ACADEMIE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

Bulletin
de liaison n° 4

vecteur

1993

EDITORIAL

Chers Abonnés,

ce quatrième numéro de $\vec{V}$ecteur est maintenant exclusivement distribué sur abonnement : l'annonce en était faite en novembre 92 et une lettre, adressée au "Professeur coordinateur" de chacun des 235 établissements de l'Académie, au cours du mois de Février, rappelait que la publication avait besoin, pour continuer à paraître, de trente francs annuels. A ce jour, une soixantaine d'établissements et de collègues ont fait le nécessaire ; nous tenons à les remercier pour la confiance et l'encouragement qu'ils nous prodiguent. Nous espérons d'autre part que ceux qui bénéficiaient d'un abonnement gratuit jusqu'à ce numéro quatre confirmeront l'intérêt qu'ils ont déjà manifesté envers $\vec{V}$ecteur en s'abonnant pour les numéros 5 et 6.

Le bulletin s'est présenté de lui-même dans ses trois premiers numéros : article sur des thèmes mathématiques, documents pour la classe, vitrine du Rallye mathématique, présentation de textes anciens, publicité pour de nouvelles parutions I.R.E.M. et pour d'autres qui bien que moins nouvelles présentaient un intérêt. Signalons que certains de ces articles, tournés plus spécialement vers la classe, nous sont parvenus spontanément proposés par leurs auteurs. Ce mouvement s'amplifiera-t-il ? Nous le souhaitons, dans la mesure où cette forme d'articles est proche de notre quotidien d'enseignants.

Notre intention pour ce numéro 4 était également d'essayer de coller à l'actualité. La réforme des lycées et les éventuels changements de programmes qui doivent l'accompagner nous en donnaient l'occasion. Mais comme vous le savez, celle-ci vient elle-même d'être réformée (certains parlent d'une contre-réforme) et au moment où nous écrivons, de nombreux éléments baignent encore dans un flou qui n'a rien d'artistique.

Aux dernières informations, les horaires de mathématiques en classe de première des lycées d'enseignement général seraient les suivants :

– 1h en première littéraire avec possibilité d'une option de 4h (actuellement 2h en 1^{e}A$_2$ et 5h en 1^{e}A$_1$)

– 5h en première scientifique plus 1h de module (actuellement 6h en 1^{e}S)

– 3h en première sciences économiques avec possibilité d'une option de 2h (actuellement 5h en 1^{e}B)

Nous laissons à chacun le soin d'en tirer ses propres conclusions.

Quant aux programmes, de nombreux projets ont circulé ces derniers mois ; les seuls ayant un caractère définitif sont ceux des classes de B.E.P : vous les trouverez en page 41.

Bon courage pour cette fin d'année scolaire et bonnes vacances à tous !

la rédaction

SOMMAIRE DU NUMERO QUATRE (1993)

DES ATELIERS MATHEMATIQUES EN 3EME, POURQUOI FAIRE?

Face à l'hétérogénéité des classes, assumée et utile dans une structure classique de cours (émulation, confrontation de toutes les compétences), il nous est paru intéressant de proposer à nos élèves des ateliers de mathématiques. Plusieurs obligations se sont imposées lors des concertations:

1) Ces ateliers doivent entrer dans l'horaire naturel de mathématiques afin que chacun y participe.

2) L'objectif unique est la méthodologie mathématique.

3) Les moyens en seront des problèmes plus ou moins ouverts adaptés aux compétences de chaque groupe.

4) les groupes seront des groupes de niveaux autour de quatre compétences:
- Capacité à abstraire et à formaliser
- Capacité à abstraire et difficulté de formalisation
- Difficultés à abstraire et capacité de déduction simple
- Difficultés à abstraire et difficultés de déduction.

5) chaque enseignant de 3ème devra intervenir dans chaque groupe.

6) Les groupes seront constitués à partir de l'effectif de plusieurs classes de 3ème (4 classes soit un effectif de 100 élèves environ).

Les ateliers se déroulaient le mardi matin de 8h à 9h, heure en barrette demandée à l'administration, et concernaient les professeurs suivants: Mr Bohl, Mr Debroas, Mme Jacques et Mr Roger. leur mise en place s'est faite vers la fin octobre, le temps que chacun puisse observer ses élèves et déterminer leur niveau de compétences.

L'évaluation était faite autour de l'objectif de méthodologie, et il était bien clair que l'obtention ou non d'un résultat rigoureux n'entrait que peu en ligne de compte. Ce qui nous imposait un contrat différent avec les élèves, "*On vous demande de chercher et de rédiger toutes les pistes qui vous viennent à l'esprit, et d'utiliser tous les moyens qui vous paraissent nécessaires (graphiques, équations, fonctions, etc...) afin de résoudre les problèmes proposés*" .

Une activité pour le groupe 1: la comparaison de surface.

Le problème que l'on se pose, c'est de voir comment varient les aires dans une figure géométrique en fonction d'une longueur x donnée, puis de les comparer.

Ce problème vous a déjà été posé pour certaines figures, nous allons essayer de le généraliser.

Dans un triangle

Soit un triangle ABC dont on connaît les trois longueurs ainsi que la hauteur h issue de A. On place un point M sur le segment [BC] à une distance x de B.

On a ainsi déterminé deux triangles AMB et AMC de même hauteur.

- Comment s'exprime en fonction de x les aires de ces deux triangles?

- Comment peut-on comparer les aires des triangles AMC et MAB en fonction de x?

On se fixe un coefficient k, coefficient de rapport des aires, écrire une formule de calcul de x connaissant k (rappel: AB, BC, AC et h sont connues).

Maintenant, on découpe le triangle suivant sa hauteur h par une parallèle à [BC] située à une distance x du sommet A. On obtient ainsi deux points I et J sur [AB] et [AC].

- Quelle est en fonction de x, l'aire du triangle AIJ et du trapèze IJCB?

On se fixe un nombre k, coefficient de rapport des aires. Ecrire une formule de calcul de x connaissant h.

Dans un rectangle

On se donne un rectangle ABCD de longueur L et de largeur l, on va placer un point M sur une des longueurs AB avec AM=x. On obtient ainsi un triangle ADM et un trapèze DCBM.

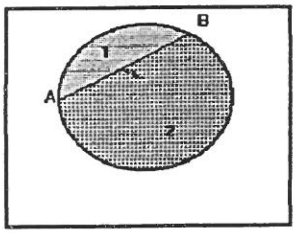
- Quelle est en fonction de x l'aire de ADM et l'aire de DCBM?

Soit k le rapport entre ces deux aires, écrire une formule de calcul de x connaissant k.

Et si M est sur (AB) mais non intérieur à [AB]?

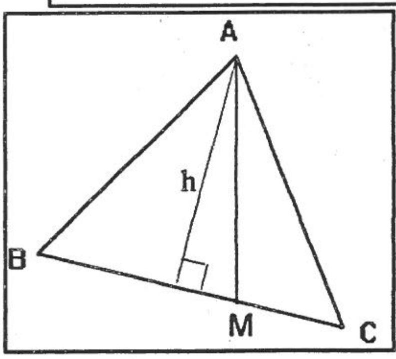
Dans un disque

On se donne un disque de rayon R et un point A appartenant au cercle. On place un point B sur le cercle tel que:
AB = x ([AB] est une corde)
Comment peut on connaître l'aire 1 et 2 en fonction de x?



Comment les comparer?

Le compte rendu d'éléves:
Richard Renault, Fatiha Benkoussa, Sabrina Nouioua et Jean Charles Votion



Dans un triangle...

1) On note x la longueur BM

aire de AMB: $\frac{\text{base x hauteur}}{2} = \frac{xh}{2}$

airedeAMC: $\frac{\text{basexhauteur}}{2} = \frac{h(BC-x)}{2}$

2) Dans les deux formules de calcul d'aire, seul x est inconnu. Dans AMB, on connaît h mais pas x . Dans AMC, on connaît h et BC mais pas x.

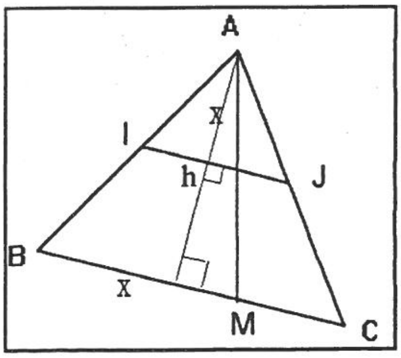
Il faut donc connaître x. Ensuite, il faudra calculer les aires des deux triangles, comme cela , on pourra les comparer.

3) On doit avoir une égalité du genre: aire de AMB=k. aire de AMC ou aire de AMC=k. aire de AMB

$$\frac{xh}{2} = k.\frac{h(BC-x)}{2}$$
$$\frac{x}{2} = k.\frac{(BC-x)}{2}$$
$$x = k(BC-x)$$
$$x = BC.k - kx$$
$$x + kx = BC.k$$
$$x(1+k) = BC.k$$
$$x = \frac{BC.k}{1+k}$$

La formule de calcul de x connaissant k et h est:

$$\boxed{x = \frac{BC.k}{1+k}}$$



Sur la figure (IJ) ne coupe pas (h) à une distance x du sommet A. Il aurait fallu construire un triangle avec une hauteur très importante par rapport à la base.

On note R le point d'intersection de (h) et de (BC) et L le point d'intersection de (IJ) et de (h).

La longueur AL est notée x.

Triangle ABC

Comme (IJ) // (BC) et comme les points I et J sont du même côté de A par rapport à B et C, on peut utiliser le théorème de Thalès. Ce théorème permet d'écrire:

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$$

Triangle ABR

(IL) et (IJ) ne sont qu'une seule droite.

(BR) et (BC) ne sont qu'une seule droite.

Si (BC) // (IJ) alors (IL) // (BR)

Comme (IL) // (BR) et comme les points I et L sont du même côté de A par rapport à B et R, on peut utiliser Thalès.

