent à quatre des six questions posées. Celles-ci diffèrent entre elles par les points du programme sur lesquels elles portent et la part respective des connaissances, des raisonnements, des compétences méthodologiques mis en jeu, avec ou sans documents d'appui.

Epreuve orale de contrôle
durée 15 minutes
coefficient 2
L'épreuve orale porte sur l'une des trois disciplines. Le candidat doit fixer son choix lorsqu'il s'inscrit aux épreuves du second groupe. L'objectif de l'épreuve est de tester l'aptitude du candidat à conduire un raisonnement scientifique, à exploiter une hypothèse et à justifier ses choix.

IV- Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme (arrêté du 10 juin 1994)

1. - Représentations graphiques

La représentation graphique des fonctions joue un rôle important dans l'apprentissage de l'analyse.

2. - Calculatrices et informatique

L'usage des calculatrices modifie certaines parties de l'enseignement. Les calculatrices sont notamment un bon outil pour découvrir le mode de pensée algorithmique, pour faire des conjectures, ou pour vérifier certains résultats. Leur usage en sera développé chaque fois que cela sera possible.

Les élèves doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles en fin de Terminale :

- savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres ;

- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces touches ;

- savoir programmer une instruction séquentielle et, en ce qui concerne l'enseignement de spécialité en Terminale, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

Il est conseillé de disposer d'un modèle comportant les fonctions statistiques (à une ou deux variables) et dont les caractéristiques répondent aux spécifications et aux objectifs précédents. En revanche, les écrans graphiques ne sont pas demandés.

L'usage de tableurs et de grapheurs est vivement conseillé dans la mesure des possibilités de l'établissement. En relation avec l'enseignement des autres disciplines, on entraînera les élèves à lire et à produire des graphiques : le choix d'une bonne échelle, le cadrage sur un intervalle, le choix éventuel d'une graduation logarithmique, sont des activités à développer.

3. - Vocabulaire et liaison avec d'autres disciplines

Certains mots employés dans d'autres disciplines n'ont pas toujours le même sens qu'en mathématiques, ni même nécessairement une définition mathématique précise. Il ne s'agit pas de procéder à un exposé théorique de ces notions mais de les éclairer lorsqu'on les rencontre dans le programme, en s'appuyant sur des textes pris en économie ou en géographie (par exemple, les termes de croissance en un point et de croissance régulière, qui ne font pas partie du vocabulaire mathématique usuel, n'ont pas à faire l'objet d'une définition formelle).

- Taux d'accroissement de f entre a et b $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Le taux d'accroissement de f entre a et b tel qu'il est défini en mathématiques, n'est pas considéré comme un taux par les économistes (il ne s'exprime pas en pourcentage), mais comme un accroissement moyen (exemple : une population augmentant de 3000 habitants par an).
- Dérivée f '(a) de f en a.	La dérivée de f en a est à relier à la notion de croissance en a, utilisée en économie. En économie, les unités de mesure sont souvent grandes (production mesurée en milliers d'unités de fabrication, ...). Le passage au nombre dérivé correspond alors à un petit accroissement en valeur relative de la variable. Par exemple, le coût marginal correspond à un accroissement d'une unité de fabrication.
- Dérivée logarithmique $\dfrac{f'(a)}{f(a)}$ de f en a.	Pour une fonction exponentielle, la dérivée logarithmique est constante. Cela correspond en économie à la notion de croissance à taux constant ou croissance régulière. Plus précisément, si la fonction est mise sous la forme $(1+\tau)^t$, le nombre τ s'appelle taux de croissance annuel.

V. Programme (arrêté du 10 juin 1994)

Dans ce texte les parties spécifiques à l'enseignement de spécialité sont différenciées par l'utilisation de caractères italiques.

L'enseignement de spécialité a pour objectif d'approfondir et de développer certains paragraphes étudiés dans l'enseignement obligatoire.

Comme en classe de Première, le choix des contenus s'est fait en harmonie avec la dominante économique et sociale de la série ES, et en vue de poursuites d'études faisant une large place aux mathématiques.

Il s'agit d'élargir les acquis des élèves dans les domaines de l'algèbre, de l'analyse et des probabilités. On exploitera, le plus souvent possible, des situations issues de l'algèbre, de la géométrie, des autres disciplines et particulièrement des sciences économiques et sociales, en distinguant les différentes étapes : mise en équation, traitement mathématique, contrôle et interprétation des résultats.

I. Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme

Ces objectifs et capacités sont définis dans la partie IV.

II. Statistique, probabilités

1. - Statistique descriptive

Les méthodes de la statistique descriptive sont appliquées au traitement de l'information chiffrée, provenant notamment de la vie économique et sociale. Les activités feront largement usage des moyens informatiques disponibles et seront un lieu privilégié de travail interdisciplinaire. Il est souhaitable que les documents utilisés soient authentiques.

Comme dans les classes antérieures, on entraînera les élèves à la pratique de la démarche propre à la statistique : lecture de données, choix des résumés, exécution des calculs, présentation des résultats, contrôle et analyse critique de ces résultats.

Séries statistiques à deux variables	A l'occasion de l'étude des séries statistiques à deux variables, on rappellera l'utilisation des paramètres de position et de dispersion (médiane, moyenne, variance...) attachés à chacun des caractères de la population étudiée.
Croisement de deux caractères d'une population : construction du nuage de points associé et point moyen.	
Ajustement affine par moindres carrés, droites de régression.	Il s'agit surtout de présenter le problème de la corrélation. On admettra les formules donnant les droites de régression et le coefficient de corrélation.
Coefficient de corrélation linéaire.	

Travaux pratiques

Exemples de calcul de moyennes et de corrélations linéaires portant sur des séries statistiques à deux variables.	
Exemples d'ajustement affine par moindres carrés de deux séries statistiques à une variable.	On pourra aussi exploiter des situations nécessitant d'autres types d'ajustement, en les ramenant au cas de l'ajustement affine. Mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions, et toutes les indications utiles devront être fournies.

Terminale ES

2. - Probabilités

On poursuit l'étude des phénomènes aléatoires en introduisant les notions de variable aléatoire et de probabilité conditionnelle.

a) Variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs : - loi de probabilité associée ; - fonction de répartition ; - espérance mathématique, variance, écart-type.	La notion de variable aléatoire pourra être introduite de la façon suivante : une variable aléatoire X est une grandeur numérique, associée à une expérience (ou à un phénomène) aléatoire, susceptible de prendre un nombre fini de valeurs $a_1,...,a_n$ et telle qu'une probabilité $p_k = p(X = a_k)$ soit affectée à chacun des événements $(X = a_k)$, $k = 1,...,n$. On obtient ainsi la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition $F(x) = p(X \leq x)$.
b) Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle ; notation $p(A\|B)$ ou $p_B(A)$; relation $p(A \cap B) = p(A\|B)p(B)$. Indépendance de deux événements.	L'étude de certaines expériences aléatoires amène à définir la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé par la relation $p(A\|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. On illustrera l'intérêt de cette notion à travers des exemples pour lesquels on dispose d'une famille $B_1,...,B_n$ d'événements formant une partition de l'espace des événements élémentaires. A partir de la formule des probabilités totales $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + ... + p(A \cap B_n)$, on donnera le calcul de $p(A)$ quand $p(B_k)$ et $p(A\|B_k)$ sont connus $(1 \leq k \leq n)$. La formule de Bayes est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urne, jeux, schéma de Bernoulli...). Exemples simples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.	Lorsque l'étude d'une situation nécessite l'emploi d'une variable aléatoire ou de probabilités conditionnelles, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. En outre, pour l'exploitation des probabilités conditionnelles, on se bornera à des exemples où la partition $(B_1,..., B_n)$ utilisée comporte un petit nombre d'éléments.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les paragraphes a), b), c) et les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

L'objectif est d'étudier :
- *quelques éléments de combinatoire ;*
- *le schéma de Bernouilli et la loi binomiale ;*
- *une première approche de la loi des grands nombres.*

a) Combinatoire, dénombrements

- dénombrement des arrangements et des permutations ; notation n !

- parties de cardinal donné d'un ensemble fini ; dénombrement des combinaisons : notation C_n^p *ou* $\binom{n}{p}$.

- formule du binôme, triangle de Pascal.

Ces éléments de combinatoire ont un objectif très modeste : ils pourront être introduits à l'occasion de l'étude du jeu de pile ou face et de la loi binomiale.

b) Schéma de Bernoulli, loi binomiale

- variable de Bernoulli ; loi, espérance.

- schéma de Bernoulli ; loi binomiale, espérance.

c) Loi des grands nombres

Dans le cas du schéma de Bernoulli, mise en évidence expérimentale de la convergence de la fréquence empirique du nombre de succès vers la probabilité théorique.

La formulation mathématique de la loi des grands nombres est hors programme. On s'appuiera sur des expériences aléatoires (tirage dans une urne, simulation sur ordinateur...).

Travaux pratiques

Exemples simples de problèmes de dénombrement.

Exemples de situations se ramenant à un modèle de jeu de pile ou face (erreurs de mesure...).

Exemples d'étude de variables aléatoires de loi binomiale.

Terminale ES

III. Algèbre, analyse

1. - Equations, systèmes d'équations linéaires

La résolution de problèmes, issus de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Dans cette perspective, le programme vise à mobiliser et à compléter les capacités acquises en Première. Il ne comporte que des travaux pratiques.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou à une inéquation à une inconnue, ou à un système d'équations ou d'inéquations linéaires à coefficients numériques.

Pour l'ensemble des travaux pratiques de ce paragraphe, on évitera de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. On choisira autant que possible des situations issues de la vie économique et sociale.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

On exploitera le plus souvent possible des situations issues de la géométrie et des sciences économiques et sociales.

Travaux pratiques

Mise en oeuvre de méthodes pour résoudre des systèmes linéaires à coefficients numériques (méthode de Gauss, combinaisons linéaires).

Certaines situations comportent naturellement des paramètres : on examinera leur influence. Toute étude les introduisant a priori est exclue.

Exemples d'étude numérique et graphique de problèmes de programmation linéaire à deux variables d'origine économique et sociale.

On se bornera à des situations menant à l'optimisation d'une fonction linéaire : $(x,y) \mapsto ax+by$ *lorsque les contraintes se traduisent par des équations ou inéquations du premier degré.*

2. - Fonctions numériques

Le programme se place dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle. Comme en Première, toute recherche a priori d'ensembles de définition est exclue, de même que l'étude de diverses singularités (points de discontinuité, points anguleux).

Le programme porte sur des fonctions bien régulières sur l'intervalle de définition (c'est-à-dire possédant des dérivées jusqu'à un ordre suffisant). Quelques énoncés sur les limites figurent au programme : ils ne constituent pas un objectif en eux-mêmes mais visent uniquement à faciliter, le cas échéant, l'étude du comportement aux bornes de l'intervalle. Leur présentation s'appuiera largement sur l'interprétation graphique.

a) Comportement global d'une fonction

Composée de deux fonctions. Notations gof ou $x \mapsto g(f(x))$.

Il n'y a pas lieu d'effectuer un exposé général sur les fonctions. La notion de composition sera dégagée de l'étude d'exemples simples.
Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les règles donnant le sens de variation d'une fonction composée de deux fonctions monotones, notamment en vue de l'étude des fonctions $\frac{1}{f}$, ln f, exp f, lorsqu'on dispose du tableau de variation ou de la représentation graphique de la fonction f.

