MATHEMATIQUES 3EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

IREM DE REIMS

3

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES

N° 7

39. EQUATIONS

40. INEQUATIONS

41. THEOREME DE THALES

4 . CALCUL LITTERAL

43. RACINES CARREES

44. VECTEURS - TRANSLATIONS

45. SINUS ET TANGENTE

46. STATISTIQUES EN TROISIEME

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY
ROBERT CHAPOT
BERNARD CHARLAIX
DOMINIQUE ANTOINE
JEAN CLAUDE DUPERRET
GERALD GENTHON
GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES EN 3ème

AU COLLEGE ALBERT CAMUS

Ce fascicule 7 vous propose les huit premiers dossiers que nous avons faits avec nos élèves dans le cadre de l'expérimentation des nouveaux programmes de 3ème.

Il arrive avec un mois de retard. Ce retard traduit malheureusement notre difficulté à tenir la progression que nous nous sommes fixés, retard cumulé sur les quatre années de notre expérimentation des nouveaus programmes. Cette difficulté à concilier la pratique pédagogique proposée par ces nouveaux programmes (activité de l'élève) et le temps d'apprentissage dont nous disposons chaque année devra être une piste de réflexion dans les années à venir.

De plus, cette année, nous sommes confrontés au problème suivant : nos élèves iront l'année prochaine en seconde, et seront confrontés à l'ensemble des autres élèves ayant vécu les anciens programmes de 3ème. Bien que les contenus soient relativement prêts, nous avons tendance à aller au delà des exigences de ce nouveau programme dans certains domaines, de manière à éviter une trope grande déstabilisation l'année prochaine. Ceci alourdit un peu plus le travail demandé à nos élèves.

Pour la démarche d'utilisation de nos dossiers, nous avons gardé celle des années antérieures (voir fascicule 6). Nous travaillons d'autre part dans le même esprit qu'en 6ème, 5ème, 4ème (activité et institutionnalisation) en laissant le maximum de prise en charge de son apprentissage à l'élève.

Voici une analyse succinte de ces dossiers :

39 et 40 : Equations et inéquations

Ces dossiers initialement prévus en 4ème ont été en réalité faits en début de 3ème (ce qui explique en particulier le paragraphe "Inégalité et multiplication par un nombre négatif" dans le dossier 40). Nous avons surtout insisté sue le fait que les équations et inéquations sont des outils qui servent à résoudre des problèmes (conformément à l'esprit des nouveaux programmes). Pour les "gammes", nous n'en avons mis que quelques unes dans ces dossiers, mais nous en avons fait beaucoup plus avec nos élèves.

41 : Théorème de Thalès

Nous sommes partis des acquis des élèves sur la proportionnalité pour introduire le théorème de Thalès, l'idée essentielle étant de leur faire comprendre le lien entre parallélisme et proportionnalité des longueurs dans certaines configurations. Nous nous sommes limités au triangle, conformément au programme. Nous avons noté une très nette amélioration de la compréhension de ce théorème par rapport aux années précédentes (ces tests et contrôle ont été très bien réussis).

42 : Calcul littéral

L'objectif essentiel de ce dossier étant l'acquisition des techniques de base de développement et factorisation dans les cas de double distributivité et d'égalités remarquables. Bien qu'essayant de donner un support géométrique chaque fois que c'était possible, ce dossier reste très classique !

43 : Racines carrées

En partant de la connaissance de la racine carrée acquise en 4ème avec le théorème de Pythagore, nous avons mis en place les différentes techniques de calcul sur les racines carrées proposées par le programme. Il nous est arrivé d'utiliser de "grands nombres", ceci dans le seul but de familiariser au maximum les élèves dans l'utilisation de leur calculatrice. L'organigramme de la p. 43-10 ($\sqrt{2}$ ne peut d'écrire sous forme d'une fraction) n'a été proposé qu'à quelques élèves en avance dans leur travail. Certains y sont arrivés sans aide.

44 : Vecteurs - translations

Ce dossier a pour objectifs la composition des translations, la somme des vecteurs, et la préparation au travail dans un repère. Il est incomplet : la fin sera porposée dans le fascicule 8. Il s'appuie sur les techniques d'approche globale des transformations vues dans les années précédentes. Il est à noter que le vecteur a un sens "physique" pour les élèves (direction, sens, longueur) et que le dossier reste un moyen de vérification systématique pour les élèves.

45 : Sinus - tangente ; angle au centre et angle inscrit

Ce dossier s'appuie sur la connaissance du cosinus vu en 4ème, connaissance bien maîtrisée par la plupart des élèves. Le sinus et la tangente sont introduits dans le triangle rectangle. De nombreuses activités de mesure permettent de familiariser les élèves à ces nouveaux outils. Le nombre important d'activités et d'exercices nous permet d'individualiser au maximum le travail des élèves. L'angle au centre et l'angle inscrit ne donnent lieu qu'à une approche (pas d'approfondissement sur ce thème). On constate que les élèves sont à l'aise avec les angles, et l'utilisation du cosinus, sinus et tangente (par rapport aux anciens programmes).

46 : Statistiques en 3ème

Ce dossier se compose de trois parties :

* la moyenne et la moyenne pondérée (seule compétence exigible en 3ème)
* la médiane (nous avons utilisé les connaissances de 4ème (effectifs cumulés) et le théorème de Thalès pour son calcul)
* des situations globales permettant de revoir l'ensemble des outils mis en place en statistique en 1er cycle

Nous avons insisté sur l'utilisation de la calculatrice, et la comparaison entre la médiane et la moyenne. D'une manière générale, le modèle statistique plait aux élèves et ils réussissent très bien.

Nous finirons ce programme de 3ème avec huit dossiers (que nous exploitons actuellement avec nos élèves) :

47 : Situations affines
48 : Equation de droite
49 : Application affine
50 : Distance dans le plan. Applications
51 : Pyramide et cône
52 : Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
53 : Factorisation : application à certaines équations
Inéquation du premier degré à une inconnue
54 : Composition de certaines transformations

Ces huit dossiers seront regroupés dans le fascicule 8, que nous espérons mettre en forme définitivement pour Juin 89.

Nous continuons à remercier ceux qui nous aident dans notre travail :

* L'équipe administrative du Collège, pour les moyens et matériels,
* Le Maire de la Chapelle Saint Luc, qui prend en charge la reproduction des documents pour les élèves,
* Monsieur ORTHEAU, notre IPR, pour l'intérêt qu'il porte à notre travail,
* L'IREM de Reims qui a été au départ de notre réflexion et nous a permis de la confronter avec d'autres équipes et son directeur Monsieur TURCO,
* Madame Colette THIERUS qui a pris en charge les problèmes matériels de la publication et de la diffusion de ces documents.

FASCICULES IREM REIMS

Expérimentation des nouveaux programmes

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES

N°	DOSSIERS	NIVEAU	DATE PARUTION
1	Tests avant formation + grille de capacité 1 - Nombres et écritures, opérations, problèmes 2 - Pavages et aires. Introduction à la géométrie plane et à la symétrie axiale 3 - Repérage sur une demi-droite, dans un quart de plan 4 - Représentation et organisation de données. Introduction des fractions 5 - Proportionnalité 6 - Parallélépipède rectangle et cube. Géométrie dans l'espace 6 bis - Calculatrice	6ème	Disponible
2	7 - Construire en géométrie plane 8 - Symétrie orthogonale (ou axiale ?) 9 - Problèmes et équations 10 - Angles et triangles 11 - Repérage sur une droite. Introduction des relatifs 12 - Repérage dans le plan	6ème 5ème	Disponible
3	13 - Addition dans les relatifs 14 - Fraction (simplification, addition, multiplication, division) Applications 14 bis - L'espace et l'art moderne 15 - Géométrie dans l'espace (prisme droit et cylindre de révolution) 16 - Soustraction dans les relatifs. Simplification d'écriture 17 - Constructions et transformations en géométrie plane Symétrie centrale	5ème	Disponible
4	18 - Distributivité. Calcul numérique et littéral 19 - Proportionnalité 20 - Pourcentages 21 - Equations 22 - Echelles 23 - Aires et volumes C1 - Contrôle de certains acquis de 5ème	5ème 4ème	Disponible

Nº	DOSSIERS	NIVEAU	DATE PARUTION
5	24 - Projection. Initiation à la démonstration 25 - Multiplication et division dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Distributivité. Factorisations simples 26 - Projection orthogonale. Cosinus 27 - Addition et soustraction dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Double distributivité. Identités remarquables 28 - Application linéaire (1) 29 - Translations, vecteurs et parallélogrammes 30 - Indices	4ème	Disponible
6	31 - Puissances entières d'un nombre relatif 32 - Le triangle rectangle 33 - Puissance de 10 34 - Application linéaire 2 35 - La sphère 36 - Statistiques en 4ème 37 - Les rotations 38 - Problèmes de plus courte distance	4ème	Disponible
7	39 - Equations du 1er degré à 1 inconnue 40 - Inéquations du 1er degré à 1 inconnue 41 - Théorème de Thalès. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur une figure plane 42 - Calcul algébrique : distributivité, double distributivité. Mise en facteurs. Produits remarquables 43 - Racines carrées 44 - Vecteur et translation. Composition et addition des vecteurs. Travail en repère 45 - Application affine 46 - Angle inscrit ; trigonométrie	3ème	Disponible
8	47 - Situations affines 48 - Equation de droite 49 - Application affine 50 - Distance dans le plan. Applications 51 - Pyramide et cône 52 - Système de deux équations du premier degré à deux inconnues 53 - Factorisation : application à certaines équations Inéquation du premier degré à une inconnue 54 - Composition de certaines transformations	3ème	Juin 89

Commande à adresser à : IREM de Reims

Moulin de la Housse

BP 347

51062 REIMS CEDEX

Préciser : n° des fascicules commandés, le nombre de fascicules.

Prix du fascicule au 01.01.89 : 30 F

Donner en plus de votre adresse personnelle, votre adresse "professionnelle"

MATHEMATIQUES 3 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 39

TITRE: EQUATIONS

3

PREREQUIS

RESOUDRE :

$a + \ldots = b$

$a \times \ldots = b$

OBJECTIFS

- MANIPULER DES FORMULES
- RESOUDRE DES PROBLEMES ABOUTISSANT A DES EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE
- APPRENTISSAGE DE LA TECHNIQUE DE RESOLUTION

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N°39

1 / QUELQUES PROBLEMES A RESOUDRE

FORMULE 1

Recopie puis complète les trois égalités des trois exercices suivants :

(a)	En 1985 un dollar coûtait 9F. Combien coûtait en 1985 l'achat de 50 dollars ? ... $\boxed{}$ ... = ...	En 1987 un dollar coûtait 5,92F. Combien coûtait en 1987 l'achat de 50 dollars ? ... $\boxed{}$ ... = ...	En l'an 2 000 un dollar coûtera xF. Combien coûtera en l'an 2000 l'achat de 50 dollars ? ... $\boxed{}$ ... = ...
(b)	Le prix d'un kilo de rôti de porc est de 45F. Monsieur X en achète 3kg. Quelle est sa dépense ? ... $\boxed{}$ ... = ...	Le prix d'un kilo de rôti de porc est de 42,35F. Monsieur X en achète 0,8kg. Quelle est sa dépense ? ... $\boxed{}$ ... = ...	Le prix d'un kilo de rôti de porc est de xF. Monsieur X en achète 2kg. Quelle est sa dépense ? ... $\boxed{}$ ... = ...
(c)	Le son parcourt 340m par seconde. Quelle distance parcourt-il en 6s ? ... $\boxed{}$ ... = ...	Le son parcourt 340m par seconde. Quelle distance parcourt-il en 0,07s ? ... $\boxed{}$ ... = ...	Le son parcourt 340m par seconde. Quelle distance parcourt-il en t secondes ? ... $\boxed{}$ ... = ...

Problème 2

(a) Une brique, posée sur un plateau d'une balance, est équilibrée par une demi-brique plus un kilogramme posés sur l'autre plateau. Combien pèse la demi-brique ? Combien pèse la brique ?

(b) Une brique est équilibrée par les trois-quarts d'une brique plus un kilogramme. Combien pèse cette brique ?

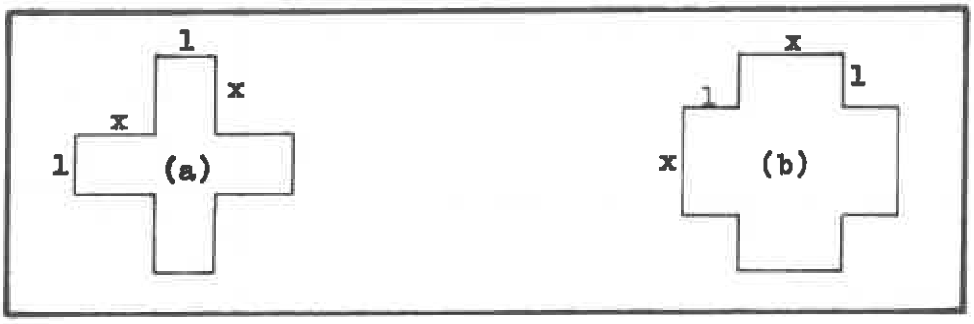
(c) Même question pour une brique équilibrée par les trois-quarts d'une brique plus les trois quarts d'un kilogramme.

Problème 3

Etudions le périmètre d'un rectangle dont un côté fixe mesure 7 cm et un autre x.
(a) Trouve x pour que le périmètre soit égal à 28. De quoi s'agit-il ?
(b) Trouve x pour que le périmètre soit égal à 17.
(c) Trouve x pour que le périmètre soit égal à 37.

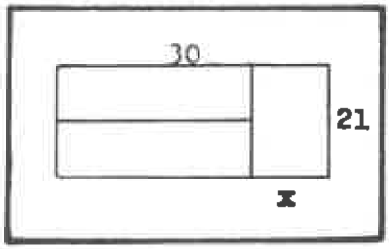
Problème 4

Pour chacune de ces deux croix (a) et (b) :

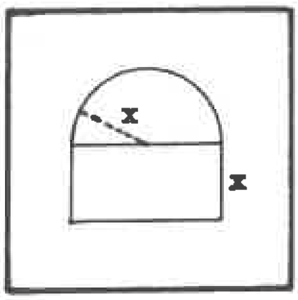


trouve x : - pour que le périmètre de la croix soit égal à 15cm.
- pour que l'aire de la croix soit égale à $9cm^2$.

(c) Trouve x pour que les trois rectangles aient le même périmètre.



(d)



Trouve x pour que le périmètre du demi-cercle soit égal au périmètre du "demi-carré".

DOSSIER N° 39
EQUATIONS

2/ MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME

Choisis parmi ces sept équations celle qui permettra de résoudre chacun de ces six problèmes.

Attention, il y a une équation de trop !

(a) $\frac{40}{2}(x + 6) = 2 \cdot 40 \cdot x$ (b) $\frac{2 \cdot x}{6} = x + 40$

(c) $x(40 + 2) = (x + 6)\,40$ (d) $2x = x + 40$

(e) $2x + 40 = 6x$ (f) $\frac{x + 40}{6} = 2x$

(g) $2(x + 6) = 40 + x$

Problème 1 : Un père a 40 ans et son fils 6 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de l'âge du fils ?

Problème 2 : Virginie dit à Paul : "Trouve le nombre qui, si tu lui ajoutes 40 et divises le résultat par 6, est égal à son double.".

Problème 3 : Les élèves des six classes de sixième du collège se rendent à un festival de musique. Chaque élève doit verser la somme de 40 F. Le jour de la représentation, 6 élèves sont absents et chaque élève présent doit payer 2 F de plus que prévu. Combien d'élèves sont présents au festival ?

Problème 4 : Je sors d'un sachet 8 billes de même catégorie. Deux de ces billes et 40 grammes sont équilibrés par six billes. Quelle est la masse d'une de ces billes ?

Problème 5 : Un rectangle a une longueur de 40 cm. Si on divise sa longueur par 2, et si on augmente sa largeur de 6, alors son aire double. Quelle est sa largeur ?

Problème 6 : En six ans, une entreprise voit son effectif doublé avec un personnel supplémentaire de 40 personnes. Quel était l'effectif il y a six ans ?

3/ A LA RECHERCHE DE LA SOLUTION

(1) Essayons de résoudre le problème :

"Un père a 40 ans et son fils 6 ans.
Dans combien d'années l'âge du père
sera-t-il le double de l'âge du fils ?"

(a) Essaie avec 2 ; 8 ; 10 ; 12 ; 18 ; 20 ; 22 ; 28 ; 30 ; ...

(b) L'équation est : $2(x+6) = 40 + x$

Pour résoudre cette équation on écrit plus simplement :

$$2x + 12 = 40 + x$$
$$x + 12 = 40$$
$$x = 40 - 12$$
$$x = 28$$

(c) Que se passe-t-il si tu remplaces x par 28 dans chacune de ces cinq équations ?

(d) Y-a-t-il d'autres solutions que 28 ?

(e) Recopie et complète la phrase : "L'équation $2(x+6) = 40+x$ a pour unique solution ...".

(2) Justifie les réponses affirmatives aux questions suivantes :

1 est-il solution de l'équation $2x-1 = 0$? Et 2 ? Et 0 ?

-1 est-il solution de l'équation $-2x+1 = 0$? Et $\frac{1}{2}$? Et 0 ?

3 est-il solution de l'équation $2x+1 = 3$? Et 2 ? Et 1 ?

3 est-il solution de l'équation $x^2+x-6 = 0$ Et 2 Et 1 ?

1 est-il solution de l'équation $\frac{5}{3}x = 0$? Et $\frac{3}{5}$? Et 0 ?

0 est-il solution de l'équation $0x = 8$? Et -8 ? Et $\frac{1}{8}$?

4/ DEUX REGLES POUR T'AIDER A RESOUDRE DES EQUATIONS

Il est question d'équilibre !

1) Egalité et addition

Si $a = b$ Alors $a + c = b + c$

Si $a + c = b + c$ Alors $a = b$

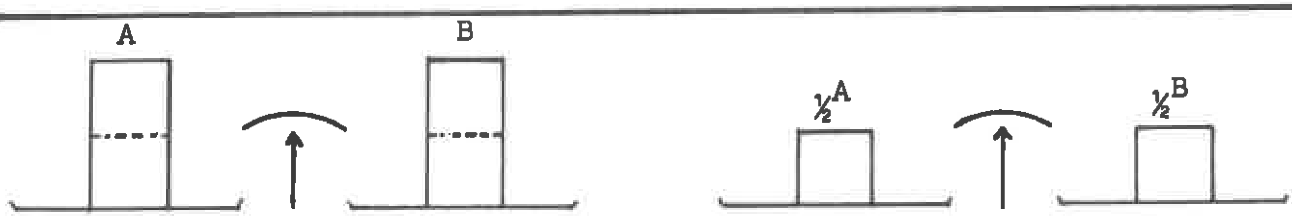
Règle 1

Si j'ajoute (ou si retranche) un même nombre aux deux membres d'une égalité, alors, j'obtiens une nouvelle égalité.

2) Egalité et multiplication

Si $a = b$ Alors $3 \times a = 3 \times b$

Si $a = b$ Alors $c \times a = c \times b$



Si $a = b$ Alors $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$

Si $a = b$ Alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Règle 2

Si je multiplie (ou si je divise) par un même nombre (non nul) les

5/ RESOLUTION D'UNE EQUATION

(a) Justifie les étapes de l'organigramme :

$$\boxed{2\,(x + 6) = 40 + x}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{2x + 12 = 40 + x}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x + 12 = 40}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x = 40 - 12}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x = 28}$$

(b) Vérification éventuelle

On peut vérifier que le nombre trouvé convient bien au probléme posé au départ : "Trouver le nombre x qui vérifie l'équation : $2(x+6) = 40+x$". Pour $x = 28$ on a :

- calcul du premier terme de l'équation :

  $$2\,(28 + 6) = 2 \cdot 34 = 68$$

- calcul du deuxième terme de l'équation :

  $$40 + 28 = 68$$

(c) Recopie et complète la phrase suivante :

"L'équation $2(x+6) = 40+x$ a pour unique solution ..."

6/ UN SKETCH POUR RESOUDRE UNE EQUATION

ACTEUR	ROLE
Maître du jeu	Il décide du tour de rôle des intervenants et leur donne la parole.
Cibleur	Il désigne le terme qu'il choisit de neutraliser.
Yaou	Il cite l'opposé du terme à neutraliser. Il ajoute cet opposé aux deux membres de l'équation.
Jmoulti	Il cite l'inverse du terme à neutraliser. Il multiplie les deux membres de l'équation par cet inverse.
Calculateur	Il calcule de façon à simplifier les membres de l'équation.

MISE EN SCENE

- Le professeur propose une équation à résoudre au tableau.
- Cinq volontaires viennent au tableau après avoir choisi leur rôle.
- Le sketch se déroule avec les élèves de la classe comme spectateurs. Ils n'interviennent que si une erreur est commise par un acteur.
- A la fin du sketch, les acteurs puis les spectateurs commentent la résolution.

ENSUITE, après deux ou trois résolutions d'équations au tableau, les élèves peuvent s'entraîner par groupes de cinq.

7/ POUR S'ENTRAINER

Résous les équations suivantes :

$7x = 91$ | $13x = -91$ | $\frac{x}{5} = 15$

$-\frac{x}{7} = 14$ | $x+17 = 34$ | $-x-17 = -34$

$x-18 = -27$ | $-18 = 27-x$ | $6x+7 = 0$

$\frac{5}{3}x = 0$ | $8+11x = 2+6x$ | $11x-8 = 6x-2$

$x-2 = 4x-11$ | $11-4x = 2-x$ | $2x+ 2 = 0$

$2x+ 2\ x = 4$ | $2x+3,14 = 1$ | $2x+3,14x = 1$

$2x + 5 = 4x + 5$ | $4x - 5 = 8x + 13$ | $3 - x = 2x - \frac{1}{5}$

$0,3x - 3,5 = 2 + 1,5x - 5,5$ | $x - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}x - \frac{1}{2}$

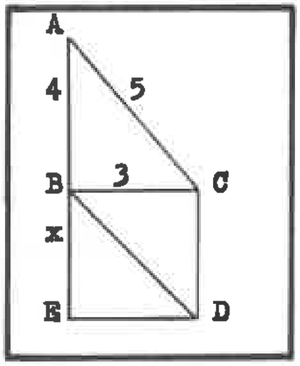
$\frac{5}{7}x = 1$ | $\frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = \frac{4}{12}x + \frac{1}{3}$ | $-\frac{x+1}{3} = 0$

$-\frac{x+2}{3} = 1$ | $\frac{5x-3}{7} = \frac{2x-5}{4}$ | $3(7-x)+9(x-3) = 3(2x-2)$

$\frac{x}{4}-4 = \frac{x}{8}-8$ | $\frac{x}{10}+10 = \frac{x}{5}+5$ | $10-2x = -2(x-5)$

8/ MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME ET RESOLUTION

1) On considère un carré de côté x. Si on augmente un côté de 5m et si on diminue l'autre de 3m, on obtient un rectangle dont l'aire est la même que celle du carré. Trouve x.



2) (a) Trouve x pour que le triangle ABC et le rectangle BCDE aient la même aire.

(b) Quel est alors le périmètre du trapèze ABDC ?

3) Un terrain rectangulaire a pour dimensions 80m et 55m. On augmente la longueur de 8m. De combien doit-on diminuer la largeur pour que l'aire de ce terrain ne change pas ?

4) La largeur et la longueur d'une table rectangulaire mesurent ensemble 1,5m. Sachant que la largeur est égale aux $\frac{2}{3}$ de la longueur, trouve ces deux dimensions de la table.

5) Un fleuriste vend des roses 13F pièce.

Lors du transport 6 roses sont abîmées.

S'il vend ce qui reste à 15F pièce, il gagne la même somme.

Combien avait-il emporté de roses ?

6) Un examen comporte quatre épreuves.

Aux trois premières, un candidat obtient les notes : 5 ; 14 et 8.

Quelle note lui faudra-t-il obtenir à la quatrième épreuve pour avoir la moyenne générale de 10 ?

7) La somme de deux nombres consécutifs est 57.

Quels sont ces nombres ?

8) Même question pour 68.

9) La somme de trois nombres pairs consécutifs est 72.

Quels sont ces nombres ?

10) Trouve quatre nombre entiers consécutifs dont la somme est 186.

11) Trois personnes ont ensemble 1 580F.

La deuxième a 150F de plus que la première.

La troisième a 70F de moins que la deuxième.

Quelle est la part de la première, puis celle des deux autres.