Ce théorème permet d'écrire:

$$\frac{AI}{AB} = \frac{x}{h}$$

si $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AB}} = \frac{x}{h}$ et si $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AB}} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$ alors $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AB}} = \frac{x}{h} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$

et alors $\frac{x}{h} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$

Donc $\frac{x}{h} = \frac{IJ}{BC}$

$IJ.h = BC.x$

$IJ = \frac{BC.x}{h}$

si (IJ) // (BC) et si (h) ⊥ (BC) alors (h) ⊥ (IJ)

Cette propriété est un théorème: "si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre". Comme (h) est la hauteur issue de A de ABC, (h) est l'une des hauteurs du triangle AIJ.

pour calculer l'aire de AIJ, une partie de (h) nous intéresse seulement. Cette partie est celle comprise dans AIJ: c'est donc x.

$$\text{aire du triangle AIJ} = \frac{\text{base x hauteur}}{2} = \frac{\frac{BC.x}{h}x}{2} = \frac{\frac{BC.x^2}{h}}{2} = \boxed{\frac{BC.x^2}{2h}}$$

$$\text{aire de IJCB} = \frac{\text{(petite base x grande base) x hauteur}}{2} = \frac{(\frac{BC.x}{h} + BC).(h-x)}{2}$$

$$\text{soit } \frac{1}{2}(\frac{BC.x}{h} + BC)(h-x) = (\frac{BC.x}{2h} + \frac{BCh}{2h})(h-x) = \frac{BC(x+h)}{2h}(h-x) = \frac{BC}{2h}(x+h)(x-h)$$

$$\text{aire de IJCB} = \boxed{\frac{BC}{2h}(h^2 - x^2)}$$

$$\frac{BC.x^2}{2h} = k.\frac{BC}{2h}(h^2 - x^2)$$

$$x^2 = k.(h^2 - x^2)$$

$$x^2 = k.h^2 - k.x^2$$

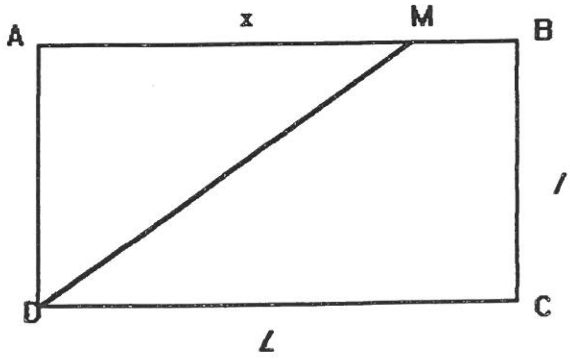
$$x^2 + k.x^2 = k.h^2$$

$$x^2(1+k) = k.h^2$$

$$x^2 = \frac{k.h^2}{1+k} = \frac{k}{1+k}h^2$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{k}{1+k}}.h}$$

Dans un rectangle



$$\text{aire ADM} = \frac{lx}{2}$$

$$\text{aire DCBM} = \frac{l[(L-x)+l]}{2} = \frac{l(2L-x)}{2}$$

$$\frac{lx}{2} = k\frac{l(2L-x)}{2}$$

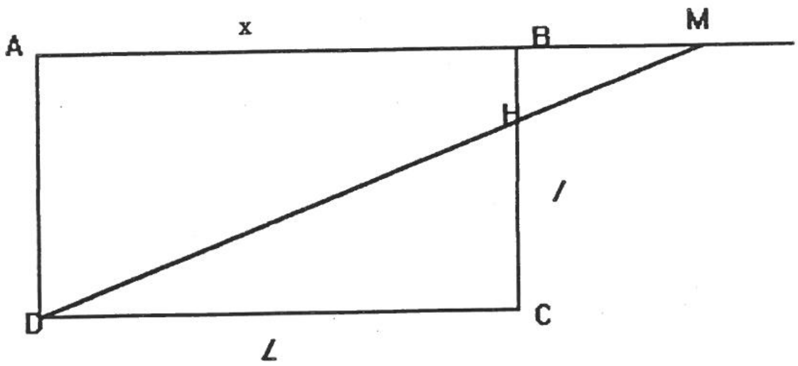
$$\frac{x}{2} = \frac{k(2L-x)}{2}$$

$$x = k(2L-x)$$

$$x + kx = 2L.k$$

$$x(1+k) = 2L.k$$

$$x = \frac{2kL}{1+k}$$



Si M est sur (AB) et non intérieur à [AB], alors le quadrilatère DCBM est croisé. DCBM est un trapèze croisé. L'aire de DCBM est égale à l'aire de deux triangles .

On appelle H le point d'intersection de (DM) et de (BC). Ces deux triangles sont DCH et HBM.

Pour calculer leurs aires, on aura besoin d'un 3ème nombre (autre que k et l). ce nombre est HC (ou HB).

ex:

$$\text{aire de DCM} = \frac{\text{L.HC}}{2}$$

$$\text{aire de HBM} = \frac{(\text{l-H C})(\text{x-L})}{2}$$

On observe que l'on n'a pas trouvé l'aire de DCH en fonction de x, de plus, on a besoin d'une 3ème longueur.

Donc, si le trapèze DCBM est croisé, on ne pourra pas appliquer la formule: $x = \dfrac{2L.k}{1+k}$

On peut changer le nom du quadrilatère pour que celui-ci ne soit plus croisé. On l'appellera DBMC.

On va calculer l'aire de AMD en fonction de x puis celle de DBMC (toujours en fonction de x).

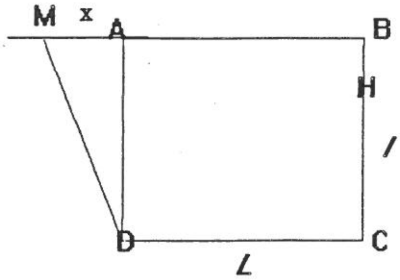
aire de AMD= $\frac{lx}{2}$

aire de DBMC = $\frac{[(x\text{-}L)+L]l}{2} = \frac{[x\text{-}L+L]l}{2} = \frac{xl}{2}$

On ne peut pas non plus appliquer la formule car l'on n'a déjà plus de L.

La formule n'est valable que si M est à l'intérieur de [AB]. Elle est limitée; elle n'est pas applicable partout.

Analyse de Benkoussa F et Nouioua S



aire du triangle ADM= $x.\frac{l}{2}$

aire du trapèze DCBM= $\frac{[(L+x)+L]l}{2}$ ou $[(L+x)+L]\frac{l}{2}$

2)

$$k = \frac{x.\frac{l}{2}}{[(L+x)+L]\frac{l}{2}}$$

$$k = \frac{x}{[(L+x)+L]}$$

$$k[(L+x)+L] = x$$

$$kL + kx + kL = x$$

$$2kL + kx = x$$

$$x = \frac{2kL}{(1-k)}$$

Dans un disque

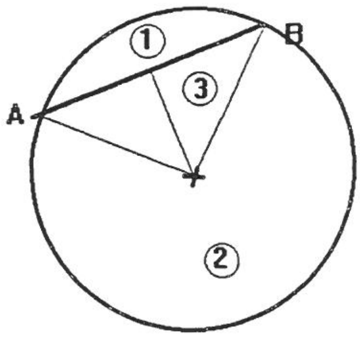
1) L'aire d'un secteur circulaire est:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

L'aire d'un segment circulaire:

aire du secteur - aire du triangle (4-3)

Calcul de 1 en fonction de x



Aire du segment circulaire= $\frac{\pi.R^2.n}{360} - \frac{xh}{2}$

calcul de 2 en fonction de x

aire du disque - aire du segment circulaire

$$\pi.R^2 - (\frac{\pi.R^2.n}{360} - \frac{xh}{2}) = -\pi.R^2 - \frac{\pi.R^2.n}{360} + \frac{xh}{2} = \frac{360\pi.R^2 - \pi.R^2.n}{360} + \frac{xh}{2}$$

donc, $\frac{\pi.R^2(360-n)}{360} + \frac{xh}{2}$

2) Pour comparer, il faudrait peut-être diviser l'aire 2 par l'aire 1. On trouverait une valeur fixe. On pourrait comparer les deux aires car on saurait par quel nombre il faut multiplier 1 pour trouver 2. On connaitrait le coefficient de rapport des aires, on pourrait alors calculer une aire à partir de l'autre et du coefficient.

$$k = \frac{\frac{\pi R\ (360-n)}{360} + \frac{xh}{2}}{\frac{\pi R\ .n}{360} - \frac{xh}{2}}$$

L'élève s'est arrêté là, il a essayé une simplification incorrecte, de toute façon la solution était loin d'être évidente..
En effet, la donnée de x nous oblige à calculer la valeur de l'angle au centre AOB en fonction de x et R soit:

$$AOB = 2\arcsin(\frac{x}{2R})$$

pour plus de commodité nous appellerons AOB=α
D'où l'écriture des aires 1 et 2:

$$\text{Aire 1} = \alpha.\mathrm{R}^2 - \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$ où α est une fonction de x

$$\text{Aire 2} = \pi\mathrm{R}^2 - \alpha.\mathrm{R}^2 + \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation : Aire de 1= k.Aire de 2

Expérience réalisée par :

A. BOHL
J.L. DEBROAS
G. JACQUES
E. ROGER

Rédigée par :

Eric ROGER

Collège Pasteur
VRIGNE AUX BOIS
(Ardennes)

LA CUISINE DE PYTHAGORE

Vous connaissez tous les formules pour obtenir des triangles rectangles avec des mesures de côtés en nombres entiers.

A tout hasard, je les rappelle: $a^2 + b^2 = c^2$ est la célèbre relation de P. dans laquelle c est la mesure de l'hypoténuse et a et b sont les mesures des côtés de l'angle droit. Par un (évident?) changement de variables, en posant $a = x^2 - y^2$; $b = 2xy$ et $c = x^2 + y^2$ puis en faisant varier x et y on obtient toutes les possibilités.

Voici quelques exemples pour $y < x \leq 10$:

3 - 4 - 5	5 - 12 - 13	8 - 15 - 17	7 - 24 - 25
20 - 21 - 29	9 - 40 - 41	12 - 35 - 37	11 - 60 - 61
28 - 45 - 53	33 - 56 - 65	13 - 84 - 85	16 - 63 - 65
48 - 55 - 73	38 - 80 - 89	15 -112 -113	36 - 77 - 85
65 - 72 - 97	17 -144 -145	20 - 99 -101	60 - 91 -109
51 -140 -149	19 -180 -181	sans oublier les multiples.	

Peut-être avez-vous observé chez vos élèves une certaine tendance à croire ce qu'ils voient sans faire de calculs pour vérifier ?

Voici une recette pour obtenir des triangles "presque" rectangles. Les côtés du triangle vérifient $a^2 + b^2 = c^2 + 1$, dans laquelle c est la pseudo-hypoténuse, a et b les côtés du pseudo-angle droit. Par un changement de variables aussi évident que le précédent, en posant $a = 2xy + 1$; $b = xy^2 - x + y$ et $c = xy^2 + x + y$, on a $\cos \hat{C} = 1/2ab$, $\hat{C}$ est l'angle "droit", aigu en réalité.