Si f est dérivable sur [a,b], où a < b, et si f' est à valeurs strictement positives sur]a,b[, alors f est strictement croissante sur [a,b] et, pour tout élément λ de [f(a),f(b)], l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a,b].

On observera que f est alors une bijection de [a,b] sur [f(a), f(b)], mais en dehors des deux exemples de l'exponentielle et de la racine $n^{\text{ième}}$ l'étude des fonctions réciproques est hors programme.

Enoncé analogue pour les fonctions décroissantes.

b) Enoncés usuels sur les limites (admis)

Opérations algébriques :

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

La notion de limite a été introduite en Première. On soulignera le fait que, par translation, l'étude d'une fonction $x \mapsto f(x)$ au point a se ramène à l'étude de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au point 0. En particulier, dire que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie aussi que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = L$.

Comparaison :

- Si, pour x assez grand, $f(x) \geq h(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On se limitera à une présentation intuitive à partir d'expérimentations numériques et de représentations graphiques.

Enoncé analogue lorsque $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

- Si, pour x assez grand, $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

On interprétera graphiquement $|f(x) - L|$.

- Si, pour x assez grand, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = L$,

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Enoncés analogues quand $x \to -\infty$.

De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent ; les inégalités strictes doivent être réservées aux cas où elles sont indispensables.

Compatibilité avec l'ordre :

Si, pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L'$, alors $L \leq L'$.

Limite d'une fonction composée :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim_{y \to b} g(y) = \lambda$ (où a, b, λ sont finis ou non), alors $\lim_{x \to a} (gof)(x) = \lambda$.

Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémorisation, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et d'illustrer à l'aide d'exemples. En dehors des cas du type $t \mapsto g(at+b)$, exp f, ln f et $\sqrt{f}$, les fonctions f et g doivent être indiquées.

c) Calcul différentiel

Dérivation d'une fonction composée.

La démonstration de cette règle n'est pas au programme, mais on pourra mettre en valeur l'idée qui conduit au résultat.

Application à la dérivation de fonctions de la forme u^n, $n \in \mathbb{Z}$, exp u, ln u et u^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.	
Primitives d'une fonction continue sur un intervalle	
Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.	La notion de continuité est prise ici en un sens purement intuitif ; l'étude de cette notion n'est pas au programme. L'existence des primitives est admise.
d) Fonctions usuelles	
Fonctions logarithme népérien et exponentielle : notations ln et exp. Relations ln(ab) = ln a + ln b et exp (a+b) = exp a. exp b. Dérivée. Comportement asymptotique. Représentation graphique. Nombre e, notations e^x. Définition de a^b ($a>0$, b réel).	Le mode d'introduction des fonctions ln et exp n'est pas imposé. L'existence et la dérivabilité de ces fonctions sont admises. En liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, on mentionnera la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$ et les fonctions $x \mapsto a^x$.
- Fonction $x \mapsto x^n$ (n entier relatif) et $x \mapsto x^\alpha$ (x strictement positif et α réel).	On mettra en valeur l'emploi de $x^{1/n}$ pour l'étude des taux annuels moyens.
- Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \exp x/x^\alpha = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \exp(-x) = 0$; Pour $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x/x^\alpha = 0$.	
e) Dérivée logarithmique en a d'une fonction à valeurs strictement positives dérivable en a.	L'introduction de ce concept est à mettre en relation avec la notion de croissance relative de f en a, utilisée dans d'autres disciplines.
Interprétation à l'aide de la dérivée de ln f.	
Dérivée logarithmique d'un produit, d'un quotient de fonctions.	On reliera ces formules aux relations $\ln(fg) = \ln f + \ln g$ et $\ln \frac{f}{g} = \ln f - \ln g$.

24

Terminale ES

Représentation graphique de ln f. Repères semi-logarithmiques (graduations régulières sur l'axe des abscisses ; graduations logarithmiques sur l'axe des ordonnées).	Tracer la courbe représentative de ln f en repère orthonormé revient à tracer celle de f dans un repère semi-logarithmique.

Travaux pratiques

Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable.	
Tracé de la courbe représentative d'une fonction.	On exploitera des situations où il est utile d'effectuer une représentation dans un repère orthogonal.
Recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$.	
Etude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche de ses extremums.	La résolution de certaines questions nécessite l'étude d'une fonction auxiliaire ; cette fonction doit alors être indiquée.
Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique. Etude d'équations $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leq \lambda$.	La lecture graphique met en évidence l'existence des solutions et en donne des valeurs approchées.
Exemples d'étude comparée d'accroissements et d'accroissements relatifs de la forme $f(x+h)-f(x)$ et $\frac{f(x+h)-f(x)}{hf(x)}$ notamment pour les fonctions affines et les fonctions exponentielles.	On s'intéressera en particulier au cas où h = 1, en relation avec l'économie.
Lecture conjointe de graphiques représentant une fonction et la fonction dérivée.	Sur des exemples simples, l'élève doit savoir relier la courbe représentative de f ' et celle de f.
Exemples de dessins à main levée de courbes représentant par exemple $\frac{1}{f}$ ou ln f connaissant la courbe représentative de f.	

Exemples d'emploi de graduations semi-logarithmiques.	On construira notamment les courbes représentatives des fonctions puissances et exponentielles ; on comparera les représentations graphiques de f et de kf, où k > 0.
Exemples d'applications de la dérivée logarithmique.	On comparera à travers l'étude de quelques exemples la pertinence de l'emploi de f ' ou de f '/f.
Exemples d'évaluation de la variation de f(x) en pourcentage en fonction d'une variation de x en pourcentage.	

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Le paragraphe suivant n'est au programme que de l'enseignement de spécialité.

f) Suites numériques

Comportement global d'une suite ***Suites monotones, bornées, périodiques.***	*Aucun énoncé général sur le comportement des suites définies par récurrence n'est au programme.*
Enoncés usuels sur les limites (admis)	
- somme, produit, quotient ; *- comparaison, compatibilité avec l'ordre ;* *- image d'une suite par une fonction : étant donné une fonction f définie sur un intervalle I et une suite (u_n) d'éléments de I, si u_n converge vers a et si $\lim_{x \to a} f = L$, alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers L.*	*Les premiers énoncés usuels relatifs aux comparaisons et aux opérations algébriques sur les limites ont été admis en Première, leur signification intuitive étant mise en évidence.* *L'objectif est d'en faire saisir le sens et de les mettre en oeuvre sur des exemples simples. On ne multipliera pas les exemples donnés a priori.*

Travaux pratiques

Programmation des termes d'une suite.	
Etude de suites définies par $u_n = f(n)$ (encadrement, monotonie, convergence,...). *Exemples d'étude de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.*	*Aucune règle relative à des cas d'indétermination n'est exigible.* *On indiquera la méthode à suivre.* *Les représentations graphiques seront particulièrement exploitées.*
Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.	*On attirera l'attention sur le nombre de termes nécessaires à l'obtention de la précision visée.*

3. - Calcul intégral

Il s'agit de familiariser les élèves avec quelques problèmes relevant du calcul intégral : calcul de grandeurs géométriques (aires, volumes,...), de grandeurs économiques (calcul du coût total à partir du coût marginal, coût moyen...). Il s'agit d'exploiter, sur des exemples simples, les propriétés élémentaires de l'intégrale pour l'étude des fonctions.

On combinera les activités de calcul exact d'intégrales (qui mettent en oeuvre le calcul de primitives) et les activités d'encadrement et de calcul approché (qui, de façon complémentaire, exploitent des idées géométriques à partir d'interprétations graphiques).

L'intégration par parties n'est pas au programme.

a) Intégrale d'une fonction continue

Etant donnés une fonction f continue sur un intervalle I, F une primitive de f et un couple (a,b) d'éléments de I, alors le nombre F(b) − F(a) est indépendant du choix de la primitive F. On le note $\int_a^b f(t)dt$ et on l'appelle intégrale de a à b de f.	Dans le cas d'une fonction positive, on interprètera graphiquement l'intégrale à l'aide d'une aire.

b) Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles. **Linéarité :** $\int_a^b (\alpha f+\beta g)(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt.$ **Positivité :** Si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$; intégration d'une inégalité. **Inégalité de la moyenne :** - Si $m \le f \le M$ et $a \le b$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$.	Il convient d'interpréter en termes d'aires certaines de ces propriétés (relation de Chasles, intégration d'inégalités, valeur moyenne d'une fonction...) afin d'éclairer leur signification.
Valeur moyenne d'une fonction.	La notion de valeur moyenne est à relier aux sciences économiques et sociales.

Travaux pratiques

Exemples de calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles pour estimer une aire.	
Calcul de l'aire comprise entre deux courbes représentatives situées au dessus de Ox et ne se croisant pas.	On fera le lien avec les sciences économiques et sociales.

Terminale ES

II - Algèbre, combinatoire, probabilités

1. Equations, systèmes d'équations linéaires

La résolution de problèmes, issus de l'étude des fonctions, de la gestion des données, des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Dans cette perspective, le programme vise à mobiliser et à compléter les capacités acquises en Première. Il ne comporte que des travaux pratiques.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou à une inéquation à une inconnue, ou à un système d'équations ou d'inéquations linéaires à coefficients numériques.	Pour l'ensemble des travaux pratiques de ce paragraphe, on évitera de multiplier les exemples posés à priori et on se gardera de tout excès de technicité. On choisira autant que possible des situations issues de la géométrie, et de la vie économique et sociale. Certaines de ces situations comportent de façon naturelle des paramètres ; on pourra alors étudier leur influence, mais on se bornera à des cas très simples comportant une seule inconnue. Toute étude introduisant a priori des paramètres est exclue.
Mise en oeuvre de méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques (méthode de Gauss, combinaison linéaire).	
Exemples d'étude numérique et graphique de problèmes de programmation linéaire à deux variables, d'origine économique ou sociale.	On se bornera à des situations menant à l'optimisation d'une fonction linéaire $(x, y) \mapsto ax + by$, lorsque les contraintes se traduisent par des équations et inéquations du premier degré.

2. Combinatoire, dénombrements

Les activités menées dans les classes antérieures, notamment en statistique et en probabilités, ont fourni l'occasion de rencontrer quelques situations combinatoires très simples. En Terminale, l'objectif demeure modeste : il s'agit d'apprendre aux élèves à organiser quelques données combinatoires de base (listes, arrangements, permutations, combinaisons) et à exploiter les règles de dénombrement figurant au programme pour l'étude de quelques exemples simples, issus notamment du calcul des probabilités.

Dans les situations combinatoires étudiées, on mettra en valeur les aspects algorithmiques, mais la mise en forme de tels algorithmes est hors programme.

32

Cardinal de l'ensemble A^p des p-listes d'éléments d'un ensemble fini A. Cas où les éléments sont distincts deux à deux : dénombrement des arrangements et des permutations, notation n!	Les élèves doivent savoir utiliser les propriétés élémentaires des opérations sur les parties d'un ensemble fini, mais l'étude systématique de ces opérations n'est pas au programme.
Parties de cardinal donné d'un ensemble fini : dénombrement des combinaisons, notation C_n^p ou $\binom{n}{p}$.	Le cardinal d'un ensemble fini E est noté Card (E).
Relations $C_n^p = C_n^{n-p}$. $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.	On mettra en valeur l'interprétation ensembliste de ces relations.
Formule du binôme.	

