I
R
E
M

R
E
I
M
S

L'Injectif

Bulletin de Liaison

de

l'IREM

de

REIMS

ÉLÉMENS

D'ARITHMÉTIQUE, *D'ALGEBRE* ET DE GÉOMÉTRIE.

DES MATHÉMATIQUES *en Général.*

LES Mathématiques sont une Science qui a pour objet la Grandeur en tant que mesurable.

2. On appelle *Grandeur* ou *Quantité*, tout ce qui est susceptible de plus ou de moins ; tout ce qui peut être augmenté ou diminué, *par exemple*, l'*Etendue*, le *Mouvement*, &c.

3. La Grandeur est ou *discrete*, ou *continue*. On appelle Grandeur ou Quantité discrete, un assemblage de parties désunies entr'elles, & qui forment plusieurs tous, plutôt que des parties d'un même tout ; *par ex :* un monceau de *bled*, de *sable*, &c.

A

Décembre 1976

N° 001

UNIVERSITÉ de REIMS - IREM
(UER Sciences)
B.P. 347 51062 REIMS CEDEX

AVANT-PROPOS

-:-:-:-:-:-

Le premier bulletin de liaison de l'I.R.E.M. de REIMS est adressé à tous les Enseignants de Mathématiques de l'Académie de REIMS, à quelque niveau qu'ils enseignent, de la 6ème à l'Université. Les écoles primaires et maternelles le reçoivent également.

Son but n'est pas tellement de présenter, à ceux qui ne le connaissent pas, l'I.R.E.M. de REIMS et ses travaux ; d'autant que ceux-ci restent modestes, en raison de ses faibles moyens en postes.

Ce bulletin voudrait, essentiellement, servir de liaison entre les Collègues, stagiaires ou non à l'I.R.E.M., leur apporter des informations mathématiques et des sujets de réflexion, leur permettre d'exprimer leurs points de vue ("écrivez nous !"). Il voudrait aussi créer chez les Enseignants de Mathématiques de l'Académie une prise de conscience collective de leur responsabilité. Car la réussite en Mathématiques est, dans la société actuelle, l'un des critères majeur de la sélection ; et toute erreur ou maladresse pédagogique, toute erreur ou insuffisance mathématique a pour conséquence - il faut que chacun de nous en soit conscient, surtout parmi ceux qui enseignent de jeunes enfants - que, pour certains de nos élèves, l'avenir auquel ils pourront prétendre sera considérablement assombri, et cela pas toujours de leur faute. Je sais bien qu'il n'y a pas que cela qui intervient : il y a les classes surchargées, les conditions familiales des élèves, l'influence des média, l'inadéquation de certains programmes et d'autres facteurs encore. Mais si ce bulletin peut, modestement, oeuvrer à l'amélioration de l'enseignement mathématique de l'Académie, il répondrait à la raison d'être des I.R.E.M.

M. DAVID

Directeur de l'I.R.E.M. de REIMS

N.B. : L'injectif a pour objectif d'être surjectif, sur l'ensemble des Collègues de tous niveaux de l'Académie. Indiquez nous oublis, ommissions ou insuffisances dans sa diffusion.

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse

B.P. 347 - 51062 REIMS-Cédex

Tél. : (26) 47.82.61. Poste 208

ACTIVITES 1975-1976 de l'I.R.E.M.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

4.11. Information mathématique

Dénomination	Objectif	Nbre d'animateurs	Nbre de stagiaires	Implantation géographique
A.P.A.C. 1511	Complément	1	19	51 REIMS
A.P.A.C. 1510	de	1	10	51 CHALONS
A.P.A.C. 1520	la	1	6	52 CHAUMONT
A.P.A.C. 1521	formation	1	4	52 ST DIZIER
A.P.A.C. 1100	initiale	1	23	10 TROYES
A.P.A.C. 1080 B	des	1	18	08 CHARLEVILLE
A.P.A.C. 1080 C	P.E.G.C.	1	19	08 CHARLEVILLE

4.12. Formation - Réflexion pédagogique - Pratique enseignante.

Dénomination	Objectif	Nbre d'animateurs	Nbre de stagiaires	Implantation géographique
A.R.A.P. 1511	Approfondissement	1	18	51 REIMS
G.R.P.1 1511		1	14	51 REIMS
A.R.A.P. 1510		1	11	51 CHALONS
A.R.A.P. 1512	pédagogique	1	12	51 EPERNAY
A.R.A.P. 1520	au	1	15	52 CHAUMONT
A.R.A.P. + G.R.P. 1 1521	niveau	1	14	52 ST DIZIER
A.R.A.P. 1100	du	1	20	10 TROYES
A.R.A.P. 1080	1er cycle	1	25	08 CHARLEVILLE

.../...

4.12. (Suite)

Dénomination	Objectif	Nbre d'animateurs	Nbre de stagiaires	Implantation géographique
G.R.P.2 1511 G.R.P.2 1520 1521 G.R.P.2 1100 G.R.P.2 1080	Approfondissement pédagogique au niveau du 2d cycle	1 1 1 1	15 18 4 14	51 REIMS 52 CHAUMONT & ST DIZIER 10 TROYES 08 CHARLEVILLE
G.R.P. E 1510 1080	Approfondissement pédagogique école élémentaire	2	2 + 11 instituteurs bénévoles	51 CHALONS 08 CHARLEVILLE

4.13. Recherche avec expérimentation dans les classes

Dénomination	Objectif	Nbre d'animateurs	Nbre de stagiaires	Implantation géographique
G.R.P.E. 1520	Recherches & expériences sur l'enseignement des Mathématiques à l'école élémentaire	1	6 instituteurs bénévoles	52 CHAUMONT E.N.
G.R.P. 1512	Etude de l'influence de la formulation en Mathématiques	2	13	51 EPERNAY

--- /---

4.14. Autres recherches

Dénomination	Objectif	Nbre d'animateurs	Nbre de stagiaires	Implantation géographique
Groupe Maths-Physique	Liaison entre les enseignements de Mathématiques et Physique au 2d cycle	2	22	51 REIMS
Groupe Maths-Physique		2	8	52 CHAUMONT
Groupe Informatique	Recherches inter-disciplinaires sur l'utilisation de l'informatique	1	9	51 REIMS

5. LISTE DES PUBLICATIONS DE L'ANNEE

Mathématiques - Physique
Harmonisation au niveau du second cycle
Fascicule n° 2 } 62 pages

Influence de la Formulation dans
l'acquisition d'un concept mathématique } 50 pages

Choisir un mini-calculateur
La méthode informatique appliquée à la résolution d'une question grammaticale :
"l'accord du participe passé" } 74 pages

6. PERSPECTIVES

L'actualisation des connaissances des enseignants du second degré sera poursuivie mais la partie recherche sera développée en particulier en ce qui concerne :

- le contenu des programmes de premier cycle
- la psychologie des mathématiques
- la liaison entre l'enseignement élémentaire et le premier cycle du second degré.