Ces formules donnent une infinité de résultats mais ne sont pas exhaustives: un petit programme en basic en donne davantage.

```
10 FOR A=2 TO 100
20 FOR B= A TO 100
30 C=SQR(A*A+B*B-1)
40 IF C=INT(C) THEN LPRINT A;B;C
50 NEXT B
60 NEXT A
```

Voici quelques résultats :

4	7	8
5	5	7
6	17	18
7	11	13
8	9	12
8	31	32
9	19	21
10	15	18
10	49	50
11	13	17
11	29	31
12	71	72
13	19	23
13	41	43
14	17	22
14	31	34
14	97	98
15	26	30
15	55	57
16	23	28
16	41	44
17	21	27
17	34	38
17	71	73
19	27	33
19	43	47
19	89	91
20	25	32
20	65	68
21	53	57
22	31	38
22	79	82
23	29	37
23	41	47
23	64	68
24	55	60
25	35	43
25	49	55
25	76	80
26	33	42
26	65	70
27	89	93
28	39	48
29	29	41
29	37	47
29	67	73
31	34	46
31	43	53
31	56	64
31	77	83
32	41	52
33	64	72
34	47	58
34	79	86
35	45	57
35	99	105
36	89	96
37	51	63
38	49	62
39	71	81
39	91	99
40	55	68
41	53	67
41	64	76
41	79	89
43	59	73
43	71	83
44	57	72
46	63	78
47	61	77
47	86	98
49	50	70
49	67	83
49	94	106
50	65	82
51	55	75
52	71	88
53	69	87
55	75	93
56	73	92
56	97	112
58	79	98
59	77	97
61	83	103
62	81	102
64	87	108
65	76	100
65	85	107

Mais pas leurs multiples qui vérifient l'équation $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ce qui est un autre problème.

Et pour avoir un angle obtus, direz-vous ?

L'équation est alors $a^2 + b^2 = c^2 - 1$ ou $a^2 + b^2 + 1 = c^2$. Le premier membre ressemble au produit remarquable $(x + 1)^2$, b^2 étant le double produit est pair. Posons alors $b = 2k$; puis $a = 2k^2$ et $c = 2k^2 + 1$; $\cos \hat{C} = -1/8k^3$.

Comme précédemment ces formules donnent une infinité de solutions mais ne sont pas exhaustives comme le prouve le petit programme précédent modifié à la ligne 30 : +1 à la place de -1

Voici quelques valeurs :

2	2	3
4	8	9
6	18	19
8	32	33
10	50	51
12	12	17
12	72	73
14	98	99
18	30	35
22	46	51
28	76	81
32	100	105
34	38	51
44	68	81
68	80	105
70	70	99

Mais pas leurs multiples qui vérifient $a^2 + b^2 + d^2 = c^2$ ce qui est un autre problème.

Le problème reste ouvert: Trouver des formules qui donnent tous les cas possibles.

J'espère ainsi apporter une aide appréciable à mes collègues pour le bien de leurs élèves ainsi qu'aux auteurs de sujets de Brevet en panne d'imagination.

Jacques Foissy du collège Cressot de Joinville

GEOMETRIE - ARITHMETIQUE - GROUPE

par Jean-Philippe CORTIER

L'article qui suit se voudrait une modeste contribution à ceci : la Mathématique est une matière bien vivante.

La notion de nombres congruents (un nombre est dit congruent s'il représente l'aire d'un triangle rectangle à côtés rationnels) est fort ancienne, mais toujours d'actualité comme le montre un résultat récent (1983) de J.B. Tunnel.

Il me paraît intéressant de proposer trois points de vue très différents et étalés dans le temps :

- La décomposition $a^2 = b^2 + c^2$ en nombres entiers qui donne une caractérisation des nombres congruents, intéressante dans l'absolu, mais difficile à manier pour la détermination effective de tels nombres.
- L'intervention de la notion de courbes elliptiques dans le cadre de la géométrie projective, qui permet, via une structure de groupe sur l'ensemble des points rationnels situés sur une telle courbe, de donner une deuxième caractérisation (due à Mordell-Weil circa 1920).
- Enfin l'énoncé du théorème dû à J.B. Tunnel (1983) qui permet de vérifier qu'un entier n'est pas congruent.

Je tiens à remercier Hélène AUTHIER et Dominique ANTOINE pour la lecture attentive de ces pages ainsi que Brigitte CHAPUT pour la mise en forme et la frappe de ce texte.

I - Nombres congruents

1°) - Définition et quelques propriétés élémentaires

Définition 1

Un nombre entier $n \geq 1$ est dit congruent s'il est l'aire d'un triangle rectangle dont les trois côtés ont des longueurs rationnelles.

i.e. n est congruent si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 2n = ab \end{cases}$$

On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble des entiers congruents ; par exemple $5 \in \mathbb{C}$...

Proposition 1

n est congruent si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 - n$ et $x^2 + n$ soient des carrés de rationnels.

Démonstration

Si $x^2 - n = \alpha^2$ et $x^2 + n = \beta^2$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}^2$

alors $2n = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$;

on pose $a = \beta - \alpha$ et $b = \beta + \alpha$

et on obtient $2n = ab$ et $a^2 + b^2 = 2(\beta^2 + \alpha^2) = 4x^2 = (2x)^2 = c^2$

donc $n \in \mathbb{C}$.

Réciproquement :

Pour $n \in \mathbb{C}$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $\begin{cases} 2n = ab \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$

On définit α et β tels que $\begin{cases} \alpha + \beta = b \\ -\alpha + \beta = a \end{cases}$

α et β existent et sont éléments de $\mathbb{Q}$.

$2n = \beta^2 - \alpha^2$ et $a^2 + b^2 = 2(\beta^2 + \alpha^2) = c^2$; on définit $x = \frac{c}{2} \in \mathbb{Q}$

$x^2 - n = \frac{c^2}{4} - n = \frac{2(\beta^2 + \alpha^2)}{4} - \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{2} = \alpha^2$ et $x^2 + n = \beta^2$. □

Proposition 2

Soit $m \in \mathbb{N}^*$; $n \in \mathbb{C} \iff m^2 n \in \mathbb{C}$.

L'intérêt de ce résultat est de se limiter aux entiers sans facteurs carrés dans la recherche des nombres congruents.

Démonstration

Si $n \in \mathcal{C}$, d'après la proposition 1, il existe $(x,\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $x^2 - n = \alpha^2$ et $x^2 + n = \beta^2$ d'où en multipliant par m^2 les membres de ces égalités, on conclut que $m^2 n \in \mathcal{C}$.

Si $m^2 n \in \mathcal{C}$, on applique le critère de la proposition 1 à $m^2 n$ et cette fois, en divisant par m^2, on conclut que $n \in \mathcal{C}$.□

2°) - Nombres congruents et points à coordonnées rationnelles d'une courbe elliptique

Revenons à :

$n \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $\begin{cases} 2n = ab \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$

Si l'on se restreint à $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, rappelons le résultat classique (cf S_1 p. 20) concernant les solutions entières de (e) $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce sont les triplets (a,b,c) tels qu'ils existe des entiers u, v et d

vérifiant $\mathcal{S}_e : \begin{cases} a = d\ (u^2 - v^2) \\ b = d\ (2\ u\ v) \\ c = d\ (u^2 + v^2) \end{cases}$ avec $u \wedge v = 1$

à une permutation près de a et b.

Alors les solutions en nombres rationnels de (e) s'obtiennent en remplaçant dans $\mathcal{S}_e$: $d \in \mathbb{N}$ par $d \in \mathbb{Q}$.

En effet, il est clair que ces solutions conviennent.

Réciproquement, soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

On écrit $a = \dfrac{a_1}{a_2}$, $b = \dfrac{b_1}{b_2}$, $c = \dfrac{c_1}{c_2}$ avec les a_i, b_i et c_i entiers.

On obtient $a_1^2\ (b_2 c_2)^2 + b_1^2\ (a_2 c_2)^2 = c_1^2\ (a_2 b_2)^2$

soit $A^2 + B^2 = C^2$ avec $\begin{cases} A = a_1 b_2 c_2 \\ B = b_1 a_2 c_2 \\ C = c_1 a_2 b_2 \end{cases}$

A, B et C sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Ainsi, en appliquant le rappel, il existe des entiers naturels d, u, v tels que $\begin{cases} a_1b_2c_2 = d\ (u^2 - v^2) \\ b_1a_2c_2 = d\ (2\ u\ v) \\ c_1a_2b_2 = d\ (u^2 + v^2) \end{cases}$ avec $u \wedge v = 1$ et $d \in \mathbb{N}^*$

soit (1) $\begin{cases} a = \lambda\ (u^2 - v^2) \\ b = \lambda\ (2\ u\ v) \\ c = \lambda\ (u^2 + v^2) \end{cases}$ avec $\lambda = \dfrac{d}{a_2b_2c_2} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $u \wedge v = 1$

à une permutation près de a et b.□

L'équation $2\ n = ab$ s'écrit alors $n = \lambda^2\ (u^2 - v^2)\ (uv)$ avec la paramétrisation (1),

et en posant $x = -\dfrac{nv}{u}$, $y = \dfrac{n^2}{\lambda u^2}$ ou encore $v = -\dfrac{ux}{n}$, $u^2 = \dfrac{n^2}{\lambda y}$:

l'équation $2n = ab$ s'écrit $y^2 = x^3 - n^2x$.

On vient d'établir le :

Résultat 1

Si $n \in \mathcal{C}$ alors l'équation (e_n) : $y^2 = x^3 - n^2x$ admet une solution en nombres rationnels (x, y) telle que $y \neq 0$.

Réciproquement :

Si l'équation (e_n) admet une solution $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ telle que $y \neq 0$ alors $a = \left|\dfrac{2nx}{y}\right|$, $b = \left|\dfrac{n^2 - x^2}{y}\right|$ et $c = \left|\dfrac{n^2 + x^2}{y}\right|$ sont les mesures des côtés d'un triangle rectangle d'aire n : $n \in \mathcal{C}$.□

D'où le :

Théorème 1

$n \in \mathcal{C}$ si et seulement si l'équation (e_n) : $y^2 = x^3 - n^2x$ admet une solution (x,y) en nombres rationnels telle que $y \neq 0$;

(ou encore si la courbe d'équation $y^2 = x^3 - n^2x$ admet un point à coordonnées rationnelles non situé sur l'axe des abscisses).

On notera $C_n(K)$ l'ensemble des éléments de K^2 solutions de (e_n), K désignant un corps commutatif : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$, ...

II - Un peu de géométrie projective et pourquoi on s'y place

1°) - L'espace projectif $\mathbb{P}_n(K)$ où K est un corps commutatif

- On définit sur $K^n\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, la relation d'équivalence $\mathcal{R}_n$ suivante :

  $(X_1,X_2,\dots,X_n)\ \mathcal{R}_n\ (X'_1,X'_2,\dots,X'_n)$ s'il existe $\lambda \in K\setminus\{0\}$ tel que $X'_i = \lambda X_i$ pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

  On note $\mathbb{P}_{n-1}(K)$ l'ensemble des classes d'équivalence, appelé espace projectif de dimension $n - 1$.

- Le cas qui nous intéresse est $n = 3$; la classe de (X,Y,T) modulo $\mathcal{R}_3$ est notée $\overline{(X,Y,T)}$.