3. Probabilités

Quelques notions de calcul des probabilités ont été introduites en Première ; en Terminale, on poursuit l'étude de phénomènes aléatoires, en disposant de quelques outils combinatoires (arrangements, combinaisons) et de nouveaux concepts probabilistes (variables aléatoires, conditionnement). Comme en Première, on s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.

Le programme se limite à des ensembles finis ; toute théorie formalisée est exclue. Les notions de probabilité produit et d'indépendance de deux variables sont hors programme. Aussi bien pour les variables aléatoires que pour les probabilités conditionnelles, le programme ne porte que sur l'étude d'exemples.

a) Variable aléatoire (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type.	On prendra un point de vue très simple : certaines situations de probabilité s'expriment commodément par l'affectation de probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ aux valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'une grandeur numérique X associée à une expérience aléatoire ; on dit alors que X est une variable aléatoire. Les événements $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$ sont les événements élémentaires de la loi de probabilité de X. Pour la fonction de répartition, on emploiera la convention $F(x) = P(X \leq x)$.

b) Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle; relation
$p(A \cap B) = P(A|B)p(B)$.
Indépendance des deux événements.

Formule des probabilités totales : étant donné des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituant une partition de E, pour tout évènement A,
$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots + p(A \cap B_n)$
et pour tout k,
$p(A \cap B_k) = p(A|B_k)p(B_k)$.

L'étude d'expériences aléatoires bien choisies (situations d'équiprobabilité...) amène à définir la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou encore $p(A|B)$, par la relation

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Tout développement théorique sur cette notion est exclu. On mettra en évidence son utilité en observant que, dans de nombreuses situations, on connaît les probabilités conditionnelles de A par rapport aux événements B_k, ce qui permet de calculer p(A) grâce à la formule des probabilités totales.
La formule de Bayes est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples simples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux,...) pour organiser et dénombrer des données.

Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux, schéma de Bernoulli,...)

Lorsque l'étude d'une situation nécessite l'emploi d'une variable aléatoire ou de probabilités conditionnelles, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. En outre, pour l'exploitation des probabilités conditionnelles on se bornera à des exemples où la partition $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ utilisée comporte au plus quatre éléments.

Exemples simples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.

27

III - Analyse

Un premier objectif est d'exploiter la dérivation et d'élargir son champ d'intervention grâce à la composition de fonctions simples et à l'introduction des fonctions logarithmes et exponentielles.

Un second objectif consiste à introduire quelques éléments de calcul intégral et à les mettre en oeuvre sur quelques exemples simples.

Quelques problèmes d'importance majeure fournissent un terrain pour cette étude : étude de variations, recherche d'extrémums, étude d'équations et d'inéquations, comportements asymptotiques, calcul de grandeurs géométriques, approximation d'une fonction au moyen de fonctions plus simples par encadrement.

Les activités ne sauraient se borner à des exercices portant sur des exemples donnés a priori ; il convient aussi d'étudier des situations issues de la géométrie et de la vie scientifique, économique et sociale. De même, on exploitera systématiquement les interprétations graphiques des notions et des résultats étudiés et les problèmes numériques liés à cette étude.

1. Fonctions numériques : étude locale et globale

Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations graphiques $y=f(x)$, cinématiques $x=f(t)$ et économiques (évolution de coûts, de bénéfices...).

Le programme se place dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle. Pour l'essentiel, il porte sur le cas des fonctions bien régulières sur cet intervalle (c'est-à-dire possédant des dérivées jusqu'à un ordre suffisant), ce qui permet d'exploiter les outils du calcul différentiel. Quelques énoncés sur les limites figurent au programme : ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter, le cas échéant, l'étude du comportement aux bornes de l'intervalle et notamment du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles ; on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles. L'intervalle de définition sera indiqué. Toute recherche a priori d'ensembles de définition est exclue. L'étude de singularités (points de discontinuité, points anguleux...) est hors programme.

a) Enoncés usuels sur les limites (admis)

Comparaison :

- Si, pour x assez grand, $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
énoncé analogue lorsque $f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$.
- Si, pour x assez grand, $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = L$.

L'objectif est d'apprendre aux élèves à mettre en oeuvre, sur des exemples simples, ces énoncés et ceux donnés en Première concernant les opérations algébriques. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation.

- Si, pour x assez grand,
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si
$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = L$,
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Compatibilité avec l'ordre :

Si, pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L'$,
alors $L \leq L'$.

De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent ; les inégalités strictes doivent être réservées aux cas où elles sont indispensables.

Limite d'une fonction composée :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \lambda$
(où a, b, λ sont finis ou non),
alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lambda$.

Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémorisation, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et d'illustrer à l'aide d'exemples. En dehors des cas du type $t \mapsto g(at+b)$, exp u, ln u et u^{α}, où $\alpha \in \mathbb{R}$ les fonctions f et g doivent être indiquées.

b) Calcul différentiel

Dérivation d'une fonction composée.

Application à la dérivation de fonctions de la forme u^n, $n \in \mathbb{Z}$, exp u, ln u et u^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$.

La démonstration de cette règle n'est pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit au résultat : les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligeables dans les calculs.

Dérivées successives ; notation f', f''...

La notion de différentielle est hors programme. En liaison avec les sciences économiques et sociales, on mettra en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport aux tangentes ; mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions et notamment sur la convexité et les points d'inflexion.

Inégalité des accroissements finis :

Etant donné une fonction f dérivable sur un segment $[a,b]$,
- Si $m \leq f' \leq M$ et si $a<b$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$;

- Si $|f'| \leq M$, alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$.

Ces résultats sont déduits de l'énoncé admis en classe de Première sur le sens de variation des fonctions. Le théorème de Rolle et la formule $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ sont en dehors du programme.

Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

La notion de continuité est prise ici en un sens purement intuitif ; l'étude de cette notion n'est pas au programme.
L'existence des primitives est admise.

c) Fonctions usuelles

- Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle ; notation ln et exp.
Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique.
Nombre e ; notation e^x.
Définition de a^b (a strictement positif, b réel).

- Fonctions puissances $x \mapsto x^n$ (x réel et n entier) et $x \mapsto x^{\alpha}$ (x strictement positif et α réel). Dérivation, comportement asymptotique. Cas où $\alpha = \frac{1}{n}$ (n entier strictement positif) ; notation $\sqrt[n]{x}$ (x positif).

Le mode d'introduction des fonctions ln et exp n'est pas imposé. L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises.
Hormis les deux exemples de l'exponentielle et de la racine $n^{ième}$ l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme.
En liaison avec l'enseignement d'autres disciplines on mentionnera la fonction logarithme $x \mapsto \log x$.
Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées dans ce paragraphe et savoir en déduire celles des fonctions directement apparentées, telles que $t \mapsto e^{\alpha t}$, $t \mapsto a^t$.
L'étude des fonctions circulaires n'est pas au programme.

Terminale L

- Croissance comparée des fonctions de référence $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto x^{\alpha}$, $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^{\alpha}} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha}.\exp(-x) = 0$. Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$.	Certaines études aux bornes mettent en jeu des formes indéterminées en $+\infty$ ou en $-\infty$; aucune autre connaissance que celles mentionnées ci-contre n'est exigible des élèves. L'étude de formes indéterminées en un point a est hors programme.
d) Suites numériques	
Suites croissantes, suites décroissantes.	Sur quelques exemples simples, on pourra utiliser le raisonnement par récurrence pour établir une croissance ou obtenir une majoration, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce propos.
Limite des suites de terme général n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$.	L'étude des suites de référence ci-contre et, plus largement, des suites $u_n = f(n)$ est à mener en relation étroite avec celle des fonctions correspondantes.
Limite des suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$.	
- Introduction du symbole $\lim_{n \to +\infty} u_n$.	
Si une fonction f admet une limite L en $+\infty$, alors la suite $u_n = f(n)$ converge vers L.	
Enoncés usuels sur les limites.	Les énoncés concernant les opérations algébriques sont entièrement analogues pour les suites et les fonctions. Il n'y a donc pas lieu de s'attarder au cas des suites (ou au cas des fonctions si on a d'abord étudié les suites).
Etude des suites géométriques (a^n), où $a > 0$ et des suites (n^{α}), où $\alpha \in \mathbb{R}$, - et de leur croissance comparée.	

29

Terminale L

Travaux pratiques

Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable.	Dans l'ensemble des travaux pratiques, on exploitera largement des situations issues des sciences économiques et sociales.
Etude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche des extremums.	La résolution de certaines questions nécessite l'étude d'une fonction auxiliaire ; cette fonction doit alors être indiquée.
Recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$. Exemples de recherche d'asymptotes ; exemples d'étude du comportement local ou asymptotique d'une fonction. Tracé de la courbe représentative d'une fonction.	Pour l'étude des comportements asymptotiques en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on exploitera la comparaison de la fonction donnée f à une fonction plus simple g telle que $\lim_{+\infty} (f - g) = 0$; en dehors du cas des asymptotes horizontales ou verticales, des indications doivent être fournies sur la forme de la fonction g à utiliser.
Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique. Etude d'équation $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leq \lambda$.	Etant donné une fonction f strictement monotone sur I, et un élément α de I tel que $f(\alpha) = 0$, les élèves doivent savoir comparer α à un élément donné β de I en utilisant le signe de $f(\beta)$.
Exemple d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale).	On s'attachera à interpréter les résultats (variations, signe, extremums, comportement asymptotique). On étudiera quelques problèmes d'optimisation.
Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point, recherche de limites...).	Pour tous les problèmes de majoration, d'encadrement et d'approximation des fonctions, des indications doivent être données sur la méthode à suivre.
Exemples d'étude de phénomènes exponentiels discrets (suites géométriques) ou continus (fonctions exponentielles) issus de situations économiques, sociales ou scientifiques.	

Exemples d'algorithmes d'approximation d'un nombre réel.

Sur les exemples étudiés, on mettra en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation au moyen d'une suite, étude de cette suite, obtention de la précision visée.

Exemples d'approximation d'un point fixe d'une fonction à l'aide d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

L'étude de la suite (u_n) devra comporter des indications sur la méthode à suivre ; on se limitera aux cas où l'on établit une inégalité $|f(x) - \alpha| \leq k\,|x - \alpha|$, où $k < 1$.

2. Calcul intégral

L'objectif est double :

- Familiariser les élèves avec quelques problèmes relevant du calcul intégral et qui, en retour, donnent du sens à la notion d'intégrale : calcul de grandeurs géométriques (aires, volumes...), de grandeurs économiques (calcul du coût total à partir du coût marginal, coût moyen...).

- Fournir aux élèves le symbolisme très efficace du calcul intégral et exploiter, sur des exemples simples, les propriétés élémentaires de l'intégrale pour l'étude de fonctions.

On combinera les activités de calcul exact d'intégrales (qui mettent en oeuvre le calcul de primitives) et les activités d'encadrement et de calcul approché (qui de façon complémentaire, exploitent des idées géométriques à partir d'interprétation graphiques).

a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Etant donné une fonction f continue sur un intervalle I et un couple (a,b) de points de I, le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F ; on l'appelle intégrale de a à b de f et on le note $\int_a^b f(t)dt$.

Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.

Par suite, étant donné un point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme : on admettra son existence et ses propriétés élémentaires. Les élèves doivent connaître l'aire des domaines usuels : rectangle, triangle, trapèze, secteur d'un disque.

b) Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles.