COLLOQUES INTER-I.R.E.M. 1976 - 77

Dates	Lieux	Thèmes
1-2 Octobre	DIJON	L'enseignement des mathématiques du CM à la fin du cycle d'observation (I.R.E.M.-A.P.M.)
5-6 Novembre	PARIS	Algèbre en 4ème et calculateurs programmables
11-14 Novembre	LYON	Probabilités et statistiques (I.N.R.D.P.-I.R.E.:
3-4 Décembre	TOULOUSE	La géométrie dans le 1er cycle (I.R.E.M.-A.P.M.,
9-10-11 Décembre	CAEN	Sensibilisation à la pédagogie par l'audiovisue.
7-8 Janvier	DIJON	L'analyse
21-22 Janvier	NANCY	Orientations des activités des I.R.E.M.
28-29 Janvier	LILLE	La formation permanente des adultes non enseignants
4-5 Février	ORLEANS	Pédagogie par objectifs dans le 2nd cycle
25-26 Février	BREST	Inter-I.R.E.M. de l'Ouest ....
18-19 Mars	LIMOGES	Mathématiques et biologie
25-26 Mars	ROUEN	Fonctions sociales de l'enseignement des mathématiques
22-23 Avril	TOURS	La formation des enseignants en mathématiques (organisateurs : ORLEANS, POITIERS, NANTES)
29-30 Avril	RENNES	Colloque national des professeurs d'Ecole Normale
29-30 Avril	PARIS	Algèbre en 4ème et calculateurs programmables
6-7 Mai	PARIS	Didactique des sciences et psychologie
13-14 Mai	TOULOUSE	Analyse des manuels scolaires (I.R.E.M.-A.P.M.)
19-20-21 Mai	RENNES	Probabilités et statistiques (I.N.R.D.P.-I.R.E.:
20-21 Mai	MARSEILLE	Coordination des enseignements de mathématiques et de physique
10-11 Juin	CAEN	Introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques (Fibonacci)
17-18 Juin	LYON	Informatique et calculateurs programmables

MINISTERE DE L'EDUCATION

NOUVEAUX PROGRAMMES
(Projet 1976)

L'ENSEIGNEMENT DANS LES COLLEGES

OBJECTIFS

Dans les Collèges, comme dans l'enseignement élémentaire, l'étude des mathématiques a pour objectifs essentiels de développer chez les élèves, à partir d'observations de situations concrètes, une certaine forme d'imagination, de leur donner, en plus des techniques indispensables dans la vie courante, le goût d'une certaine précision de langage et de pensée, de les habituer au raisonnement déductif, de leur apprendre à exprimer un raisonnement.

Deux étapes seront à distinguer très nettement :

- Celle des deux premières années. L'essentiel sera alors de renforcer l'acquis des élèves en calcul et de le compléter (emploi des décimaux relatifs, usage des parenthèses). Ils feront aussi des observations sur des objets physiques usuels ; celles-ci seront des occasions de calcul. Le dessin géométrique plan, avec des instruments, sera pratiqué.

Le vocabulaire dit "moderne" sera utilisé. Il n'a pourtant pas à faire l'objet d'un chapitre détaillé du programme ; tout développement sur les "relations" serait superflu.

C'est à dessein et pour tenir compte de l'âge des élèves, qu'on ne fera, en Sixième, que de la géométrie plane, et aussi qu'on n'y étudiera pas la multiplication des décimaux relatifs ; cette dernière sera réservée (après une révision suffisante de l'addition et de la soustraction) à la classe de Cinquième.

- Celle des deux dernières années. Le calcul numérique sera développé (notion d'encadrement ; opérations sur les quotients - fractions -) ; le calcul littéral sera introduit. Les élèves étudieront et représenteront graphiquement des fonctions simples ; il sera opportun, sur des exemples concrets, de définir des taux de croissance et de donner quelques exemples de croissance de type exponentiel.

La géométrie partira de l'expérience acquise avec le dessin géométrique. Des observations physiques bien choisies, conduiront à dégager des faits expérimentaux qui seront choisis comme "propositions initiales", éventuellement appelées "axiome". De ces "règles du jeu", seront déduites, par voie logique, des conséquences, illustrées par des figures soignées ; leur recherche développera l'imagination des élèves et leurs qualités de raisonnement.

...

CLASSE DE SIXIEME

Le langage ensembliste et les symboles $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\emptyset$, seront utilisés dans l'étude des différentes parties du programme ; ils n'ont pas à faire l'objet d'un apprentissage pour eux-mêmes.

I. - Nombres décimaux

Contrôle de l'acquisition du sens des opérations sur les nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication, division (exacte ou approchée) ; techniques d'exécution de ces opérations, vérifications.

Emploi des signes $<$, $\leq$, $>$, $\geq$.

Ordre de grandeur d'un résultat ; calcul mental, exercices simples sur des suites d'additions et de multiplications ; usage de parenthèses. Relation de proportionnalité entre deux suites finies de nombres ; calculs de pourcentage et de proportionnalité.

II. - Nombres relatifs décimaux

Exemples introduisant les nombres relatifs : somme de deux ou plusieurs nombres ; différence de deux nombres. Exercice concernant le repérage d'un point sur une droite orientée, munie d'une origine et régulièrement graduée.

III. - Observations d'objets géométriques et physiques

Premières observations sur des solides, des surfaces, des lignes, segment de droite, morceau de surface plane.

Instruments de dessin dans le plan : règle, double décimètre ~~règle graduée~~, équerre, parallélogramme articulé, compas, papier calque, rapporteur.

Vocabulaire de la géométrie plane : droite, plan, demi-plan, demi-droite ; cercle (longueur), arc de cercle, secteur angulaire. Unités usuelles de longueur, d'aire, d'angle. Droites parallèles, perpendiculaires (ou orthogonales) ; tangente à un cercle en l'un de ses points.

Observations de figures, par exemple : quadrillage, repérage d'un point dans un plan quadrillé ; triangle, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré. Aires du rectangle, du trapèze, du triangle, du disque.

CLASSE DE CINQUIEME

I. - Relations On se bornera à étudier

1. Application d'un ensemble dans un ensemble. Bijection.

2. Exemples de partition d'un ensemble et de relation d'équivalence.

...

II. - Arithmétique

Ensemble des multiples d'un entier naturel ; division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel.

Diviseurs d'un entier naturel ; nombres premiers.