  On peut plonger le plan affine K^2 dans $\mathbb{P}_2(K)$ de la manière suivante :

$$\varphi : \mathbb{P}_2(K) \longrightarrow K^2 \cup \mathbb{P}_1(K)$$

$$\overline{(X,Y,T)} \longmapsto \begin{cases} (X/T, Y/T) \in K^2 & \text{si } T \neq 0 \\ \widetilde{(X,Y)} \in \mathbb{P}_1(K) & \text{si } T = 0 \end{cases}$$

où $\widetilde{(X,Y)}$ est la classe de (X,Y) modulo $\mathcal{R}_2$.

On vérifie que φ ne dépend pas du représentant choisi (X,Y,T) et que φ est une bijection.

K^2 peut donc être identifié à la partie $\varphi^{-1}(K^2)$ du plan projectif $\mathbb{P}_2(K)$. La droite projective $\mathbb{P}_1(K)$ est appelée droite des points à l'infini de K^2, notée Δ_∞.

Soit M un point de $\mathbb{P}_2(K)$, tout $(X,Y,T) \in K^3\setminus\{0\}$ tel que $M = \overline{(X,Y,T)}$ est un système de coordonnées homogènes du point M.

On notera $M(X,Y,T)$ le point de $\mathbb{P}_2(K)$ tel que $M = \overline{(X,Y,T)}$.

Revenons à l'étude de $C_n(K)$, le bon outil de $\mathbb{P}_2(K)$ n'est pas le polynôme $x^3 - n^2x - y^2$ mais son homogénéisé $X^3 - n^2XT^2 - Y^2T = F(X,Y,T)$.

Pour $\lambda \in K\setminus\{0\}$ $F(\lambda X,\lambda Y,\lambda T) = \lambda^3 F(X,Y,T)$, donc on peut définir :

$$E_n(K) = \{M(X,Y,T) \in \mathbb{P}_2(K),\ F(X,Y,T) = 0\}$$

Remarque

$m(x,y) \in K^2$ est un élément de $C_n(K)$ si et seulement si $M(x,y,1) \in E_n(K)$.

On identifiera le point $m(x,y)$ de K^2 et le point $M(x,y,1)$ de $\mathbb{P}_2(K)$ via φ.

Il n'y a qu'un seul point à l'infini sur $C_n(K)$ considéré comme partie de K^2 plongée dans $\mathbb{P}_2(K)$.

Il convient de faire $T = 0$ dans $F(X,Y,T) = 0$ ce qui donne $X = 0$.

$M(X,Y,T) \in E_n(K) \cap \Delta_\infty$ si et seulement si $M = \overline{(0,1,0)}$.

$$\begin{cases} M(X,Y,T) \in E_n(K) \\ T \neq 0 \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad F\left(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},1\right) = 0$$

$$\text{si et seulement si} \quad m\left(\frac{X}{T},\frac{Y}{T},1\right) \in C_n(K)$$

On peut donc écrire $\underline{E_n(K) = C_n(K) \cup \{\omega\} \text{ où } \omega = \overline{(0,1,0)}}$.

L'intérêt de travailler dans $\mathbb{P}_2(K)$ et non pas dans le plan affine K^2 est que l'on peut définir :

2°) - Une structure de groupe abélien sur la courbe elliptique $E_n(K)$ d'équation $X^3 - n^2XT^2 - Y^2T = 0$

a) - Redémontrons un résultat classique (cf S_2 P. 26 pour un résultat plus général) :

Toute droite de $\mathbb{P}_2(\overline{K})$ coupe $E_n(\overline{K})$ en trois points comptés avec leurs ordres de multiplicité. ($\overline{K}$ est la clôture algèbrique de K.)

Droites de $\mathbb{P}_2(K)$

Soit $A(X_A,Y_A,T_A)$, $B(X_B,Y_B,T_B)$ deux points distincts de $\mathbb{P}_2(K)$. On appelle droite de $\mathbb{P}_2(K)$ passant par A et B, notée $\mathcal{D}(A,B)$, l'ensemble :

$$\{M(X,Y,T),\ (X,Y,T) = \alpha\ (X_A,Y_A,T_A) + \beta\ (X_B,Y_B,T_B)\ (\alpha,\beta) \in K^2\}$$

On obtient facilement qu'il existe $(u,v,w) \in K^3\backslash\{(0,0,0)\}$ tel que :

$$M(X,Y,T) \in \mathcal{D}(A,B) \text{ si et seulement si } uX + vY + wT = 0.$$

Les points "à distance finie" de $\mathcal{D}(A,B)$, (c'est-à-dire n'appartenant pas à Δ_∞) sont les points $M(X,Y,T)$ qui vérifient :

$$u\left(\frac{X}{T}\right) + v\left(\frac{Y}{T}\right) + w = 0 \text{ avec } (u,v,w) \neq (0,0,0).$$

$u\left(\frac{X}{T}\right) + v\left(\frac{Y}{T}\right) + w = 0$ est la forme générale d'une équation cartésienne d'une droite de K.

$M \in \mathcal{D}(A,B) \cap E_n(\overline{K})$ si et seulement si $\begin{cases} M = \alpha A + \beta B \\ F(\alpha A + \beta B) = 0 \end{cases}$

avec $F(\alpha A + \beta B) = \alpha^3 F(A) + \alpha^2\beta\, P_1(A,B) + \alpha\beta^2\, P_2(A,B) + \beta^3 F(B)$ car F est homogène de degré 3.

Les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}_2(K)$ étant définies à une constante non nulle multiplicative près et en supposant $F(A) \neq 0$ ($E_n(\overline{K})$ ne contenant pas de droite), on est amené à résoudre une équation du type : (*) $\lambda^3 a + \lambda^2 b + \lambda c + d = 0$ avec $a = F(A) \neq 0$ qui admet trois racines dans $\overline{K}$.

b) - Pour ce qui nous intéresse, étant donné un couple (P_1,P_2) de points de $E_n(K)$, la droite $\mathcal{D}(P_1,P_2)$ de $\mathbb{P}_2(K)$ (c'est la tangente en P_1 à $E_n(K)$, notée $\mathcal{T}_{P_1}$ si $P_1 = P_2$) rencontrera $E_n(K)$ en un troisième point car l'équation (*) ayant ses coefficients dans K et admettant deux solutions dans K admettra une troisième solution dans K qui produira le point P_3.

On définit alors une addition sur $E_n(K)$ de la manière suivante

$$P_1 + P_2 = P'_3 \quad \text{où } P'_3 = \overline{(X_3, -Y_3, T_3)}$$

avec $\mathcal{D}(P_1,P_2) \cap E_n(K) = \{P_1, P_2, P_3\}$ et $P_3(X_3,Y_3,T_3)$.

Remarque :

Si $T_3 \neq 0$, c'est-à-dire si $P_3 \in C_n(K)$, P'_3 "apparaît" comme le symétrique de P_3 par rapport à l'axe des x, parallèlement à l'axe des y.

Quelques exemples de calcul (On pourra considérer le dessin n°1.)

• Calcul de $P_1 + P_2$ où $P_1(x_1,y_1,1)$ et $P_2(x_2,y_2,1)$ sont deux points de $E_n(K)$, en fait de $C_n(K)$, tels que $x_1 \neq x_2$.

On a ainsi $y_i^2 = x_i^3 - n^2 x_i$.

On cherche le troisième point commun à $E_n(K)$ et $\mathcal{D}(P_1,P_2)$:

Dans K^2, une équation de $\mathcal{D}(P_1,P_2)$ est :

$$y = y_1 + m\ (x - x_1) \quad \text{où} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$M(x,y,1) \in \mathcal{D}(P_1,P_2) \cap E_n(K) \text{ si et seulement si } \begin{cases} y = y_1 + m\ (x - x_1) \\ y^2 = x^3 - n^2 x \end{cases}$$

L'élimination de y entre les deux équations donne :

$$(x - x_1)\ [x^2 + x\ (x_1 - m^2) + x_1^2 - n^2 + m^2 x_1 - 2\ y_1 m] = 0$$

soit $x = x_1$

soit $x^2 + x\ (x_1 - m^2) + x_1^2 - n^2 + m^2 x_1 - 2\ y_1 m = 0$

sachant que x_2 est solution, on trouve pour troisième solution : $x_3 = -\ (x_1 - m^2) - x_2$

alors $\mathcal{D}(P_1,P_2) \cap E_n(K) = \{P_1,P_2,P_3\}$

$$\text{où } P_3(x_3,y_3,1) \text{ avec } \begin{cases} x_3 = -\ (x_1 - m^2) - x_2 \\ y_3 = y_1 + m\ (x_3 - x_1) \end{cases}$$

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1 = \overline{(x_3, -\ y_3, 1)}$$

• Calcul de $P + P = 2P$ où $P(x_0,y_0,1)$ est un point de $E_n(K)$, en fait de $C_n(K)$, ainsi $y_0^2 = x_0^3 - n^2 x_0$

On cherche l'autre point commun à $E_n(K)$ et $\mathcal{T}_P$:

Dans K^2, une équation de $\mathcal{T}$ est :

$$y = y_0 + m\ (x - x_0) \quad \text{où} \quad m = \frac{3\ x_0^2 - n^2}{2\ y_0},$$

$$M(x,y,1) \in \mathcal{T}_P \cap E_n(K) \text{ si et seulement si } \begin{cases} y = y_0 + m\ (x - x_0) \\ y^2 = x^3 - n^2 x \end{cases}$$

Un raisonnement semblable au précédent donne :

$\mathcal{T}_P \cap E_n(K) = \{P,P'\}$ où $P'(x',y',1)$ avec $\begin{cases} x' = -2x_0 - m^2 \\ y' = y_0 + m(x' - x_0) \end{cases}$

$\underline{P + P = 2P = \overline{(x',-y',1)}}$

- Calcul de $Q + \omega$ où $Q(x,y,1)$ est un point de $E_n(K)$, en fait de $C_n(K)$,

ainsi $y^2 = x^3 - n^2x$

$M(X,Y,T) \in \mathcal{D}(\omega,Q) \cap E_n(K)$

si et seulement si $\begin{cases} (X,Y,T) = \alpha\ (0,1,0) + \beta\ (x,y,1) & (\alpha,\beta) \neq (0,0) \\ F\ (X,Y,T) = 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} X = \beta x,\ Y = \alpha + \beta y,\ T = \beta \\ X^3 - n^2XT^2 - Y^2T = 0 \end{cases}$

Cela revient à étudier $\beta^3x^3 - n^2\beta^3x - \beta\ (\alpha + \beta y)^2 = 0$

$\beta\ (\beta^2x^3 - n^2\beta^2x - (\alpha + \beta y)^2 = 0$

. soit $\beta = 0$ ce qui donne $\overline{(X,Y,T)} = \overline{(0,\alpha,0)} = \overline{(0,1,0)}$.

On obtient le point ω.

. soit $\beta \neq 0$ alors $\beta^2\ (x^3 - n^2x) - (\alpha^2 + \beta^2y^2 + 2\alpha\beta y) = 0$

ou encore $\alpha\ (\alpha + 2\beta y) = 0$, puisque $x^3 - n^2x = y^2$

. soit $\alpha = 0$ On obtient le point Q.