Linéarité:
$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$

Positivité: si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$; intégration d'une inégalité.

Inégalité de la moyenne:

- Si $m \leq f \leq M$ et $a \leq b$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$;
- Si $|f| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M.|b-a|$.

Valeur moyenne d'une fonction.

Il convient d'interpréter en termes d'aires certaines de ces propriétés (relation de Chasles, intégration d'inégalités, valeur moyenne d'une fonction,...) afin d'éclairer leur signification.

La notion de valeur moyenne est à relier aux sciences économiques et sociales

c) Techniques de calcul

- Lecture inverse de formules de dérivation : primitives des fonctions de la forme $t \mapsto f'(at+b)$, $(\exp u)\,u'$, $u^{\alpha}u'$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, et $\frac{u'}{u}$ (u étant à valeurs strictement positives).
- Intégration par parties.

Les élèves doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une de ces formes. Ils doivent aussi savoir exploiter une périodicité ou une symétrie pour le calcul d'intégrales, mais toute formule de changement de variable est hors programme

Travaux pratiques

Exemples de calcul d'intégrales par primitivation et par intégration par parties.

Toute intégration par parties doit faire l'objet d'une indication et toute technicité est exclue.

Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer. Exemples de calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.

Exemples de calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral.

Certains des exemples étudiés pourront être tirés de l'histoire du calcul intégral.

V. PROGRAMME DE TERMINALE SCIENTIFIQUE (ARRETE DU 10 JUIN 1994)

Dans ce texte les parties spécifiques à l'enseignement de spécialité sont différenciées par l'utilisation de caractères italiques.

L'enseignement de spécialité a pour objectif d'approfondir et de développer certains des paragraphes déjà étudiés dans l'enseignement obligatoire.

I - Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme

Ces objectifs et capacités sont définis dans la partie IV de l'annexe (Note de service n°94-192 du 30 juin 1994.

II - Analyse

Le programme d'analyse porte essentiellement sur les **fonctions numériques**, en relation avec l'étude de **situations continues**. L'objectif principal est d'exploiter la **dérivation** et l'**intégration** pour l'étude globale et locale des fonctions usuelles et de fonctions qui sont construites à partir de celles-ci par des opérations simples. Quelques **problèmes d'importance majeure fournissent un terrain pour cette étude** : variations, extremums, équations et inéquations, comportements asymptotiques, calcul de grandeurs géométriques, approximation d'une fonction au moyen de fonctions plus simples par encadrement.

31

Quelques notions sur les suites complètent le programme d'analyse dans le seul but de permettre l'étude de **situations discrètes** sur des exemples simples.

Pour l'ensemble du programme d'analyse, il convient d'exploiter aussi bien les **aspects qualitatifs** (monotonie, convergence...) que les **aspects quantitatifs** (majorations, encadrements, vitesse de convergence, approximation à une précision donnée...).

En outre, on exploitera largement des **situations** issues des sciences biologiques et physiques, de la géométrie et de la vie économique et sociale en marquant les différentes phases : modélisation, traitement mathématique, contrôle et interprétation des résultats. De même, on exploitera systématiquement les interprétations graphiques des notions et des résultats étudiés et les **problèmes numériques** qui sont liés à cette étude.

Enfin, il revient au professeur d'organiser l'enseignement des divers points du programme concernant les suites et les fonctions : l'ordre adopté dans le texte qui suit correspond à une simple commodité de rédaction.

1. Fonctions numériques : étude locale et globale

Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations **graphiques** $y = f(x)$, **cinématiques** $x = f(t)$, **électriques** (signaux relatifs à l'évolution d'une intensité, d'une différence de potentiel...) et **biologiques** (évolution d'une population, d'un taux de concentration,...).

Le programme se place dans le cadre des **fonctions définies sur un intervalle**. Pour l'essentiel, il porte sur le cas des **fonctions bien régulières** sur cet intervalle (c'est-à-dire possédant des dérivées jusqu'à un ordre suffisant), ce qui permet d'exploiter les outils du calcul différentiel. Quelques énoncés sur les **limites** figurent au programme : ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter, le cas échéant, l'étude du **comportement aux bornes de l'intervalle** et notamment du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles ; on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles. Le plus souvent, l'ensemble de définition sera indiqué ; **on évitera les exercices de recherche a priori de cet ensemble**. L'étude de singularités (points de discontinuité, points anguleux...) n'est pas un objectif du programme.

La **continuité sur un intervalle** est introduite dans le seul but de fournir un langage efficace pour l'énoncé et l'emploi de quelques théorèmes usuels ; on se bornera à l'étude de situations où les énoncés du programme suffisent pour établir simplement la continuité des fonctions mises en jeu.

Pour la **notion de limite**, le point de vue adopté reste le même qu'en Première. Les définitions par (ε,α), (ε,A),...sont hors programme.

A travers les exemples étudiés, on soulignera le **caractère local** de la notion de limite, mais tout exposé sur la notion de propriété locale est exclu.

a) Langage de la continuité

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Il convient d'interpréter graphiquement et numériquement les notions et les énoncés de ce paragraphe, afin d'éclairer leur signification.
Si f admet une limite en tout point de I on dit que f est continue sur I.	On rappelle que si une fonction f admet une limite en un point a de I, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La continuité en un point, considérée isolément, ne doit pas faire l'objet d'une étude systématique. On donnera quelques exemples très simples de discontinuités de la fonction ou de sa dérivée, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce propos. La notion de continuité sur d'autres parties de R que les intervalles est hors programme.

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

On observera que la conclusion de cet énoncé s'étend au cas d'une fonction définie sur un intervalle [a,b], dérivable sur]a,b], et admettant f(a) pour limite en a (ou dérivable sur [a,b[, et admettant f(b) pour limite en b).

Prolongement par continuité d'une fonction définie et continue sur]a,b] et admettant une limite en a (ou continue sur [a,b[et admettant une limite en b).

Les différents énoncés sur la continuité ne constituent pas un objectif en soi : ils fournissent des jalons pour l'étude d'une fonction sur un intervalle : dérivabilité, limites aux bornes, continuité.

Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone (énoncé admis)

Lorsque l'intervalle considéré n'est pas un segment, les élèves doivent savoir déterminer les extrémités de l'intervalle image connaissant les limites de la fonction aux extrémités de son intervalle de définition.

b) Enoncés usuels sur les limites (admis)

Comparaison

-Si, pour x assez grand, $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; énoncé analogue lorsque $f(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$.

L'objectif est d'apprendre aux élèves à mettre en oeuvre, sur des exemples simples, ces énoncés et ceux donnés en Première concernant les opérations algébriques. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation.

- Si, pour x assez grand, $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Terminale S

- Si, pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x) = L$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Compatibilité avec l'ordre :

Si, pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L'$, alors $L \leq L'$.

De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent ; les inégalités strictes doivent être réservées aux cas où elles sont indispensables.

Limite d'une fonction composée :
Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim_{y \to b} g(y) = \lambda$ (où a, b, λ sont finis ou non), alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lambda$.

Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémoration, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et d'illustrer à l'aide d'exemples.

c) Calcul différentiel

Dérivation d'une fonction composée.

Aplication à la dérivation de fonctions de la forme u^n, $n \in Z$, exp u, ln u et u^α, $\alpha \in R$.

La démonstration de cette règle n'est pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit au résultat: les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligeables dans les calculs.

Dérivées successives ; notations f', f",...

En liaison avec les sciences physiques, on donnera aussi les notations $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \ldots$; la notion de différentielle est hors programme.

On mettra en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport aux tangentes ; mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions et notamment sur la convexité et les points d'inflexion.

Inégalité des accroissements finis : étant donné une fonction f dérivable sur un segment [a,b],
- Si $m \leq f' \leq M$ et si $a \leq b$,
alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$;
- Si $|f'| \leq M$,
alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Ces résultats sont déduits de l'énoncé admis en classe de Première sur le sens de variation des fonctions. Le théorème de Rolle et la formule $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ sont en dehors du programme.

Primitives d'une fonction continue sur un intervalle :

Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

L'existence des primitives est admise.

d) Fonctions usuelles

- Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle ; notation ln et exp. Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique. Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions $h \mapsto \exp h$ et $h \mapsto \ln(1+h)$. Nombre e ; notation e^x. Définition de a^b (a strictement positif, b réel).

Le mode d'introduction des fonctions ln et exp n'est pas imposé. L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises.
Hormis les deux exemples de l'exponentielle et de la racine $n^{\text{ième}}$, l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme.

- Fonctions puissances $x \mapsto x^n$ (x réel et n entier) et $x \mapsto x^\alpha$ (x strictement positif et α réel). Dérivation, comportement asymptotique.
Cas où $\alpha = \frac{1}{n}$ (n entier strictement positif) ; notation $\sqrt[n]{x}$ (x positif).
- Fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente.

En liaison avec l'enseignement d'autre disciplines on mentionnera la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$.
Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées dans ce paragraphe et savoir en déduire celles des fonctions directement apparentées, telles que $t \mapsto \cos\omega t$, $t \mapsto e^{\alpha t}$, $t \mapsto a^t$.

Croissance comparée des fonctions de référence $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \ln x$, au voisinage de $+\infty$:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha . \exp(-x) = 0$,
Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Certaines études aux bornes mettent en jeu des formes indéterminées. S'il s'agit d'une étude en $+\infty$ ou en $-\infty$, aucune autre connaissance que celles mentionnées ci-contre n'est exigible des élèves ; dans le cas d'une étude en un point a, on se limitera à quelques exemples se résolvant très simplement à l'aide du nombre dérivé en ce point d'une fonction usuelle, et des indications doivent être données sur la méthode à suivre.

e) Notions sur les suites numériques

Enoncés usuels sur les limites (admis)

Le programme se place dans le cadre des suites définies pour tout entier naturel. L'étude des opérations sur les suites n'est pas au programme.

- Comparaison, compatibilité avec l'ordre.
- Somme, produit, quotient.

Les énoncés ci-contre sont calqués sur ceux relatifs aux fonctions. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation : l'objectif est d'apprendre aux élèves à les mettre en oeuvre sur des exemples simples. Les élèves doivent connaître les limites et les comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$; (a^n), a réel strictement positif ; (n^α), α réel.

- Image d'une suite par une fonction : étant donné une fonction f définie sur un intervalle I et une suite (u_n) de points de I, si $\lim u_n = a$ (finie ou non) et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$ (finie ou non), alors $\lim f(u_n) = \lambda$.

Pour la définition de suites par récurrence, on prendra un point de vue très intuitif : Etant donné une fonction f laissant stable un intervalle I, le choix d'un point c de I définit une suite (u_n) d'éléments de I telle que $u_0 = c$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'existence et l'unicité de cette suite.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Le paragraphe suivant n'est au programme que de l'enseignement de spécialité.

f) Convergence des suites monotones :

Toute suite croissante majorée converge.

On dispose d'un énoncé analogue pour les suites décroissantes.

Travaux pratiques

Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable.

Dans l'ensemble des travaux pratiques, on exploitera largement des situations issues des sciences physiques et biologiques.