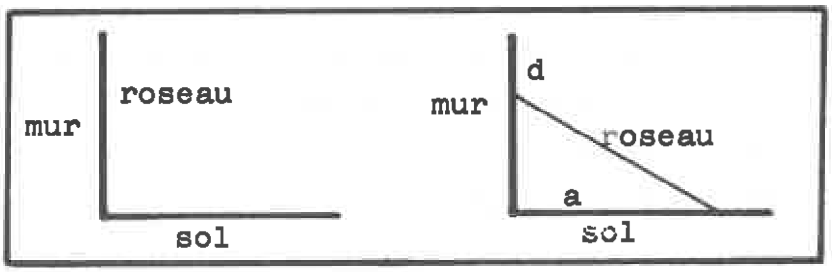
12) Une citerne est remplie au $\frac{1}{6}$ de sa contenance.

On y ajoute 240 litres. Elle est alors remplie au $\frac{2}{3}$.

Quelle est la contenance totale de cette citerne ?

13) VOICI UN PROBLEME CHINOIS :

(a) Un roseau placé verticalement contre un mur.
S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9 coudées.
Qu'est le roseau, qu'est le mur ?



(b) VOICI LA REGLE qui sert à le résoudre :
Attendu que tu ne les connais pas,
3 fois 3 : 9 ;
9 fois 9 : 81.
Tu ajouteras 9 à 81 : 90.
Tu multiplieras 90 par ½ : 45.
L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.
Tu multiplieras $\frac{1}{3}$ par 45 : 15, le roseau...

(c) 1) Vérifie ces calculs puis donne la hauteur de l'arbre.
2) Appelle a l'écartement entre le pied de l'arbre et le mur, et d la hauteur dont l'arbre descend.
Ecris la formule donnant la hauteur h du mur.
3) Retrouve cette formule en écrivant l'équation (à l'aide du théorème de Pythagore) puis en la résolvant.
4) Quelle est la hauteur du mur pour chaque cas :
(1) a = 9 et d = 6
(2) a = 8 et d = 4
(3) a = 10 et d = 5

14) Diophante, mathématicien grec de l'école d'Alexandrie, a vécu probablement aux alentours de l'an 250.
Son épitaphe nous renseigne sur la durée de sa vie :
"Sa jeunesse en occupa la sixième partie ; puis sa joue se couvrit d'un fin duvet pendant la douzième partie. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre épouse et, cinq ans plus tard, il eut un bel enfant qui vécut exactement deux fois moins longtemps que son père. Diophante lui survécut pendant quatre années."
De tout ceci, déduis son âge.

15) Un marchand paie une taxe sur certaines denrées dans trois endroits différents.
La première fois il donne $\frac{1}{3}$ de son argent ; la deuxième fois $\frac{1}{4}$ de ce qui lui reste ; la troisième fois $\frac{1}{3}$ du reste.
Il a payé au total 24 pièces.
Combien de pièces avait-il au départ ?

CONTROLE N° 39

Exercice 1 Résous les équations suivantes :

$x - 18 = -19$; $13x = 91$; $11x - 8 = 6x - 2$;

$\frac{3}{4}x + 1 = \frac{5}{2} + 7$; $2x - \pi = -5$.

Exercice 2 Justifie les réponses affirmatives aux questions siuvantes :

1) 1 est-il solution de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$?
   Et 2 ?
2) 3 est-il solution de l'équation $2x + 1 = 3$?
   Et 1 ?
3) Peux-tu écrire une équation qui ait 10 pour solution ?
4) Peux-tu écrire une équation qui n'ait pas de solution ?

Exercice 3 Indique les solutions qui te semblent convenir.
Le signe * signifie qu'il n'y a pas de solution.

1) La solution de l'équation $2x-1 = 0$ est	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	*
2) La solution de l'équation $-2x+1 = 0$ est	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	*	2
3) La solution de l'équation $3+x = 5$ est	$\frac{5}{3}$	-2	5	2	$\frac{3}{5}$	*
4) La solution de l'équation $5x = 8$ est	3	-3	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{8}{5}$
5) La solution de l'équation $\frac{4}{3}x = 0$ est	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	*	1	$-\frac{4}{3}$
6) La solution de l'équation $\frac{4}{3}x = 1$ est	*	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$
7) La solution de l'équation $0x = 27$ est	0	$\frac{1}{0}$	*	1	27	$\frac{1}{27}$

Exercice 4 Indique ton choix (a), (b) ou (c) sans le justifier.

Un père a 40 ans et son fils a 6 ans.
Pour trouver dans combien d'années l'âge du père sera le triple de l'âge du fils :

(a) je pose l'équation avec x l'âge du père : $x = 40 = 2 . 6$
(b) je pose l'équation avec x le nombre d'années en plus : $40+x=2(x+6)$
(c) il n'y a pas de solution

Exercice 5 Trois cousins ont 32, 20 et 6 ans.

Dans combien d'années, l'âge de l'aîné sera-t-il égal à la somme des âges des deux autres ?

Exerice 6 Quelle est la fortune d'un homme qui a multiplié une dette de 1 000 francs par 500 francs ?

(a) 500 000 francs(b)5 millions de francs(c) pas réponse possible

MATHEMATIQUES 3 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 40

TITRE: INEQUATIONS

3

PREREQUIS

RESOUDRE DES EQUATIONS

COMPARER DES NOMBRES RELATIFS

OBJECTIFS

- MANIPULER DES FORMULES
- ENCADRER
- RESOUDRE DES PROBLEMES ABOUTISSANT A DES INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE
- REPRESENTER SUR UN AXE LES SOLUTIONS

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

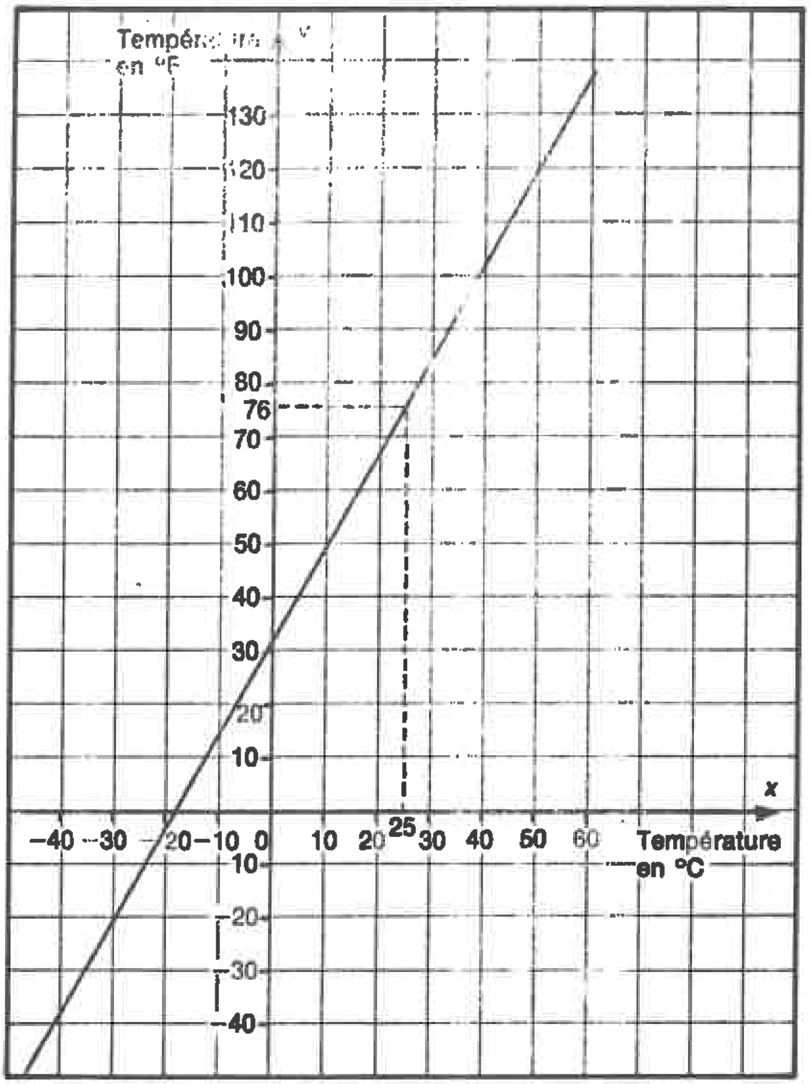
DOSSIER N° 40

INEQUATIONS

1 / QUELQUES ACTIVITES

ACTIVITE 1

Aux USA, la température se mesure en degrés Fahrenheit (noté °F).
En France, elle se mesure en degrés Celsius (noté °C)
Cette courbe permet de transcrire des degrés Celsius (en abscisse) en degrés Fahrenheit (en ordonnée) et inversement.
Par exemple : 25°C correspondent à 76°F.



A l'aide de $<$, $>$, $=$, compare :

les deux températures en degrés Celsius : 25 ... 10

les températures correspondantes en °F : 76 ... ..

Complète le tableau :

°C	25 > 10	50 ... 20	... ...
°F	76...50	.. ..	... ...

ACTIVITE 2

Un club de vidéo loue des cassettes. Il propose les deux tarifs suivants : Tarif A : 6F la cassette ; Tarif B : 4F la cassette et un forfait de 7F.

Complète le tableau :

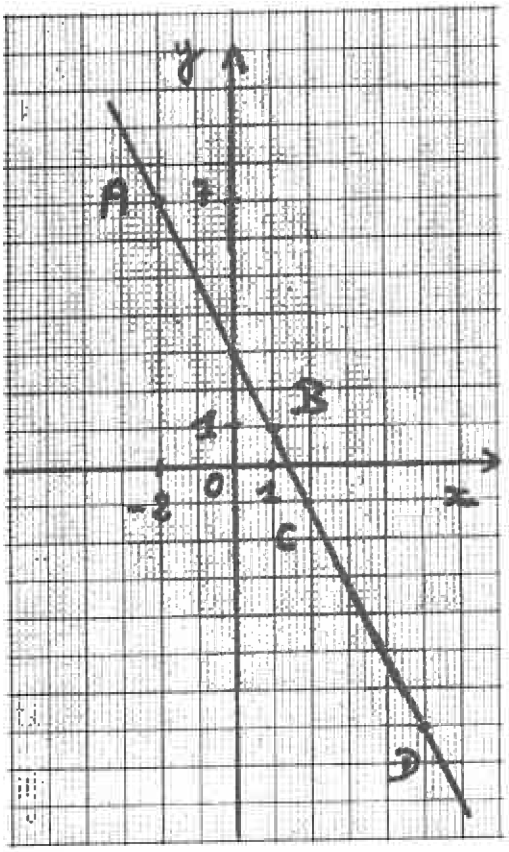
Nombre de cassettes	1	2	3	4	5	6	...
Tarif A	6	12					
Tarif B	11						

Compare le prix de la location d'une cassette à celui de 3 cassettes :

- pour le tarif A ;
- pour le tarif B.

Même question pour 2 et 5 cassettes ; puis, 3 et 11 cassettes.

ACTIVITE 3



a) Quelles sont les coordonnées des points A et B.

Compare les abscisses des points A et B.

Compare les ordonnées des points A et B.

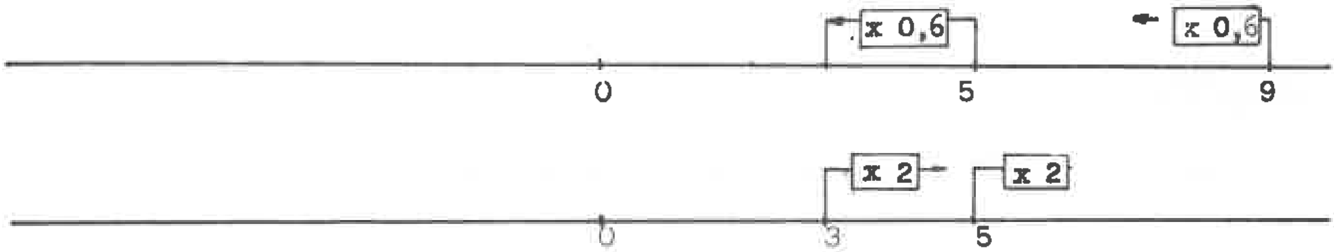
Que remarques-tu ?

b) Mêmes questions pour les points C et D.

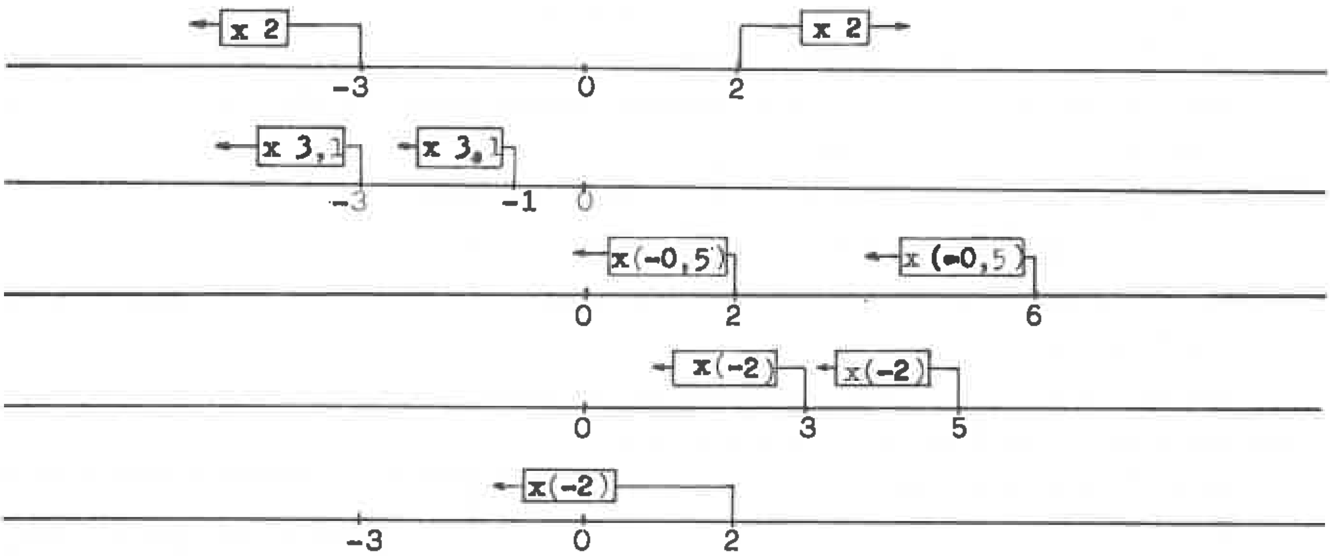
c) Mêmes questions pour les points A et C.

ACTIVITE 4

Recopie et complète les dessins suivants :



Que se passerait-il avec (-5), (-9) et $\boxed{\text{x } 0{,}6}$; puis (-2), (-5) et x 2..
Que remarques-tu ?



Recopie et complète ce tableau :

a < b	x c	ac ? bc
2 < 6	x 0,5	1 < 3
.....	.....	....
1,82 < 1,84	x(-0,7)	
$-\frac{7}{3} < \frac{2}{5}$	x 3	
-30 < -27	$x(-\frac{5}{3})$	
R < R'	x 2π	
L < 7	x 4	

Recopie et complète les phrases suivantes précisant les règles utilisées :

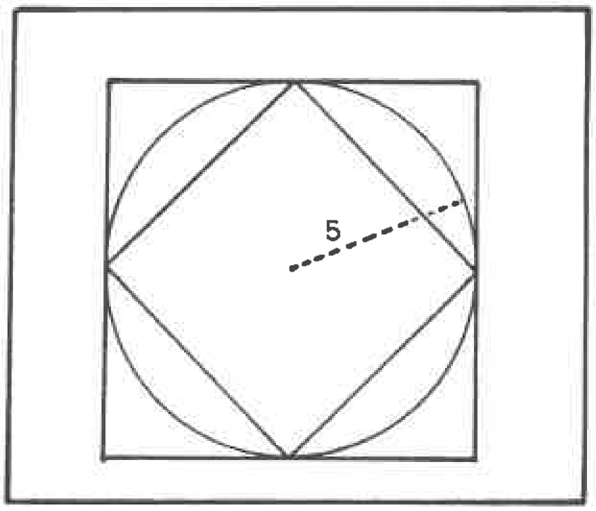
"Si je multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, Alors j'obtiens ..."

"Si je multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, Alors j'obtiens ..."

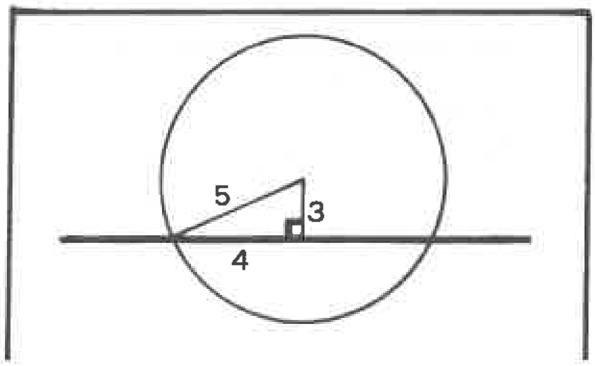
Activité 5

Traduis ces problèmes par des inéquations.

1) Le côté d'un carré mesure plus de 2,5cm. Que dire de son périmètre ?
2) La largeur d'un rectangle varie entre 3,5cm et 3,8cm. Sa longueur vaut 7,1cm. Que peux-tu dire de son périmètre ?
3) Le côté d'un carré mesure entre 2,5cm et 7cm. Que dire de son périmètre ?
4) Sur le marché, le prix des pommes varie entre 3,70F et 9,40F le kilo. Combien peuvent coûter 3 kg ?
5) Un pneu neuf a un diamètre extérieur de 60cm.
   L'usure maximum tolérée est de 5mm de gomme.
   Entre quelles limites varient le diamètre du pneu, le rayon, la circonférence ?
   Quelle est la distance parcourue en 100 000 tours de roue ?
6) Reproduis la figure ci-contre aux dimensions données.
   a) Déduis-en un encadrement du périmètre du cercle.
   b) Tu viens d'encadrer le périmètre d'un cercle par le périmètre de deux carrés.
      Construis un encadrement plus fin (mesure avec soin sur ton dessin).



7) Voici une droite et un cercle.
   Que peux-tu dire du rayon d'un cercle concentrique à celui-ci et qui n'est pas sécant à la droite.



Activité 6

1) Voici des dates de grandes inventions et découvertes :

1 860	Accumulateur électrique
1 886	Arracheuse de betterave
1 816	Bicyclette
1 862	Moteur à explosion
1 884	Stylo

1852	Allumette de sûreté
1869	Aspirateur
1958	Laser
1887	Pneu bicyclette
1854	Téléphone

a) Place sur un axe des temps, d'échelle 1cm pour 10 ans, ces dates.

b) Sur un autre axe des temps colorie la période où le laser n'existait-pas.

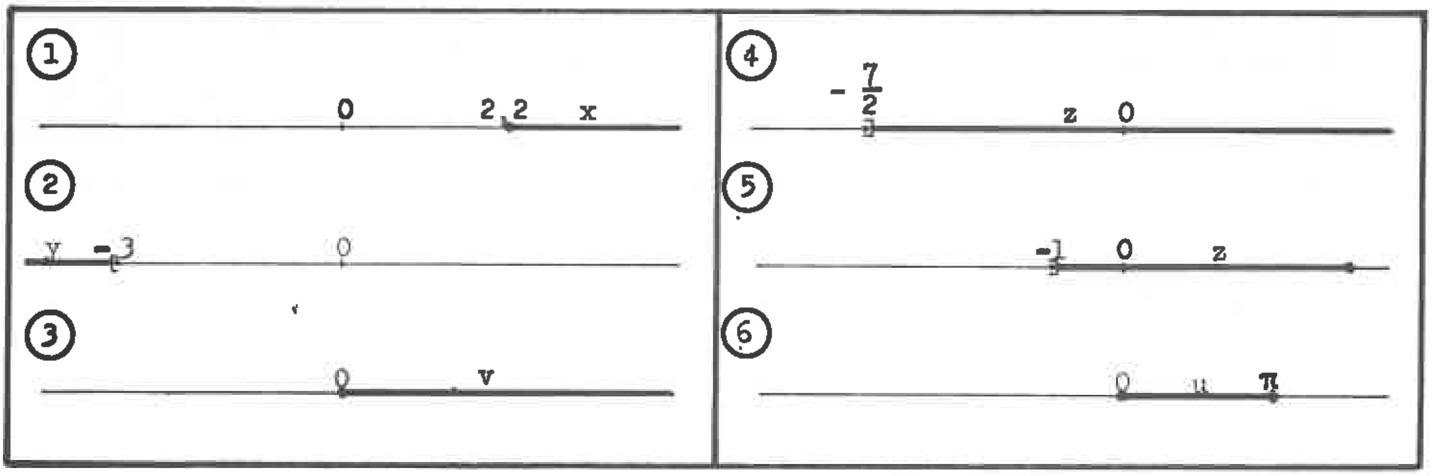
c) Jean note au stylo les renseignements que Paul lui communique au téléphone.
Sur un axe des temps, colorie l'époque où cet évènement peut avoir eu lieu.

d) Sur un axe des temps, colorie l'époque où les bicyclettes ne pouvaient pas avoir de pneu.

2) Sur un axe des temps, d'échelle 1cm pour 100 ans, colorie :

- en rouge la période du règne des Mérovingiens ($428 \leqslant t \leqslant 751$),
- en vert celle des Carolingiens ($751 \leqslant t \leqslant 987$),
- en bleu celle des Capétiens ($987 < t \leqslant 1792$).

3) Traduis ces schémas par des inégalités :



Dans chaque cas cite une valeur qui convient.

4). Le périmètre d'un carré de côté c doit-être supérieur à 10cm.
Quelle inégalité vérifie c ? Illustre l'ensemble des solutions par un schéma.

- Un hexagone régulier est dessiné à l'intérieur d'un cercle de 3,2cm de rayon. Quelle inégalité vérifie son périmètre p ? Illustre...
- Un rectangle de 3cm de large à un périmètre supérieur à 13cm. Quelle

2 / TROIS REGLES POUR T'AIDER A RESOUDRE LES INEQUATIONS

Il est question d'un déséquilibre persistant !

1) Inégalité et addition

Si $a < b$ Alors $a + c < b + c$

Si $a + c < b + c$ Alors $a < b$

Règle 1 Si j'ajoute (ou si je retranche) un même nombre aux deux membres d'une inégalité, alors j'obtiens une inégalité de même sens.

Par exemple :	$-1 < 4$	$7 > 3$
	$-1+3 < 4+3$	$7-2 > 3-2$
car	$2 < 7$	car $5 > 1$

2) Inégalité et multiplication par un nombre positif

Par exemple :	$5 < 8$	$-7 < 4$
Si $a < b$ Alors $3a < 3b$	$3 \times 5 < 3 \times 8$	$3 \times (-7) < 3 \times 4$
	car $15 < 24$	$-21 < 12$

Si $a < b$ et c un nombre positif alors $ac < bc$.

Si $ac < bc$ avec c un nombre positif alors $a < b$.

Règle 2 Si je multiplie (ou si je divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif (non nul), alors j'obtiens une inégalité de même sens.

3) Inégalité et multiplication par un nombre négatif

$-7 < 4$	mais	$-7 < 4$	$5 < 8$	mais	$5 < 8$
$3(-7) < 3 \times 4$		$(-3)(-7) > (-3)4$	$3 \times 5 < 3 \times 8$		$(-3)5 > (-3)8$
car $-21 < 12$		$21 > -12$	$15 < 24$		$-15 > -24$

Règle 3 Si je multiplie...

3 / POUR S'ENTRAINER

Résous les inéquations suivantes

$x + 5 < 5$	$x - 5 > 5$	$2x > 0$
$2x < 2$	$7y < 91$	$13z > -91$
$\frac{u}{5} > 15$	$3x + 4 > 0$	$\frac{2}{3}x - 5 < 0$
$x - 2 \leqslant 4x - 11$	$11 - 4x \leqslant 2 - x$	$11 - 4x > 2 - x$
$10 - 2x < -2(x-5)$	$1,3y - 2,4 \leqslant 3,7$	$-5x + 3 \geqslant 8$
$7 - 2 > -4 + 8$	$21 - 3u \geqslant -3(u-7)$	$\frac{3}{7}t + 2 < -\frac{5}{7}t - 4$

Illustre chaque ensemble de solutions par un dessin.

Puis, résous ce problème

a) Un taxi A demande 5 francs du kilomètre et 3 francs de prise en charge. Quel est le prix pour x kilomètres ?

b) Même question pour un taxi B qui demande 4 francs du kilomètre et 5 francs de prise en charge.

c) Pour quel kilométrage le taxi A est-il plus cher que le taxi B ?