. soit $\alpha = -2\beta y$ $\overline{(X,Y,T)} = \overline{(\beta x,-\beta y,\beta)} = \overline{(x,-y,1)}$

Conclusion : $\mathcal{D}(\omega,Q) \cap E_n(K) = \{\omega,\ Q,\ Q'\}$ où $Q'(x,-y,1)$

$\underline{\omega + Q = Q + \omega = (x,y,1) = Q \text{ pour tout } Q \in C_n(K)}$

- Calcul de $\omega + \omega$. $\mathcal{D}(\omega,\omega) = \mathcal{T}_\omega$ admet pour équation :

$$(X - 0)\ F'_X(\omega) + (Y - 1)\ F'_Y(\omega) + (T - 0)\ F'_T(\omega) = 0$$

soit $T = 0$

ainsi $\mathcal{T}_\omega = \Delta_\infty$ et $\mathcal{T}_\omega \cap E_n(K) = \Delta_\infty \cap E_n(K) = \{\omega\}$

$\underline{\omega + \omega = Q'(0,-1,0) = Q'(0,1,0) = \omega}$

c) - Théorème 2

$(E_n(K),+)$ est un groupe abélien.

Démonstration

Le b) prouve que cette addition sur $E_n(K)$ est une loi interne commutative d'élément neutre ω. Nous laissons au lecteur le soin de terminer la démonstration en s'aidant éventuellemnt du dessin n° 1.

3°) - Généralisation

Tout ce qui a été étudié dans le II se généralise aux courbes elliptiques d'équation : $y^2 = f(x)$ où $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$, $(a,b,c) \in K$ et $f(x)$ admet trois racines distinctes dans $\overline{K}$, ce qui assurera que $E(K) = \{M(X,Y,T) \in \mathbb{P}_2(K),\ X^3 + a\,X^2T + b\,XT^2 + c\,T^3 - Y^2T = 0\}$ est une courbe non singulière et donc admet une et une seule tangente en chacun de ses points.

On munit, de la même façon, $E(K)$ d'une structure de groupe abélien d'élément neutre $\omega(0,1,0)$.

Un résultat relativement récent (circa 1920) dû aux mathématiciens Mordell et Weil donne :

Théorème 3 de Mordell-Weil

Soit K un corps de nombres (une extension finie de $\mathbb{Q}$).

Alors $(E(K),+)$ est un groupe abélien de type fini, c'est-à-dire $E(K) \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/_{s_1\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{s_2\mathbb{Z}}$ où r, s_1 et s_2 sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que s_1 divise s_2.

Pour $K = \mathbb{Q}$: $E_n(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

D'après ce résultat, les points de $E_n(\mathbb{Q})$ d'ordre fini sont d'ordre 2. Cherchons les points P de $E_n(\mathbb{Q})$ tels que $P + P = \omega$. $P = \omega$ est solution et pour $P \neq \omega$, on pose $P(x,y,1)$

$P + P = \omega$ si et seulement si $P(x,y,1) = -P(x,y,1) = P(x,-y,1)$

si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ tel que $(x,y,1) = \lambda\,(x,-y,1)$

si et seulement si $y = f(x) = 0$

d'où il y a trois points d'ordre 2 sur $E_n(\mathbb{Q})$: A, B et C (voir dessin).

$\{\omega,A,B,C\} = \{M \in E_n(\mathbb{Q}),\ 2.M = \omega\} \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

III - En guise de conclusion

Les éléments d'ordre fini de $E_n(\mathbb{Q})$ sont ω, A, B et C d'après le théorème de Mordell-Weil et ce qui précède.

D'après le théorème 1 : n est congruent si et seulement si l'équation $y^2 = x^3 - n^2x$ admet une solution en nombres rationnels telle que $y \neq 0$ et comme $E_n(\mathbb{Q}) \cap \{M(X,Y,T),\ Y = 0\} = \{\omega, A, B, C\}$, on obtient le :

Résultat 2

n est congruent si et seulement si $E_n(\mathbb{Q})$ admet un élément d'ordre infini (c'est-à-dire si et seulement si $r \geq 1$).

On termine par l'énoncé du :

Critère de J.B. Tunnel :

Soit $n \in \mathbb{N}$, impair sans facteur carré. On considère les conditions :

A_1 n est congruent.

B_1 Le nombre de triplets $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $2x^2 + y^2 + 8z^2 = n$ vaut deux fois le nombre de triplets d'entiers vérifiant $2x^2 + y^2 + 32z^2 = n$.

A_2 2n est congruent.

B_2 Le nombre de triplets $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $4x^2 + y^2 + 8z^2 = n$ vaut deux fois le nombre de triplets d'entiers vérifiant $4x^2 + y^2 + 32z^2 = n$.

Alors A_1 implique B_1 et A_2 implique B_2.

On conjecture que les conditions A_1 et B_1 sont équivalentes, de même que A_2 et B_2. Ce critère a permis de déterminer les nombres congruents jusqu'à 1 000.

Exemples de nombres congruents

$n = 5$ $\quad 2 \times 5 = \frac{20}{3} \times \frac{3}{2}$ $\quad \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{41}{6}\right)^2$

$n = 6$ $\quad 2 \times 6 = 3 \times 4$ $\quad 3^2 + 4^2 = 5^2$

$n = 13$ $\quad 2 \times 13 = \frac{323}{30} \times \frac{780}{323}$ $\quad \left(\frac{323}{30}\right)^2 + \left(\frac{780}{323}\right)^2 = \left(\frac{106\ 921}{30 \times 323}\right)^2$ □

Bibliographie

G. HENNIART Nombres congruents, courbes elliptiques et formes modulaires. Pub. Journée annuelle de la S.M.F.
Janvier 1987

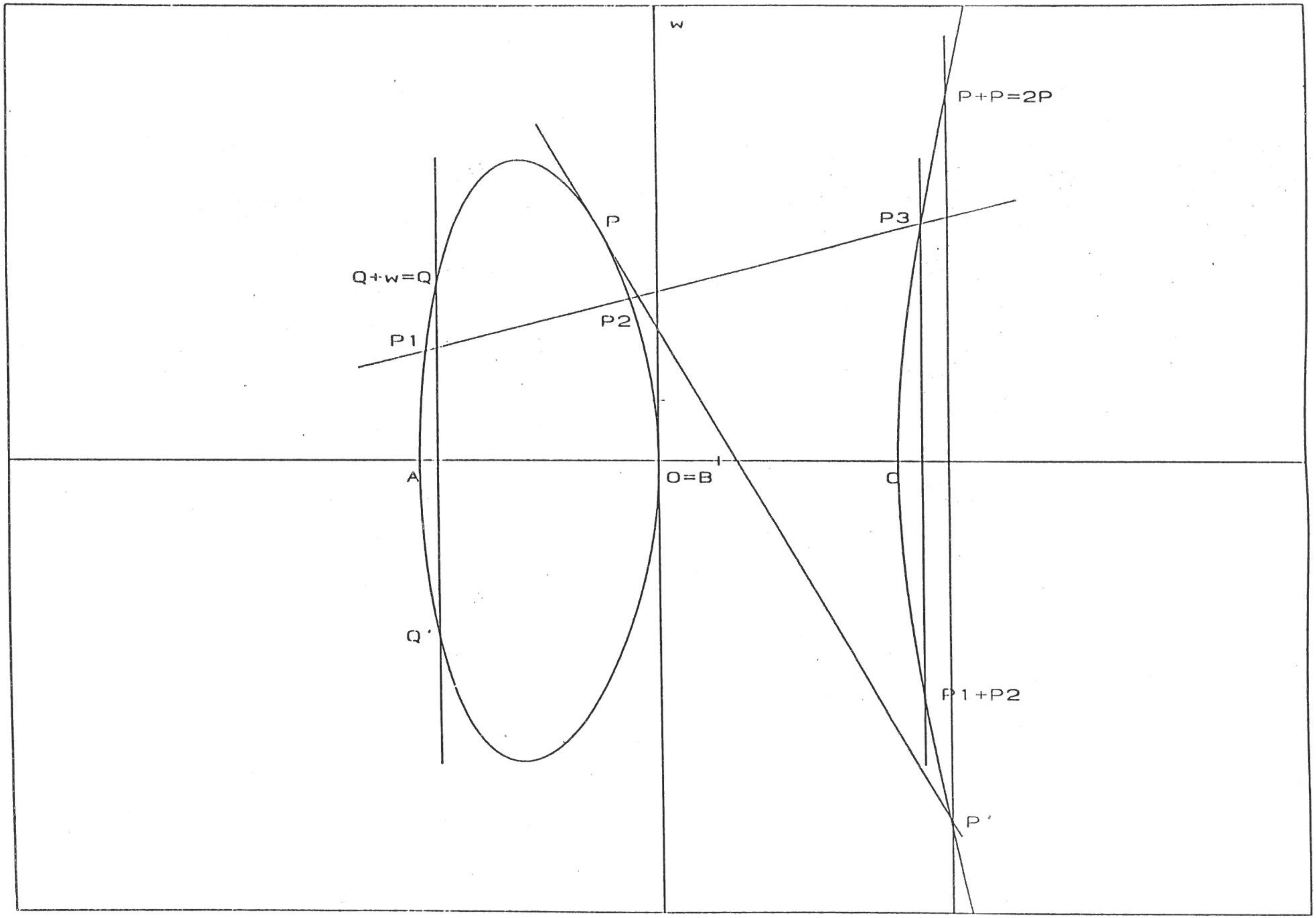
dont s'inspire cet article.