Etude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche des extremums.	La résolution de certaines questions nécessite l'étude d'une fonction auxiliaire ; cette fonction doit alors être indiquée.
Recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$.	
Exemples de recherche d'asymptotes ; exemples d'étude du comportement local ou asymptotique d'une fonction. Tracé de la courbe représentative d'une fonction.	Pour l'étude des comportements asymptotiques en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on exploitera la comparaison de la fonction donnée f à une fonction plus simple g telle que $\lim\limits_{+\infty} (f-g) = 0$; en dehors du cas des asymptotes horizontales ou verticales, des indications doivent être fournies sur la forme de la fonction g à utiliser.
Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique. Etude d'équations $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leq \lambda$.	Etant donné une fonction f strictement monotone sur I, et un élément α de I tel que $f(\alpha) = 0$, les élèves doivent savoir comparer α à un élément donné β de I en utilisant le signe $f(\beta)$.
Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...)	On s'attachera à interpréter les résultats (variations, signe, extremums, comportement asymptotique,...). On étudiera quelques problèmes d'optimisation.
Programmation des termes d'une suite.	
Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique, et notamment d'approximations d'un point fixe d'une fonction f à l'aide d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.	On pourra, sur des exemples, explorer et itérer quelques méthodes (dichotomie, tangente, interpolation linéaire...) mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible des élèves. Dans le cas de l'approximation d'un point fixe α de f, on soulignera l'intérêt (théorique et numérique) d'une inégalité $\mid f(x) - \alpha \mid \leq k \mid x - \alpha \mid$, où $k < 1$; en outre, l'étude de la suite (u_n) devra comporter des indications sur la méthode à suivre.

34

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point, recherche de limites...). Exemples d'emploi d'inégalités sur les dérivées pour l'obtention de telles majorations.	*Pour tous les problèmes de majoration, d'encadrement et d'approximation des fonctions, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. L'exploitation, sur des exemples simples tels que e^x, $ln(1+x)$, sin x, du théorème sur le sens de variation, appliqué aux dérivées d'ordre convenable d'une fonction auxiliaire, constitue un outil intéressant. Cependant aucun énoncé sur les majorations tayloriennes n'est au programme, et il n'y a pas de catalogue de situations classiques à mémoriser.*
Etude du comportement de suites de la forme $u_n=f(n)$ (encadrement, monotonie, limite).	*Certaines études de comportement asymptotique mettent en jeu des formes indéterminées ; on se limitera à des exemples simples et, en dehors des cas figurant explicitement au programme (comparaison des suites de référence), des indications doivent être fournies sur la méthode à suivre.*
Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.	*Toute étude de ce type de suite devra comporter des indications sur la méthode à suivre.*
Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.	*Sur les exemples étudiés on mettra en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation au moyen d'une suite, étude de cette suite, obtention de la précision visée.*

2. Calcul intégral

L'objectif est double :

- Familiariser les élèves avec quelques **problèmes relevant du calcul intégral** et qui, en retour, **donnent du sens à la notion d'intégrale** : calcul de grandeurs géométriques (aires, volumes, ...), de grandeurs physiques (calcul de la distance parcourue connaissant la vitesse, valeur moyenne, valeur efficace, ...).

- **Fournir aux élèves le symbolisme du calcul intégral et exploiter, sur des exemples simples, les propriétés élémentaires de l'intégrale pour l'étude de fonctions.**

Terminale S

On combinera les activités de calcul exact d'intégrales (qui mettent en oeuvre le calcul de primitives) et les activités d'encadrement et de calcul approché (qui, de façon complémentaire, exploitent les idées géométriques à partir d'interprétations graphiques).

a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Etant donné une fonction f continue sur un intervalle I et un couple (a, b) de points de I, le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F ; on l'appelle intégrale de a à b de f et on le note $\int_a^b f(t)dt$.

Par suite, étant donné un point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.

Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme : on admettra son existence et ses propriétés élémentaires. Les élèves doivent connaître l'aire des domaines usuels : rectangle, triangle, trapèze, secteur d'un disque.

35

b) Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles.

Linéarité :
$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$; intégration d'une inégalité.

Inégalité de la moyenne :
- Si $m \leq f \leq M$ et $a \leq b$, alors

$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

- Si $|f| \leq M$, alors
$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq M.|b-a|$.

Valeur moyenne d'une fonction.

Il convient d'interpréter en termes d'aires certaines de ces propriétés (relation de Chasles, intégration d'inégalités, valeur moyenne d'une fonction, ...) afin d'éclairer leur signification.

La notion de valeur moyenne est à relier à l'enseignement de la physique.

c) Techniques de calcul

- Lecture inverse de formules de dérivation : primitives des fonctions de la forme
$t \mapsto f'(at+b)$, $(\exp u)u'$, $u^\alpha u'$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, et $\frac{u'}{u}$ (u étant à valeurs strictement positives);

Les élèves doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une de ces formes. Ils doivent aussi savoir exploiter une périodicité ou une symétrie pour le calcul d'intégrales, mais toute formule de changement de variable est hors programme.

- Intégration par parties.

d) Equations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre du premier ou du second ordre

Résolution de l'équation du premier ordre : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Résolution de l'équation du second ordre: recherche de solutions à l'aide de l'équation caractéristique ; existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Pour ces questions les élèves peuvent utiliser les fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}$, λ complexe, les solutions étant finalement exprimées sous forme réelle. Cette méthode n'est pas exigible.

Travaux pratiques

Exemples de calcul d'intégrales par primitivation et par intégration par parties.

Toute intégration par parties doit faire l'objet d'une indication. Toute technicité est exclue.

Exemples de calcul de valeurs approchées d'intégrales.

On pourra, sur des exemples simples, décrire et appliquer quelques méthodes usuelles (rectangles, point milieu, trapèzes). Mais aucune connaissance n'est exigible des élèves sur ces questions, et toutes les indications nécessaires doivent être fournies.

Calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral.

Exemples de calcul de volumes de solides usuels.

Les élèves doivent connaître la formule $V = \int_a^b S(z)dz$ et savoir l'appliquer au calcul du volume d'une boule, d'un prisme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône.

Terminale S

Exemples simples d'emploi de calcul intégral pour le calcul de grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques.	Aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible et toutes les indications utiles doivent être fournies.
Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale menant à une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ou du second ordre.	On mettra en évidence certains comportements mathématiques (amortissement, oscillation...), mais aucune connaissance sur ces questions n'est exigible des élèves. Certaines de ces situations seront choisies en relation avec l'enseignement des sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques...).
Recherche de la solution d'une équation différentielle à coefficients constants sans second membre, du premier ou du second ordre, satisfaisant à une condition initiale donnée.	Lorsque l'étude d'une situation mène à une équation avec second membre, la méthode à suivre pour se ramener à l'équation sans second membre doit être indiquée.

35

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

Travaux pratiques

Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer ; exemples d'applications à l'obtention d'encadrements d'une fonction.	*On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer doivent être fournies.*

III. Algèbre et géométrie

1. Equations, systèmes d'équations linéaires

La résolution de problèmes, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions,de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Dans cette perpective, le programme vise à mobiliser et à compléter les capacités acquises en Première.

Terminale S

Résolution d'un système d'équations linéaires à coefficients numériques par opérations élémentaires sur les lignes (méthode de Gauss) : Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ;	On pourra utiliser le codage suivant : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$. Les élèves doivent savoir que toute opération élémentaire transforme un système en un système équivalent. Aucune connaissance n'est exigible sur la description générale de cette méthode; on soulignera son aspect algorithmique, mais la mise en forme de l'algorithme n'est pas au programme.
Multiplication d'une ligne par un nombre non nul ; Echange de deux lignes.	

Travaux pratiques

Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou à une inéquation à une inconnue, ou à un système d'équations ou d'inéquations linéaires à coefficients numériques.	Pour l'ensemble des travaux pratiques de ce paragraphe, on évitera de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. On choisira autant que possible des situations issues de la géométrie, de la physique et de la vie économique et sociale.
Mise en oeuvre de méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques (méthode de Gauss, combinaisons linéaires).	Certaines de ces situations comportent de façon naturelle des paramètres : on étudiera leur influence, mais on se bornera à des cas simples comportant une seule inconnue. Toute étude introduisant a priori des paramètres est exclue.

2. Nombres complexes

Les nombres complexes, outre leur intérêt algébrique, fournissent des outils pour l'ensemble du programme et pour la physique.

Opérations sur les nombres complexes. Partie réelle, partie imaginaire, nombre complexe conjugué ; notations Re(z), Im(z), $\bar{z}$. Représentation géométrique, affixe d'un point, d'un vecteur ; interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$.	Aucune méthode d'introduction des nombres complexes n'est imposée ; les idées doivent être mises en valeur, mais une construction détaillée n'est pas souhaitable.

Module d'un nombre complexe, module d'un produit, inégalité triangulaire. Argument d'un nombre complexe non nul, notation $re^{i\theta}$.

Les élèves doivent savoir interpréter géométriquement le module de $b - a$ et l'argument de $\frac{c-b}{c-a}$. Toute autre formulation de propriétés géométriques à l'aide des nombres complexes doit faire l'objet d'indications.

Interprétation géométrique de $z \mapsto e^{i\alpha}z$.

Relation $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, lien avec les formules d'addition ; formule de Moivre. Formules d'Euler :
$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Travaux pratiques

Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	La résolution d'équations du second degré à coefficients complexes et l'étude des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont hors programme.
Exemples de mise en oeuvre des formules de Moivre et d'Euler (linéarisation de polynômes trigonométriques...).	On se bornera à des exposants peu élevés ; les formules trigonométriques ainsi obtenues n'ont pas à être mémorisées.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

Travaux pratiques

Transformation de $a \cos\theta + b \sin\theta$, où a et b sont réels.	
Conversion de produits trigonométriques en sommes et de sommes en produits.	
Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ; interprétation géométrique.	*Les élèves doivent savoir en déduire les solutions de l'équation $z^n=a$, où a est mis sous forme trigonométrique. Aucune connaissance n'est exigible sur les méthodes de résolution algébrique, même si $n=2$.*

3. Calcul vectoriel et géométrie

Le programme comporte trois objectifs principaux :

• Poursuivre l'étude du **calcul vectoriel** en relation avec l'enseignement de la physique, notamment par la mise en place du **produit scalaire dans l'espace et du produit vectoriel.**

• Entretenir la pratique des **objets usuels du plan et de l'espace.** Sur ce point, le programme ne comporte que des travaux pratiques mettant en oeuvre les connaissances de géométrie du plan et de l'espace figurant aux programmes des classes antérieures, et notamment de Seconde et de Première ; aucune autre connaissance n'est exigible des élèves.

• Exploiter des situations géométriques comme **source de problèmes**, notamment en analyse, et, inversement, entretenir une **vision géométrique** grâce à la mise en oeuvre systématique **d'activités graphiques** (tracés de courbes, schémas,...) permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme.

a) Barycentres ; réduction d'une somme $\Sigma\alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ dans chacun des cas $\Sigma\alpha_i \neq 0$ et $\Sigma\alpha_i = 0$.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser l'associativité de la barycentration.
b) Caractérisation vectorielle d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1$) : traduction dans un repère.	
c) Produit scalaire dans l'espace ; expression dans une base orthonormale.	
Projection orthogonale sur une droite, sur un plan.	Les élèves doivent savoir caractériser vectoriellement l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; ils doivent connaître et savoir utiliser la notion de plans perpendiculaires.
Caractérisation d'un plan par $\vec{k}\,.\overrightarrow{AM} = 0$; équation d'un plan dans un repère orthonormal. Equation d'une sphère de centre et de rayon donnés.	Les élèves doivent savoir déterminer un vecteur normal à un plan donné par une équation.
d) Dans l'espace orienté : bases (ou repères) orthonormales directes, indirectes.	Aucune théorie de l'orientation ne figure au programme ; on s'appuiera sur les conventions physiques usuelles.