Sur des exemples ; pratique de la décomposition d'un entier naturel en un produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et sur les diviseurs communs à deux ou plusieurs entiers naturels.

III. - Nombres relatifs

1. - Ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs : définition, addition, ordre, valeur absolue, multiplication (les propriétés des opérations et de l'ordre seront présentées progressivement et sans démonstration).

2. - Nombres décimaux relatifs, pratique opératoire :

- somme, différence, ordre, valeur absolue.
- produit d'un nombre relatif par un entier naturel ; produit par un entier naturel d'une somme, d'une différence.
- produit de deux nombres relatifs ; puissances entières d'exposant positif (et nul). Produit d'une somme par un nombre relatif ; mise en facteur.

IV. - Observation d'objets géométriques et physiques

1. - Révision du vocabulaire relatif qux figures planes.

2. - Exercices de dessin dans le plan ; tracés usuels faits avec les instruments. Recopie d'un dessin à l'aide de quadrillages ; agrandissement et réduction d'un dessin.

3. - Observation d'objets physiques de l'espace. Plans horizontaux ; droites verticales ; droites horizontales, plans verticaux. Droites parallèles de l'espace ; plans parallèles ; droite et plan perpendiculaires.

Observation d'objets tels que : cubes, prismes droits, cylindres droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution.
Calculs de volumes.

Observation d'une sphère ; plan tangent en un point, aire de la sphère, volume de la boule. Observation de surfaces coniques et cylindriques ; plan tangent en un point.

4. - (En liaison avec la physique). Masse ; masse volumique. Durées ; unités de temps et de vitesse. Débits.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

DANS LES LYCEES

LA CLASSE DE SECONDE

Les élèves de cette classe (première année des Lycées) auront ultérieurement besoin de mathématiques, mais dans des circonstances très différentes suivant les options, littéraires, économiques, techniques, ou scientifiques pures, qu'ils choisiront ensuite. L'objectif en classe de Seconde est donc de leur donner les connaissances communes qu'ils devront posséder pour utiliser le processus mathématique dans les diverses situations culturelles ou professionnelles auxquelles ils seront ultérieurement confrontés, de développer les qualités d'intuition et de sûreté de raisonnement, d'intérêt évidemment très général, qui sont liées à l'exercice de la pensée mathématique.

I. - Compléments de géométrie plane et d'algèbre

1. - Enumération des propriétés des "vecteurs du plan". Plan vectoriel ; droite vectorielle ; couple de vecteurs indépendants. Exemples simples d'applicationslinéaires ; exemples simples d'applications affines.

2. - Repère cartésien ; détermination d'un point, d'un vecteur par ses coordonnées ; condition pour que deux vecteurs donnés par leur coordonnées soient indépendants. Représentations paramétriques d'une droite. Equation cartésienne d'une droite dans un repère donné. Interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.

3. - Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

4. - Dans le plan euclidien, projection orthogonale ; rapport de projection (cosinus de l'angle des deux directions d'axes) ; produit scalaire (c'est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive) ; expression en repère orthonormé ; applications géométriques

II. - Algèbre et analyse

1. - Rappel des propriétés de R. Application valeur absolue et distance associée. Encadrement des éléments de R par des nombres décimaux.

2. - Fonctions numériques d'une variable réelle. Fonctions monotones, fonctions en escalier ; exemples concrets de fonctions affines, taux de croissance ; fonctions affines par morceaux. Représentations graphiques.

Fonction $x \longmapsto x^2$; représentation graphique.

Fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$; représentation graphique.

...

3. - Exercice de calcul sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles d'une variable. Forme canonique d'un polynôme du second degré à coefficients réels ; décomposition éventuelle en un produit de binomes.

4. - Etude de problèmes tirés de situations concrètes conduisant, après choix d'inconnues ou de variables convenables, à des études d'équations, de système d'équations, d'inéquations et de variations de fonctions.

5. - Calculs approchés dans des situations concrètes (physiques, technologiques, économiques...). Ordre de grandeur d'un résultat. Usage de tables numériques et de petites machines à calculer.

On montrera que l'inégalité $|x| \leq \frac{1}{2}$ entraîne $\left|\frac{1}{1+x} - (1-x)\right| \leq 2x^2$ et on admettra que, pour a appartenant à $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ l'inégalité $|x| \leq \frac{1}{2}$ entraîne $\left|(1+x)^a - (1+ax)\right| \leq 8x^2$

INFORMATIONS SUR LES NOUVEAUX PROGRAMMES

EN 4ème ET 3ème

-:-:-

Le Ministre a demandé à l'Inspection Générale un projet pour le 20 décembre 1976.

Après quelques consultations individuelles, Monsieur l'Inspecteur Général MAGNIER a réuni une Commission le 27 novembre ; cette commission doit discuter, le 15 décembre d'un projet qui, dans ses grandes lignes, ne bouleverserait rien, mais réduirait certains aspects abstraits et axiomatiques du programme. Ce programme devra évidemment tenir compte de la réduction prévue des heures de Mathématiques en 4ème et 3ème.

DE L'USAGE DES SYMBOLES $\Longrightarrow$ ET $\Longleftrightarrow$.

L'élaboration des bases d'une théorie (mathématique) ou d'un jeu (jeu d'échecs), ou d'une nouvelle langue (allemand ou anglais, pour un Français), nécessite l'intervention et l'usage d'une langue explicative appelée métalangue (ou métalangage) de la langue propre à la théorie, ou au jeu, ou à la nouvelle langue.

Dans le cas d'un jeu d'échecs, la métalangue sert :

1) à définir les pièces (objets primitifs de la théorie),
2) à donner les règles du jeu (règles de déduction de la théorie ; axiomes).

Dans le cas d'une classe de sixième débutant l'allemand par les méthodes audiovisuelles, les images (en projection ou dans un livre) constituent la métalangue, dans les premières leçons.

Pour une "langue" donnée, il peut y avoir plusieurs métalangues : ainsi les parties d'échecs sont-elles décrites dans un langage symbolique, qui est un métalangage du jeu d'échecs ; mais ce métalangage, pour être compris, nécessite lors de sa formation, l'utilisation du français (pour nous Français) comme métalangage.

On pourrait penser abandonner, une fois les bases construites, le métalangage, pour le langage propre de la théorie (comme c'est le cas dans une partie d'échecs silencieuse). Cependant, du point de vue pratique on est souvent amené, du moins par souci d'alléger le discours, à utiliser à nouveau la métalangue (abréviations, abus de langage, explications) ; d'autre part, du point de vue théorique, GÖDEL a démontré en substance, qu'on ne peut conclure à la non-contradiction d'une théorie en restant au sein de cette théorie.