P. SAMUEL 1 Théorie algèbrique des nombres, Hermann, 1971. (S_1)

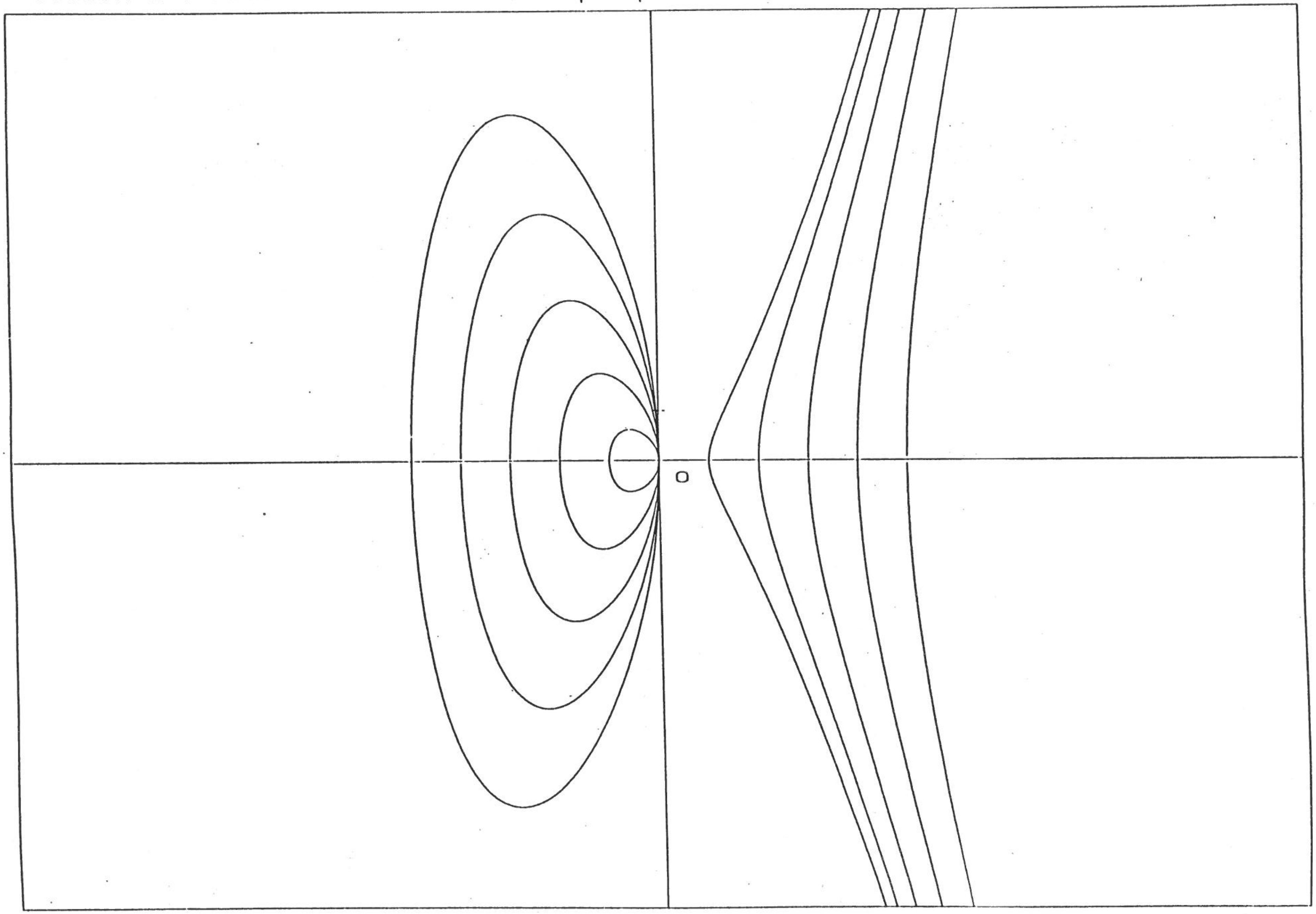
2 Géométrie projective, P.U.F., 1986. (S_2)

[ ] Dans (S_1), page 27, on retrouvera la structure des groupes abéliens de type fini.

Dessin 1



Dessin 2 : famille de courbes elliptiques



DEVINETTE

" D'un nouvel univers il ouvrit la barrière.

Des infinis sans nombre autour de lui naiffans,

Mesurés par ses mains, à fon ordre croiffans,

A nos yeux étonnés il traça la carrière.

L'ignorant l'entendit, le savant l'admira ;

Né pour tous les talents il fit un opéra. "

Duquel de ses contemporains Voltaire parlait-il en ces termes ?

Solution n° 3

Si mon ami persiste et insiste, je coupe les ponts !

MATHEMATIQUES

Séries C - E

Durée : 4 h - Coef. : 5

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

EXERCICE 1 - (5 points)

Dans le plan orienté, ABC désigne un triangle rectangle isocèle en A, avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Le point I est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. a) Construire le point A', image de A par r_C.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application composée $r_C \circ r_A$ (on pourra écrire chaque rotation comme composée de réflexions convenablement choisies).
   c) Montrer que IA' = IA et que les droites (IA') et (AB) sont parallèles.

2. La droite (CI) coupe (AB) en E ; les droites (A'E) et (BI) se coupent en K.

   On désigne par h_C l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

   par h_K l'homothétie de centre K et de rapport $-\sqrt{2}$.

   a) Déterminer $h_C(B)$ et $h_C(E)$.
   En déduire que $\overrightarrow{BE} = -\sqrt{2}\ \overrightarrow{IA'}$.
   b) Quelle est l'image de B par $h_K \circ h_C$?
   c) Reconnaître l'application $h_K \circ h_C$ et en déduire que les points C et K sont alignés avec le milieu M du segment [BE].

EXERCICE 2 - (4 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est de 2 cm.

On considère la parabole (P) de foyer O et de directrice la droite (D) d'équation $x = 1$.

1. Ecrire une équation de (P) et dessiner (P).

2. Soit M un point de (P), H le projeté orthogonal de M sur (D), I le milieu du segment [OH], A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 2.

   Montrer que $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HA}) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   En déduire que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HB}) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. On choisit $\theta \in [0 ; 2\pi[$, tel que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   On désigne par z et h les affixes respectives de M et H.

   Montrer que $\dfrac{z-h}{z} = \dfrac{h-2}{h} = e^{i\theta}$, et que θ est différent de zéro.

   En déduire que $z = \dfrac{2}{\left(1 - e^{i\theta}\right)^2}$.

PROBLEME - (11 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} \text{ si } x > 0, \\ f(0) = -1. \end{cases}$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien).

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est de 2 cm.

PARTIE A - *Etude d'une fonction auxiliaire (pour la partie C).*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln x - 1.$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire que $g(x) \geq 0$, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

PARTIE B - *Etude de f.*

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.

   Montrer que f est dérivable en 0 : on précisera la valeur de sa dérivée en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.
4. Tracer la courbe (C).

PARTIE C - *Etude d'une primitive de f.*

On pose, pour tout $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction F, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer, en introduisant la fonction g de la partie A, que, pour tout t de l'intervalle $]0\,;1]$, on a :

$$-1 \leq f(t) \leq t - 1$$

   Vérifier que cette double inégalité est encore vraie pour $t = 0$.
   En déduire que $\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$.

3. a) Prouver que pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\frac{\ell n\, t}{t} \leq f(t)$$

b) Calculer $\int_1^x \frac{\ell n\, t}{t}\, dt$.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4. On note (u_n) la suite définie sur $n \geq 1$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\, dt.$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a :

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

(on pourra utiliser le sens de variation de f).

b) Montrer que la suite (u_n) converge vers zéro.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n-1} u_p = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}.$$

a) Exprimer S_n à l'aide de F.

b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Quelques commentaires sur l'épreuve de mathématiques
du baccalauréat séries C-E session Juin 1992 académie de Reims

Le sujet est conforme au programme. L'équilibre entre analyse et géométrie est respecté, la part des nombres complexes étant plutôt restreinte.
L'exercice 1 est construit autour de l'utilisation de composées de transformations géométriques. On peut remarquer que les résultats du 1c) et du 2a) peuvent se démontrer avec les connaissances du niveau collège. Les transformations géométriques ne se révèlent intéressantes que dans la dernière question (alignement des centres d'homothéties).
Le taux de réussite de l'exercice 2 est très faible. Dans le lot de 137 copies considéré, la note 0 a été attribuée 53 fois à l'exercice 2. La première question, pourtant simple, a dérouté les candidats. Ceux-ci connaissent la forme générale de l'équation d'une parabole ($Y^2=2pX$), mais ne savent pas répondre à cette question 1. Les questions suivantes nécessitaient un peu de rigueur. On peut noter que l'interprétation géométrique du quotient $(z - z_a)/(z - z_b)$ est mal maitrisée.
Le problème offre un bon panorama du programme d'analyse, mais ne laisse guère d'initiatives au candidat par ses questions très directives. A noter la difficulté des candidats à justifier correctement la question C1.

Les statistiques suivantes ont été établies sur un lot de 137 copies :

	Note Moyenne	Ecart-type
exercice 1	1.77 sur 5.5	1.23
exercice 2	0.78 sur 4.5	0.97
problème	6.63 sur 11.5	2.31

Ce qui donne une note totale moyenne de 9.19 pour cet échantillon.
La moyenne académique calculée sur 1861 candidats est de 9.82

ABONNEZ-VOUS !

FAITES ABONNER VOTRE ETABLISSEMENT !

prix du numéro : 20 F

abonnement (deux numéros par an) : 30 F

Vecteur

Bulletin d'abonnement à renvoyer à :

IREM de REIMS, Moulin de la Housse, BP 347 51062 REIMS CEDEX

accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

NOM........................ Prénom.......................

Etablissement..

Adresse de l'établissement.................................

Code postal et Ville.......................................

Mode de réglement : Chèque bancaire
Chèque postal Virement administratif sur facture

N.B. : l'abonnement débute au prochain numéro.

Bon de commande d'anciens numéros à renvoyer à :

IREM de REIMS, Moulin de la Housse, BP 347 51062 REIMS CEDEX

accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

NOM........................ Prénom.......................

Etablissement..

Adresse de l'établissement.................................

Code postal et Ville.......................................

Entourez les numéros demandés : 1 2 3 4
Soit ..... numéros à 20 F l'un d'où un montant total de ..... F

Mode de réglement : Chèque bancaire
Chèque postal Virement administratif sur facture

La demande sera satisfaite dans la limite des stocks disponibles

Vecteur

aux Sommaires ...

N° 8 - Juillet 1992 *(spécial "activités")*

Enseigner par les activités, Irem de Poitiers.

Des activités pour raisonner au collège,
D. Bergue, J. Borreani, B. Poulain, Irem de Rouen.

Enseigner à partir d'activités, est-ce bien raisonnable ?
Michèle Mathiaud, Irem de Paris 7.

Concevoir de "bonnes" fiches d'activité en mathématiques,
J. Houdebine et J. Julo, Irem de Rennes.

Des maths avec une feuille de papier, les formats dits "normalisés",
Francis Reynes, Collège Grand Air, Arcachon.

Des activités analytiques où la géométrie peut aider à comprendre,
Bernard Destainville, de Toulouse.

Le secret de Leonhard, Michèle Muniglia, Irem de Lorraine.

Point de vue : L'abeille et la goutte de miel, J-C. Duperret, Irem de Reims.

N° 9 - Octobre 1992 :

Défi : Outil de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la démonstration au collège, Saddo Ag Almouloud, Irmar de Rennes.

A propos de géométrie au Bac,
Nicole Vogel, Irem de Strasbourg.

Activités historiques au lycée,
Monique Nouet, Irem des Pays de Loire, Centre du Mans.

Itération et systèmes dynamiques,
Jean Brette, Palais de la Découverte, Paris.

Enseignement de la géométrie dans l'espace en BTS d'arts appliqués,
F. Colmez, B. Parzysz, C. Thomas, Irem de Paris 7.

L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière
et l'activisme pédagogique, Rudolf Bkouche, Irem de Lille.

N° 10 - Janvier 1993 :

Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques
Bernard Charlot et Elisabeth Bautier, ESCOL, Université Paris 8.