CONTROLE N° 40

EXERCICE 1 : Voici cinq inéquations et, pour chacune, quatre illustrations de l'ensemble des solutions. Dans chaque cas, une seule convient.

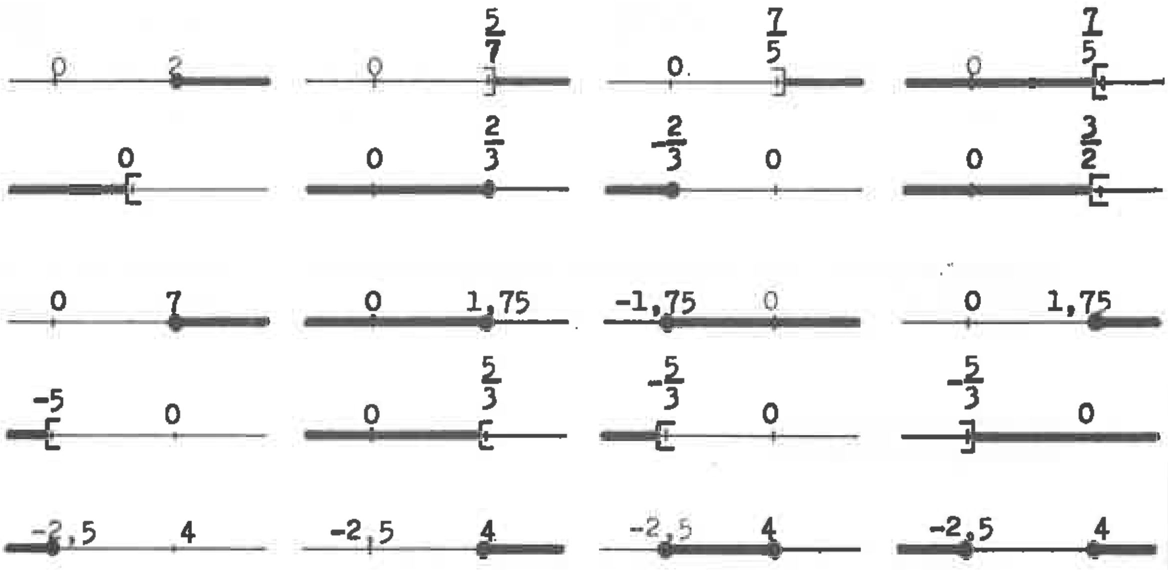
1) $5x > 7$

2) $\frac{2}{3}x < 0$

3) $2z \geqslant 3,5$

4) $3t < -5$

5) $-2,5 < u < 4$



a) Pour chaque inéquation indique l'illustration qui convient.

b) Pour chaque inéquation donne trois nombres, solutions de l'inéquation.

EXERCICE 2 : Résous les inéquations suivantes, en illustrant l'ensemble des solutions.

$7x \leqslant 3$ $\qquad$ $5u - 4 > 0$ $\qquad$ $8t - 5 > 2t + 6$

$\frac{3}{4}m < \frac{5}{2}$ $\qquad$ $-5v > 3$ $\qquad$ $2(4 - x) \leqslant -3(5 + 2x)$

$3,7k - 2,1 \geqslant 1,4k + 3,2$ $\qquad$ $5 < -4s$

EXERCICE 3 : Tu sais que π est compris entre 3,14 et 3,15.

a) Déduis-en un encadrement de la longueur d'un cercle de rayon 5 cm.

b) Déduis-en un encadrement de l'aire d'un disque de rayon 7 cm.

c) Déduis-en un encadrement de la longueur d'un demi-cercle de rayon R.

EXERCICE 4 : Un rectangle a un côté de 10 cm. Quelles inéquations doit vérifier la mesure x de l'autre côté pour que :

a) l'aire soit inférieure à 62 cm^2 ?

b) Le périmètre soit supérieur à 25 cm ?

c) L'aire soit supérieure à 25 cm^2 ?

d) Le périmètre soit compris entre 32 et 48 cm ?

e) Le périmètre soit inférieur à 50 cm et l'aire supérieure à 100 cm^2 ?

MATHEMATIQUES 3 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 41

TITRE: THEOREME DE THALES

3

PREREQUIS

- PROPORTIONNALITE

OBJECTIFS

- CONNAITRE ET UTILISER, DANS UNE SITUATION DONNEE, LE THEOREME DE THALES RELATIF AU TRIANGLE ET SA RECIPROQUE.
- CONSTRUIRE LES $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ... D'UN SEGMENT
- QUATRIEME PROPORTIONNELLE

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N°41

ENONCE DU THEOREME DE THALES

0 / RETOUR A LA PROPORTIONNALITE

A) SUITES PROPORTIONNELLES

a) Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

(a)

2	6	10
14	42	70

(b)

9,8	8,1	1,8
5,4	4,5	1

(c)

4,2	6,3	8,4
1,8	2,7	3,6

(d)

4,8	1,92	3,022
4000	1600	2518,3

Pour les tableaux de proportionnalité, précise le coefficient.

b) Complète les tableaux suivants pour qu'ils soient de proportionnalité :

5	7	9
40	x	y

5	1,5	4
24	z	t

c) Le tableau suivant devait être de proportionnalité, mais on a fait des erreurs de calculs à la deuxième ligne.

37,3	119,4	338,7	1019,9
943,69	3020,72	8567,11	25803,47

Sachant que deux nombres sont incorrects, corrige-les.

B) PROPRIETES DE LINEARITE

a) Addition

Si

a	b
a'	b'

est un tableau de proportionnalité,

a	b	a + b
a'	b'	a' + b'

en est un autre de même coefficient.

Démonstration : Si $\frac{a'}{a} = k$ et $\frac{b'}{b} = k$, alors $a' = ka$ et $b' = kb$.

Donc $a' + b' = k(a + b)$ et $\frac{a' + b'}{a + b} = k$

- En utilisant cette propriété, complète le tableau suivant, sans calculer le coefficient de proportionnalité :

11	3,3	14,3	

b) Multiplication par un nombre

Si

a	b
a'	b'

est un tableau de proportionnalité,

a	b	ma	nb
a'	b'	ma'	nb'

en est un autre de même coefficient.

Démonstration : Si $\frac{a'}{a} = k$ et $\frac{b'}{b} = k$, alors $\frac{ma'}{ma} = \frac{a'}{a} = k$ et

$\frac{nb'}{nb} = \frac{b'}{b} = k$.

En particulier,

a	ka
a'	ka'

est un tableau de proportionnalité.

-En utilisant cette propriété, complète le tableau suivant sans calculer le coefficient de proportionnalité :

7	14		18,2		14.10^{6}	
3		3,75		1374		15.10^{-8}

C'est surtout cette deuxième propriété que nous utiliserons dans ce dossier.

En utilisant cette propriété, regarde, à vue d'oeil, si les tableaux suivants sont de proportionnalité :

(a)

17	34
23	46

(b)

47	95
50	100

(c)

19	209
11	121

(d)

43	86
51	104

C) REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

a) Soit le tableau suivant :

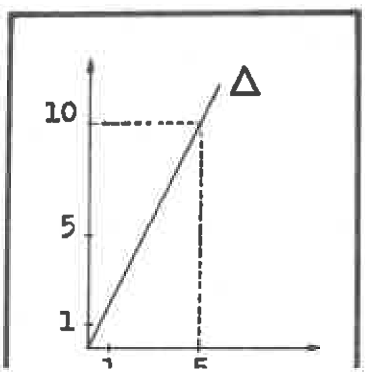
x	2	4	5	10	13
y	1	2	2,5	5	6,5

Vérifie qu'il représente deux suites proportionnelles. Ecris la formule exprimant y en fonction de x. Représente graphiquement ce tableau. Quel résultat retrouves-tu ? Quel type d'application est représentée ?

b) Représente graphiquement les applications linéaires suivantes

$y = x$; $y = 1,5x$ sur le même graphique.

c) Quelle est la formule (y en fonction de x) qui permet de représenter Δ ?



D) UN RESULTAT INTERESSANT

a) Soit le tableau

x	3	6	9	12
y	1	2	3	4

Quelle application linéaire représente-t-il ?

Trace sa représentation graphique

Joins les points de coordonnées

(3;0) et (0;1)

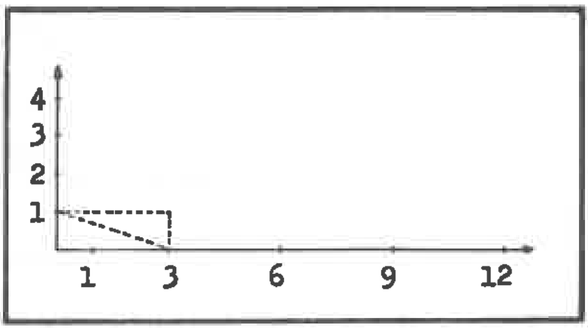
(6;0) et (0;2)

(9;0) et (0;3)

(12;0) et (0;4)

Que constates-tu ?

Peux-tu le montrer ?

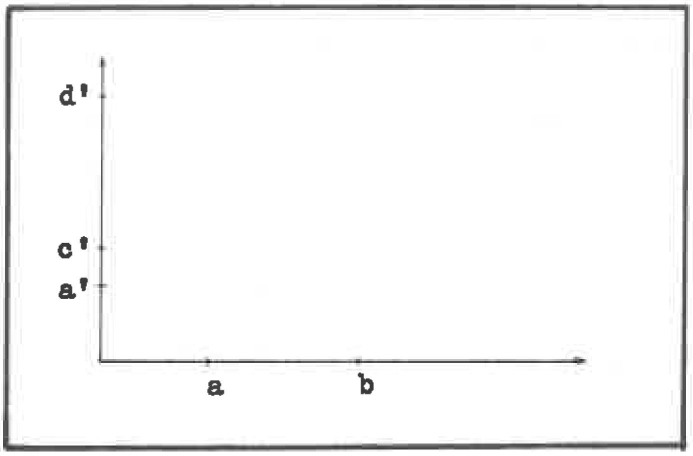


b) On s'est donné deux suites proportionnelles

a	b	c	d
a'	b'	c'	d'

En utilisant ce que tu as constaté dans a), place les points (0;b'), (c;0), et (d;0) sans tracer la représentation graphique de l'application linéaire ainsi proposée.

Trace alors cette représentation graphique, et vérifie ce qui précède.



E) PROPORTION

a) Rappel : C'est la donnée de deux suites proportionnelles de deux nombres chacune.

Résultat : " $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline a' & b' \\ \hline \end{array}$ est une proportion " veut dire " $\boxed{\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}}$ "

Dans les tableaux ci-dessous, quelles sont les proportions ?

2	1,5
2,5	8,75

6,3	1,8
7,875	2,25

24	10
18	7,5

8	1,8
11	4,35

b) Proportions et égalités de nombres

a	b
a'	b'

.m .k

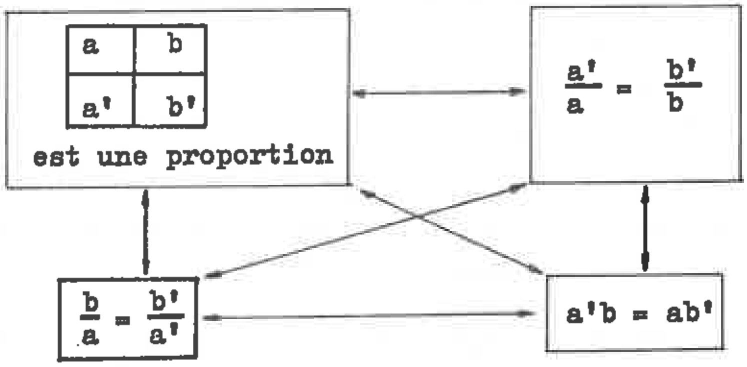
De la définition, on a $\boxed{\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}} = k$

En utilisant la deuxième propriété de la linéarité, on peut écrire : $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}} = m$

D'autre part : Si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ alors $a'b = ab'$

et si $a'b = ab'$ alors $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$

On peut donc résumer toutes ces égalités :

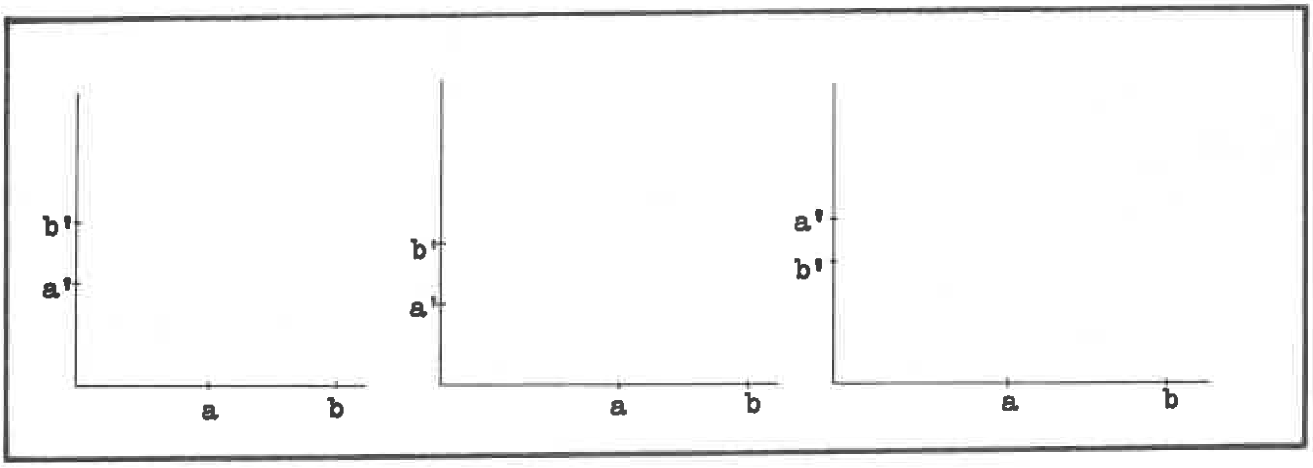


- Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\frac{18}{189} = \frac{3,2}{33,6} \qquad \frac{7}{8} = \frac{64}{73} \qquad \frac{12}{28} = \frac{27}{63} \qquad \frac{18}{2,2} = \frac{45}{5,4}$$

Pour celles qui sont vraies, donne une autre égalité à partir des mêmes nombres.

- En utilisant D), dire dans chaque cas si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ et pourquoi :



c) Quatrième proportionnelle

Connaissant trois termes d'une proportion, trouver le quatrième :

a	b
a'	x

a	x
a'	b

a	b
x	b'

x	b
a'	b'

$$\frac{x}{b} = \frac{a'}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$ax = a'b$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x = \frac{a'b}{a}}$$

Procède aux trois autres résolutions.

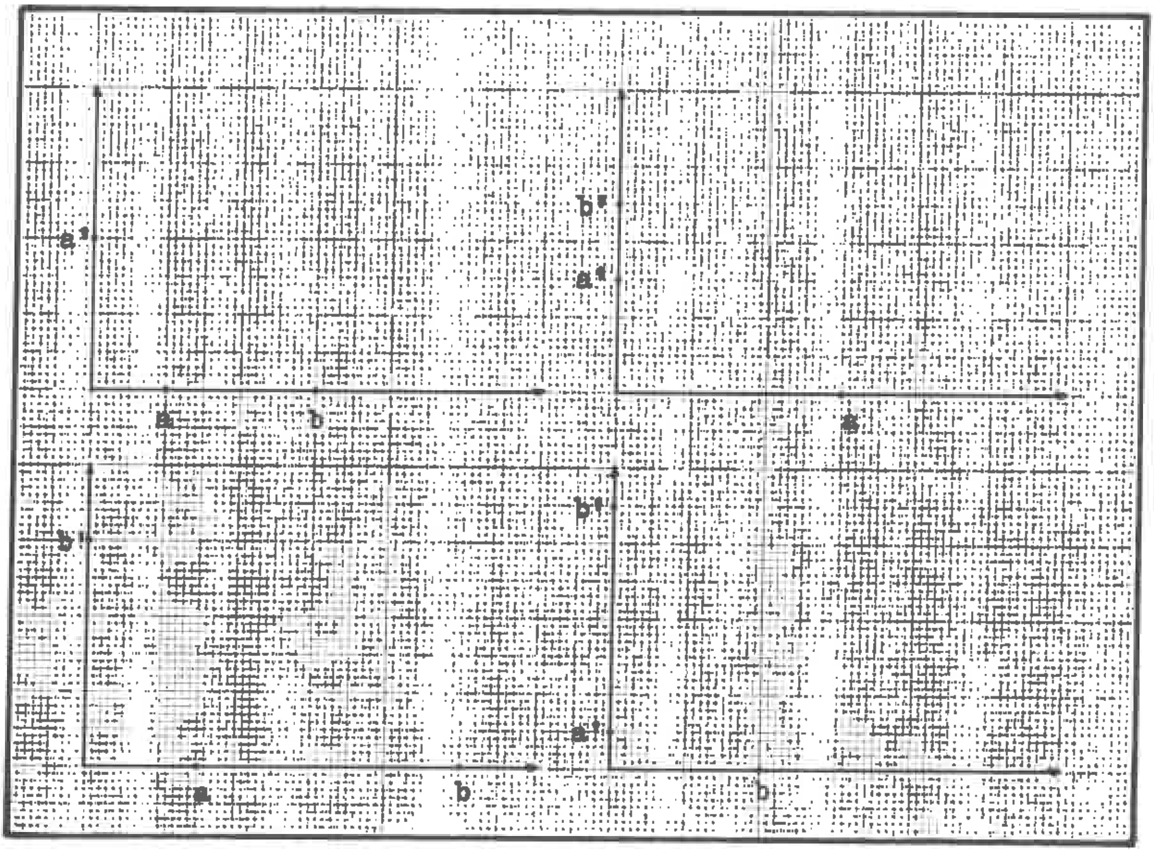
- Trouver x tel que :

$$\frac{9}{8} = \frac{27}{x}; \qquad \frac{12}{16} = \frac{x}{28}; \qquad \frac{x}{21} = \frac{5}{7}; \qquad \frac{35}{x} = \frac{30}{33}$$

- Complète les égalités suivantes :

$$\frac{7,31}{9,69} = \frac{43}{\square} \qquad \frac{\square}{1772} = \frac{21}{12} \qquad \frac{74,47}{\square} = \frac{677}{773} \qquad \frac{68}{188} = \frac{\square}{6,11}$$

- En sachant que $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline a' & b' \\ \hline\end{array}$ est une proportion et en utilisant D), trouve le nombre manquant sur les graphiques suivants :



1 / ETUDE EXPERIMENTALE

A) SITUATION 1 : Jeu d'ombres

Tu utiliseras la page 41-a.

Les rayons du Soleil ont la direction δ. Le sommet P d'un pylône de 12 m a son ombre en P' et l'ombre mesure 18 m. A côté de lui, un poteau de 6 m de haut.

a) Mesure la longueur de son ombre. Même question evec un basketteur de 2 m, puis avec un enfant de 1,2 m.

b) Quelle fraction du pylône représente le poteau, le basketteur et l'enfant ?

c) Même question avec les ombres par rapport à l'ombre du pylône.

d) Compare les fractions obtenues en b) et c).

B) SITUATION 2

Tu utiliseras la page 41-a.

B1) Des révisions

a) Par P_1, milieu de $[AB]$, mène la parallèle à (BC) qui coupe $[AC]$ en P_2.
Précise ce que représente P_2 pour P_1. Que sait-on de P_2 ? Rappelle les propriétés que tu as utilisées.

b) Recommence avec N_1, milieu de $[AP_1]$. Tu obtiendras N_2.

c) Recommence avec M_1, milieu de $[AN_1]$. Tu obtiendras M_2.

d) Calcule les rapports suivants :

$$\frac{AP_2}{AP_1} \qquad \frac{AN_2}{AN_1} \qquad \frac{AM_2}{AM_1} \qquad \frac{N_2P_2}{N_1P_1} \qquad \frac{M_2N_2}{M_1N_1}$$

Que constates-tu ?
Comment s'appelle ce nombre ?
Quelles sont les grandeurs proportionnelles ?

B2) Calcule maintenant les rapports suivants :

$$\frac{AP_1}{AB} \qquad \frac{AN_1}{AB} \qquad \frac{AM_1}{AB} \qquad \frac{AM_1}{M_1P_1} \qquad \frac{AP_2}{AC} \qquad \frac{AN_2}{AC} \qquad \frac{AM_2}{AC} \qquad \frac{AM_2}{M_2P_2}$$

Compare tous ces rapports et groupe-les par paires.
Ecris la liste des rapports égaux que tu obtiens. et observe les positions des points sur (AB) et (AC).

C) SITUATION 3

Tu utiliseras la page 41-b.

a) Sur [AB] place B' tel que $\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{3}$; Par B', trace soigneusement la parallèle à [BC] qui coupe [AC] en C'. Mesure et calcule $\frac{AC'}{AC}$.

b) Recommence avec D ∈ [BC] tel que $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$ et mène la parallèle à (AB) qui coupe [AC] en D'. Mesure et calcule $\frac{AD'}{AC}$.

c) Recommence avec D ∈ [BC] tel que $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$ et mène la parallèle à (AC) qui coupe (AB) en D". Quel est le rapport que tu dois calculer ? A quel rapport doit-il être égal ?

D) SITUATION 4

Tu utiliseras la page 41-b.

Après avoir mesuré sur le dessin, complète le tableau suivant:

AB =	AD_1 =	AE_1 =	AF_1 =
AC =	AD_2 =	AE_2 =	AF_2 =

Ces 2 suites de longueurs sont-elles proportionnelles ?
Peux-tu trouver 2 suites qui sont proportionnelles ?

Calcule les rapports suivants :

$$\frac{AD_1}{AB} \quad \frac{AE_1}{AB} \quad \frac{AF_1}{AB} \quad \text{puis} \quad \frac{AD_2}{AC} \quad \frac{AE_2}{AC} \quad \frac{AF_2}{AC}$$

Ecris ceux qui sont égaux.

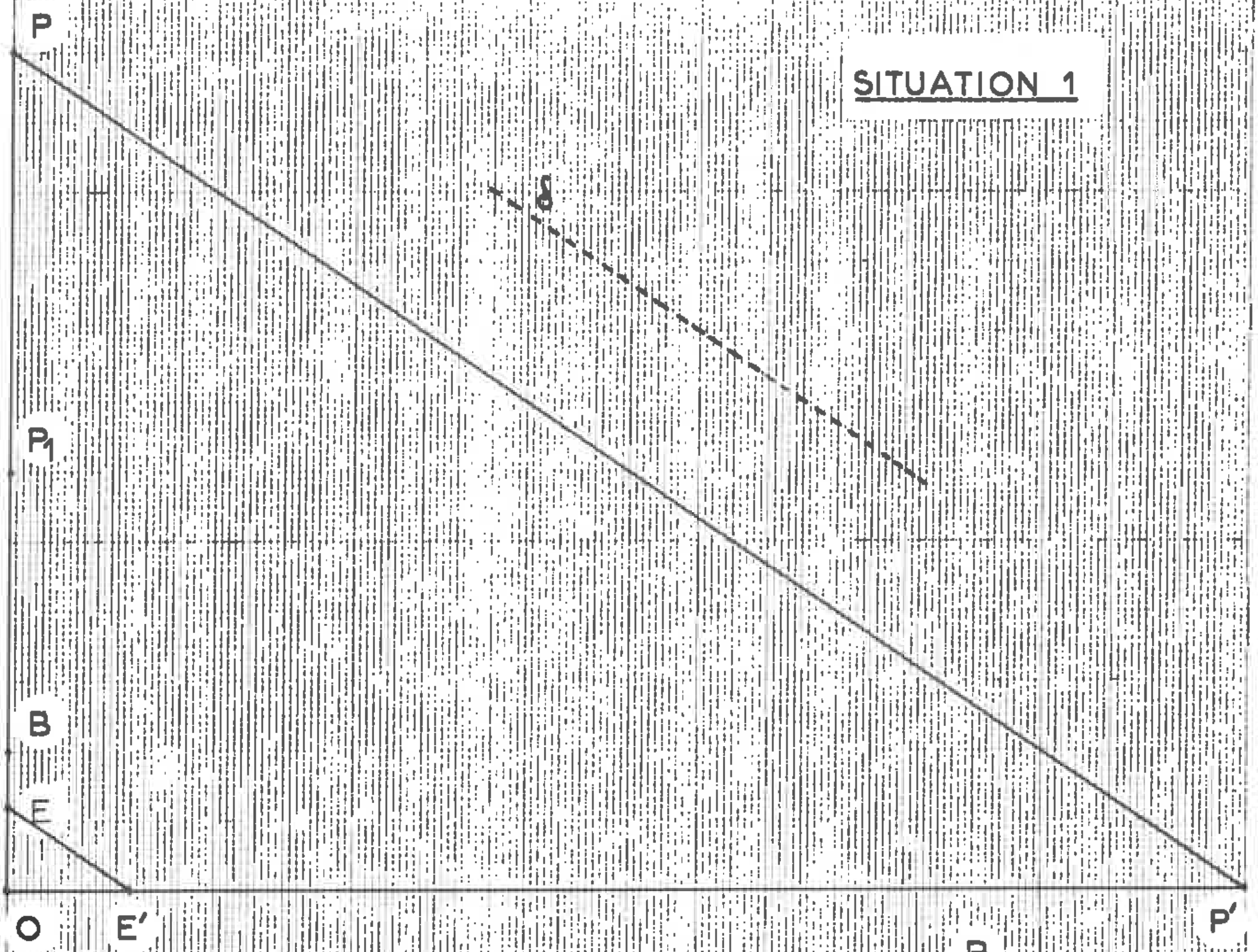
Maintenant trace les droites (D_1D_2), (E_1E_2), (F_1F_2) et compare les directions de ces droites à la direction de (BC).