L'un des buts de qui enseigne la mathématique est d'amener progressivement les élèves à mieux connaître le langage logico-mathématique. Ce langage n'est perçu que par l'intermédiaire de la métalangue (langue maternelle, symbolisme propre à la métalangue, abus de langage, etc...) , c'est par un perfectionnement et un affinement constants de la métalangue que l'enseignant fait progresser les élèves dans la maîtrise du langage mathématique : la métalangue à utiliser est différente selon le niveau de connaissances de l'auditoire (tel abus de langage peut être admissible à un niveau donné, car l'auditoire est capable de retranscrire correctement, mais peut être inadmissible à un autre niveau -généralement inférieur-). Un enseignant débutant a souvent tendance à utiliser dans sa classe la métalangue à laquelle il est habitué, c'est-à-dire celle dont on usait vis-à-vis de lui en Faculté ; étant donné -en général- la grande différence entre les deux niveaux, cette métalangue se trouve très mal adaptée aux élèves.

Il existe encore une difficulté : l'enseignant doit bien situer le niveau de langage (au sens linguistique) de son auditoire, afin d'une part de ne pas le dépasser, et d'autre part de le faire progresser.

A partir de la classe de seconde, les définitions, les théorèmes, les conclusions de certains exercices, peuvent être formalisés dans un langage mathématique propre ; on utilise en particulier les quantificateurs existentiel et universel, et certains symboles tels $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$.

.../...

Si l'on conçoit généralement qu'il ne faut pas introduire ces symboles dans "le langage courant", il arrive cependant qu'on utilise certains d'entre eux, tels les quantificateurs, $\forall$ et $\in$, et les symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.

Considérons l'exemple suivant :

a) <u>ce que l'on écrit couramment</u>
pour x réel,

$$2x + 1 = -5x + 7 \Longleftrightarrow 7x = 6$$
$$7x = 6 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{7}$$

b) <u>ce qui est sous-jacent</u>

$(\forall x \in \mathbb{R}, \ 2x + 1 = -5x + 7 \Longleftrightarrow 7x = 6)$ est une proposition vraie (1) ;
$(\forall x \in \mathbb{R}, \ 7x = 6 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{7})$ est une proposition vraie (2) ;

on sait que p,q,r, désignant des propositions (fixées non-désignées)

$[(p \Longleftrightarrow q) \text{ et } (q \Longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r)]$ est une proposition vraie (3) ;

de (1), (2) et (3) on <u>déduit</u> :

(4) :
$(\forall x \in \mathbb{R}, \ 2x + 1 = -5x + 7 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{7})$ est une proposition vraie

La table de vérité de $p \Longleftrightarrow q$ permet d'affirmer :

pour tout x réel, $(2x + 1 = -5 + 7)$ et $(x = \frac{6}{7})$ dont même valeur de vérité ;

par suite $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } 2x + 1 = -5x + 7\} =$
$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \frac{6}{7}\} = \{\frac{6}{7}\}$.

c) <u>ce que comprennent les élèves</u> :

$2x + 1 = -5x + 7$ équivaut à $7x = 6$
$7x = 6$ équivaut à $x = \frac{6}{7}$

donc $2x + 1 = -5x + 7$ équivaut à $x = \frac{6}{7}$

donc $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } 2x + 1 = -5x + 7\} = \{\frac{6}{7}\}$

d) <u>Etude critique</u> :

Il est manifeste que $(\Longleftrightarrow)$ est abusivement interprété dans c). Or cela est permis par le discours a) (même s'il est accompagné par des explications orales correspondant au discours b).)

.../...

Le discours a) est donc pédagogiquement à proscrire.

p,q, étant deux propositions, $p \Longleftrightarrow q$ en est une troisième ; l'écrire n'établit aucune relation logique entre p, q.

Par contre, de : " $(p \Longleftrightarrow q)$ est une proposition vraie",
et : " la bi-implication de deux propositions est une proposition vraie si et seulement si les deux propositions ont même valeur de vérité",
on <u>déduit</u> que les propositions considérées p, q, ont même valeur de vérité.

Remarquons que certains ouvrages du secondaire prônent ou semblent prôner qu'en mathématique tout ce que l'on écrit est vrai... Cela paraît difficilement réalisable en pratique ; (il arrive fréquemment que l'on fasse un raisonnement conditionnel : "supposons qu'il existe x tel que..." et qu'en fait cette supposition soit fausse).

D'autre part cela interdit la distinction entre la proposition $(p \Longleftrightarrow q)$ et la proposition $[(p \Longleftrightarrow q)$ est vraie$]$, par exemple.

Les ouvrages de logique utilisent l'assemblage $\vdash P$ pour affirmer la validité de P ; (ainsi $[(p \Longleftrightarrow q)$ est vraie$]$, assemblage du métalangage devient $\vdash (p \Longleftrightarrow q)$, assemblage du langage mathématique).

Il peut à juste titre paraître superflu d'introduire cet assemblage ; on peut alors se contenter d'écrire on a : p
on a : p et q etc...

On peut éviter l'emploi de $\Longleftrightarrow$ en métalangue de deux façons différentes (pour la forme) :

la première consiste à écrire en français "équivaut à" entre les formes propositionnelles qui le méritent ;

la seconde consiste à utiliser un signe traduisant la locution "équivaut à", "a même valeur de vérité que" : -couramment, le signe choisi est $\longmapsto\!\dashv$.

La démonstration s'énonce donc ainsi :

pour x réel, $2x + 1 = -5x + 7 \longmapsto\!\dashv 7x = 6$
$7x = 6 \longmapsto\!\dashv x = \frac{6}{7}$;

on lit : $2x + 1 = -5x + 7$ équivaut logiquement à $7x = 6$
$7x = 6$ équivaut logiquement à $x = \frac{6}{7}$.

$\longmapsto\!\dashv$ est un terme primitif du métalangage satisfaisant aux règles d'emploi :

p, q et r étant des énoncés,

* $p \longmapsto\!\dashv p$
* de $p \longmapsto\!\dashv q$ on déduit $q \longmapsto\!\dashv p$.
* de $p \longmapsto\!\dashv q$ et $q \longmapsto\!\dashv r$ on déduit $p \longmapsto\!\dashv r$.

On peut également présenter l'assemblage $p(x) \longmapsto\!\dashv q(x)$ parallèlement à la théorie "naïve" des ensembles :

à toute forme propositionnelle p(x) définie sur l'ensemble E, est attachée une partie de E, $E_p = \{x \mid x \in E,\ p(x)\}$.

(Nota : p(x) par convention ici signifie $\vdash p(x)$).
L'assemblage $p(x) \longmapsto\!\dashv q(x)$ apparaît alors comme une traduction de $E_p = E_q$.