Produit vectoriel, notations $\vec{u} \times \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$; expression dans une base orthonormale directe.

Les élèves doivent savoir utiliser le produit vectoriel pour calculer l'aire d'un parallélogramme ou d'un triangle, pour déterminer un vecteur normal à un plan.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace (calculs de distances, d'angles, d'aires, de volumes, ...) et de problèmes issus de situations géométriques (études de fonctions, optimisation,...).
Exemples d'emploi des barycentres, du produit scalaire et du produit vectoriel pour l'étude de configurations du plan et de l'espace.

Exemples d'emploi d'un repère orthonormal dans le plan ou dans l'espace.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

Travaux pratiques

L'objectif est d'enrichir les applications géométriques du calcul vectoriel et des nombres complexes.

Exemples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances et d'angles, lignes de niveau, points liés à une configuration mobile).

Pour les lignes de niveau, on exploitera notamment des situations issues des sciences physiques.

Réduction et lignes de niveau de $\Sigma \alpha_i \, MA_i^2$:

cas de deux points : lignes de niveau de $\frac{MA}{MB}$.

Ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π, ou modulo 2π.

Les élèves doivent connaître la condition de cocyclicité de quatre points qui en résulte.

38

Exemple d'emploi des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane.

Les élèves doivent savoir déterminer l'affixe d'un barycentre, évaluer un angle à l'aide de l'argument d'un quotient et traduire l'orthogonalité ou la colinéarité de deux vecteurs. Toute autre formulation de propriétés géométriques à l'aide des nombres complexes doit faire l'objet d'indications.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les paragraphes 4 et 5 suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

4.- Courbes planes

L'introduction de quelques notions sur les courbes paramétrées est motivée par l'étude de situations géométriques, mécaniques ou physiques ; on évitera donc de multiplier les exemples posés a priori. On se gardera aussi de toute technicité ; en particulier l'étude des branches infinies et des points où le vecteur dérivé s'annule, la recherche des points multiples et l'emploi de coordonnées polaires sont hors programme. Pour l'obtention de périodicités et de symétries, toutes les indications utiles doivent être fournies.

a) Notions sur les courbes paramétrées du plan

Courbe définie en repère orthonormal par $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Vecteur dérivé, interprétation cinématique (vecteur vitesse), tangente.

L'étude des fonctions vectorielles (limites, continuité, calcul différentiel...) est hors programme. Le vecteur dérivé est défini par ses coordonnées $x'(t), y'(t)$; pour la notion de tangente on se limitera au cas où ce vecteur n'est pas nul. Les élèves doivent savoir dresser un tableau de variations coordonnées des fonctions x et y et l'utiliser pour le tracé de la courbe.

b) Coniques

Définition par foyer et directrice (lignes de niveau du rapport $\frac{MF}{MH}$), excentricité : équation cartésienne dans un repère orthonormal adapté, équation réduite : cas d'une parabole, cas d'une conique à centre.
Mise en place d'une parabole ou d'une conique à centre à partir d'une équation de la forme
$y^2 = 2px$ ou $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.

La génération bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole pourra faire l'objet d'une activité, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce propos.

Terminale S

Terminale S

Représentation paramétrique $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ d'une ellipse. Projection d'un cercle sur un plan.	*Les élèves doivent connaître le lien que cette représentation permet d'établir entre le cercle et l'ellipse par affinité orthogonale plane. Mis à part ce cas, aucune connaissance sur l'affinité n'est exigible.*

Travaux pratiques

Exemples simples de courbes paramétrées du plan.	
Exemples d'obtention et d'emploi de représentations paramétriques de coniques (détermination de la tangente en un point...).	*Mis à part le paramétrage $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ de l'ellipse, aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur les paramétrages des coniques.*
Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique et de la physique menant à des coniques.	

5.- Transformations et configurations du plan

Il s'agit d'approfondir et de réorganiser les acquis des classes antérieures dans le cadre des isométries et des déplacements, grâce à une étude plus systématique de la composition des transformations et de leur effet sur les configurations. Il ne convient donc pas de reprendre l'étude des isométries à partir de zéro : on s'appuiera sur les résultats acquis antérieurement concernant les translations, les réflexions et les rotations. Le programme comporte aussi quelques notions sur les similitudes directes : les objectifs sont très modestes : on se borne à exploiter leur écriture complexe.

***a) Isométries du plan** (bijections conservant la distance).*	*En s'appuyant sur les exemples étudiés en Première, on observera que la conservation de la distance est valable non seulement pour les réflexions, les translations et les rotations, mais aussi pour leurs composées, ce qui amène à introduire les isométries.*
La composée de deux isométries est une isométrie, la réciproque d'une isométrie est une isométrie.	
Décomposition d'une translation ou d'une rotation en produit de deux réflexions.	
Toute isométrie fixant un point O est, soit une réflexion, soit une rotation.	
Etant donné un point O, une isométrie f se décompose de manière unique en $f = t \circ u$, où u est une isométrie fixant O et t une translation.	*Les élèves doivent connaître et savoir utiliser le fait que les isométries transforment les droites en droites, les cercles en cercles, les coniques en coniques, le parallélisme et le contact étant conservés; il en est de même pour leur effet sur les barycentres, les angles et les aires.*
Conservation du produit scalaire par une isométrie.	
Déplacements (isométries conservant les angles orientés) : composé de deux déplacements, réciproque d'un déplacement. Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.	*La notion d'antidéplacement est hors programme.*
Etant donné des points A, B, A', B' tels que $A'B'=AB \neq 0$, il existe un déplacement et un seul transformant A en A', B en B'.	*Les élèves doivent savoir déterminer ce déplacement et, dans le cas d'une rotation, construire son centre.*

b) Notions sur les similitudes directes du plan

Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre ; effet sur les distances, conservation des angles orientés. Ecriture complexe. Similitudes directes (bijections transformant les distances dans un rapport donné et conservant les angles orientés). Ecriture complexe $z \mapsto az + b$. Application à l'obtention d'une forme réduite : rapport, centre et angle d'une similitude directe quand $a \neq 1$, c'est-à-dire quand elle n'est pas une translation.	*L'étude générale des similitudes (bijections transformant les distances dans un rapport donné) est hors programme. Il en est de même pour la composition des similitudes directes. Les élèves doivent savoir que les similitudes directes transforment les droites en droites, les cercles en cercles, les coniques en coniques, le parallélisme ou le contact étant conservés. Ils doivent connaître leur effet sur les barycentres et les aires.*

Travaux pratiques

Exemples d'emploi des transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques.	*Des indications doivent être fournies sur la transformation à utiliser ; en outre, pour l'emploi de similitudes directes, on se limitera à quelques exemples très simples.*
Exemples d'étude des isométries laissant invariante une configuration du plan.	
Exemples de recherche et d'emploi d'isométries ou d'homothéties planes transformant une configuration donnée en une autre (segments, triangles, rectangles, cercles...).	*La recherche de similitudes directes transformant une configuration en une autre n'est pas un objectif du programme.*

Terminale S

IV. Combinatoire, probabilités

1. Combinatoire, dénombrements

Les activités menées dans les classes antérieures, notamment en statistique et en probabilités, ont fourni l'occasion de rencontrer quelques situations combinatoires très simples. En Terminale, l'objectif demeure modeste : il s'agit d'apprendre aux élèves à organiser quelques données combinatoires de base (listes, arrangements, permutations, combinaisons) et à expliquer les règles de dénombrement figurant au programme pour l'étude de quelques exemples simples, issus notamment du calcul des probabilités.

Dans les situations combinatoires étudiées, on mettra en valeur les aspects algorithmiques, mais la mise en forme de tels algorithmes est hors programme.

Cardinal de l'ensemble A^p des p-listes d'éléments d'un ensemble fini A. Cas où les éléments sont distincts deux à deux : dénombrement des arrangements et des permutations, notation !

Les élèves doivent savoir utiliser les propriétés élémentaires des opérations sur les parties d'un ensemble fini, mais l'étude systématique de ces opérations n'est pas au programme.

40

Parties de cardinal donné d'un ensemble fini : dénombrement de ces combinaisons, notation C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Le cardinal d'un ensemble fini E est noté Card (E).

Relations $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.
Formule du binôme (sur ℂ).

On mettra en valeur l'interprétation ensembliste de ces relations.

2. Probabilités

Quelques notions de calcul des probabilités ont été introduites en Première ; en Terminale, on poursuit l'étude de phénomènes aléatoires, en disposant de quelques outils combinatoires (arrangements, combinaisons) et de nouveaux concepts probabilistes (variables aléatoires, conditionnement). Comme en Première, on s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.

Le programme se limite à des ensembles finis ; toute théorie formalisée est exclue. Les notions de probabilité produit et d'indépendance de deux variables aléatoires sont hors programme. Aussi bien pour les variables aléatoires que pour les probabilités conditionnelles, **le programme ne porte que sur l'étude d'exemples.**

a) Variable aléatoire (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type.

On prendra un point de vue très simple : certaines situations de probabilité s'expriment commodément par l'affectation de probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ aux valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ d'une grandeur numérique X associée à une expérience aléatoire ; on dit alors que X est une variable aléatoire. Les événements $(X = x_1), (X = x_2), ..., (X = x_n)$ sont les événements élémentaires de la loi de probabilité de X.
Pour la fonction de répartition, on emploiera la convention $F(x) = p(X \leq x)$.

b) Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle ; relation
$p(A \cap B) = p(A \mid B)\, p(B)$.
Indépendance de deux événements.

Formule des probabilités totales : étant donné des événements $B_1, B_2, ..., B_n$ constituant une partition de E, pour tout événement A,
$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + ... + p(A \cap B_n)$
et, pour tout k, $p(A \cap B_k) = p(A \mid B_k) p(B_k)$.

L'étude d'expériences aléatoires bien choisies (situations d'équiprobabilité,...) amène à définir la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou encore $p(A \mid B)$, par la relation
$p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
Tout développement théorique sur cette notion est exclu. On mettra en évidence son utilité en observant que, dans de nombreuses situations, on connaît les probabilités conditionnelles de A par rapport aux événements B_k, ce qui permet de calculer p(A) grâce à la formule des probabilités totales.
La formule de Bayes est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples simples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux...), pour organiser et dénombrer des données.

Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux, schéma de Bernoulli, ...).

Exemples simples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.

Lorsque l'étude d'une situation nécessite l'emploi d'une variable aléatoire ou de probabilités conditionnelles, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. En outre, pour l'exploitation des probabilités conditionnelles on se bornera à des exemples où la partition $(B_1, B_2, ..., B_n)$ utilisée comporte au plus quatre éléments.

Le Rapporteur

Moment solennel que celui où l'on apprend à se servir du Rapporteur, où l'on découvre que ce joli pont à l'arche unique, cette caricature d'éléphant vu de dos, sert à quelque chose. Jusque-là, le Rapporteur est resté au fond du cartable avec les autres objets énigmatiques ou qui semblent inutiles. Il faut déjà faire l'effort de le retrouver.