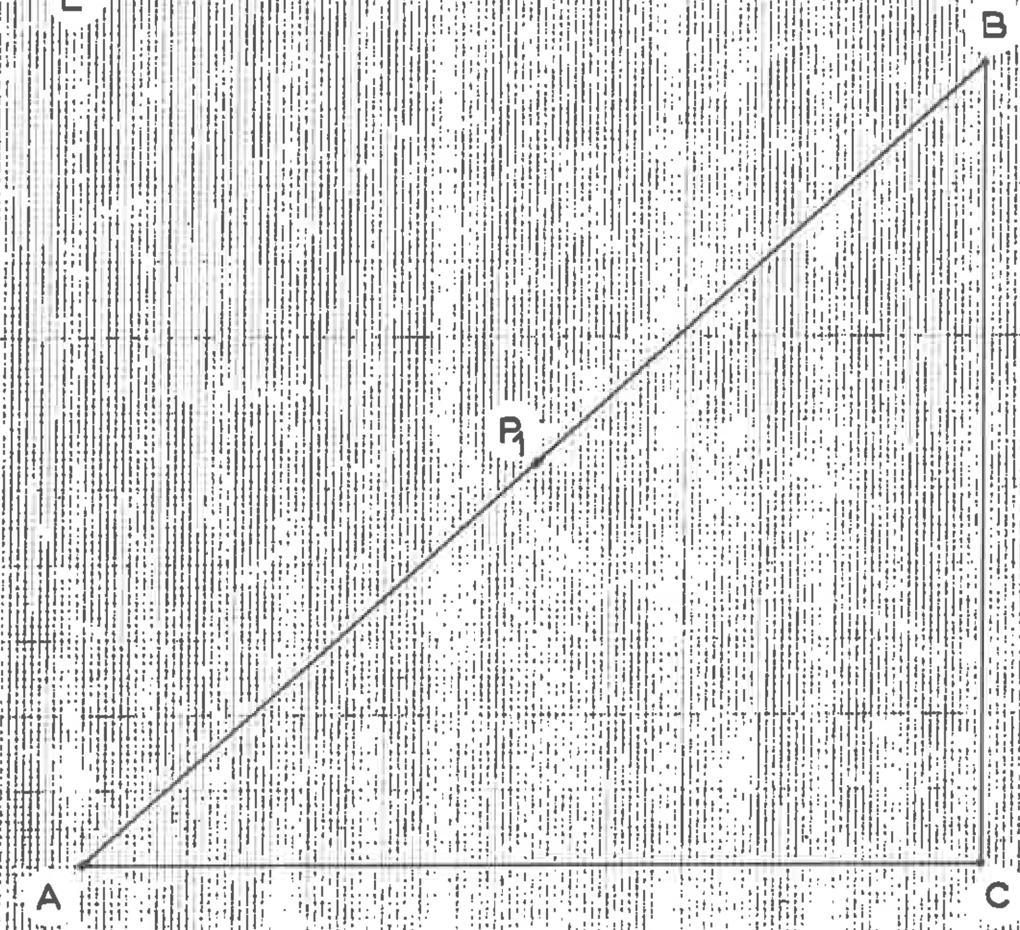
Que doit-on avoir pour obtenir des droites parallèles ?

Tu as dû trouver que (F_1F_2) n'est pas parallèle à (BC).

Peux-tu calculer AF_2 pour que (F_1F_2) soit parallèle à (BC).

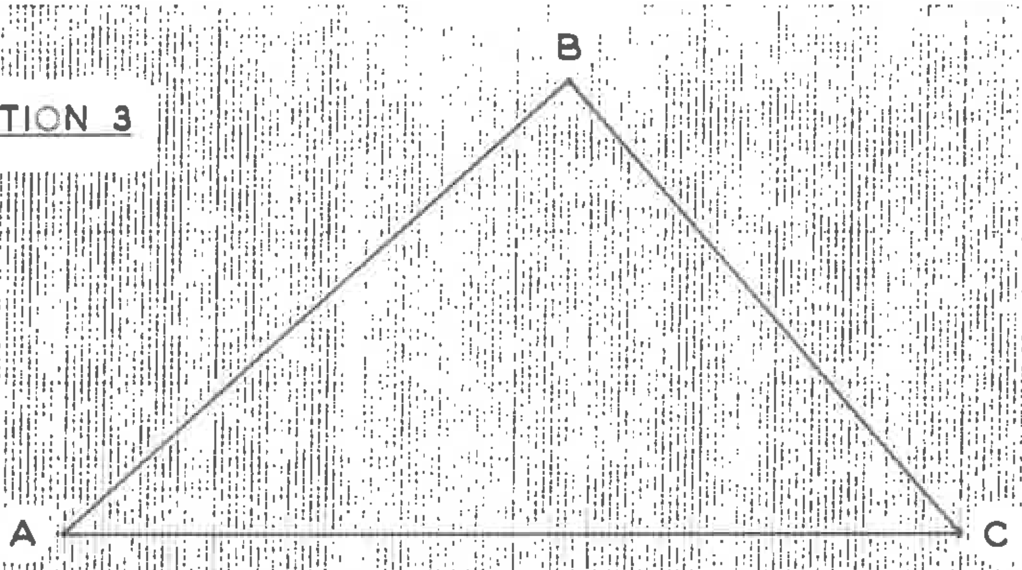
SITUATION 1



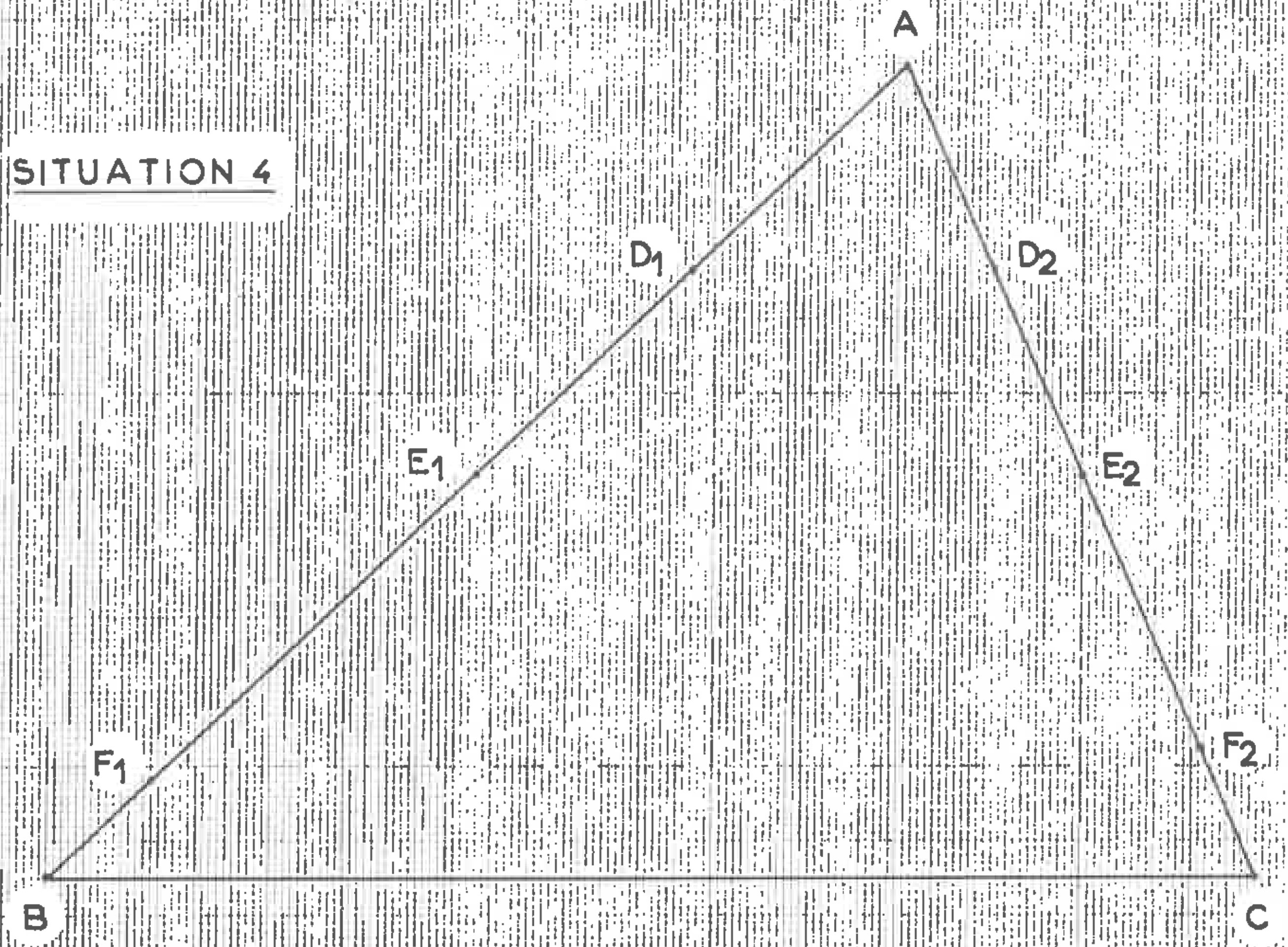


SITUATION 2

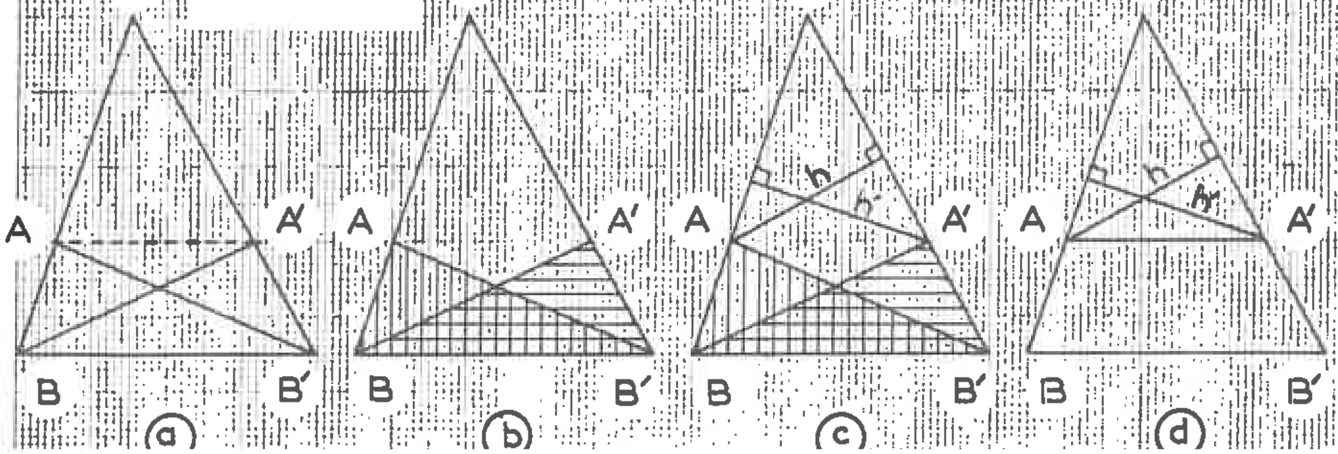
SITUATION 3



SITUATION 4



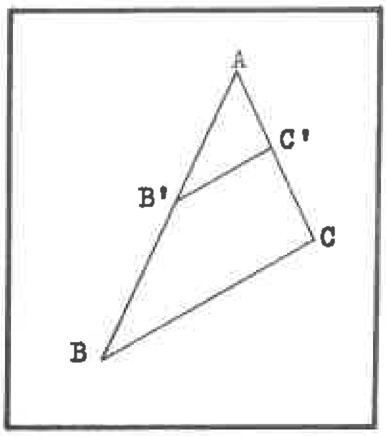
TEXTE 2/B



2 / A SAVOIR

Les études des situations précédentes, 1, 2 et 3 peuvent être généralisées.

A) ENONCE DU THEOREME DE THALES DANS UN TRIANGLE



Soit (ABC) un triangle avec B' $\in$ (AB) et C' $\in$ (AC).
Si (B'C') // (BC)
alors $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

Quelles sont les hypothèses ?

Quelle est la conclusion ?

$\boxed{B' \in (AB)}$ $\boxed{C' \in (AC)}$ $\boxed{(B'C') \parallel (BC)}$

$\boxed{\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}}$

Quelle est la condition nécessaire pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès ?

Qu'est-ce-que le théorème de Thalès nous permet de prouver ?

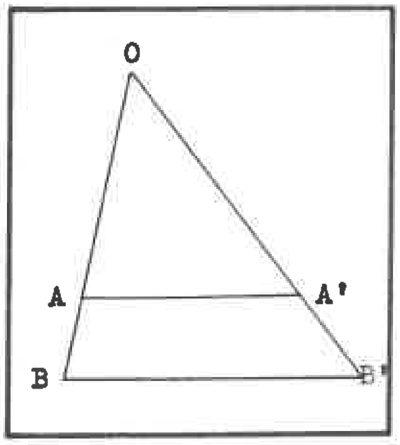
B) DEMONSTRATION DU THEOREME DE THALES (D'après Kuntzmann APMEP n° 350)

Hypothèses : (AA') // (BB')
h et h' sont les distances de A et A' respectivement à (OB') et (OB).

Tu peux t'aider des quatre dessins du bas de la page 41-b.

a) Dans les triangles (ABB') et (A'BB'), quel côté est-il commode de prendre comme base? Quelles sont alors les hauteurs ?
Compare les aires de (ABB') et (A'BB').

b) Compare maintenant les aires de (OAB') et de (OA'B).



c) Exprime l'aire de (OAB') en utilisant h.
Exprime l'aire de (OA'B) en utilisant h'.
Compare alors les rapports $\frac{OB}{OB'}$ et $\frac{h}{h'}$.

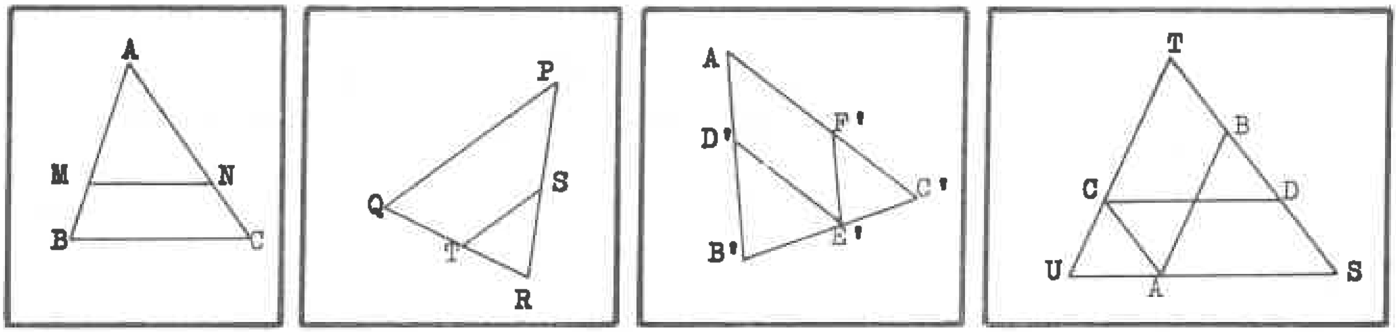
d) Exprime l'aire de (OAA') en utilisant h.
Exprime l'aire de (OAA') en utilisant h'.
Montre alors que $\frac{OA}{OA'} = \frac{h}{h'}$.

e) Déduis alors que : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ ou encore que $\boxed{\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}}$

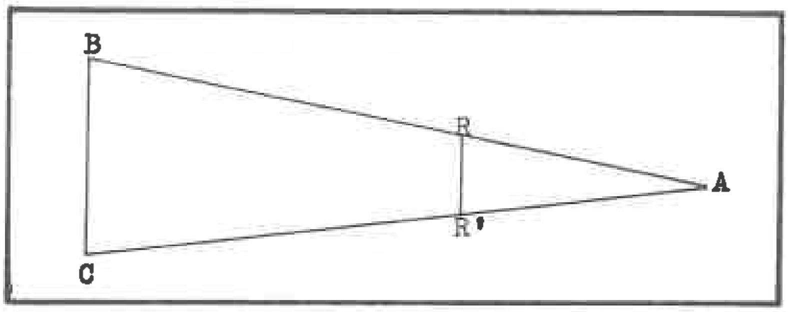
Ceci correspond bien à l'énoncé que nous avons donné au 2/A.

Remarque : Refais une figure avec B', milieu de [AB] et (B'C')//(BC) et aussi C' $\in$ [AC] .
Ecris la propriété de Thalès. Que dire de C' ? Que retrouve-t-on ?
Cette propriété vue en 4ème est un cas particulier de Thalès. On l'appelle parfois le "petit Thalès".

EXERCICE 1 : Dans les triangles suivants, écris chaque fois que tu le peux le théorème de Thalès (parfois plusieurs fois pour un triangle).



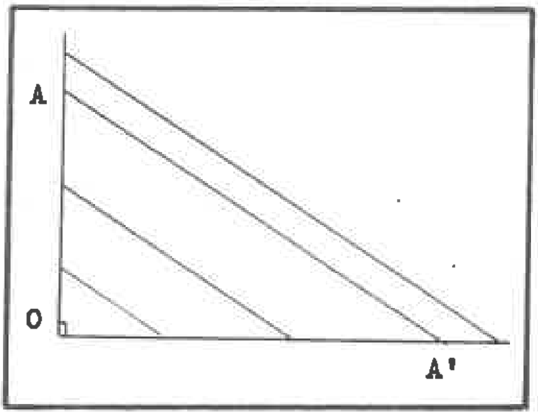
EXERCICE 2 : - (RR')//(BC) et AB = 16, AC = 15, AR = 5. Calculer AR' et R'C.
- (SS')//(BC) et AB = 16, AC = 15, AS = 7,5. Calculer AS' et S'C.
- (TT')//(BC) et AB = 16, AC = 15, BT = 4. Calculer AT' et T'C.



- **Remarque** : Calcule $\frac{AR}{RB}$ et $\frac{AR'}{R'C}$; $\frac{AR}{RT}$ et $\frac{AR'}{R'T'}$; $\frac{AR}{TB}$ et $\frac{AR'}{T'C}$

EXERCICE 3 : a) OA = 9 OA' = 12
OC = 3 OB' = 8
OD = 2 OE' = 5
OF = 15 OG' = 16

Calculer OC', OB, OD'
OE, OF', OG.
Les points B, C, D... sont sur (OA).
Les points B', C', D'... sont sur (OA').
(BB'), (CC')... sont parallèles à (AA').



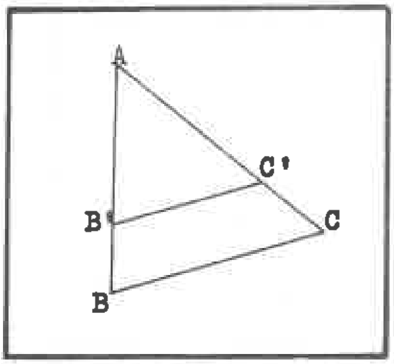
b) DH = 5. Calcule OH'.
E'J' = 2. Calcule OJ.

REMARQUE TRES IMPORTANTE : En reprenant l'exercice 3, <u>calcule</u> les longueurs AA', BB' et CC'. Calcule ensuite les rapports suivants :

$$\frac{BB'}{AA'} \text{ et } \frac{CC'}{AA'}.$$

A quels autres rapports de l'exercice 3 sont-ils égaux ? Observe les triangles ainsi obtenus.

En généralisant ce que tu viens d'observer dans cet exercice, on peut <u>compléter l'énoncé de Thalès</u> :



> Soit (ABC) un triangle avec $B' \in (AB)$ et $C' \in (AC)$.
>
> Si $(B'C') /\!/ (BC)$ alors $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Pour t'aider à retenir, tu peux voir

(ABC) "grand triangle" et (A'B'C') "petit triangle".

Points :	A	B'	B
Projections	A	C'	C

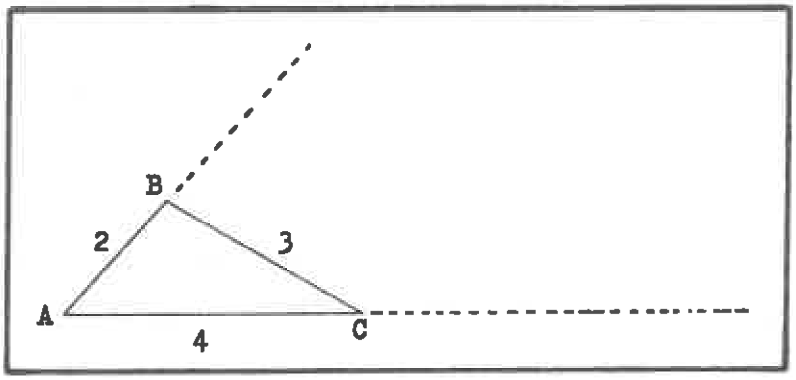
et écrire $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

EXERCICE 4 : En utilisant le dessin ci-dessous :

a) Trace (AB'C') en "agrandissant" cette figure 3 fois.

b) Trace (AB"C") en "réduisant" cette figure 4 fois.

c) <u>Calcule</u> les longueurs B'C' et B"C".

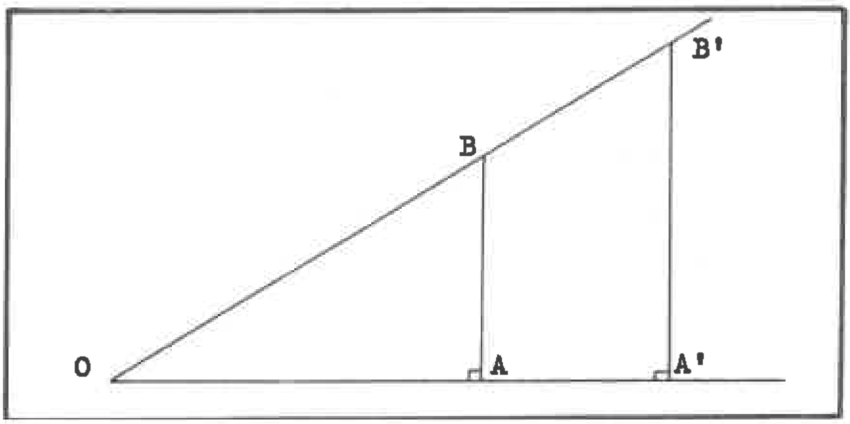


EXERCICE 5 : a) On donne OA = 10 , AA' = 5 ; AB = 6. Calcule A'B'.

b) Calcule OB et OB'

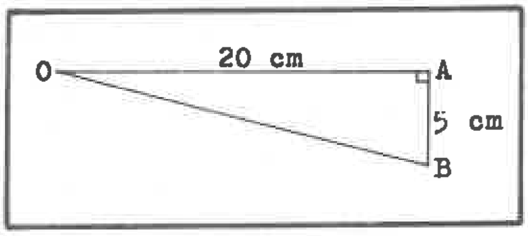
Calcule aussi le rapport $\frac{OB}{OB'}$. Pouvais-tu le trouver plus rapidement ?

c) On donne A"B" = 15 (avec $B" \in (OB)$ et $A" \in (OA)$ et $(A"B") /\!/ (AB)$). Peux-tu trouver la position du point A" sur (OA) ?