L'exemple qui suit met en évidence les liens entre $\Longleftrightarrow$ et $\longmapsto$, et leurs domaines d'utilisation différents :

"Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x - 1| \leqslant - 3x + 4$ " (énoncé du métalangage...).

On connaît le théorème : $[\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |a| \leqslant b \Longleftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b]$; on a donc, pour x décrivant $\mathbb{R}$:

$$|2x - 1| \leqslant -3x + 4 \longmapsto 3x - 4 \leqslant 2x - 1 \leqslant -3x + 4 \ ;$$

ce qu'on peut lire : "les formes propositionnelles $|2x - 1| \leqslant -3x + 4$ et $3x - 4 \leqslant 2x - 1 \leqslant -3x + 4$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}$ ".

Utilisant d'autres théorèmes connus, on a successivement :

$$3x - 4 \leqslant 2x - 1 \leqslant -3x + 4 \longmapsto \begin{cases} 3x - 4 \leqslant 2x - 1 \\ 2x - 1 \leqslant -3x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4 \leqslant 2x - 1 \\ 2x - 1 \leqslant -3x + 4 \end{cases} \longmapsto x \leqslant 1 \ ;$$

soit en définitive $|2x - 1| \leqslant -3x + 4 \longmapsto x \leqslant 1$

et par suite $\{x | x \in \mathbb{R},\ |2x - 1| \leqslant - 3x + 4\} = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 1\}$
$= (\longleftarrow, 1]$.

Il importe de distinguer dans la langue parlée $\Longleftrightarrow$ et $\longmapsto$. La traduction de $\Longleftrightarrow$ par "équivaut à" ou "si et seulement si" constitue un abus de langage : en lisant le théorème énoncé ci-dessous : "pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, valeur absolue de a inférieure à b <u>équivaut à</u> a supérieur à l'opposé de b et inférieur à b", on n'énonce pas la propriété proprement dite, mais déjà son mode d'utilisation ; et cela concourt à faire utiliser $\Longleftrightarrow$ à mauvais escient.

Il est préférable de se contenter d'une traduction littérale, suffisamment éloignée du langage courant, qui fait sentir l'existence d'une langue mathématique propre, telle que :

"Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on a : valeur absolue de a inférieure à b <u>bi-implication</u> a supérieur à l'opposé de b et inférieur à b ".

L'utilisation de $\Longrightarrow$ comme signe du métalangage dans les démonstrations est encore plus néfaste, puisqu'elle confère à ce signe le sens de "donc", "entraîne", "implique"...

Elle amène d'autre part à utiliser des assemblages tels que :

$p(x) \Longrightarrow q(x) \Longrightarrow r(x)$ qui sont dénués de sens.

Il est remarquable cependant que cet usage abusif démontre le besoin d'un signe indiquant la déduction. Or ce signe existe dans le formalisme de "la déduction naturelle" : en logique on dit qu'il y a <u>séquence</u> entre les énoncés P et Q lorsque le fait de poser Q entraîne l'assertion de Q.

$P \Longrightarrow Q$ n'est pas une séquence, mais $\longmapsto [p \wedge (p \Longrightarrow q)$ permet l'assertion de q. : il y a séquence entre $p \wedge (p \Longrightarrow q)$ et q. Pour traduire qu'il y a séquence de P à Q on écrit $P \longmapsto Q$. Tout énoncé à gauche de $\longmapsto$ est un <u>antécédent</u> ; tout énoncé à droite de $\longmapsto$ est un <u>conséquent</u> ; on lit "P infère Q" et $\longmapsto$ est appelé "inférence".

.../...

Une séquence sans antécédent est une assertion inconditionnelle. Cela justifie la notation $\vdash$ Q pour "Q est un énoncé vrai".

$\vdash$ peut être introduit comme signe du métalangage signifiant que : de la validité de P on déduit la validité de Q ; (la validité de P pouvant n'être que supposée).

L'usage de l'inférence est régi par les règles :

* P $\vdash$ P

* de P $\vdash$ Q et Q $\vdash$ R on déduit P $\vdash$ R,

P, Q et R étant trois énoncés.

La encore il importe de distinguer $\Longrightarrow$ et $\vdash$ dans la langue parlée, d'éviter de traduire $\Longrightarrow$ par "implique", "entraîne", ou même "si... alors" ; aussi a-t-on intérêt à lire la proposition :

$\left[\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\right]$ de la façon suivante : "quel que soit (x_1, x_2) élément de E^2, on a x_1 strictement inférieur à x_2 implication image de x_1 par f strictement inférieure à image de x_2 par f".

Par contre, si l'on sait que la fonction numérique f de la variable réelle est défini et strictement croissante sur E, que l'élément a de E est strictement inférieur à l'élément b de E, alors on écrit :

$a < b \vdash f(a) < f(b)$.

L'inférence apparaît alors comme "le mode d'utilisation" de l'implication. Inversement, soit à établir la proposition :

$\left[\forall x \in E, \ p(x) \Longrightarrow q(x)\right]$, la table de vérité de l'implication apprend qu'il suffit d'établir que, de la validité de la propositionnelle p(x) on déduit la validité de la propositionnelle q(x), c'est-à-dire : $p(x) \vdash q(x)$.

Dans un même esprit, pour établir la proposition :

$\left[\forall x \in E, \ p(x) \Longleftrightarrow q(x)\right]$, on peut établir : $p(x) \vdash q(x)$ et $q(x) \vdash p(x)$ (ce qui est d'un point de vue pédagogique souvent préférable à $p(x) \dashv\vdash q(x)$).

Notons que l'inférence ou l'équivalence logique ne peuvent en aucun cas se substituer dans les énoncés formalisés à l'implication et à la bi-implication. Pour des raisons grammaticales d'abord : quand on écrit ($p \Longrightarrow q$) et ($p \Longleftrightarrow q$), on écrit un état entre les énoncés p et q, on ne crée pas une nouvelle proposition, ni une nouvelle propositionnelle ; ensuite pour des raisons de sens : énoncer la propriété de symétrie pour une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E sous le forme :

$\mathcal{R}(x,y) \vdash \mathcal{R}(y,x)$, (x,y) décrivant E^2, amène aussitôt à se poser la question : -Que se passe-t-il lorsque l'on a : non $\mathcal{R}$ (x,y) ?

Ces quelques réflexions ont pour but de faire prendre conscience de l'usage de plusieurs langues en mathématique. Si les lecteurs sont convaincus du danger d'utiliser implication et bi-implication hors de leurs significations, face à un auditoire insuffisamment averti, ils n'en sont pas pour autant obligés d'introduire l'équivalence logique et l'inférence : la langue française est suffisamment riche. D'autre part, si l'on désire utiliser ces deux nouveaux signes, il n'est pas nécessaire de les définir rigoureusement, les élèves en apprenant facilement l'usage, petit à petit par des exemples.