Le Rapporteur semble un hilarant tour de force : curieuse idée, cette invention destinée à tracer les courbes. Idéal pour tracer les pétales de grosses fleurs à deux feuilles dont l'une, cassée, pend tandis que l'autre se dresse. Se résigner : le Rapporteur n'est pas une règle courbe à tracer les marguerites. C'est en vérité une esthétique création de la géométrie, tout en rondeur et en douceur si on le compare à l'équerre dont les pointes rongées n'ont fait que du mal.

Le Rapporteur sert à tracer des angles et à les mesurer. Comment un instrument tout rond, comment un demi-cercle doux au toucher peut-il générer ces angles, objets pointus, farouches, piquants et droits comme le compas, et comment, lui, le compas, tout en aiguille effilée, pourrait-il projeter les cercles? Il faudra toute la solidarité écolière et cent récréations rassurantes pour rendre au Rapporteur sa poésie d'arche, au compas son allure de lent patineur.

Le Compas Chromé Brillant

Élégance louche et précision aiguë, le Compas Chromé Brillant a l'allure masculine d'un grand individu travesti. Bien qu'il semble inadapté à la marche en raison de la hauteur de ses talons, le Compas sait une danse facile, un pas compassé, aussi révolu que la ronde, mais qui semble le geste unique permis par ses hanches étroites. Danseur bipède donc, émoussant ses pointes sur le parquet ciré et s'autorisant de grands écarts maladroits, ou plutôt patineur prisonnier de la piste, aux longues jambes de faon, il est image glissante de lac gelé.

Au-delà de ces rêveries pointilleuses, il y a l'outil même, avec ses deux segments bien équilibrés (d'un côté, le point d'ancrage : une aiguille effilée; de l'autre, le point encreur : mine de graphite ou plume à dessin) qui font de la trousse une corbeille de dattes où trouver l'aspic à tout coup. Sous l'ongle du majeur — le doigt le plus long est le plus exposé — la piqûre est très douloureuse.

Des cercles tracés, rien à dire puisqu'ils sont parfaits. Tout cercle est une cible percée au mille. Mais son coût mérite d'être signalé. Un cercle est une perforation obligée et, par conséquent, une détérioration flagrante du support. Donnons pour base que le centre d'un cercle moyennement appuyé traverse vingt feuillets.

L'Équerre

Les esprits les plus obtus admirent l'Équerre et sa perfection d'angle droit. Les plus aigus la critiquent. En effet, tout dans l'Équerre — excepté l'angle droit qui, lui, s'affirme énergiquement en avançant son menton pointu — semble inachevé. Cette forme de plexiglas cède, se brise, ne tient pas ses promesses et arbore l'aspect peu soigné d'une babiole de pochette-surprise. Par exemple, son évidence de revolver est une déception presque immédiate. Ni gâchette, ni semblant de chien ou soupçon de barillet, c'est une ombre d'arme à feu, un dessin qu'il faut animer. De surcroît, la crosse se plante dans la paume et l'on se désarme soi-même avec brutalité. Quant à casser une branche de l'Équerre pour la transformer en boomerang, il ne faut pas y compter. La section ne serait pas nette, de longues esquilles se détacheraient, les bords déchiquetés deviendraient terribles, pour un résultat bien piteux. Bref, l'Équerre, et quel que soit son angle, insulte la plus joueuse des imaginations.

Par chance, sa fragilité permet de la détruire sans recours à des excuses compliquées. Il suffit d'émietter ce plat tricorne. Ses pointes se rongent et cassent aussi simplement que les oreilles des gâteaux rectangulaires.

Régine DETAMBEL Graveurs d'enfance
Christian Bourgois Editeur

RESULTATS DU CONCOURS

Nous vous proposions de trouver une disposition de la multiplication qui évite les retenues sur les produits partiels, à l'instar de la "multiplication musulmane" qui était présentée.

Nous avons retenu deux dispositions parmi... les deux propositions qui nous ont été faites ; les voici !

```
     5 6 7 9
x        3 4
------------
     2 4 3 6
   2 0 2 8
   1 8 2 7 .
 1 5 2 1
------------
 1 9 3 0 8 6
```

```
          5 6 7 9
     x        3 4
-----------------
  2 0 2 4 2 8 3 6
1 5 1 8 2 1 2 7 . .
-----------------
1  9  3  0  8  6
```

Les deux gagnants - Patrick PERRIN et Jean-Marie FAREY - devaient gagner un abonnement gratuit à Vecteur pour un an.

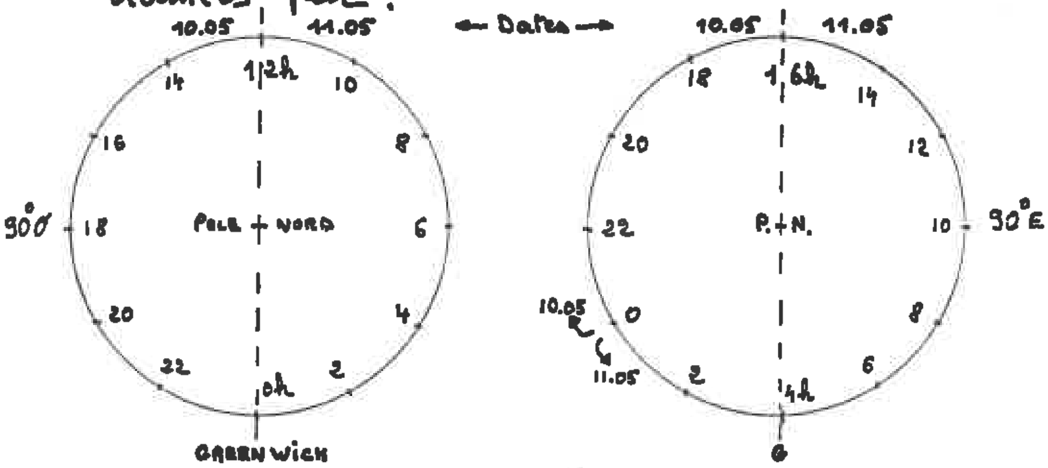
Par les raisons invoquées dans notre éditorial*, ils sont invités à passer à l'IREM pour y retirer une brochure de leur choix.

* cf page 1

AUJOURD'HUI ...

. Honolulu et Nouméa ont pour positions approximatives (155° O ; 20° N) et (165° E ; 20° S)

. Les dates et heures, au même instant, sont données par :



. Une variation de 1 heure correspond à la variation de 15° de longitude

. Une montre-bracelet ordinaire suffira, à condition qu'elle soit réglée à l'heure locale (heure solaire moyenne et non heure légale)

. Les deux villes précédentes sont distantes de 5000 km environ - le voyage dure 6 h 30 min

Si le départ de Nouméa est fixé le jeudi 11 Mai 1995 à 14 h 30 min, à quelle date et heure (locale) arrivera un voyageur à Honolulu ?

I. R. E. M.

IREM DE REIMS ET IUFM DE REIMS

GROUPE DE TRAVAIL EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

ANNEE 1992 - 1993

Université de Reims
IREM DE REIMS

Moulin de la Housse -BP 347
51062 REIMS CEDEX

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FORMATION DES MAITRES DE L'ACADÉMIE DE REIMS.

SIEGE :
32, rue Ledru Rollin - B.P. 515
51068 REIMS CEDEX

TABLE DES MATIERES

En septembre 1992, L'I.R.E.M. et l'I.U.F.M. de Reims ont décidé d'organiser conjointement un groupe de travail en didactique des mathématiques, ouvert à tous les formateurs d'enseignants intéressés de l'académie, tant au niveau de l'enseignement élémentaire que secondaire. Ce groupe s'est constitué autour de deux objectifs :

- contribuer à la formation didactique de ses membres, en particulier aider à compléter et structurer une formation s'étant le plus souvent faite sur le tas, au fur et à mesure des besoins ressentis,
- réfléchir sur les pratiques de formation didactique et développer des travaux didactiques en liaison avec la formation des enseignants.

Le groupe "didactique" a réuni une trentaine de participants une fois par trimestre pour une longue après-midi de travail. Chacune de ces après-midi comportait à la fois une partie formation - groupe de travail et une partie séminaire consacrée à la présentation de travaux de recherche récents.

Dans la première partie de l'après-midi, nous avons abordé sous des formes diverses : exposés de synthèse, analyse d'une séance de classe magnétoscopée, analyse de textes didactiques - les thèmes suivants :

- la didactique des mathématiques, domaine de recherche et la formation des enseignants,
- l'observation et l'analyse didactique de situations d'enseignement,
- la prise en compte de l'élève en didactique des mathématiques.

Dans la seconde partie : le séminaire, trois chercheurs sont venus nous présenter leurs travaux :

- Isabelle Tenaud nous a présenté son travail de thèse portant sur l'enseignement de la géométrie en terminale C et les possibilités offertes par l'enseignement de méthodes et la pratique du travail en petits groupes, dans ce domaine,
- Jean Michel Bazin, chercheur en intelligence artificielle, nous a présenté son travail de thèse en cours, concernant la réalisation d'un système informatique de résolution de problèmes de géométrie de quatrième, fondé sur l'analyse des procédures de résolution d'enseignants, et les questions d'ordre didactique soulevées par ce travail,
- Marie-Jeanne Perrin, enfin, s'est appuyée sur son travail de thèse portant sur des "classes faibles" pour nous présenter une analyse des contraintes de fonctionnement des enseignants de collège et des phénomènes didactiques que ces contraintes tendent à produire.

Par ailleurs, dans le cadre de ce groupe didactique, un sous-groupe s'est constitué pour analyser les copies du premier concours des professeurs d'école (juin 1992) et déterminer ce que ces copies nous apprenaient sur le rapport aux mathématiques et le rapport à la didactique des candidat(e)s, ainsi que sur l'effet de la formation dispensée en première année d'I.U.F.M.

Nous avons regroupé dans cette brochure, qui constitue la trace de la première année de vie du groupe, les résultats de l'analyse effectuée des copies du concours PE et les trois exposés du séminaire.