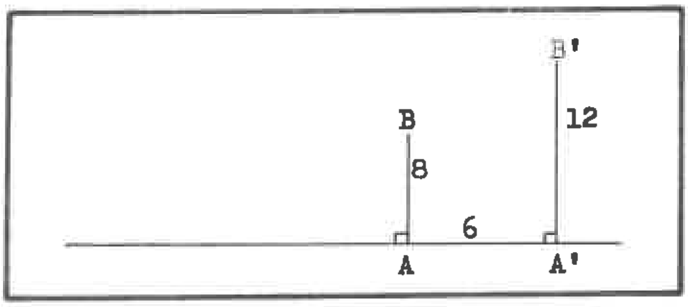


EXERCICE 6 : a) A quelle distance de O dois-je placer le point A' tel que A'B' = 3 cm, (avec (A'B')//(AB) et B' ∈ (OB)) ?

b) Si je place A" à 8 cm de O, que vaut A"B" ?



EXERCICE 7 : Trouve la longueur OA. O est l'intersection de (AA') et (BB').

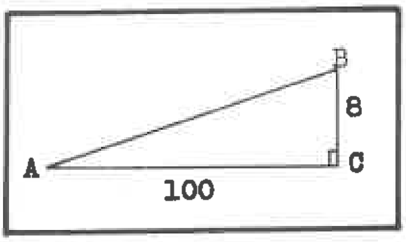


EXERCICE 8 : On pense qu'une côte est à 8 % lorsqu'on se sera élevé de 8 m pour une distance de 100 m horizontale.

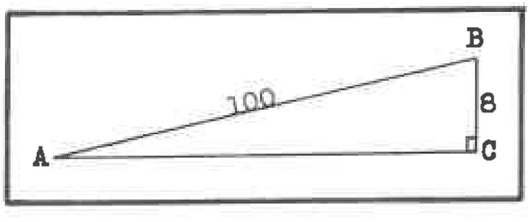
a) Calcule la distance parcourue AB.

b) Sur cette route, je parcours 12 km. De combien me suis-je élevé ?

c) Si une route de montagne offre une dénivellation de 1800 m, quelle distance dois-je parcourir sur la route pour faire cette dénivellation ?

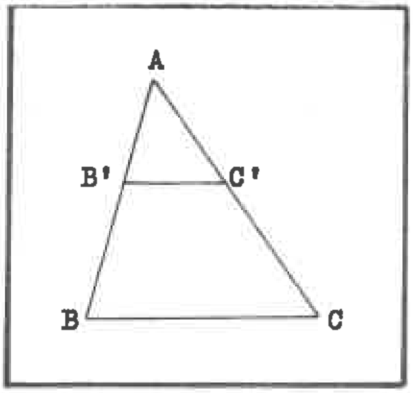


Dans la réalité, une route est à 8 % lorsqu'on s'élève de 8 m en roulant 100 m sur cette route.
Reprends les questions b et c avec cette nouvelle définition. Compare.



C) RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES

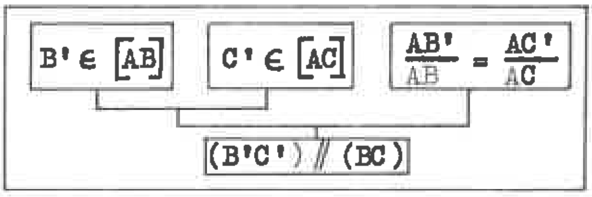
Reprends tes observations de la situation 4.
En généralisant, on peut énoncer la <u>réciproque</u> :



Soit (ABC) un triangle avec $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$.

Si $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ alors $(B'C') \parallel (BC)$.

- Précise les hypothèses.
- A quoi sert cette réciproque ?



EXERCICE 9 : a) On donne les points A_1 , B_1 , C_1 tels que $MA_1 = 2$

$A_1B_1 = 10$

$B_1C_1 = 2$ et $C_1N = 2$

On donne les points A_2 , B_2 , C_2 tels que $MA_2 = 2,5$

$A_2B_2 = 12,5$

$B_2C_2 = 3$ et $C_2P = 2$

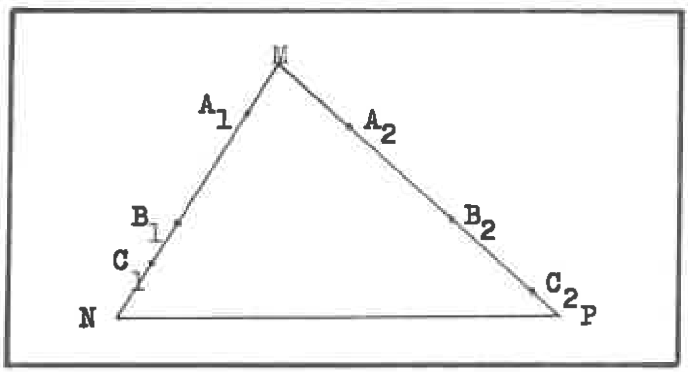
(A_1A_2) est-elle parallèle à (NP) ?
Même question pour (B_1B_2) et (C_1C_2).

b) On donne les points A_3 , B_3 , C_3 de (NP) tels que $NA_3 = 3$

$A_3B_3 = 6,6$

$B_3C_3 = 12$ et $C_3P = 2,4$

Trouve les droites parallèles à (MN).

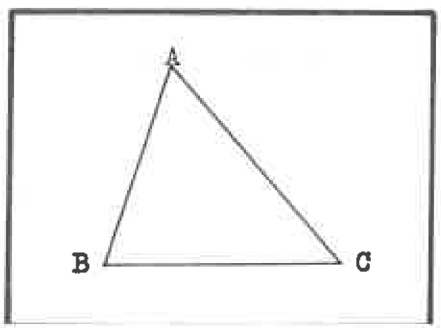


3 / D'AUTRES EXERCICES

EXERCICE 10: a) Placer $M_1 \in [AB]$ tel que $\frac{AM_1}{AB} = \frac{1}{3}$ et $M_4 \in [AB]$ tel que $\frac{BM_4}{BA} = \frac{1}{3}$.

Projette M_1 en M_2 sur (AC) parallèlement à (BC), puis projette M_2 en M_3 sur (BC) parallèlement à (AB). Trace (M_3M_4).

Est-elle parallèle à (AC) ?
Montre le.

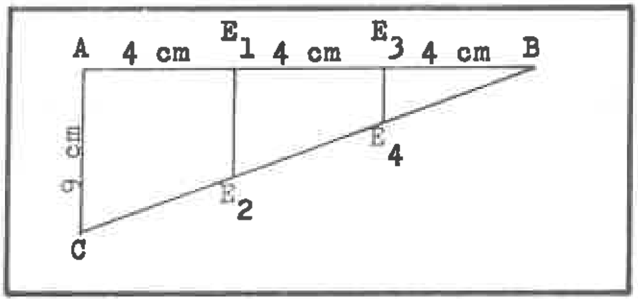


b) On a donc :

$$M_3 \xrightarrow[\text{à (AC)}]{\text{parallèlement}} M_4 \xrightarrow[\text{à (BC)}]{\text{parallèlement}} M_5 \xrightarrow[\text{à (AB)}]{\text{parallèlement}} M_6 \xrightarrow[\text{à (AC)}]{\text{parallèlement}} M_7$$

M_7 est-il confondu avec M_1 ou bien est-ce un hasard s'il se trouve voisin de M_1. Montre le.

EXERCICE 11 : Observe la figure ci-dessous :



a) Calcule la longueur des deux entretoises E_1E_2 et E_3E_4. Elles sont toutes parallèles.

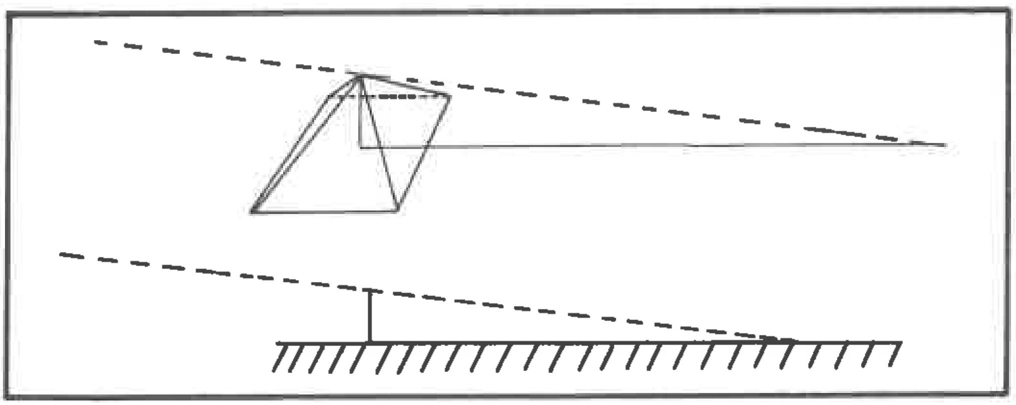
b) Calcule BC. Je veux placer une troisième entretoise telle que $BE_5 = 5$ cm, $E_5 \in [AB]$, $BE_6 = 6$ cm et $E_6 \in [BC]$. Cette entretoise est-elle parallèle aux trois autres ?

EXERCICE 12 : Soit un cercle (C) de centre O et de rayon 6.
Soit A un point tel que OA = 10. De A, tracer les deux tangentes au cercle et calculer AB_1 et AB_2, B_1 et B_2 étant les points de contact.

Sur (OA) on choisit O' tel que AO' = 12. Calculer alors le rayon du cercle (C') de centre O' tangent aux droites (AB_1) et (AB_2).
Calculer AB'_1 et AB'_2 de deux façons différentes (Pythagore et Thalès).

Laquelle te semble ici la plus simple ?

EXERCICE 13 : La légende veut que Thalès émerveilla le Pharaon d'Egypte en calculant la hauteur d'une pyramide en mesurant son ombre et l'ombre d'une unité de longueur.
Peux-tu déduire la méthode employée par Thalès ?



EXERCICE 14 : Soit un quadruplet de points (ABCD) avec les diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en O. Par O, trace :

a) la parallèle à (BC) qui coupe (AB) en I.
b) la parallèle à (CD) qui coupe (AD) en J.

Compare $\frac{AI}{AB}$, $\frac{AO}{AC}$ et $\frac{AJ}{AD}$

Déduis-en que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

EXERCICE 15 : Soit (ABC) un triangle rectangle en B et (ACD) un triangle rectangle de même hypoténuse [AC] .
Soit M un point de [AC] . De M, on trace la perpendiculaire à (AB) qui coupe (AB) en E et la perpendiculaire à (AD) qui coupe (AD) en F.

a) A-t-on de droites parallèles ?

b) Compare les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AD}$

Ceci nous permet-il de trouver des droites parallèles ?

4 / APPLICATION

Tu sais prendre (à la règle) le tiers d'un segment de 15 cm, de 12 cm, de 9 cm. Mais pour 10 cm, tu ne peux avoir qu'une valeur approchée. L'énoncé de Thalès permet de construire le tiers de 10 cm sans approximation (en théorie).

METHODE :

- Trace [AB] tel que AB = 10 cm.
- De A, trace une demi-droite [Ax), puis prends C sur cette demi-droite tel que AC = 12 cm. Trace [BC] .
- Sur [AC] , prends D tel que $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ (ici peux-tu le faire exactement ?).

  Explique le choix de 12 cm. Aurait-on pu choisir un autre nombre ?
- Par D, trace la parallèle (DC) qui coupe [AB] en E.

  Evalue le rapport $\frac{AE}{AB}$. Le point E répond-il à la question ?

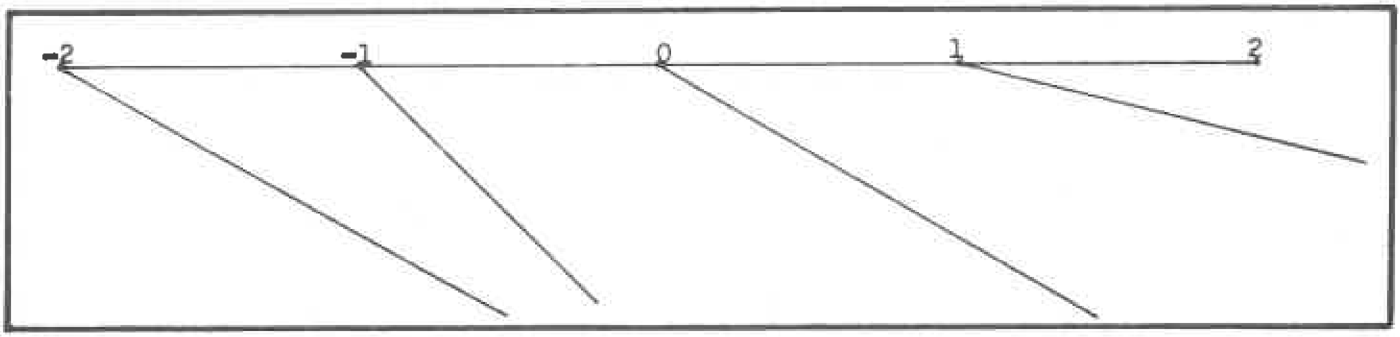
Remarque 1 : On aurait pu choisir sur [Ax) $AC_1 = C_1C_2 = C_2C$ = longueur quelconque puis tracer (BC). On reconnait la construction précédente.

Remarque 2 : Si [AB] a une longueur L, comment peux-tu prendre $\frac{1}{3}$ L ou $\frac{2}{3}$ L ?

EXERCICE 16 : a) En t'inspirant de ce modèle, place le point E ∈ [AB] tel que AB = 14 et $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$.

b) Recommence avec $\frac{2}{7}$ pour AB = 10.

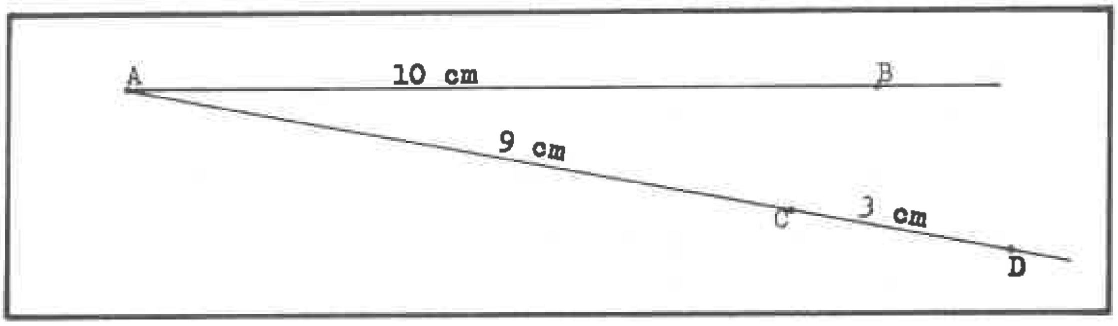
EXERCICE 17 : On a dû choisir 5cm comme unité sur une droite graduée.



Construis les points d'abscisse $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{5}{3}$

EXERCICE 18 : a) Calcule $\frac{AD}{AC}$; construis le point E de $[AB]$ tel que $\frac{AE}{AB} = \frac{4}{3}$.

On vient de prendre les $\frac{4}{3}$ de AB.



b) Recommence avec les $\frac{5}{3}$.

EXERCICE 19 : Dans un tel tableau de proportionnalité, rappelle comment s'appelle x.

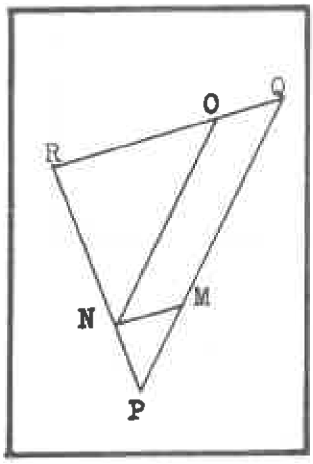
8	12
6	x

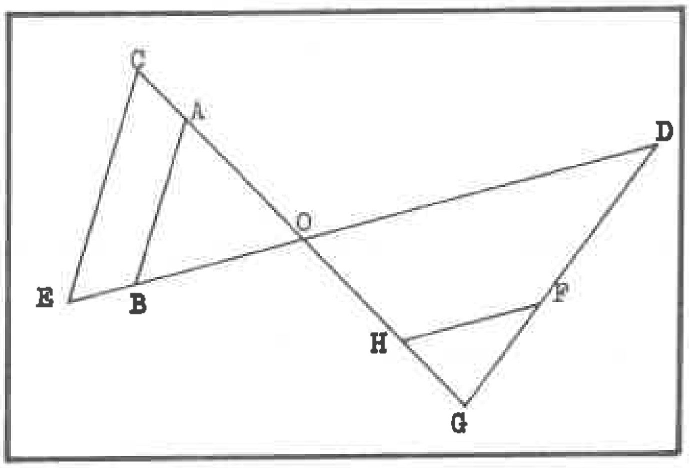
a) Dis comment, en utilisant Thalès, on peut construire x.

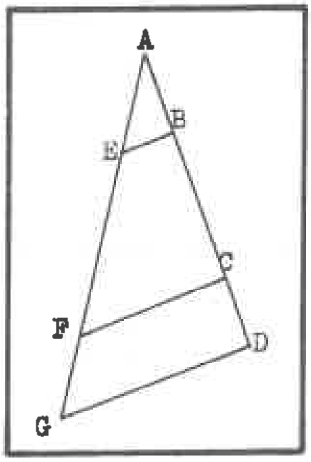
b) Fais la construction.

CONTROLE N°41

EXERCICE 1 : Pour chaque figure, écrire le théorème de Thalès chaque fois que tu le peux.







EXERCICE 2 : 1) On donne AM = 15, AB = 8 et AC = 10. De plus (BC) et (MN) sont parallèles.

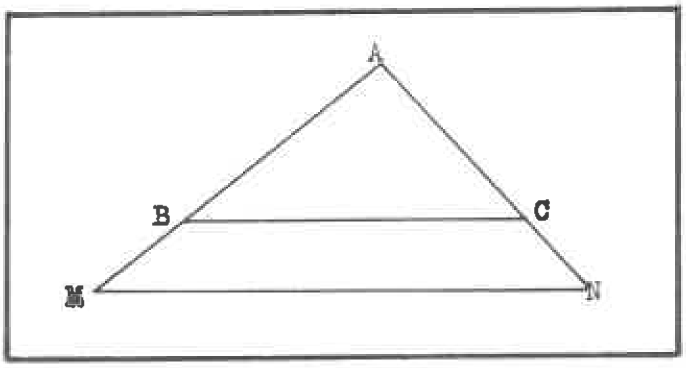
a) Calcule AN.

b) Si MN = 16, calcule BC.

2) Pour la même figure, on donne AC = c, AN = c' et AB = b.

a) Calcule AM en fonction de b, c et c'.

b) Si BC = x, calcule MN.

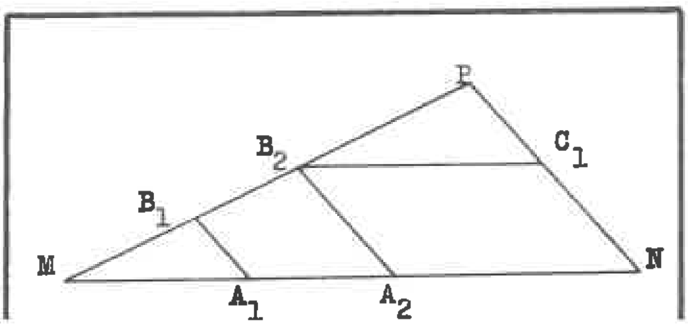


EXERCICE 3 : On donne MN = 20, MP = 16, $MA_1 = 5$ et $B_1B_2 = 8$. De plus $(A_1B_1) /\!/ (A_2B_2) /\!/ (NP)$ et $(B_2C_1) /\!/ (MN)$.

a) Calcule MB_1 et MA_2.

b) Calcule également PB_2 ; sachant que $PC_1 = 3$, calcule PN.

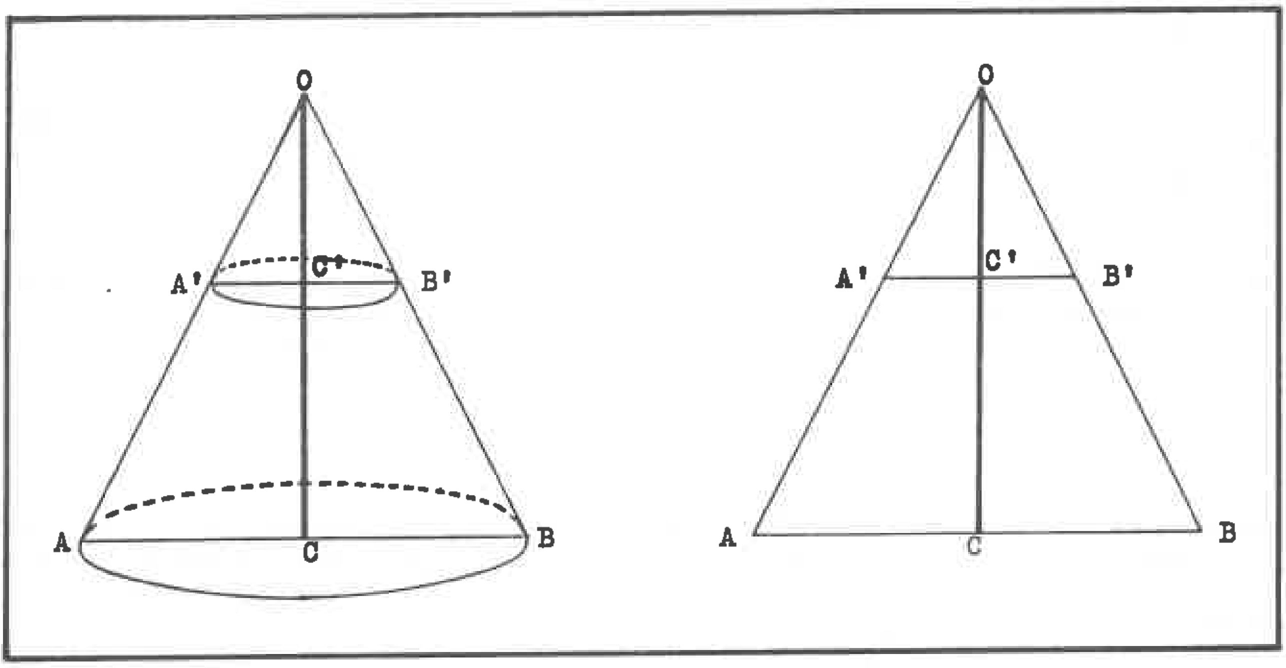
c) Soit $C_2 \in [PN]$ et $PC_2 = 9$. A-t-on $(C_2B_1) /\!/ (MN)$?



EXERCICE 4 : Le diamètre AB est 12 cm. OC vaut 20 cm.

a) A quelle distance de C doit-on placer $[A'B']$ quand on a $A'B' = 8$ cm, pour que O, B et B' soient alignés ?

b) Quel est le diamètre du disque dont le centre C" est placé à 2 cm de O, (O, B" et B sont alignés) ?



EXERCICE 5 : Soit (ABCD) un parallèlogramme de centre O. On appelle I le milieu de $[AO]$, J celui de $[OC]$, G_1 le centre de gravité du triangle (AOB) et G_2 celui de (OBC).

a) Calcule les rapports $\frac{BG_1}{BI}$ et $\frac{BG_2}{BJ}$. Qu'en déduis-tu pour (G_1G_2) et (IJ) ?

b) Si G_3 et G_4 sont les centres de gravité de (OCD) et (ODA), en utilisant une méthode analogue à celle du a), que peux-tu dire de (G_3G_4) et (IJ) ?

c) En déduire la nature du quadrilatère $(G_1G_2G_3G_4)$?

TEST DOSSIER N° 41

QUESTION 1 : Lequel de ces trois tableaux est-il un tableau de proportionnalité ?

①

11	2,2	13,2
3	0,6	3,6

②

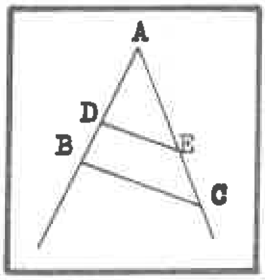
2	6	10
3	7	11

③

10	2	12
30	3	33

1 2 3

QUESTION 2 : Le Théorème de Thalès énonce que :



① - Si (DE) // (BC) alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

② - Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ alors (DE) // (BC)

③ - Si (DE) // (BC) alors $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

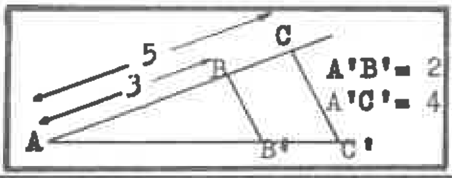
1 2 3

QUESTION 3 : Si, lors d'une projection d'une droite D sur une droite D' de rapport k, le segment [AB] a pour projeté le segment [A'B'] , alors on a l'égalité :

① - AA' = k BB' ② - A'B' = k AB ③ - $\frac{AB}{A'B'} = k$

1 2 3

QUESTION 4 :



① - Je ne peux pas utiliser Thalès.