.../...

Pour conclure, il ne s'agit pas d'imposer une langue rigide et non-évolutive : la métalangue évolue -on l'a vu- avec le niveau des auditeurs.

Plus encore, chaque science, chaque discipline a son propre métalangage ; vouloir les unifier relève certainement de l'utopie ; il vaut mieux s'habituer à cette pluralité, en se souvenant constamment que le même mot, selon le contexte où il est utilisé, n'a pas toujours le même sens.

Jean-Christophe MELET

GRP_2 - IREM REIMS

(1976)

BIBLIOGRAPHIE

LOGIQUE MATHEMATIQUE - Daniel PONASSE -
OCDL 65, rue Claude Bernard - 75005 PARIS

INITIATION A LA LOGIQUE - Le R-P DUBARLE
GAUTHIER-VILLARS
55, quai des Grands Augustins

LES FONDEMENTS LOGIQUES DES MATHEMATIQUES - W. BETH
GAUTHIER-VILLARD

En ce qui concerne l'implication, $\Longrightarrow$, trop souvent employée en mathématique à la place de l'inférence, $\longmapsto$, je conseille à tous les collègues de considérer les neuf cas possibles de la proposition $A \Longrightarrow B$. Ces neuf cas correspondent aux trois possibilités, pour A et pour B, d'être des propositions "toujours vraies" ou "toujours fausses" ou "vraies conditionnellement à une ou plusieurs variables contenues".

Sur les neuf cas, un seul est une proposition inexacte, et trois seulement sont conditionnement inexactes.

Reste à voir quand on peut parler d'inférence...

Nous en reparlerons dans un prochain bulletin, espèrant avoir reçu, d'ici là, de nombreuses idées de votre part.

M. DAVID

QUELQUES REFLEXIONS SUR L'ANALYSE

ENSEIGNEE EN PREMIERE ET TERMINALE C ET D

-:-:-:-:-:-:-

Nous reproduisons ici un article élaboré par un groupe "analyse INTER-I.R.E.M". Il est suivi d'une remarque concernant la limite d'une fonction composée (G.R.P. 2 de REIMS).

I - DU BON DROIT DE LA COMPOSITION DES APPLICATIONS.

La composée de deux applications $\alpha : A \longrightarrow B$ et $\beta : C \longrightarrow D$ est définie lorsque $B = C$.

Si on considère maintenant deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : G \longrightarrow H$ telles que $f(E) \subset G$, on peut les "relier" en considérant l'application h définie par :

$h = g_{/f(E)} \circ \tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est l'application : $\tilde{f} : \begin{array}{l} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$

Pour ne pas surcharger inutilement les écritures, on dira souvent, en analyse surtout, que h est la composée de f et de g et on écrira $h = g \circ f$. Cet abus est nécessaire en terminale et, lorsqu'il est justifié une fois pour toutes, il ne saurait être choquant.

Exemples :

1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2+1 \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log x \end{array}$

On dit que $g \circ f$ est l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log(x^2+1) \end{array}$

.../...

2. $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad k : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin x \qquad x \longmapsto 1-x^2 \qquad x \longmapsto x^{-\frac{1}{2}}$

On dira de même que $k \circ g \circ f$ est l'application :

$$\begin{array}{l} \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x} \end{array}.$$

Lorsqu'on fait cet abus, il faut bien sûr faire attention aux théorèmes qui concernent la composition des applications. On ne peut plus dire laconiquement que "la composée de deux surjections est une surjection" (la composée de $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective).

$x \longmapsto x \qquad\qquad x \longmapsto x$

Le théorème considéré peut être énoncé de manière plus précise :

<u>Théorème</u> : Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow H$. Si f et g sont des surjections alors $g \circ f$ est une surjection.

II - <u>A PROPOS DES NOTATIONS SUR LES FONCTIONS.</u>

La notation suivante $f : E \longrightarrow F$, où $f(x)$ est explicité, est partout

$x \longmapsto f(x)$

utilisée pour désigner une application. Des professeurs l'emploient pour une fonction, notant par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; bien que cette notation, pour les fonctions,

$x \longmapsto \frac{1}{x-4}$

figure dans des sujets de baccalauréat, elle n'est pas admise par tous les professeurs. Elle n'est pas très heureuse car, sauf conventions autres, directement exprimées, x représente dans un tel cas l'élément générique de $\mathbb{R}$; il représente donc n'importe quel élément de $\mathbb{R}$ et l'écriture $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contient en quelque

$x \longmapsto \frac{1}{x-4}$

sorte l'écriture $\frac{1}{0}$.

Néanmoins, il ne s'agit pas ici de se lancer dans une controverse mathématiquement stérile sur le bon usage d'une notation, mais d'informer nos collègues d'un certain état de fait afin d'éviter une injustice éventuelle à des examens.

De plus, la partie importante de l'analyse faite dans le second cycle concerne les applications et passer de fonction à application ne nous paraît pas particulièrement instructif dans le second cycle : on pourrait "supprimer" les

.../...

fonctions, c'est-à-dire ne plus en parler à ce niveau-là.

III - A PROPOS DES DEFINITIONS DE CONTINUITE ET DE DERIVABILITE.

* Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. Pour parler de continuité de f en x_0, il faut imposer une condition préalable sur le point x_0, qui est l'une des trois suivantes :

1. $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad]\, x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha\, [\ \subset D$;
2. $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad]\, x_0 - \alpha,\ x_0\,] \subset D$ ou $[\, x_0,\ x_0 + \alpha\, [\ \subset D$;
3. $x_0 \in D$.

La condition sur x_0 étant choisie, on énonce alors des conditions plus directement relatives à la fonction pour qu'il y ait continuité en x_0.
Ces conditions peuvent être données sous diverses formes : avec des intervalles ouverts, ou fermés, avec des "ε" et des "α", ou en introduisant les filtres ; elles sont toutes mathématiquement équivalentes dans le sens suivant : l'une des conditions préalables 1, 2, 3 étant fixée, elles donneront toutes le même ensemble de fonctions continues en un point. Bien évidemment, les énoncés de ces conditions ne sont pas pédagogiquement comparables, et parler de filtre dans ce cadre précis (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) n'a guère de sens pédagogiquement.

Par contre, suivant le choix d'une des conditions préalables, on n'a pas le même ensemble de fonctions continues en x_0. Ainsi :
Exemple : Soit $D = [0, 1] \cup \{2\}$ et f une application quelconque de D dans $\mathbb{R}$.