Michèle Artigue
I.U.F.M. de Reims

Hélène Authier
I.R.E.M. de Reims

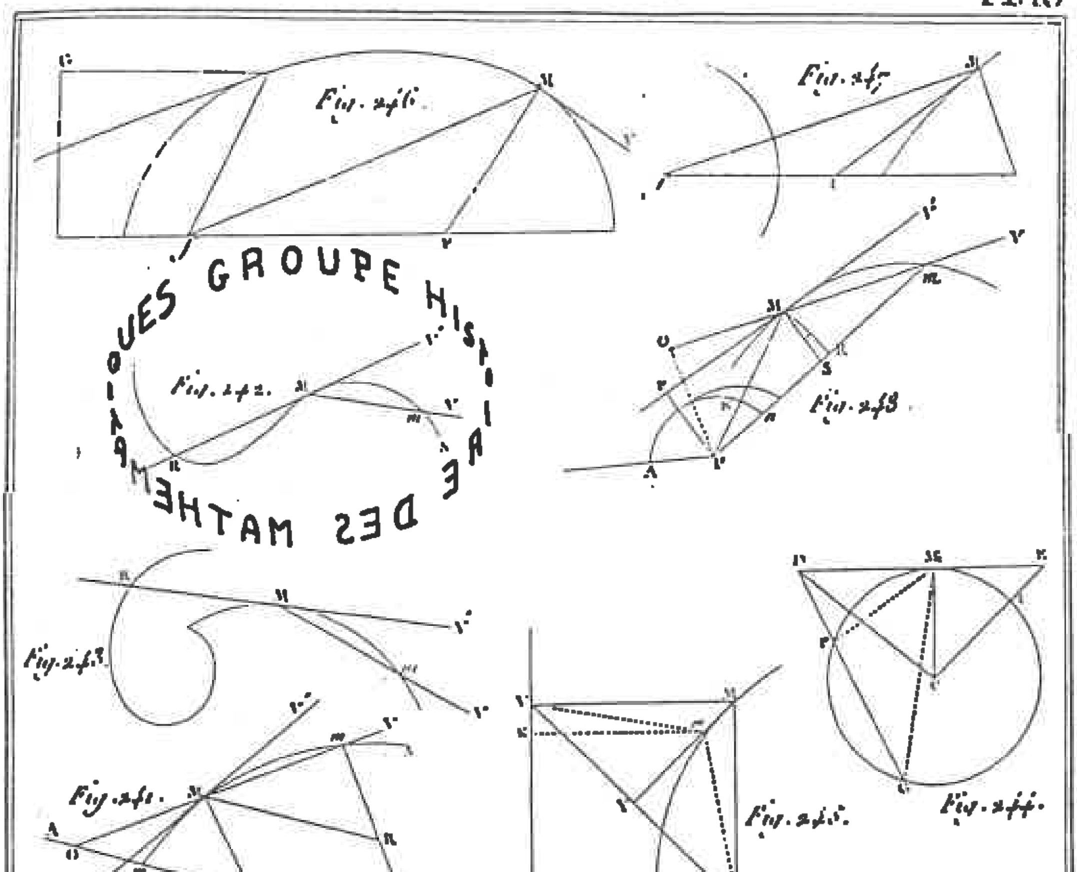
UNIVERSITE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

Histoires de Tangentes

Pl. 16



Mathématiques, Géométrie.

FICHE DUBLIREM

Titre : HISTOIRES de TANGENTES

Auteurs : Philippe DELEHAM, Geneviève KIENTZ
Jean Claude PENIN, Patrick PERRIN

Niveau : Second cycle et supérieur, formation des maitres

Date : Mars 1994

Mots-clé :
spécialité : Histoire des mathématiques
autres : Activité en classe
Calcul différentiel
Cycloïde
Tangente

Résumé : Présentation de textes anciens annotés traitant du calcul des tangentes.
Comptes-rendus d'expérimentations en classe et d'enquête concernant l'enseignement des notions de limite, dérivée, tangente.

Format	Nombre de pages	Prix	IREM numéro
A4	110	50,00 F	Re 30

ISBN 2-910076-01-6

Cette brochure fait suite au stage : "l'analyse en second cycle ; l'histoire du calcul infinitésimal", qui eût lieu dans l'académie de Reims durant l'année scolaire 91-92. Elle est le fruit d'un travail mené par le groupe Histoire des Mathématiques de l'IREM de Reims.

A la lumière de textes du XVII° et du XVIII° siècle, nous avons essayé d'apporter un éclairage nouveau aux notions de base du calcul différentiel que nous enseignons à nos élèves : limite, continuité, dérivée, tangente ; entrepris d'analyser leur évolution historique. Vous trouverez ci-après les textes qui nous ont paru les plus significatifs, précédés d'une courte biographie de leur auteur et d'une présentation.

Certains textes ont fait l'objet d'activités en classe, vous pourrez en lire le contenu et un compte-rendu. Il nous semble que la mise en présence de textes historiques peut aider les élèves dans leur compréhension des mathématiques. La lecture des programmes nous a confortés dans cette démarche : "Il convient de mettre en oeuvre le contenu culturel des mathématiques : l'introduction d'une perspective historique peut y contribuer" (B.O. du 17 mai 1990).

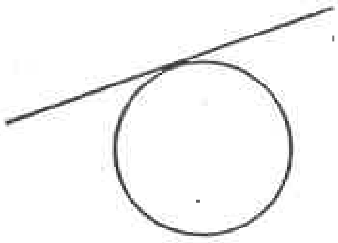
Une des origines de ce travail a été la confusion que nous avions remarqué chez les élèves concernant les notions de limite, tangente et dérivée à leur entrée en terminale scientifique. Nous avons sur ce sujet mené une enquête auprès de 226 élèves du lycée Clémenceau de Reims, en Septembre 1991. Les résultats de cette enquête se trouvent à la fin de cette brochure.

Nous espérons que vous éprouverez autant de plaisir à découvrir ou étudier ces textes, dont certains sont peu connus, que nous en avons eu nous-mêmes. Toutes vos remarques ou suggestions seront les bienvenues.

Philippe DELEHAM
Geneviève KIENTZ
Jean Claude PENIN
Patrick PERRIN

Sommaire

tangente



Je ne toucherai qu'une fois
Et vous saurez que c'est furtif.

Inutile de m'appeler,
Tout autant de me rappeler.

Vous aurez grandement le temps
De vous redire ce moment

Et d'essayer de vous convaincre
Que nous restons l'un contre l'autre.

GUILLEVIC
Euclidiennes, poèmes
Gallimard, nrf.

TITRE :	50 exercices pour nos élèves
AUTEUR :	équipes du Rallye Mathématique IREM de Reims 08 - 10 - 51 - 52
NIVEAU :	COLLEGE : 4ème - 3ème
DATE :	MAI 1994
MOTS-CLE : spécialité	JEUX MATHEMATIQUES ACTIVITES
autres	Classe, Géométrie, problème, recherche, etc ...
RESUME :	Recueil tiré du "RMCA" (Rallye Mathématique Champagne Ardenne) de 1989 à 1991.

ISBN 2-910076-03-2

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A5	50	20 F	Re32

50 PROBLEMES POUR NOS ELEVES

RALLYE MATHEMATIQUE CHAMPAGNE ARDENNE de 1989 à 1991

4° - 3°

BICENTENAIRE
MOZART
(1756-1791)

TITRE :	50 exercices pour nos élèves
AUTEUR :	équipes du Rallye Mathématique IREM de Reims 08 - 10 - 51 - 52
NIVEAU :	COLLEGE : 6ème - 5ème
DATE :	MAI 1994
MOTS-CLE : spécialité	JEUX MATHEMATIQUES ACTIVITES
autres	Classe, Géométrie, problème, recherche, etc ...
RESUME :	Recueil tiré du "RMCA" (Rallye Mathématique Champagne Ardenne) de 1989 à 1991.

53

ISBN 2-910076-04-0

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A5	50	20 F	Re33

50 PROBLEMES POUR NOS ELEVES

RALLYE MATHEMATIQUE
CHAMPAGNE ARDENNE
de 1989 à 1991

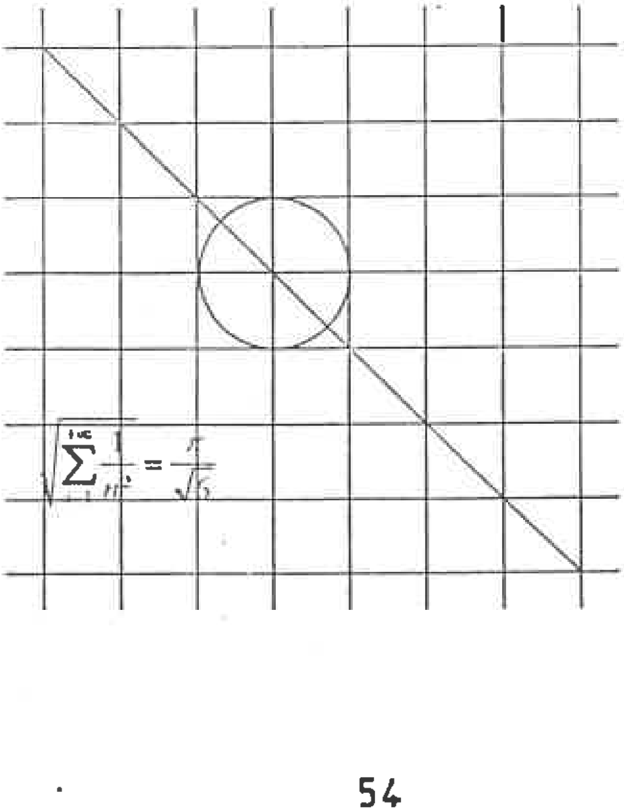
6° - 5°

BICENTENAIRE
MOZART
(1756-1791)

MATHEMATIQUES

sur

LE CAHIER DE L'ECOLIER



30F

IREM de REIMS

54

Introduction

Le quadrillage est le support le plus utilisé par les écoliers ou les étudiants mais on trouve très peu de documents qui l'utilisent comme objet de travail ou de recherche. Pourtant, il permet d'aborder pratiquement tous les thèmes des mathématiques enseignées dans les collèges, les lycées et même à l'université, à travers des activités de tous niveaux, des plus simples aux plus compliquées.

L'étude qui suit est un rapide survol des possibilités offertes par ce support familier et quotidien. Ce n'est pas un produit fini mais un recueil d'idées que chacun pourra exploiter à sa manière.

La règle du jeu est que n'est constructible que ce qui passe par des noeuds du quadrillage ou est intersection de droites constructibles. Evidemment, seule la règle non graduée est autorisée!

Sommaire

vecteur

SOMMAIRE DU NUMERO UN (1992)

SOMMAIRE DU NUMERO DEUX (1992)

SOMMAIRE DU NUMERO TROIS (1992)

SOMMAIRE DU NUMERO QUATRE (1993)

SOMMAIRE DU NUMERO CINQ (1994)

Bon de commande d'anciens numéros à renvoyer à :

IREM de REIMS, Moulin de la Housse, BP 347 51062 REIMS CEDEX

accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

NOM........................ Prénom......................

Etablissement...

Adresse de l'établissement................................

Code postal et Ville......................................

Entourez les numéros demandés : 1 2 3 4 5

Soit ..... numéros à 20 F l'un d'où un montant total de ..... F

Mode de réglement : Chèque bancaire

Chèque postal Virement administratif sur facture

La demande sera satisfaite dans la limite des stocks disponibles

Vecteur

Bon de commande d'anciens numéros à renvoyer à :

IREM de REIMS, Moulin de la Housse, BP 347 51062 REIMS CEDEX

accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

NOM........................ Prénom......................

Etablissement...

Adresse de l'établissement................................

Code postal et Ville......................................

Entourez les numéros demandés : 1 2 3 4 5

Soit ..... numéros à 20 F l'un d'où un montant total de ..... F

Mode de réglement : Chèque bancaire

Chèque postal Virement administratif sur facture

La demande sera satisfaite dans la limite des stocks disponibles

Vecteur

Marne :	Patrick PERRIN Lycée Georges Clémenceau 46 avenue Georges Clémenceau 51096 REIMS Cédex **FAX :** 26.85.52.77
Ardennes :	Regis DEBARGE Lycée Parc du château de Montvillers 08140 BAZEILLES **FAX :** 24.27.43.27
Aube :	Brigitte CHAPUT Lycée Edouard Herriot 10300 SAINTE- SAVINE **FAX :** 25.75.63.15
Haute-Marne :	Jean-Claude DANIEL Lycée Edmé Bouchardon 16 rue Youri Gagarine 52012 CHAUMONT Cédex **FAX :** 25.32.15.90
I.R.E.M.	**TEL :** 26.05.32.08 **FAX :** 26.85.35.04

vecteur

SOMMAIRE DU NUMERO SIX (1994)

IREM de Reims
Tél : 26 05 32 08
Fax : 26 85 35 04

ACADEMIE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 Reims Cedex