② - (BB') // (CC')

③ - $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$

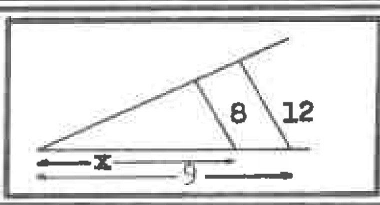
1 2 3

QUESTION 5 :

① - x = 3

② - x = 6

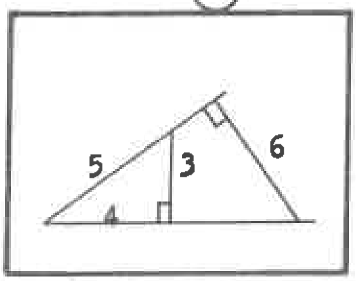
③ - x = 4



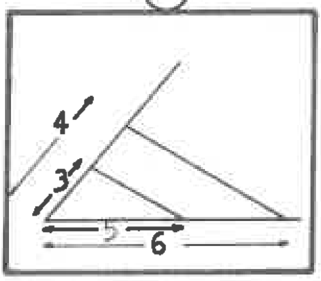
1 2 3

QUESTION 6 : Dans lequel des trois cas peux-tu utiliser Thalès ?

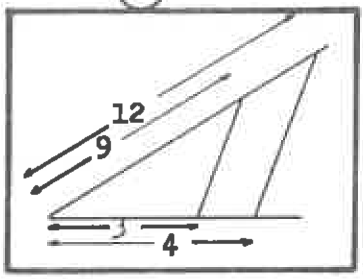
①



②

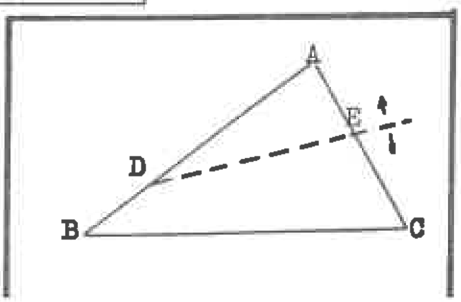


③



1 2 3

QUESTION 7 : Sur cette figure, les points A, B, C et D sont fixés.



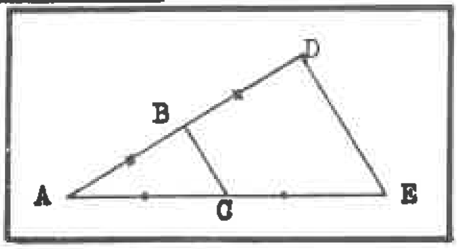
① - Si (DE) ⊥ (BC) alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

② - Si (DE) // (BC) alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

③ - Si le point E est le milieu du côté [AC] alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$

1 2 3

QUESTION 8 :



① - $\frac{BC}{DE} = 2$

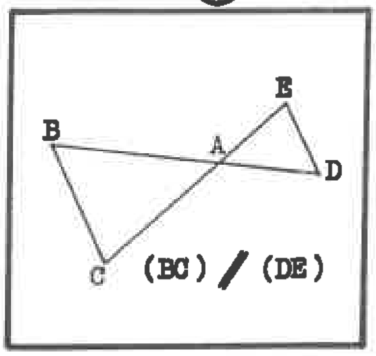
② - $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

③ - $\frac{DE}{BC} = 2$

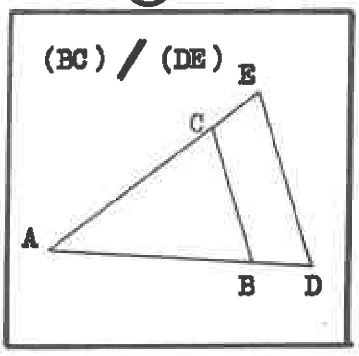
1 | 2 | 3

QUESTION 9 : Laquelle de ces trois figures vérifie l'égalité $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$?

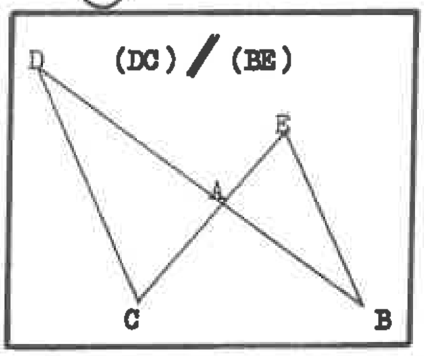
①



②

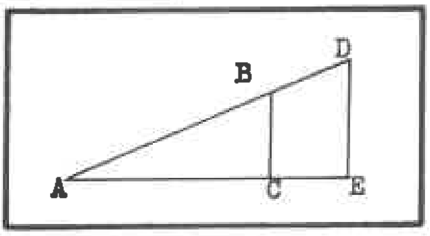


③



1 | 2 | 3

QUESTION 10 :



① - Si (BC) // (DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$

② - Si (BC) // (DE) alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$

③ - Si (BC) // (DE) alors $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{BC}$

1 | 2 | 3

MATHEMATIQUES 3 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 42

TITRE: CALCUL LITTERAL

3

PREREQUIS

- DISTRIBUTIVITE SIMPLE
- DOSSIER 27

OBJECTIFS

- DOUBLE DISTRIBUTIVITE
- EGALITES REMARQUABLES
- FACTORISATION
- DEVELOPPEMENT ET REDUCTION D'EXPRESSIONS SIMPLES
- APPLICATION A LA MISE EN EQUATION

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 42

CALCUL LITTERAL
EGALITES REMARQUABLES

I/ DISTRIBUTIVITE.

1/ Rappel

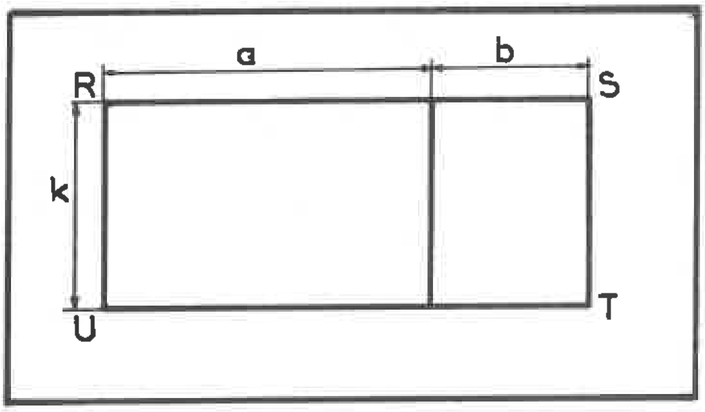
Tu as appris que si a,b et k sont des nombres relatifs, on a:

$$\boxed{k(a+b) = ka+kb}$$

Tu vas retrouver et utiliser cette règle dans différents exercices.

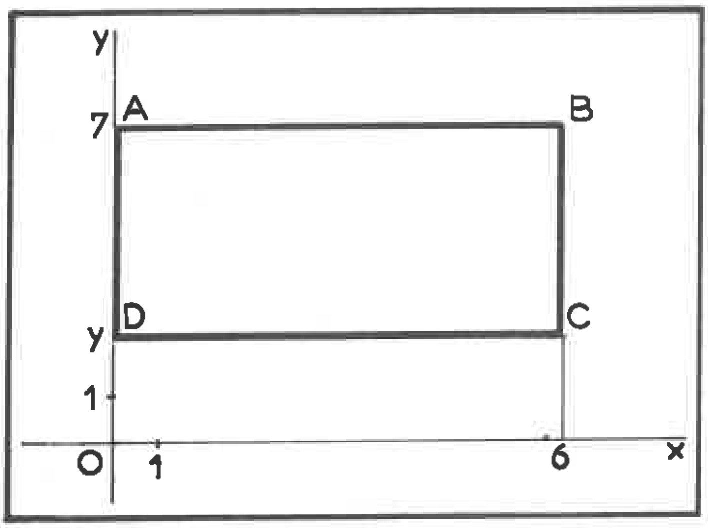
2/ Calculs d'aires

Exercice 1



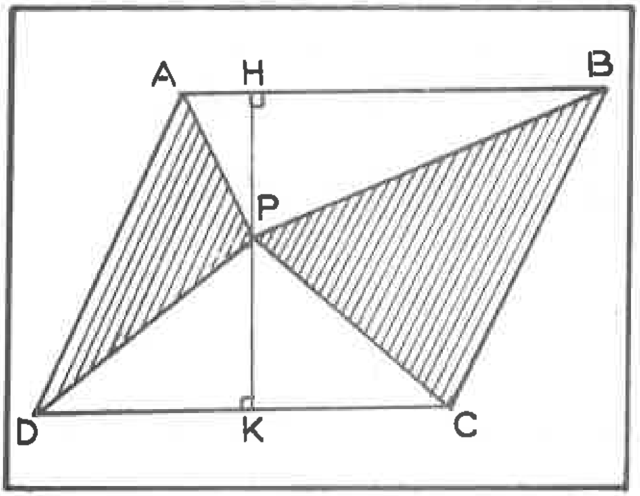
Reproduis la figure ci-contre et calcule de deux façons l'aire du rectangle RSTU.
Qu'as-tu retrouvé ?

Exercice 2



Soient les points A et D de coordonnées respectives (0;7) et (0;y) avec $y<7$.
Calcule l'aire du rectangle ABCD en fonction de y.

Exercice 3

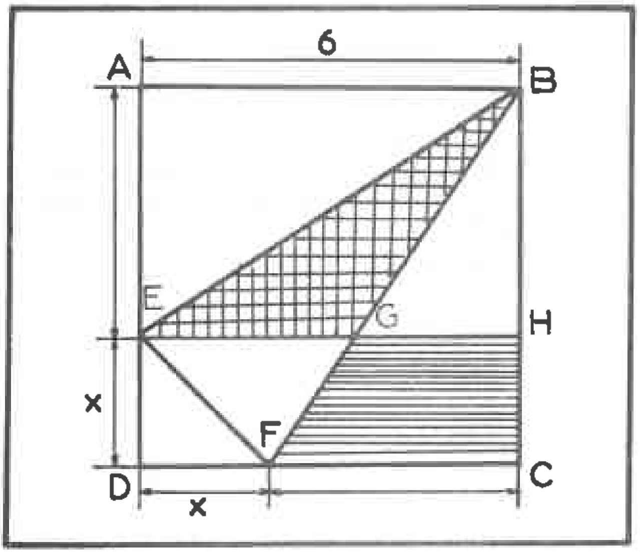


Un paysan partage son champ qui a la forme d'un parallélogramme ABCD entre ses deux fils de manière à ce qu'ils aient tous deux, accès au puits P.

L'un des deux fils reçoit la partie hachurée, l'autre le reste.

L'un des deux fils est-il avantagé ?

Exercice 4

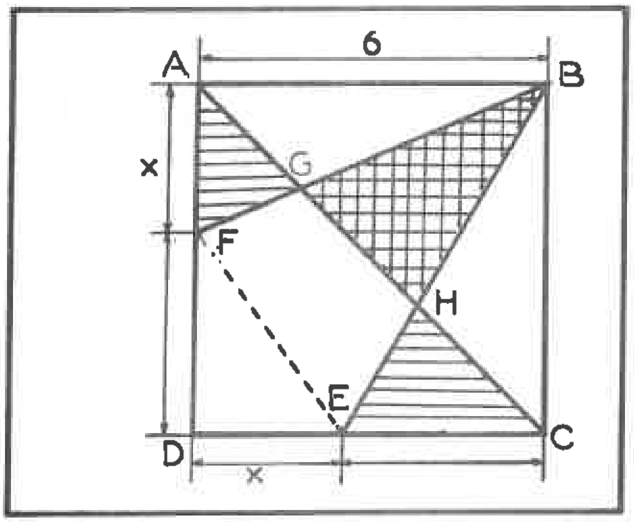


1° Reproduis la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté 6 cm et indique les cotes manquantes.

2° Calcule en fonction de x, les aires des triangles BEH et BCF.

3° Montre que l'aire de la partie hachurée est égale à l'aire de la partie quadrillée.

Exercice 5



1° Reproduis la figure ci-contre où ABCD est un carré de 6 cm de côté et indique les cotes manquantes.

2° Calcule en fonction de x, l'aire du quadrilatère AFEC, celle du triangle BCE, celle du trapèze BFDC et celle du triangle BFE.

3° Montre que l'aire de la partie hachurée est égale à l'aire de la partie quadrillée.

3/ Calcul littéral

Exercice 1 — Développe:

1°–	$3x(2x-5)$	$(7-3t)10t$	$15a(-2a-6b)$
2°–	$-2x(9x^2-7x+5)$	$5x(3x^2-5x+9)$	$-4a^3(3a^2+2a-6)$
3°–	$2xt(4t+5x+3xt)$	$1,2(-5u^2+2,5u-4,5)$	$-3t^2(-4,2t^4+9,5)$
4°–	$3(\sqrt{2}+5)$	$7(\sqrt{2}-\sqrt{7})$	$6(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$

Exercice 2 — Factorise le plus possible:

1°–	$15c^2-35c+25$	$18y^3-22y^2-5y$	$21t^9-15t^6+12t^3$
2°–	$16t^4-8t^3+4t^2-2t$	$7a^2+a$	$18t^2-18$
3°–	$2x^5-2x^3$	$8n^6-4n^4+2n^2$	$ab^2-a^2b^2+a^2b$
4°–	$18n^7+27n^5-36n^3$	$24a^6b^2-36a^4b^5+60a^2b^4$	$x\sqrt{7}-\sqrt{2}\sqrt{7}$

Exercice 3

a– Calcule $(x+3)x+5(x+3)$ pour x égal à: 3 ; 2 ; 0 ; -1 ; -3 .

b– Développe l'expression précédente et calcule l'expression obtenue pour les mêmes valeurs de x.

c– Factorise la première expression et calcule l'expression obtenue toujours pour les mêmes valeurs de x.

Exercice 4

Mêmes questions que dans l'exercice 3 avec: $2x(x^2-9)+10x$

Exercice 5 — Factorise le plus possible:

1°–	$(x+4)x+10(x+4)$	$(x+1)(x+2)-5(x+2)$	$(2x+1)^2+5(2x+1)$
2°–	$(1-4x)^2+(1+4x)(1-4x)$	$(7x+3)(1-2x)+(7x+3)^2$	$x(x+4)-2x^2$
3°–	$(y+3)(y-5)+(y+3)$	$2y+9-(y-1)(2y+9)$	$2y-6+(y-3)(5y+4)$
4°–	$k(3k+4)-2k(3k+4)$	$(6t+9)(6t-9)+(8t+12)$	$8t-4-8t(3-6t)$

Exercice 6 — Calcule:

$534,256 \times 1,5237 - 534,256 \times 0,5237$

$315\,827 \times 534\,928 + 315\,827 \times 465\,072$

Retrouve le nombre manquant:

$111\,222 \times 347\,217 + 111\,222 \times \ldots\ldots\ldots = 222\,444000$

II/ DOUBLE DISTRIBUTIVITE.

1/ Rappel

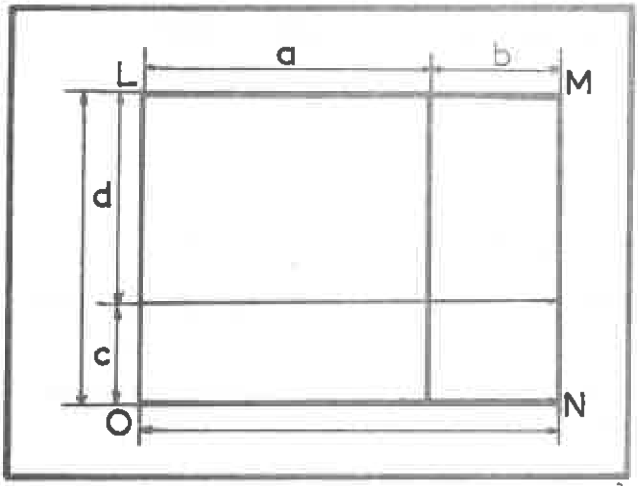
Si a, b, c, d sont des nombres relatifs, on a:

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd}$$

Pour calculer le produit de deux sommes, on multiplie chaque terme de la première par chaque terme de la seconde.

2/ Calculs d'aires

Exercice 1

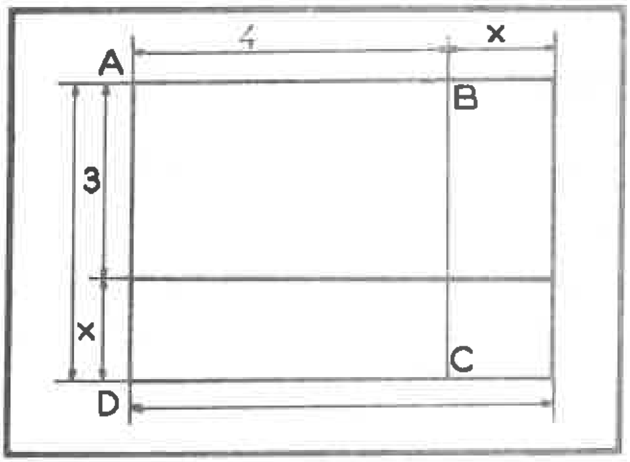


1°- Reproduis le dessin ci-contre et indique les cotes manquantes.

2°- Calcule de deux façons l'aire du rectangle LMNO.

3°- Que retrouves-tu ?

Exercice 2



1°- Reproduis le dessin ci-contre et indique les cotes manquantes.

2°- De combien augmente le périmètre du rectangle ABCD, si on augmente la longueur et la largeur de x ?

Cette augmentation est-elle proportionnelle à x ?

3°- De combien augmente l'aire du rectangle ABCD, si on augmente la longueur et la largeur de x ?

Cette augmentation est-elle proportionnelle à x ?

3/ Problèmes d'arithmétique

Exercice 1

La somme de deux nombres est 250. J'augmente chacun de ces deux nombres de 7. De combien augmente leur produit ?
Justifie le résultat par un calcul algébrique.

Exercice 2

On développe un produit de deux sommes. La première a quatre termes et la seconde trois. Combien de termes obtient-on avant de réduire ?

4/ Calcul littéral

Exercice 1 Développe et réduis si possible:

1°- $(3x+5)(4x+9)$ $(5y-3)(2y-4)$ $(1-4t)(5+3t)$

2°- $(8x-11)(7y-10)$ $(9x+2y)(x-1)$ $(3a-5b)(3a+5b)$

3°- $(6+4t)(1-5t^2)$ $(7t^2-4t)(3t-5)$ $(4x-y)(7x-4y)$

4°- $(1+t^2)(1-t)$ $(1-t^2)(1-t)$ $(1-t^2)(1+t^2)$

5°- $(a-1)(a^2+a+1)$ $(a+1)(a^2-a+1)$ $(3a^2-5a+4)(4a-7)$

6°- $(a^2+ab+b^2)(a-b)$ $(3x-4y)(7x^2-5xy+y^2)$ $(c-2{,}4)(3{,}5c^2-5)$

7°- $(\frac{2}{3}b-\frac{5}{4})(\frac{3}{7}b-2)$ $(\frac{x}{5}-\frac{1}{2})(\frac{2x}{3}+\frac{5}{2})$ $(1-\frac{5}{3}t)\frac{t-4}{5}$

8°- $\frac{2t+4}{7}\times\frac{5t-3}{6}$ $(\frac{3}{5}a+\frac{7}{3}b)(\frac{3}{5}a-\frac{7}{3}b)$

Exercice 2

Développe et réduis $(7b-3)(2b-5)$ et $(3-7b)(5-2b)$.
Que constates-tu ? Explique.

Exercice 3 Développe et réduis:

1°- $(3x-5)(2x+3)-(7x-2)(4-3x)$ $(9x+2)(5x-3)+4(8x-5)$

2°- $(t-5)(4t-6)-(2t-1)(3t+3)$ $(1-4t)(1+4t)-(1-4t)(1-4t)$

Exercice 4 Développe:

$(\sqrt{2}-5)(\sqrt{3}+4)$ $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$ $(2\sqrt{2}-5\sqrt{3})(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

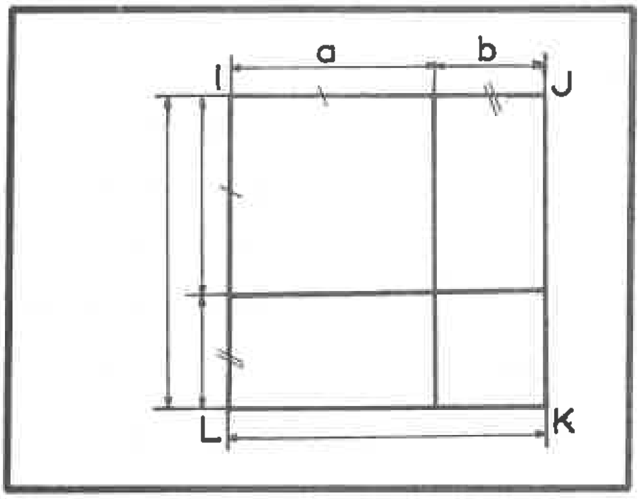
III/ CARRE D'UNE SOMME.

1/ Des développements remarquables

Développe et réduis $(2x+3)^2$ en remarquant que $(2x+3)^2=(2x+3)(2x+3)$.
Calcule de même: $(4x+7)^2$ $(y+8)^2$ $(3x+4)^2$
Que remarques-tu ?
En te servant de cette observation, trouve sans développer le résultat de $(5b+2)^2$ et de $(9+2t)^2$. Vérifie en développant.

Développe et réduis $(a+b)^2$.

2/ Illustration géométrique



a. Reproduis le dessin ci-contre et indique les cotes manquantes.

b. Calcule de deux façons l'aire du rectangle IJKL.

c. Que retrouves-tu ?

3/ A RETENIR

Tu viens d'établir que: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Cette égalité sert très souvent en calcul algébrique, il faut la savoir par coeur, on l'appelle une **égalité remarquable**.

4/ Applications de cette égalité remarquable

En calcul littéral

Développe: $(3x+2)^2$ $(5+7y)^2$ $(8,1+2,3t)^2$ $(8a+3b)^2$
$(5x^2+3z^4)^2$ $(\sqrt{3}x+1)^2$
$(\frac{3}{4}k+\frac{1}{2})^2$ $(\frac{5}{3}a+\frac{7}{9}b)^2$

Un élève a fait des exercices du type précédent, il a trouvé les résultats suivants, à toi de retrouver le point de départ.

$4x^2+20x+25$ $\qquad$ $49+56c+16c^2$ $\qquad$ $64t^2+16t+1$

$0,09t^2+0,3t+0,25$ $\qquad$ $\frac{4}{9}R^2+\frac{4}{15}R+\frac{1}{25}$ $\qquad$ $2u^2+6\sqrt{2}u+9$

Tu es passé d'une somme de produits à un produit de sommes.
Comment s'appelle cette transformation ?

Factorise: $\quad 64+48x+9x^2 \qquad 25x^2+30xy+9y^2 \qquad 16t^2+\frac{24}{5}t+\frac{9}{25}$

En calcul numérique

Calcule: $\quad (\sqrt{3}+7)^2 \qquad (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 \qquad (3\sqrt{2}+4\sqrt{11})^2$

Calcule mentalement 31^2 en décomposant 31 en 30+1.
Calcule de même: $\quad 103^2 \qquad 20,5^2$

Calcule en utilisant ta machine: $2\,371\,821^2$.
(On veut la valeur exacte.)

En aritmétique

On dispose des pions en carré comme ci-dessous:

étape 1 $\qquad$ étape 2 $\qquad$ étape 3 $\qquad$ etc...

Recopie et complète le tableau suivant:

Etape:	1	2	3	....	9	10	11	....	25	26	.....
Nombre de pions											
Augmentation											

Combien faut-il ajouter de pions pour passer de l'étape n à l'étape n+1 ?
Quelle est la somme des 3 premiers nombres impairs, des 4 premiers, des 1000 premiers, des n premiers ?

En géométrie

Un élève trace un carré de 15,2cm de côté. De combien augmente l'aire si il augmente le côté de 1cm ?
(Inutile de sortir ta calculatrice, raisonne et fais le calcul mentalement.)