Si on choisit la condition 1, on peut parler de continuité en tout point de $]0, 1[$; on ne peut en parler en 0, en 1 ou en 2.
La condition 2 offre plus de possibilités, puisqu'on peut parler de continuité en tout point de $[0, 1]$; la continuité en 0 sera alors équivalente à la continuité à droite en 0, la continuité en 1 à la continuité à gauche en 1.
Avec la condition 3, on peut parler de continuité en tout point de D ; toute application de D dans $\mathbb{R}$ sera continue en 2, (la continuité en 2 est dans ce cas une propriété du point vis-a-vis de D et non de l'application).

* Pour ce qui est de la dérivabilité en un point x_0, il faut de même imposer une condition à x_0. On a alors le choix entre les conditions 1 et 2 ci-dessus.
La troisième condition est à exclure ; elle donnerait lieu, si on l'envisageait, à une incohérence ; ainsi pour toute application de $[0, 1] \cup \{2\}$ dans $\mathbb{R}$, tout nombre réel serait un nombre dérivé en 2 avec la définition suivante :

..../...

f étant une application de D dans $\mathbb{R}$, ℓ est nombre dérivé de f en x_0, si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall x \in D \quad (0 < |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow \left(\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| < \varepsilon \right)$$

De plus l'interprétation graphique du nombre dérivé deviendrait absurde.

On peut imposer une condition plus compliquée :

<u>3.bis</u> : il existe une suite de points de D, non stationnaire, et qui converge vers x_0 (soit encore : x_0 est un point d'accumulation de D).

Sur un plan strictement mathématique, ici topologique, c'est la condition 3 pour la continuité, et 2 ou 3.bis pour la dérivabilité, qui sont justifiées.

La condition 3 pour la continuité peut être choquante graphiquement, lors d'une première présentation de la continuité, pour un domaine de la forme $[0, 1] \cup \{2\}$ (où il y a un "point isolé", ici 2) ; elle est pédagogiquement discutable si les élèves ne savent pas que $\{3\}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{N}$.
La condition 2 peut donc aussi bien être adoptée. Il faut éviter cependant de dire qu'une application de $[0, 1] \cup \{2\}$ est discontinue en 2 ; on peut très bien dire qu'on n'envisage pas la continuité ou la discontinuité d'une application en un tel point.

La condition 3.bis pour la dérivabilité est à exclure au niveau de l'enseignement secondaire au moins ; elle ne ferait que compliquer inutilement les choses.

IV - <u>CONTINUITE ET DERIVABILITE SUR UN INTERVALLE.</u>

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle fermé inclus dans D (éventuellement égal à D). Deux définitions peuvent être données de l'expression "f est continue sur I" ; à savoir :

i) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, où I est un intervalle fermé de D si : $\begin{array}{l} f_{/I} : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) \end{array}$ est continue en tout point de I ;

ii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Ces deux définitions ne sont pas équivalentes, ainsi :

<u>Exemple</u> : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Cette application est continue sur $[0, 1]$ au sens de la définition i) mais pas au sens de la définition ii) puisque f est dicontinue en 0.

.../...

Cependant, les deux définitions précédentes sont aussi valables l'une que l'autre. Il semble que la définition i) soit la plus utilisée ; en fait, le choix est arbitraire et il serait souhaitable que les élèves énoncent leur définition un jour d'examen.

V - LIMITES D'APPLICATIONS DERIVEES.

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$, et si l'application $f' : \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite lorsque x tend vers a, cela ne prouve pas que f soit dérivable en a ; il n'y a même aucune raison pour que f soit continue en a.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$x > 0 : \ f(x) = x + 1 , \quad x \leq 0 : f(x) = x - 1 ;$$

f est dérivable sauf en 0. L'application dérivée $f' : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 et f, discontinue en 0, ne peut à fortiori être dérivable en ce point.

On a cependant le théorème suivant :

Théorème : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1) f est dérivable partout sauf en un point a ;

2) f est continue en a ;

3) $\exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$.

Alors :

-1) f est dérivable en a ;

-2) $f'(a) = \ell$.

Démonstration du théorème : d'après la formule des accroissements finis,

$\forall h \in \mathbb{R}$, $\exists\, \theta_h \ 0 < \theta_h < 1 \qquad f(a + h) - f(a) = h\, f'(a + \theta_h h)$.

Ecrivons que f' tend vers ℓ lorsque x tend vers a :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \ \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha| \leq \eta \Rightarrow |f'(a + \alpha) - \ell| \leq \varepsilon$.

Choisissons un $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$; associons-lui le η déterminé par l'écriture ci-dessus. On a alors : $|h| \leq \eta \Longrightarrow |\theta_h h| \leq \eta$ puisque $0 < \theta_h < 1$. D'où

$\left|\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} - \ell\right| = |f'(a + \theta_h h) - \ell| \leq \varepsilon$. Ce qu'il fallait démontrer.

Le tableau suivant indique les cas qui peuvent se présenter, pour une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$.

.../...

$\lim\limits_{x \to a} f'(x) \longrightarrow$	existe dans $\mathbb{R}$	est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$	n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$	exemple : $a = 1$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto x$	impossible (voir exemple 1 ci-dessous).	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} (x^2 \log x) - 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 + x^2 \log x & x < 0 \end{cases}$ cas impossible si f continue en a.	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} x \log \lvert x \rvert & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x}(1 + \sin^2 \frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{-x}(1 + \sin^2 \frac{1}{x}) & x < 0 \end{cases}$
n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ cas impossible si f continue en a.	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$	exemple : $a = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Dans la pratique, on a souvent des applications de D dans $\mathbb{R}$, où D est un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Le théorème précédent se généralise, au prix de quelques complications de rédaction.

On a aussi un théorème un peu plus général et plus commode, dont la démonstration se calque sur celle déjà faite (ce théorème est utilisé dans la troisième colonne du tableau).

Théorème : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en tout point de $[a, b]$, dérivable en tout point de $]a, b[$.

Si : $\exists\, \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \ell = \lim_{x \to b} f'(x)$;

alors : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x \in [a,b[}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \ell$.

Ou bien sûr, la propriété analogue en a.

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R} - \{a\}$, telle que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$ soit égale à $+\infty$. Si f est continue en a, le théorème ci-dessus permet de dire que :

$$\lim_{\substack{h \to a \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty .$$

La fonction ne peut donc pas être dérivable en a.

Exemple 2. Soit $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{3 - x}$$

Elle n'admet pas de dérivée au point 3 puisque :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x \in [0, 3[}} - \frac{1}{2\sqrt{3 - x}} = -\infty.$$

VI - FONCTIONS CROISSANTES.

Le théorème suivant est parfois implicitement admis.

Théorème : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en tout point de $[a, b]$ et croissante strictement sur $]a, b[$. Alors elle est strictement croissante sur $[a, b]$.