Chypre : un logiciel d'aide au raisonnement, Ph. Bernat, Irem de Lorraine.

Introduction à la notion de fonction en seconde de lycée
Groupe "Lycée", Irem de Clermont-Ferrand.

Point de vue : Les mésaventures du parallélogramme, Stéphane Berteloot.

Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres
Bernard Parzysz, Irem de Paris 7.

La synchronisation des feux tricolores, Jean Lefort, Irem de Strasbourg.

Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse
Marc Legrand, Irem de Grenoble.

N° 11 - Avril 1993 :

L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a
Gérard Kuntz, Irem de Strasbourg.

Eléments de réflexion sur l'utilisation numérique des calculatrices programmables en première S et en terminales C et E
Aline Robert, Irem de Paris 7.

Comment l'histoire des mathématiques peut nous dévoiler une approche possible du calcul intégral
André Stoll et JeanPierre Friedelmeyer, Irem de Strasbourg.

Enseignement de l'analyse et fonctions de référence
Michèle Artigue, Equipe Didirem, Irem de Paris 7.

Qu'est-ce que l'analyse non-standard ? Th. Gilbert, GEM de Louvain la Neuve.

Porismes de Steiner, Jean-Claude Daniel, Irem de Reims.

N° 12 - Juillet 1993 *(spécial "démonstration")* :

Les narrations de recherche, Freddy Bonafé, Irem de Montpellier.

Les tribulations d'un pentagone
Michel Carral et Roger Cuppens, Irem et IUFM de Toulouse.

Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages ? Evelyne Barbin, Irem de Paris Nord.

Quelques outils et quelques activités pour l'apprentissage de la démonstration
Annick Massot et Michel Jaffrot, Irem de Nantes.

Une preuve pour construire en cinquième
Claude Frelet, Irem de Besançon.

Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif
R. Duval et M.A. Egret, Irem de Strasbourg.

N° 13 - Octobre 1993 :

Mathématiques, langage et communication
Geneviève Laizé, Irem de Clermont-Ferrand.

Paradoxes et lois de probabilité
Michel Henry et Henri Lombardi, Irem de Besançon.

Expéditions de J.-L. Etienne et mathématiques au Collège de Viemur
Michel Poymiro, Collège de Viemur.

Comme un fruit bien défendu
J.-M. Farey, Irem de Reims, et F. Metin, Irem de Dijon.

Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse
Jean-Pierre Friedelmeyer, Irem de Strasbourg.

L'enseignement de la continuité et de la dérivabilité en analyse non-standard
Thérèse Gilbert, GEM de Louvain la Neuve.

A propos d'évaluation et de rémédiation en CE2-Sixième
Philippe Lombard, Irem de Lorraine.

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES

LA FIGURE ET L'ESPACE

Présentation de l'ouvrage

Le thème et le lieu du 8ème colloque inter-I.R.E.M. "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" ont été choisis en l'honneur du quatrième centenaire du géomètre Desargues, né à Lyon en 1591.

L'ouvrage présente dix-huit contributions sur la figure, l'espace et les liens entre les deux ; elles abordent tant l'aspect pratique que théorique (la taille des pierres, la perspective des peintres, "jeux d'ombres à la lumière de Dürer") de la question.

Ce travail sera particulièrement utile aux enseignants, à l'heure où l'on réhabilite la géométrie dans l'enseignement secondaire.

ACTES DU 8ème COLLOQUE INTER-IREM
EPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Lyon 31 Mai - 1er Juin 1991

en vente à l'IREM de Reims : 150 F

SOMMAIRE

Programmes d'enseignement applicables dans les classes préparatoires aux brevets d'études professionnelles

BO n° 31 - 30 juillet 1992

NOR : MENL9203003A

RLR : 543-0a

Arrêté du 10 juillet 1992

(Éducation nationale et Culture : bureau DLC 4)

Code de l'enseignement technique ; L. d'orientation n° 71-577 du 16-7-1971 ; L. n° 75-620 du 11-7-1975 ; L. n° 83-663 du 22-7-1983, mod. et compl. par L. n° 85-97 du 25-1-1985 ; L. de programme n° 85-1397 du 23-12-1985 ; L. d'orientation n° 89-486 du 10-7-1989 ; D. n° 76-1304 du 28-12-1976 ; D. n° 87-851 du 19-10-1987 ; D. n° 90-484 du 4-6-1990 mod. ; A. 17-1-1992 ; avis du Conseil national des programmes ; avis du comité interprofessionnel consultatif ; avis CSE.

41

MATHÉMATIQUES

III — PROGRAMME

A — Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme

1. Représentations graphiques

Les représentations graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de ***donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques*** étudiés dans les différentes parties

du programme ; leur mise en œuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique. Plus largement, notamment dans les sections du secteur industriel, on développera une ***vision géométrique des problèmes***, notamment en analyse, la géométrie mettant au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation.

2. Problèmes numériques et algorithmiques

Les ***problèmes et méthodes numériques*** sont largement exploités, car ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner des élèves à ***combiner l'expérimentation et le raisonnement*** en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur.

Dans l'ensemble du programme, les ***aspects algorithmiques*** des problèmes étudiés seront progressivement dégagés, en particulier à propos de la ***gestion de calculs*** (description de l'enchaînement des opérations à effectuer pour un calcul numérique ou pour le calcul des valeurs numériques d'une fonction d'une variable réelle). Aucune connaissance spécifique sur les algorithmes n'est exigible des élèves.

3. Emploi des calculatrices — Impact de l'informatique

Dans les classes du cycle de détermination BEP, l'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de ***contrôler des résultats et d'alimenter le travail de recherche***. De plus, en analyse, cet usage permet ***d'accéder*** rapidement ***à des fonctions variées*** et éventuellement à leur représentation graphique.

De plus, les élèves doivent être capables de calculer une moyenne ou un écart type d'une population à l'aide des touches statistiques d'une calculatrice.

Pour répondre aux spécifications et aux objectifs précédents et pour couvrir l'ensemble de ce cycle, une calculatrice scientifique non programmable suffit (en particulier, les écrans graphiques ne sont pas demandés).

En cas d'achat, ***le choix d'une calculatrice*** en début de Seconde professionnelle ou au cours de ce cycle ***dépend du projet d'orientation de l'élève*** ; en particulier dans les Premières d'adaptation de la plupart des séries technologiques une calculatrice programmable est nécessaire ; les sujets de mathématiques des baccalauréats technologiques correspondants sont conçus pour des candidats disposant d'une calculatrice programmable, les calculatrices graphiques n'étant pas exigées.

D'autre part, l'emploi en mathématiques des ***matériels informatiques*** existant dans les établissements est à encourager : par exemple, utilisation de micro-ordinateurs par les élèves en travaux dirigés, utilisation dans la classe d'un micro-ordinateur équipé d'une tablette de rétroprojection ou d'un grand écran. Dans les classes du cycle de détermination BEP, l'utilisation de logiciels (tableur, grapheur,...) peut faciliter grandement la compréhension de nombreuses notions mathématiques et la résolution de problemes : en produisant très rapidement des figures propres et variées, en permettant le mouvement de certains éléments choisis sur une figure, ..., ces logiciels fournissent toute une série d'exemples et de contre exemples numériques ou graphiques susceptibles d'apporter une motivation, d'alimenter le débat au sein de la classe et de donner du sens aux concepts mathématiques figurant dans les différentes parties du programme (fonctions, statistique, géométrie,...).

4. Unité de la formation

Il est important que de nombreux travaux fassent ***intervenir simultanément des parties diverses du programme*** pour en faire ressortir l'unité (par exemple, activités géométriques et algébriques relatives aux fonctions, articulation entre géométrie du plan et de l'espace...). Dans cette perspective, et notamment dans le cadre de la bivalence pour les sections du secteur industriel, ***l'enseignement des mathématiques est aussi à relier à celui des autres disciplines*** sous deux aspects principaux : étude de situations issues de ces disciplines ; organisation concertée des activités d'enseignement.

5. Formation scientifique

Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé, ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective de ***progression ; on se gardera donc de toute exigence prématurée de formulation***, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le ***vocabulaire*** et les ***notations*** ne sont pas imposés à priori ; ils s'introduisent progressivement et prudemment en cours d'étude selon un critère d'utilité en privilégiant avant tout la compréhension des situations étudiées.

6. Vocabulaire et notations

Certaines questions (traitement des équations, emploi des propriétés caractéristiques en géométrie,...) amènent à utiliser des ***équivalences logiques*** ; on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme.

L'emploi des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ n'est pas un objectif du programme. ***Tout exposé de logique mathématique est exclu.***

Enfin, on aura le souci de se limiter à ***un petit nombre de notations simples***. Certaines ont été introduites au collège : appartenance, égalité et inégalité, égalité approchée $\approx$, racine carrée, cosinus, sinus, tangente, droite (MN), segment [MN], distance MN, parallélisme et orthogonalité. S'ajoutent en Seconde professionnelle et en Terminale BEP, outre les notations indiquées dans les différents chapitres, les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et ***aucun développement n'est au programme***. Pour les fonctions, on utilise les écritures $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$ mais les symboles $f+g$, fg, $g \circ f$, $f \leqslant g$... sont hors programme.

B — Problèmes numériques et algébriques

Ce chapitre, à l'exception des paragraphes 1.d) et 1.e) est commun à l'ensemble des spécialités.

La résolution de problèmes issus des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif majeur de cette partie du programme.

On dégagera, sur des exemples, les différentes phases du traitement d'un problème : choix des inconnues, mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Le traitement des problèmes combine les calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées ; il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main et à la machine. Les interprétations graphiques, l'usage des calculatrices jouent un rôle capital, à la fois comme outils et comme sources de problèmes.

Dans cette perspective, le programme vise notamment à consolider et à compléter les acquis des classes antérieures.

Les travaux s'articulent sur deux axes :

— consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique ;

— poursuivre l'étude des équations et des inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations linéaires.

1) Calcul littéral, numérique et algébrique

Dans ce domaine, c'est la maîtrise des mécanismes ***élémentaires*** indiqués par le programme qui est importante ; ***toute virtuosité technique est exclue***, notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs portant sur des fractions ou des radicaux. On tiendra compte du fait que, sur ces différents points, les exigences à l'issue de la classe de Troisième ou de Troisième technologique sont modestes. Il convient en outre de ne pas multiplier gratuitement les exercices de pur calcul littéral.

a) Calcul sur les puissances et les racines carrées :

— Puissances d'un nombre.

Formules : $(ab)^m = a^m b^m$; $a^{m+n} = a^m a^n$; $(a^m)^n = a^{mn}$ où m et n sont des entiers relatifs.

— Racines carrées.

Formules : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Il s'agit ici de compléter les acquis du premier cycle et de s'assurer que les élèves maîtrisent bien les puissances de 10 et savent les employer pour lire ou écrire un nombre en notation scientifique et pour évaluer un ordre de grandeur.