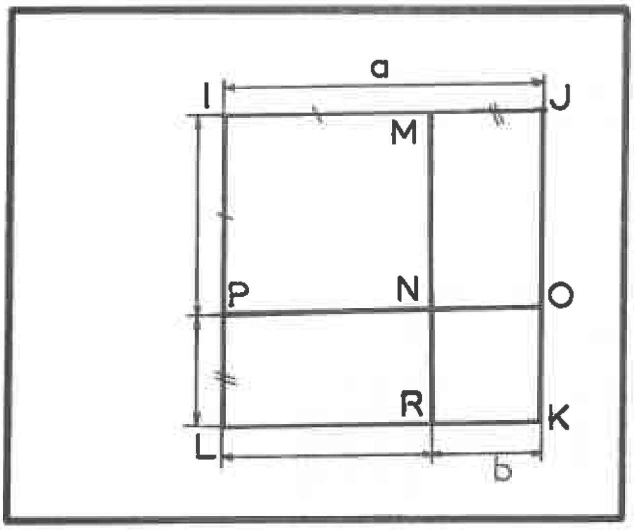
IV/ CARRE D'UNE DIFFERENCE.

1/ Des développements remarquables

Développe et réduis: $(5x-3)^2$ $(3u-7)^2$ $(9-4v)^2$ $(8z-11)^2$
Que remarques-tu ?
Trouve sans développer le résultat des calculs suivants:
$(7k-3)^2$ $(2-3u)^2$ $(5u-7v)^2$
Vérifie en développant.

Développe et réduis $(a-b)^2$.

2/ Illustration géométrique



Exprime de deux manières l'aire du carré IMNP en fonction de a et b.

3/ A RETENIR

Tu viens d'établir une deuxième égalité remarquable. Il faut la savoir par coeur.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

4/ Applications de cette égalité remarquable

Aux développements

Développe: $(4t-3)^2$ $(5-9x)^2$ $(1,3v-4)^2$ $(2,5u-0,8)^2$

$(3a-4b)^2$ $(\frac{3}{5}x-2)^2$ $(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}t)^2$ $(-5y+3)^2$

Aux factorisations

Factorise: $9x^2-12x+4$ $4v^2-20v+25$ $81-72t+16t^2$

$64y^2-16y+1$ $25u^2-30uv+9v^2$ $1,69x^2-0,26x+0,01$

$49+16z^2-56z$ $9u^2-12u+4$ $\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{15}t+\frac{1}{25}$

Un problème

Une pièce de tissu carrée de 1 mètre de côté réduit de x mètre au lavage. Calcule l'aire du morceau de tissu après lavage en fonction de x

Calcul mental

Calcule mentalement 29^2 999^2 $6,8^2$.

V/ DIFFERENCE DE DEUX CARRES.

1/ Des développements remarquables

Développe et réduis $(3x-5)(3x+5)$ $(u-8)(u+8)$

$(2+5t)(2-5t)$ $(3c-4d)(3c+4d)$

Que remarques-tu ?

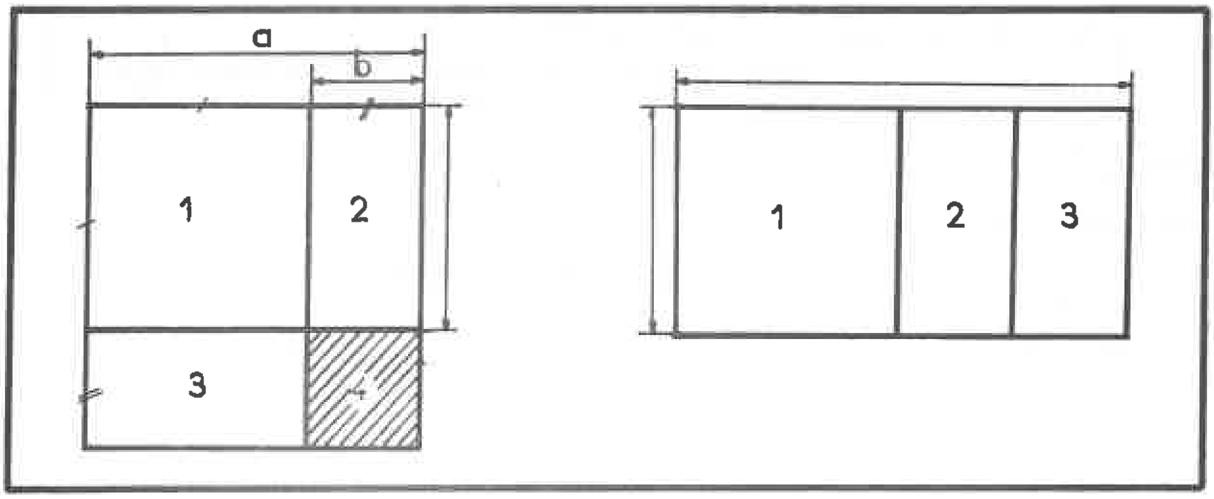
Trouve sans développer le résultat des calculs suivants:

$(t-9)(t+9)$ $(8x+5)(8x-5)$ $(3-4z)(3+4z)$

Vérifie en développant.

Développe et réduis $(a+b)(a-b)$.

2/ Illustration géométrique



Explique pourquoi les figures précédentes illustrent le résultat que tu viens de trouver.

3/ A RETENIR

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

4/ Applications

Aux développements

Développe: $(7x-3)(7x+3)$ $(5u+3v)(5u-3v)$ $(1,9c-3,2)(3,2+1,9c)$

$(\frac{2}{3}k-\frac{1}{5})(\frac{2}{3}k+\frac{1}{5})$ $(\frac{3}{4}t-\frac{3}{7}u)(\frac{3}{7}u+\frac{3}{4}t)$

$(\sqrt{3}t-5)(\sqrt{3}t+5)$

Aux Factoriations

Factorise: $4x^2-49$ $\quad 64-u^2$ $\quad 25x^2-y^2$ $\quad 1{,}21t^2-0{,}36$

$\frac{9}{4}t^2-\frac{4}{49}$ $\quad \frac{1}{9}x^2-\frac{16}{25}y^2$ $\quad (3x-1)^2-25$ $\quad -9+64R^2$

$(x+3)^2-(5x+1)^2$ $\quad (x+1)^2-(x-1)^2$

Au calcul mental

Applique l'égalité remarquable, pour calculer mentalement:

1002×998 $\quad 2{,}8\times3{,}2$ $\quad 105\times95$

A l'arithmétique

Trouve tous les couples (m,n) d'entiers naturels tels que: $m^2-n^2=101$.

VI/ RECAPITULATION.

1 Développement

Méthode

Pour développer: soit tu distribues,
soit tu utilises une égalité remarquable

Exercice

Développe et réduis:

1°- $(5y-2)^2+(4y+3)^2$ $\quad (7a^2-5a+4)(4a^2-5)$

2°- $(3x-5y+1)(4x-3y+2)$ $\quad 8(2u-5)^2$

3°- $7(x^2-5x+4)-3x(4x-5)$ $\quad (5t-3)(2t+4)-(4t-5)(8t-3)$

4°- $(8x-3)^2-(5x+2)(7x-1)+4x-9$ $\quad 4(2t-1)^2-9(2t+1)^2$

2 Factorisation

Méthode

Pour factoriser: soit tu mets un facteur commun en évidence
soit tu utilises une égalité remarquable.

Exercice

Factorise:

1°- $5t^2+10t+5$ $\quad 75y^2-120y+48$

2°- $(7x-3)^2+(5x+4)(7x-3)+7x-3$ $\quad (4a-3b)^2+28a-21b$

Remarque: Tu as intérêt à chercher d'abord un facteur commun.

Exercice 2

Trouve le terme ou le facteur manquant:

1°- $25x^2+30x+\ldots = (5x+3)^2$ $\qquad$ $9t^2 - \ldots +16 = (3t-4)^2$

2°- $2R^2 - \ldots +25 = (\sqrt{2}R-5)^2$ $\qquad$ $\frac{49}{4}u^2 - \ldots + \frac{9}{16}v^2 = (\frac{7}{2}u-\frac{3}{4}v)^2$

3°- $\frac{16}{25}x^2 - \frac{8}{5}x + \ldots = (\ldots - 1)^2$

4°- $\ldots -0{,}9t^2+0{,}09 = (1{,}5t^2-0{,}3)^2$

5°- $(5x-7)(\ldots) = 25x^2-49$ $\qquad$ $(8+9u^2)(\ldots) = 64-81u^4$

6°- $(7t^2-3)(\ldots) = 49t^4-9$ $\qquad$ $(7t^2-3)(\ldots) = 9-49t^4$

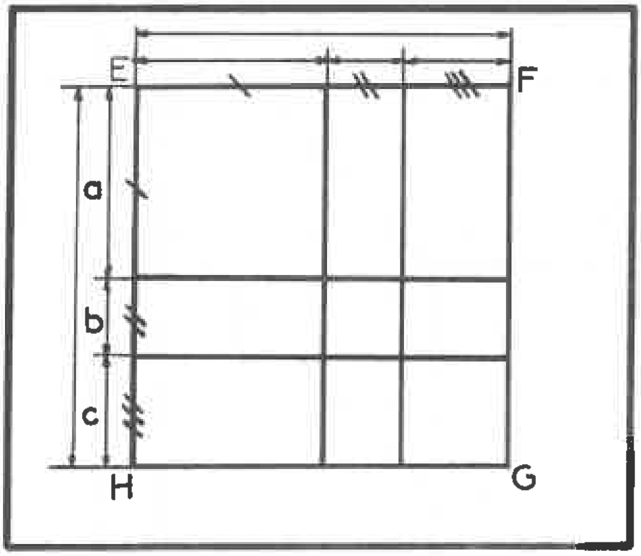
Exercice 3

Développe: $(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)$

Par quelle expression faut-il multiplier $(\sqrt{7}-5)$ pour obtenir un entier
Même question avec $(\sqrt{11}-\sqrt{10})$.

VII/ COMPLEMENTS.

1/ Carré d'une somme de trois termes



a- Reproduis la figure ci-contre et indique les cotes manquantes.

b- En calculant de deux façons l'aire du carré EFGH trouve une nouvelle égalité remarquable.
Tu n'as pasàapprendre cette égalité.

c- Vérifie en développant:

$$(a+b+c)^2$$

d- Applique cette égalité remarquable au développement de:

$$(3x+2y+5)^2$$

2/ Cube d'une somme

a. Reproduis la figure ci-dessous et indique les cotes manquantes.

b. De combien de morceaux est composé ce cube ?

c. Calcule le volume de chacun d'eux.

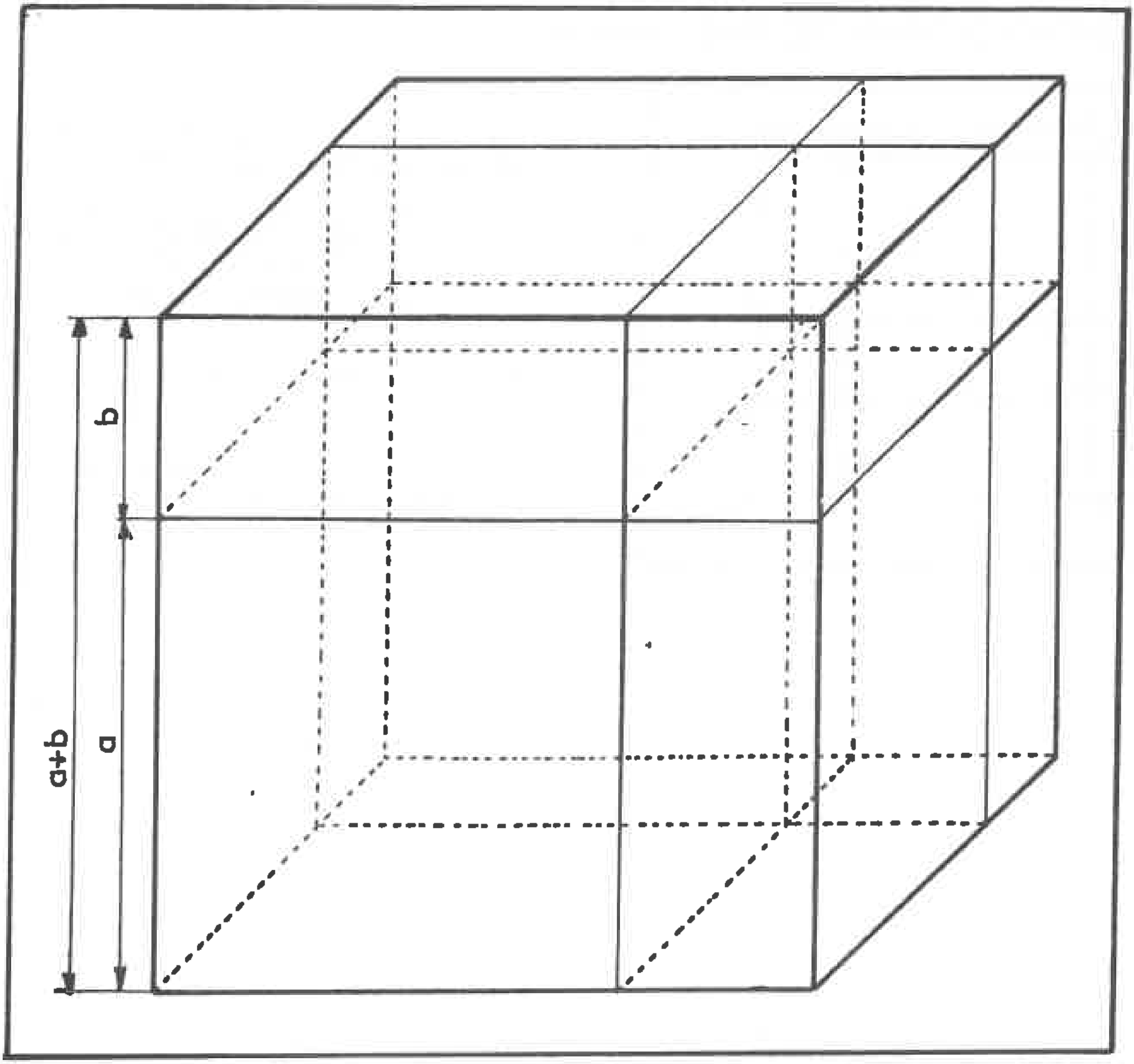
d. En calculant le volume de ce cube de deux façons, trouve une nouvelle égalité remarquable. (Tu n'as pas à apprendre cette égalité.)

e. Vérifie en développant $(a+b)^3$.

f. Applique cette égalité remarquable au développement de $(3x+5)^3$.

Dessin en perspective cavalière

Les lignes de fuite sont à 45°.
Le coefficient de réduction sur les lignes de fuite est $\frac{1}{2}$.

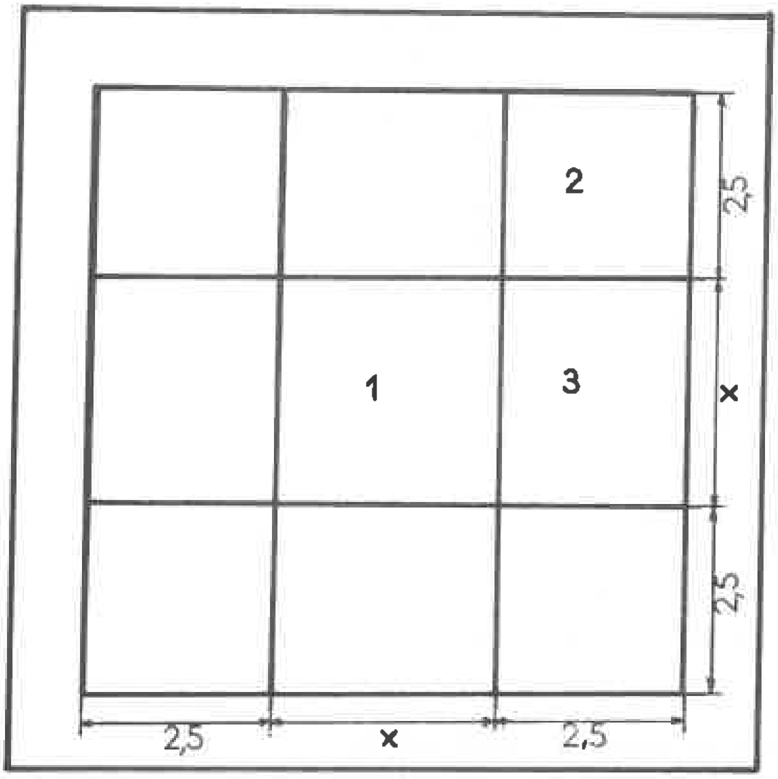


3/ Aire et équation du second degré

Al-Huwarizmi, mathématicien arabe du VIII° siècle, résolvait l'équation $x^2+10x = 39$ de la façon suivante:

Il construisait un carré de côté x et quatre rectangles de côtés x et 2,5. (Il obtenait 2,5 en divisant le coefficient 10 de l'équation par 4.)

Voici la figure obtenue:



-Quelle est l'aire du carré 1 en fonction de x ?

-Quelle est l'aire du carré 2 ?

-Quelle est l'aire du rectangle 3 en fonction de x ?

-Déduis-en que l'aire du grand carré est égale à $x^2+10x+25$.

-Retrouve l'expression précédente par un autre calcul.

Voici maintenant le raisonnement de Al-Huwarizmi:

--<u>Si le côté x du carré 1 est solution de l'équation $x^2+10x = 39$ alors l'aire du grand carré est égale à 64.</u>

-Explique pourquoi.

--<u>Le côté du grand carré est égale à 8 et x est égale à 3.</u>

-Ecris les calculs qu'a dû faire Al-Huwarizmi pour arriver à cette conclusion.

Remarques

1- A-t-on par cette méthode résolu l'équation ?
Que peut-on dire de 13 ($13=8+2\times2,5$) ?

2- Cette méthode s'applique à toute équation du type:
$x^2+ax=b$ avec $a>0$ et $b>0$

Exercice

Résous par cette méthode l'équation: $x^2+2x = 24$.

CONTROLE
Dossier 42

EXERCICE 1 **Développe:**

$A = (7x + 3)^2$ $\quad$ $B = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2$

$C = (6 - 7x)^2$ $\quad$ $D = (\frac{7}{2}x + \frac{2}{3})^2$

$E = (8x + 2y)(8x - 2y)$ $\quad$ $F = (\frac{11}{4}x - 5)(\frac{11}{4}x + 5)$

EXERCICE 2 **Factorise:**

$G = 81x^2 + 126x + 49$

$H = 3a^2 - 12ab + 12b^2$

$I = 81x^2 - 16$

$J = 7(2 - x)(13 + 4x) - (13 + 4x) - (13 + 4x)^2$

$K = (3x - 2)(5x - 1) + 2(7x - 2)(3x - 2) + (2x - 7)(3x - 2)$

EXERCICE 3 **Complète pour avoir des développements remarquables:**

$L = 9x^2 + \dots + 4y^2$

$M = 4x^2 + \dots - 4x$

$N = \dots - 44x + 4x^2$

EXERCICE 4 La somme de deux nombres est 274. Que devient le produit si je diminue chacun de ces nombres de 4 ?

EXERCICE 5 Soient les fonctions f et g définies par:

$f: x \longmapsto f(x) = (3x + 2)^2 - 4(x - 2)^2$

$g: x \longmapsto g(x) = (25x^2 - 20x + 4) - (5x - 2)(4x - 3)$

a_ Développe et réduis $f(x)$ et $g(x)$.

b_ Factorise $f(x)$ et $g(x)$.

c_ Calcule: $f(2)$; $f(0)$; $g(2)$; $g(0)$

puis: $f(\frac{2}{5})$; $f(\frac{-1}{3})$; $g(\frac{2}{5})$; $g(\frac{-1}{3})$

MATHEMATIQUES 3EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N°43

TITRE: RACINES CARREES

3

PREREQUIS

- PYTHAGORE
- DOSSIER 31 ET DOSSIER 33

OBJECTIFS

- DEFINITION DE $\sqrt{A}$ ($A \geqslant 0$)
- PRODUIT ET QUOTIENT DE RADICAUX RACINES CARREES
- PUISSANCES D'ORDRE 2 ET 4 D'UN RADICAL
- RESOLUTION DE $X^2 = A$ ($A \geqslant 0$)

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

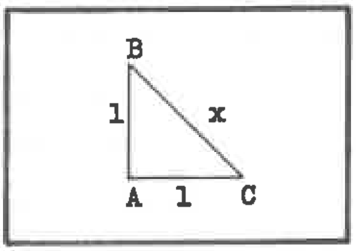
COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 43

RACINES CARREES

1 / APPROCHE

Dès l'Antiquité, le problème suivant se posa :



On chercha donc un nombre x tel que (Pythagore dixit) :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

c'est à dire $1^2 + 1^2 = x^2$

ou encore $x^2 = 2$ (Cet x, étant une longueur, est donc un nombre positif.)

Géométriquement, on savait construire un segment dont la longueur est x.

Mais quelle est l'exacte valeur de x ?

A) Complète le tableau suivant (tu peux utiliser la machine) :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2											

Donne alors un encadrement de x : $\boxed{a_1 < x < a_2}$

B) Complète le tableau suivant :

+0,1

b	a_1		....	a_2
b^2			....	

Trouve alors un encadrement plus fin de x : $\boxed{b_1 < x < b_2}$

C) Recommence encore :

+0,01

c	b_1		....	b_2
c^2			....	

Détermine un encadrement encore plus fin de x : $\boxed{c_1 < x < c_2}$

D) Recommence encore le même exercice avec 3, puis 4 décimales.

Détermine alors les encadrements : $\boxed{d_1 < x < d_2}$

$\boxed{e_1 < x < e_2}$

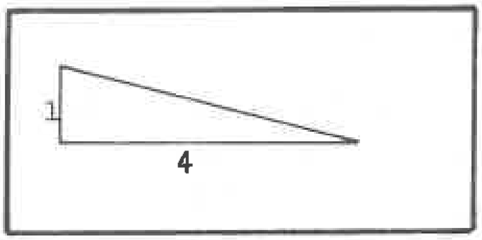
E) Consigne tes résultats dans le tableau suivant :

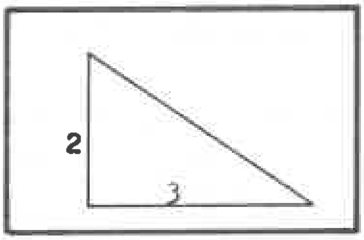
y	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	.... x	e_2	d_2	c_2	b_2	a_2
y^2						....					

Essaie de représenter ce que tu viens de faire sur un dessin en prenant 200 mm pour une unité. Arrives-tu à placer d_1, d_2, e_1 et e_2 ?

F) Et l'on a continué, continué, continué ... Et force fut de constater que, si x était bien un nombre à virgule, x n'était pas un décimal, ni même une fraction. Cela fut même montré (en annexe, tu trouveras un organigramme qui permet de le faire).

G) Reprends les parties A à E pour approcher y tel que $y^2 = 17$ et z tel que $z^2 = 13$.





2 / DEFINITIONS

A) Devant l'impossibilité d'écrire x sous forme décimale ou fractionnaire, on décida de choisir une notation pour x et on écrivit :

$\boxed{x = \sqrt{2}}$ qui se lit "x égale RACINE CARREE DE 2"
ou "x EGALE RADICAL CARRE DE 2"

De même : $y = \sqrt{17}$ et $z = \sqrt{13}$

x, y et z sont des nombres positifs.

Ta calculatrice te donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$; il te suffit de procéder ainsi :

2 $\boxed{\sqrt{}}$

L'écran affiche 1,4142136. D'autres machines affichent 1,414213562.
Dans tous les cas le nombre affiché est positif.

EXERCICE 1 : Calcule de même $\sqrt{17}$ et $\sqrt{13}$.

Donne une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de $\sqrt{15}$.

Donne une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $\sqrt{12}$.

Donne une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de $\sqrt{13}$.

Donne une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de $\sqrt{16}$.

Donne un encadrement à 10^{-4} près de $\sqrt{11}$, puis de $\sqrt{47}$.

Remarque : Trouve x tel que $x^2 = -9$. Est-ce possible ? Pourquoi ?

$$\boxed{x \text{ positif}} \qquad \boxed{x \text{ négatif}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\boxed{x^2 \; .....}$$

$$\boxed{\text{Un carré est toujours ....}}$$

Ta machine tient compte de cela. Exécute la séquence suivante :

12 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\sqrt{}}$. Qu'affiche-t-elle ?