Démonstration : il faut montrer que $\forall\, x \in]a, b[\quad f(a) < f(x) < f(b)$. Soit donc x dans $]a, b[$ et soit y un élément de $]x, b[$. Alors : $\forall\, z \in]y, b[\quad f(x) < f(y) < f(z)$

Or comme f est continue en b : $f(b) = \displaystyle\lim_{\substack{z \to b \\ z \in]y, b[}} f(z)$.

D'où : $f(y) \leq f(b)$ et finalement : $f(x) < f(y) \leq f(b)$, soit : $f(b) > f(x)$.

On démontre de même que : $\forall\, x \in]a, b[\quad f(a) < f(x)$.

A propos de la limite d'une fonction composée

L'objet de cet article est une mise en garde contre une utilisation trop abusive de la "composition des limites"

En effet, nous sommes souvent amenés, lors de l'évaluation de certaines limites, à faire un changement de variable et à appliquer, sous forme sous-jacente, un théorème de composition des limites.

→ Nous forçons les élèves à l'appliquer : cf. Bac. DIJON Serie C session 72, où le sujet commence ainsi : $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} \frac{x^n}{e^x}$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

→ Nous l'appliquons par exemple lors du théorème de dérivation de la fonction réciproque.

→ Le contre-exemple ci dessous nous montre qu'il faut parfois être vigilant :

$f(x) = x\, E(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} g(x) = 0$. En revanche, $g \circ f$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$, $x \neq 0$.

Il existe cependant quelques cas particuliers où l'on peut conclure

① Théorème 1

$f : D_f \to \mathbb{R}$ $\qquad g : D_g \to \mathbb{R}$ $\qquad g \circ f : D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$ avec $D_{g\circ f} = D_f \cap f^{-1}(D_g)$

Soit $\mathcal{B}$ base de filtre sur $D_{g \circ f}$, avec $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = y_0 \in \mathbb{R}$ et avec g continue en y_0

Alors $\lim\limits_{\mathcal{B}} g \circ f = g(y_0)$

Preuve :

g continue en y_0 soit $\forall W$ voisinage de $g(y_0)$ $\exists V$ voisinage de y_0 tel que $g[V \cap D_g] \subset W$

$\lim\limits_{\mathcal{B}} f = y_0$ soit $\forall V$ voisinage de y_0 $\exists B \in \mathcal{B}$ tel que $f(B) \subset V$

En prenant le V de la continuité, on obtient B tel que $f(B) \subset V$

c'est à dire $g \circ f(B) \subset W$ c.q.f.d.

Exemples d'utilisation

ⓐ Dérivation de la fonction réciproque

$f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle) $\qquad$ f continue strictement monotone et dérivable en x_0, avec $f'(x_0) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Preuve :

Posons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \text{ si } x \neq x_0 \\ 0 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$

f dérivable en x_0, donc φ continue en x_0

Soit $y \in f(I)$, $y \neq y_0$ $\qquad \varphi[f^{-1}(y)] = \dfrac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} - f'(x_0)$.

f^{-1} continue en y_0 donc $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ et $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \varphi \circ f^{-1}(y) = 0$ donne le résultat

⑥ Un théorème souvent utilisé et non justifié par les élèves

$\{f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle), f continue en $y_0 \in I\} \Leftrightarrow \forall (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers y_0 avec $y_n \in I$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(y_0)$

Remarquer que la condition suffisante n'a aucun rapport avec la composition des limites

② Extension du théorème 1

Mêmes hypothèses que le théorème 1 pour f avec $y_0 \in \overline{D_g}$ et g prolongeable par continuité en y_0

Alors $\lim\limits_{\mathcal{B}} g \circ f = \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} g(y)$. La démonstration est immédiate.

Le théorème est aussi valable lorsque $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} g(y) = +\infty$ ou $-\infty$

Exemples d'utilisation :

Tous les théorèmes classiques relatifs aux limites d'exponentielles à l'aide des fonctions logarithme, et inversement.

③ Pour éviter les contre-exemples du type de l'introduction, on peut énoncer

Théorème : Même hypothèse que le th. 1 pour f, et $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} g(y) = \ell$

avec $\mathcal{B}$ vérifiant la propriété suivante :

$\exists B \in \mathcal{B}$ tel que $B \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$

Alors $\lim\limits_{\mathcal{B}} g \circ f = \ell$

Conclusion

D'un point de vue pédagogique, que faut-il dire au niveau T_C ou T_D ?

→ Les partisans du "silence" préfèrent masquer totalement le problème en s'appuyant sur le fait que les élèves ont des points bien plus simples à comprendre et à approfondir.

→ Les partisans de la "sagesse" souhaitent faire découvrir ces quelques finesses par des contre-exemples et, au besoin, faire démontrer en exercice le théorème 1 ; les élèves en ont parfois besoin.

MONLIBERT

GRP$_2$ REIMS JUIN 1976

A. P. M. E. P.

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.) a pensé aider les instituteurs et les enseignants de l'enseignement secondaire en publiant une série de brochures que nous vous présentons ci-dessous :

MOTS : Ces fascicules - il en paraît un chaque année - contiennent des réflexions sur quelques mots-clés que l'on rencontre couramment dans les manuels de mathématique de l'école élémentaire.

Par exemple : Egalité, Couple, Nombre naturel, Nombre décimal, Fraction, Représentations graphiques, Partitions équivalence, Division, Preuves, Opérations...

ELEM-MATH I : est consacré à une étude d'exercices réalisés dans des classes (C.M. - 6e - 5e) et à une réflexion sur l'enseignement par "noyaux-thèmes" dans l'enseignement élémentaire.

ELEM-MATH 2 : rassemble des idées et des suggestions centrées sur la multiplication des nombres naturels. Elles sont le fruit de la réflexion menée dans les Ecoles Normales et les I.R.E.M. (en particulier celui de Bordeaux).
(Du ours élémentaire à la 6e).

SAVOIR MINIMUM EN FIN DE 3e : cette brochure se veut une tentative contre la surcharge des programmes de mathématique du premier cycle. Elle se présente sous la forme de rubriques, dont chacune porte le nom d'un thème auquel elle se rapporte, et précise :

- les mots ou expressions - les notations
- les énoncés que l'élève doit connaître et savoir utiliser
- les savoir-faire, habitudes, comportements... que nous pensons pouvoir exiger des élèves.

HASARDONS-NOUS : se propose d'apporter un outil de réflexion et une aide pour l'enseignement des probabilités. Elle doit donc intéresser à la fois les maîtres de l'enseignement élémentaire, ceux du premier cycle et ceux du second degré.

Pour commander ces brochures, adressez-vous à l'un des responsables départementaux de l'A. P. M. E. P. (liste ci-contre).