Ces formules constituent une nouveauté pour les élèves issus de Troisième technologique.

b) Valeur absolue, intervalle, approximation :

— Valeur absolue, distance.

— Intervalles. Notation des divers types d'intervalles

Les valeurs absolues et les intervalles ne figurent pas au programme de Troisième. L'essentiel est de savoir interpréter $|b - a|$ comme étant la distance des points a et b et, dans cette perspective, des relations telles que $|x - 2| \leqslant 1$ ou $|x - 2| \leqslant 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2.

Dans le secteur industriel on fera le lien avec la notion de tolérance autour d'une valeur théorique.

Dans le secteur tertiaire on reliera la valeur absolue à l'écart moyen.

La notion de valeur absolue ne doit pas donner lieu à des exercices répétitifs.

42

— Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre a :
* lorsque $b \leqslant a \leqslant c$, on dit que b et c encadrent a ;
* lorsque $|a - a'| \leqslant 10^{-4}$, on dit que a' est une approximation (ou valeur approchée) de a à la précision 10^{-4}.

Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. Sur quelques exemples numériques, la précision obtenue pour une somme pourra être évaluée ; mais toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves.

La pratique des troncatures, déjà engagée dans les classes antérieures, sera poursuivie sans formalisation de ces notions.

c) Consolidation du calcul algébrique :

Usage et transformation de formules.

Sur des exemples simples, développements et factorisations seront effectués sans exagération. On fera appel aux formules courantes utilisées dans la vie pratique (impôts, intérêts...), en mathématiques (aires et volumes...), dans les sciences physiques et technologiques.

d) Suites arithmétiques et géométriques

Ce paragraphe n'est pas au programme des BEP hôtellerie restauration, alimentation.

— formules reliant deux termes consécutifs,

Il s'agit d'une première approche de ces notions. L'objectif est de permettre l'obtention de certains résultats numériques dans des situations simples.

Pour les suites géométriques, on se limite au cas où la raison est positive.

— formules donnant le terme de rang n.

Les activités seront choisies dans la vie économique et professionnelle (intérêts simples, composés...). Les formules donnant la somme de n termes d'une suite ne sont pas exigibles.

e) Exemples d'applications dans le secteur tertiaire.

— Calculs commerciaux (prix, coûts, marges, résultat, TVA...) relatifs à l'établissement de divers documents (factures, bulletins de salaire...).

— Conversion des monnaies.

— Calculs d'intérêts :
* intérêts simples (calcul de capital, taux de placement, taux moyen) ;
* intérêts composés (calcul de capital, de valeur acquise, des intérêts).

Ce paragraphe n'est pas au programme des sections du secteur industriel.
Seuls les deux premiers items de ce paragraphe sont au programme de mathématiques des BEP hôtellerie restauration, alimentation.

Ces situations nécessitent l'usage de méthodes mathématiques dans un contexte professionnel. La nécessité d'utiliser un vocabulaire technologique en coordination avec l'enseignement professionnel s'impose, mais en se limitant à l'essentiel. On s'attachera à dégager des situations de proportionnalité. On mettra en œuvre les outils mathématiques dont on dispose : équations et inéquations à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues, fonctions, suites arithmétiques et géométriques...

— Problèmes d'amortissement du matériel.

Ces trois derniers points ne sont pas au programme du BEP communication administrative et secrétariat.

— Escompte bancaire, taux réel de l'escompte.

— Équivalence d'un capital et d'un ensemble de capitaux, paiement à crédit.

2) Équations, inéquations, systèmes d'équations

L'objectif est non seulement de mettre en œuvre une technique de résolution, mais surtout d'étudier des problèmes issus d'autres disciplines et de la vie économique et professionnelle, en mettant en valeur les phases de mise en équation, de traitement mathématique, de contrôle et d'interprétation des résultats. Les exemples étudiés conduiront à des équations ou inéquations à une inconnue ou à des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques.

Les exemples trop techniques ou coupés de tout contexte seront évités.

a) Équations et inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients numériques :
* résolution numérique ;
* exemples d'étude de situations conduisant à une ou plusieurs équations ou inéquations du premier degré à une inconnue.

L'objectif est de conjuguer l'étude numérique et l'étude graphique, et non d'apprendre des formules de résolution : en particulier la notion de déterminant et les formules de Cramer ne sont pas au programme.

b) Système de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques :
* résolution numérique et graphique ;
* exemples d'étude de situations conduisant à de tels systèmes.

C — Fonctions

Ce chapitre, à l'exception du paragraphe 2.d), est commun à l'ensemble des spécialités.

Le programme est organisé autour de deux objectifs principaux :

— familiariser les élèves avec la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions ;

— acquérir une bonne maîtrise des fonctions usuelles indiquées dans le programme et un certain savoir-faire, toutes les indications utiles étant fournies, pour l'étude de fonctions qui s'en déduisent simplement.

On exploitera largement des situations issues de la géométrie, des sciences physiques, des disciplines technologiques et de la vie économique et sociale, en marquant les différentes phases : mise en équation, traitement mathématique, contrôle et exploitation des résultats.

Le programme combine les études qualitatives (croissance, allure des représentations graphiques,...) avec les études quantitatives (recherches d'extrémums,...). Il ne porte que sur l'étude d'exemples et se place dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction,...).

L'intervalle de définition sera indiqué lors de la donnée de la fonction considérée. Cet intervalle peut aussi résulter de contraintes naturelles portant sur l'inconnue (exprimées, dans un contexte concret, par des inégalités portant sur cette inconnue).

1) Génération et description des fonctions

On exploitera des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, des disciplines technologiques, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale.

a) Exemples de modes de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormal ou orthogonal.

On ne se limitera pas à des fonctions définies par des formules algébriques simples. Pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction, on donnera quelques exemples de situations menant à des fonctions définies différemment, par exemple par des représentations graphiques.

b) Exemples simples de calculs de valeurs d'une fonction à l'aide d'une calculatrice.

Les calculatrices programmables ne sont pas exigées

c) Parité, périodicité.
Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes.

Ces notions sont mises en place uniquement sur des exemples, notamment pour les fonctions figurant au paragraphe 2.a) ; on mettra en valeur leur signification graphique.
Les notions de taux de variation, de maximum local et de minimum local ne sont pas au programme.

d) Exemples de lecture de propriétés de fonctions à partir de leur représentation graphique.

2) Fonctions usuelles

À travers l'étude des fonctions figurant au programme et de situations menant à des fonctions qui s'en déduisent de façon simple, on mettra en valeur la diversité du comportement des fonctions. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de proportionnalité et en particulier de pourcentages, dont l'étude a été abordée dans les classes antérieures, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines.

L'étude générale des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions homographiques est hors programme. Pour les sections industrielles concernées, l'introduction des fonctions circulaires constitue une simple prise de contact de caractère expérimental : on s'appuiera sur l'étude du cercle trigonométrique (cf. programme de géométrie) et sur l'exploitation des touches de la calculatrice. Tout développement théorique est exclu.

Le choix de situations issues des sciences physiques et des disciplines technologiques contribue à éclairer la signification des changements d'origine ou d'échelles. Tout exposé général sur ces points est exclu ; on se limitera à quelques exemples simples et toutes les indications utiles seront fournies aux élèves.

a) Variations et représentation graphique des fonctions :
$x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto 1/x$.

Le sens de variation de ces fonctions de référence sur des intervalles à préciser est admis. Pour ces fonctions on pourra traduire la croissance ou la décroissance sur les intervalles envisagés par des inégalités.

On sera amené à effectuer une exploration numérique du comportement de ces fonctions pour les grandes valeurs de x et, dans le cas de $x \mapsto 1/x$, pour les petites valeurs de x ; mais toute mise en forme de la notion de limite est hors programme.

b) Exemples simples d'étude de comportements de fonctions tels que : signe, variations, recherche de maximums et de minimums, représentations graphiques dans un repère (orthonormal ou orthogonal).

On entraînera les élèves à utiliser le sens de variation des fonctions du paragraphe 2.a) pour l'étude du comportement de fonctions telles que :
$x \mapsto 2x^2$, $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2$, $x \mapsto 2x^2 + 1$.
toutes les indications utiles étant fournies. L'étude des fonctions faisant intervenir des valeurs absolues est hors programme.

On étudiera des situations décrites au moyen de fonctions issues de la géométrie, des disciplines technologiques, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale. On s'attachera à mettre en évidence, à travers les exemples étudiés, la signification des propriétés des fonctions concernées (parité, croissance, maximums, minimums,...). L'utilisation de logiciels de type imagiciel ou utilisés dans les disciplines citées ci-dessus peut contribuer efficacement à la réalisation de ces objectifs.

On pourra exploiter quelques exemples simples de problèmes d'optimisation, mais l'étude systématique de tels problèmes n'est pas un objectif du programme.

c) Exemples simples d'étude graphique d'équation de la forme $f(x) = \lambda$ où λ a une valeur numérique donnée.

En liaison avec les sciences physiques ou la technologie on pourra être amené à étudier des situations nécessitant la résolution d'une équation du second degré qui s'effectue alors graphiquement.

d) Étude des fonctions cosinus et sinus : périodicité, symétries, sens de variation. Courbes représentatives.

Ce paragraphe ne figure au programme que des sections du secteur industriel.

On entraînera les élèves à retrouver sur le cercle trigonométrique des propriétés des fonctions cosinus et sinus telles que
$\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$,
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$,...

Les élèves n'ont pas à mémoriser ces formules, l'étude de la fonction tangente et les formules d'addition sont hors programme.

Dans les sections industrielles concernées, on pourra être amené à étudier, en liaison avec d'autres disciplines, des fonctions telles que $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont numériquement fixés, mais aucune connaissance n'est exigible sur ce sujet en mathématiques.

vecteur

SOMMAIRE DU NUMERO UN (1992)

SOMMAIRE DU NUMERO DEUX (1992)

vecteur

SOMMAIRE DU NUMERO TROIS (1992)

ACADEMIE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cedex

Marne :	Patrick PERRIN Lycée Georges Clémenceau 46 avenue Georges Clémenceau 51096 REIMS Cédex **FAX** : 26.85.35.04
Ardennes :	Regis DEBARGE Lycée Parc du château de Montvillers 08140 BAZEILLES **FAX** : 24.27.43.27
Aube :	Brigitte CHAPUT Lycée Edouard Herriot 10300 SAINTE- SAVINE **FAX** : 25.75.63.15
Haute-Marne :	Jean-Claude DANIEL Lycée Edmé Bouchardon 16 rue Youri Gagarine 52012 CHAUMONT Cédex **FAX** : 25.32.15.90
I.R.E.M.	**TEL** : 26.05.32.08 **FAX** : 26.85.35.04

vecteur

SOMMAIRE DU NUMERO QUATRE (1993)

IREM de Reims

Tél : 26 05 32 08

Fax : 26 85 35 04

ACADEMIE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cedex