$\boxed{\textbf{Conclusion : ON NE PEUT PRENDRE LA RACINE CARREE QUE DE NOMBRES POSITIFS.}}$

B) DEFINITIONS

Toutes les constatations précédentes conduisent à donner la définition suivante :

> La racine carrée d'un nombre positif ou nul x, notée $\sqrt{x}$, est le nombre positif ou nul y dont le carré est x.
>
> $\boxed{\text{Si } y = \sqrt{x} \text{ alors } x = y^2}$ $\boxed{\text{Si } x = y^2 \text{ alors } y = \sqrt{x}}$
>
> avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

Exemple : $y = \sqrt{15}$ $\quad 15 = y^2 = (\sqrt{15})^2$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre positif ou nul, on a } (\sqrt{x})^2 = x}$$

Remarque : Calcule les nombres suivants :

$$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}} \quad \text{et} \quad ((((((((x)^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2$$

Que remarques-tu ? Peux-tu expliquer ce résultat ?

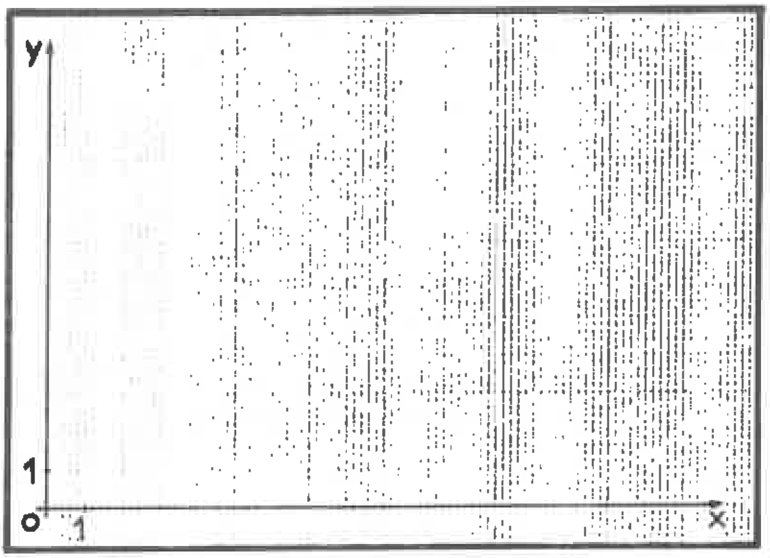
C) REMARQUE IMPORTANTE

Complète le tableau ci-contre

a	a^2	$\sqrt{a^2}$
12,5		
-12,5		
3		
-3		
0		

Construis la courbe représentative de $f : x \longmapsto x^2$ pour $x \geqslant 0$.

Explique comment tu peux trouver $\sqrt{a}$ lorsque tu connais a ($a \geqslant 0$).

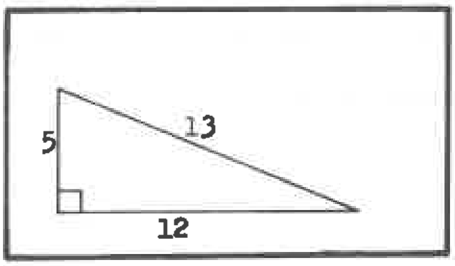


EXERCICE 2 : Calcule (sans calculatrice) :

$$\sqrt{12^2} \qquad \sqrt{17{,}5^2} \qquad \sqrt{(-14{,}8)^2} \qquad \sqrt{(-25)^2} \qquad \sqrt{-11^2}$$

3 / OPERATIONS SUR LES RACINES

A) ADDITION / SOUSTRACTION



Calcule $\sqrt{25} + \sqrt{144} =$

$\sqrt{25 + 144} =$

Quel lien fais-tu avec le triangle rectangle ci-dessus ?

Conclusion : $\boxed{\text{En général on a } \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Retiens bien cela.

De même calcule $\sqrt{3^2 + 4^2}$ et $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$

$\sqrt{15^2 + 20^2}$ et $\sqrt{15^2} + \sqrt{20^2}$

Recommence avec $\sqrt{289 - 225}$, puis $\sqrt{289} - \sqrt{225}$

et $\sqrt{400 - 256}$, puis $\sqrt{400} - \sqrt{256}$

Conclusion : En général ....

B) PRODUIT

a) Cherchons à déterminer $\sqrt{17} \cdot \sqrt{11}$

Examine le calcul suivant :

$$(\sqrt{17}\ .\ \sqrt{11})^2 = (\sqrt{17}\ .\ \sqrt{11})(\sqrt{17}.\ \sqrt{11}) = (\sqrt{17}.\ \sqrt{17})(\sqrt{11}.\sqrt{11})$$
$$= (\sqrt{17})^2.(\sqrt{11})^2 = 17.11 = (\sqrt{17.11})^2$$

Donc $\sqrt{17}\ .\sqrt{11} = \sqrt{17.11}$

b) Recommence avec $\sqrt{13}\ .\sqrt{11,4}$

c) Généralise avec $\sqrt{a}\ .\sqrt{b}$ où $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

d) <u>Conclusion</u>

$\boxed{\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad a \geqslant 0\ ,\ b \geqslant 0}$ et donc $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b} \quad a \geqslant 0\ ,\ b \geqslant 0}$

(La deuxième égalité a une grande utilité, comme tu le verras plus loin.)

EXERCICE 3 : Exécute les séquences suivantes :

1) 17 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x}$ 11 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ 17 $\boxed{x}$ 11 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{MR}}$

2) 17 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x}$ 11 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{(}$ 17 $\boxed{x}$ 11 $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$

Dans le cas 1), tu calcules $\sqrt{17}.\sqrt{11}$, puis $\sqrt{17.11}$ et tu compares les résultats. Sont-ils identiques ?

Dans le cas 2), quel calcul fais-tu ? Que devrais-tu trouver ? Que trouves-tu ?
Recommence avec l'exemple du b). Qu'en penses-tu ?
Tu viens de toucher du doigt <u>les limites de la calculatrice</u>.

EXERCICE 4 : Calcule sans calculatrice :

$\sqrt{3}.\sqrt{12}$ $\quad \sqrt{2}.\sqrt{32}$ $\quad \sqrt{8}.\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{27}.\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{18}.\sqrt{8}$

e) La deuxième partie de la conclusion du d) sert surtout à l'extraction de racines carrées. On recherche dans chaque nombre les carrés des premiers nombres entiers : 4, 9, 16, 25 ...

<u>Exemple</u> : $\sqrt{63} = \sqrt{9.7} = \sqrt{9}.\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

$\sqrt{98} = \sqrt{49.2} = \sqrt{49}.\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{3571} = \sqrt{121.31} = \sqrt{121}.\sqrt{31} = 11\sqrt{31}$

EXERCICE 5 : En t'inspirant des 3 exemples ci-dessus, calcule (sans calculatrice) :

$\sqrt{448}$ $\quad \sqrt{147}$ $\quad \sqrt{75}$ $\quad \sqrt{192}$ $\quad \sqrt{80}$ $\quad \sqrt{245}$

$\sqrt{1875}$ $\quad \sqrt{6125}$ $\quad \sqrt{2187}$ $\quad \sqrt{3766}$

C) QUOTIENT

a) Observe :

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{11})^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{11}{3} = \left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^2$$

Donc $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{11}{3}}$

b) Généralise ce résultat à $a \geqslant 0$ et $b > 0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \geqslant 0 & \\ & \sqrt{\frac{a}{b}} = \ldots\ldots \\ b > 0 & \end{array}}$$

c) Exemples :

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

ou $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

EXERCICE 6 : Calcule :

$$\sqrt{\frac{15}{75}} \qquad \sqrt{\frac{36}{49}} \qquad \sqrt{\frac{361}{81}} \qquad \sqrt{\frac{289}{64}} \qquad \sqrt{\frac{1183}{847}} \qquad \sqrt{\frac{2209}{81}} \qquad \sqrt{\frac{9409}{10201}} \qquad \sqrt{\frac{75}{108}}$$

D) PANACHAGE

Observe l'exemple suivant :

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \cdot \sqrt{\frac{1331}{27}} = \sqrt{\frac{3}{11} \cdot \frac{1331}{27}} = \sqrt{\frac{1.1331}{11.9}} = \sqrt{\frac{1.121}{1.9}} = \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}$$

EXERCICE 7 : En t'inspirant de l'exemple précédent, calcule :

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{48} \qquad \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{75} \qquad 3\sqrt{\frac{3}{32}} \cdot \sqrt{\frac{2}{27}}$$

$$2\sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{343}{125}} \qquad 4\sqrt{\frac{39}{7}} \cdot \sqrt{\frac{91}{75}}$$

4 / DES EXERCICES

EXERCICE 8 : Ecris sous forme de racine carrée d'un entier naturel

$$3\sqrt{2} \qquad 6\sqrt{3} \qquad 3\sqrt{5} \qquad 5\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{12} \qquad 3\sqrt{6} \qquad 2\sqrt{8} \qquad 4\sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{432}}{33} \qquad \frac{\sqrt{300}}{5} \qquad \frac{\sqrt{294}}{7} \qquad \frac{\sqrt{847}}{11}$$

EXERCICE 9 : Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$:

$\sqrt{8}$ $\sqrt{12}$ $\sqrt{27}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt{98}$ $\sqrt{120}$ $\sqrt{300}$ $\sqrt{500}$ $\sqrt{1000}$ $\sqrt{7500}$

EXERCICE 10 : Simplifie l'écriture de :

$\sqrt{\frac{1}{27}}.\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\sqrt{\frac{9}{10}}.\sqrt{\frac{40}{81}}$ $\sqrt{80}.\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\sqrt{12}.\sqrt{27}$ $\sqrt{9}.\sqrt{76}$

$\sqrt{12}.\sqrt{75}$ $\sqrt{28}.\sqrt{63}$ $\sqrt{\frac{9}{10}}.\sqrt{\frac{410}{36}}$

EXERCICE 11 : Calcule les carrés suivants :

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$ $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$ $(7\sqrt{5}-8\sqrt{3})^2$

EXERCICE 12 : Développe :

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

EXERCICE 13 : a) Construis la représentation graphique de $g : x \longmapsto g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$
(Echelle : abscisse - 1 cm par unité
ordonnée - 4 cm par unité). Voir page 4 -11
Tu feras varier x de 0 à 18

b) Trace la représentation graphique de $h : x \longmapsto h(x) = x$, sur le même dessin.

c) Compare $\sqrt{x}$ et x pour x compris entre 0 et 1.

d) Compare $\sqrt{x}$ et x pour x 1.

e) Construis la représentation graphique de $g : x \longmapsto g(x) = \sqrt{x}$ pour x compris entre 0 et 1 en prenant 10 cm par unité en abscisse et en ordonnée.

EXERCICE 14 : Calcule les produits suivants :

$\sqrt{98}.\sqrt{2}$ $\sqrt{21}.\sqrt{84}$ $\sqrt{45}.\sqrt{180}$ $\sqrt{0,08}.\sqrt{0,08}$

$\sqrt{32}.\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{75}.\sqrt{\frac{1}{27}}$ $5\sqrt{72}.3\sqrt{50}$ $7\sqrt{\frac{3}{10}}.\sqrt{\frac{45}{18}}$

EXERCICE 15 : Calcule les nombres suivants :

$\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{4}$ $\sqrt{1,21}+\sqrt{0,49}-\sqrt{0,64}$ $\sqrt{36}-\sqrt{16}-\sqrt{196}$

EXERCICE 16 : Ecris chacun des nombres suivants sous la forme a b où a et b sont des entiers naturels, et où b est le plus petit possible :

$\sqrt{108}$ $\sqrt{252}$ $\sqrt{245}$ $\sqrt{8000}$ $\sqrt{192}$ $\sqrt{242}$ $\sqrt{1805}$

$\boxed{\text{EXERCICE 17}}$: En t'inspirant de ce qui a été fait dans l'exercice 16, écris chacun des nombres suivants sous la forme la plus simple possible :

$$3\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{72} - 2\sqrt{128} \qquad 4\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75}$$

$$8\sqrt{80} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$$

$\boxed{\text{EXERCICE 18}}$: Calcule :

a) $(1 + \sqrt{3})^2 \qquad (2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})^2 \qquad (5 + 2\sqrt{7})^2$

b) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 \qquad (2\sqrt{5} - 3)^2 \qquad (5\sqrt{2} - 7\sqrt{3})^2$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \qquad (3\sqrt{7} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} + 2\sqrt{2})$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - 1) \qquad (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

e) $(\sqrt{3} + 2)^2 - (\sqrt{3} - 2)^2 \qquad (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

$\boxed{\text{EXERCICE 19}}$: Détermine la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de :

$$\sqrt{14} \qquad \sqrt{25{,}8} \qquad \sqrt{1{,}789} \qquad \sqrt{19{,}8632} \qquad \sqrt{\frac{174}{138}} \qquad \sqrt{\frac{1774}{257}}$$

5 / RESOLUTION DE L'EQUATION $x^2 = a \; (a \geqslant 0)$

A) Construis soigneusement la représentation graphique de $f : x \longmapsto f(x) = x^2$ pour x compris entre -5 et 5. Tu prendras un repère orthonormé avec 1 unité = 1cm

B) Résous graphiquement l'équation $x^2 = 12{,}25$
Quel est l'ensemble des solutions ? $S = \{\ldots\ldots\}$

C) Recommence avec l'équation $x^2 = 17$

D) Justifie les étapes de l'organigramme:

$$\boxed{x^2 = 17}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x^2 = (\sqrt{17})^2}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x^2 - (\sqrt{17})^2 = 0}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{(x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17}) = 0}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{x - \sqrt{17} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{17} = 0}$$
$$\downarrow$$

E) L'équation $x^2 = 17$ a donc 2 solutions. L'une positive qui est $\sqrt{17}$, l'autre négative qui est $-\sqrt{17}$

F) Résous de même $x^2 = 16$

<u>**ATTENTION**</u> : $\boxed{\sqrt{16} \text{ est toujours égale à } 4}$. <u>NE JAMAIS DIRE</u> QUE $\sqrt{16}$ EST EGALE A +4 OU -4.

$\boxed{\text{EXERCICE 20}}$: Résous les équations suivantes :

$x^2 = 25$	$2x^2 = 128$	$-4x^2 = -361$	$11x^2 = -121$	
$x^2 = 5$	$x^2 - 100 = 0$	$x^2 = -49$	$3x^2 = \frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}x^2 - 12 = 0$
$\frac{2x^2}{3} = 96$	$-7x^2 + 4 = 0$	$x^2 - 121 = 0$	$3x^2 = -48$	

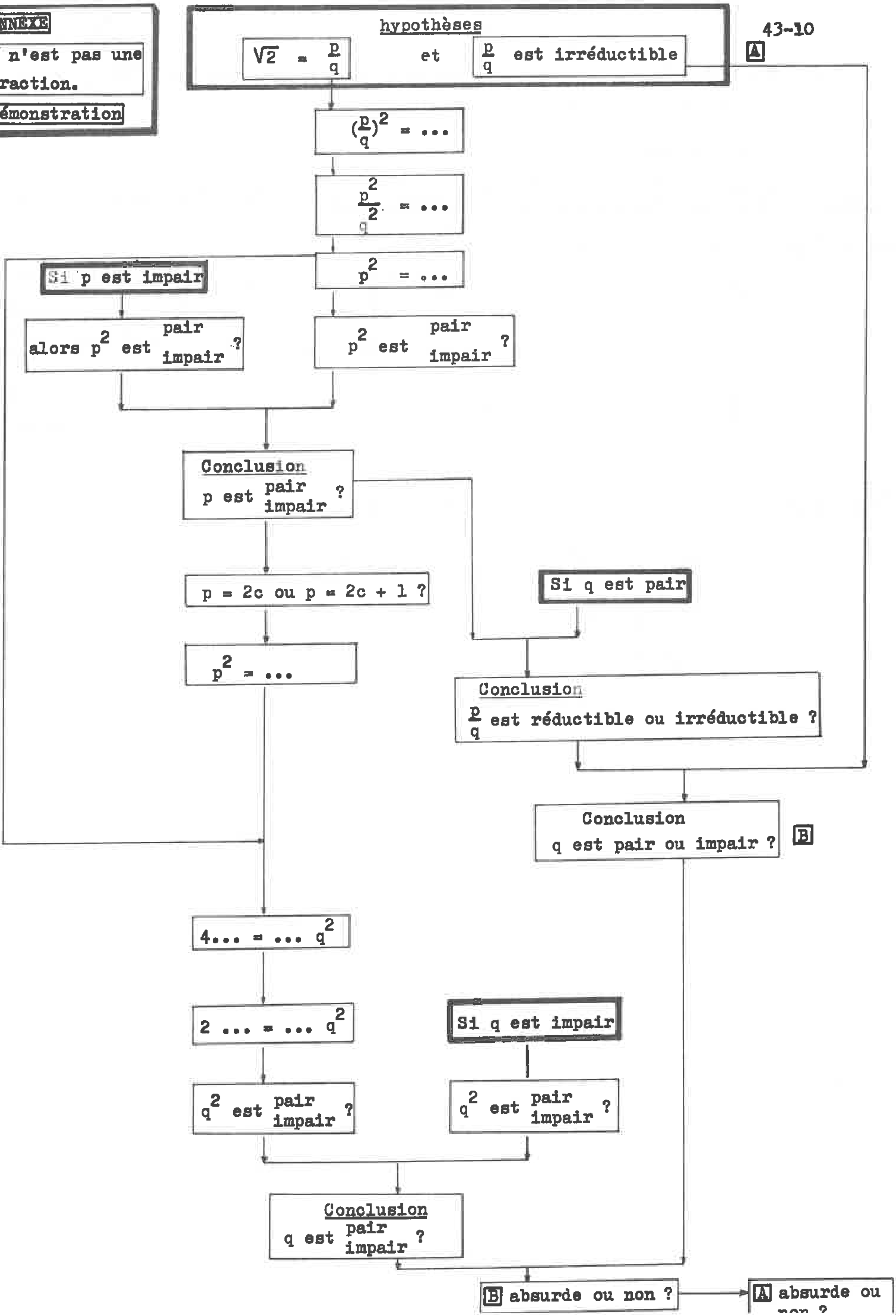
$\boxed{\text{EXERCICE 21}}$: Résous également les équations suivantes :

$x^2 = 37$	$x^2 = -15$	$x^2 = 0$
$3x^2 = 47$	$5x^2 = 125$	$9x^2 = -18$
$-7x^2 = -39$	$2x^2 + 7 = 18$	$25x^2 - 8 = 8$

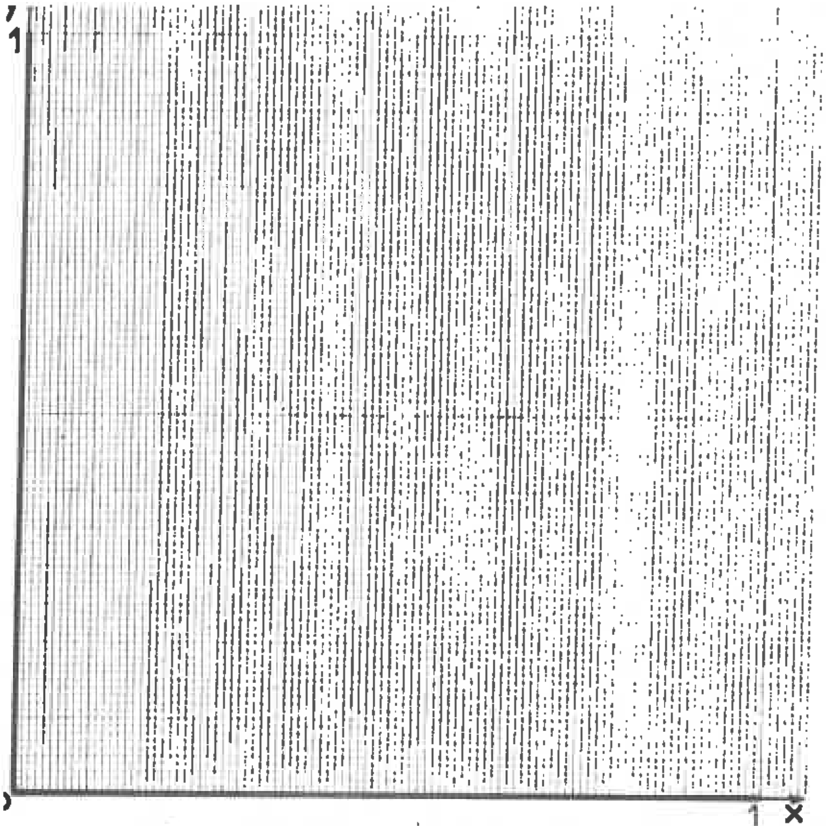
ANNEXE

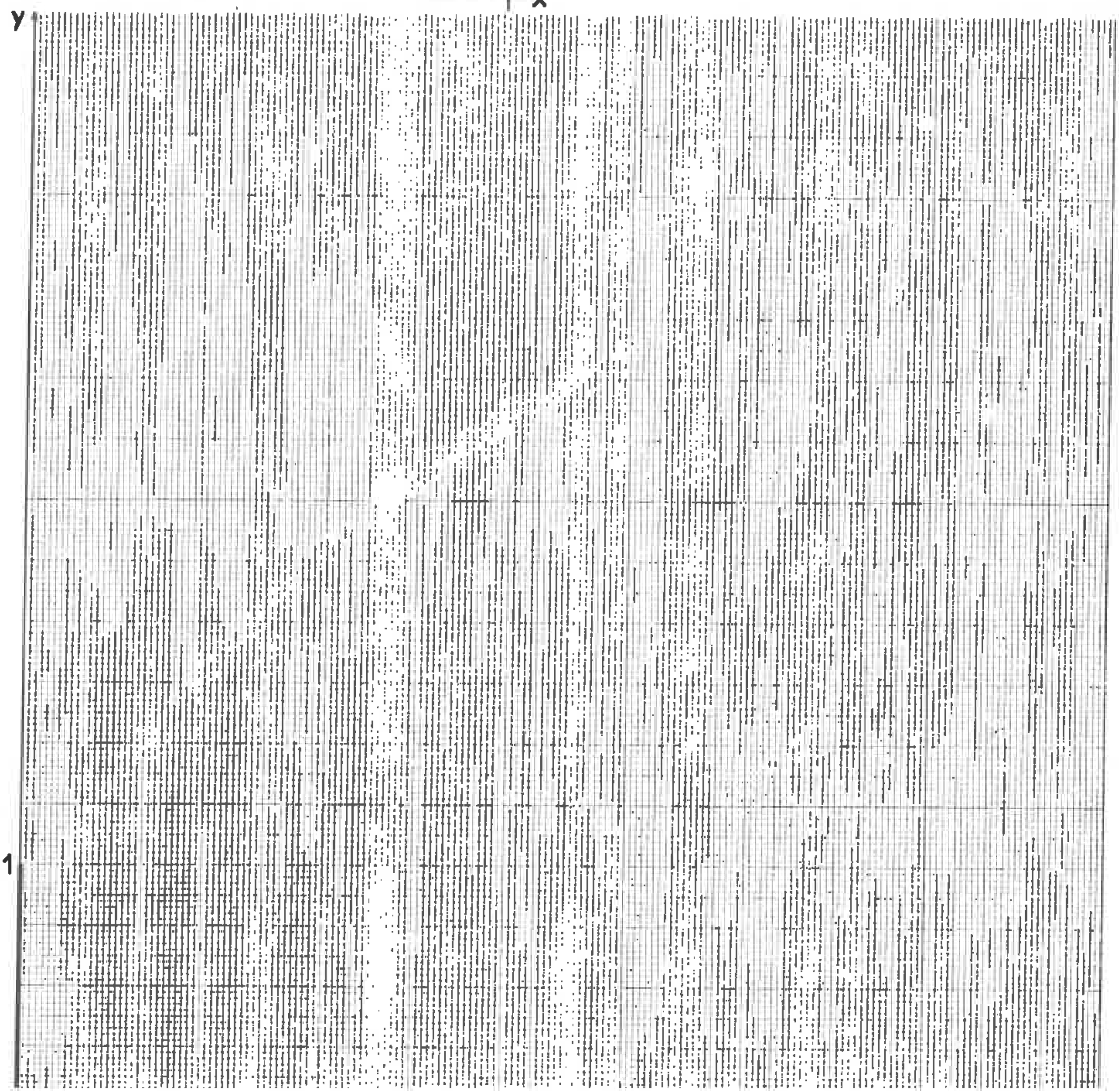
$\sqrt{2}$ n'est pas une fraction.

Démonstration



EXERCICE 13





CONTROLE 43 - A

EXERCICE 1 : Calcule les produits suivants :

a) $\sqrt{30}\sqrt{120}$ $\qquad$ $\sqrt{19}\sqrt{76}$ $\qquad$ $80\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{27}}\sqrt{\frac{3}{4}}$

b) $4\sqrt{\frac{26}{5}}\sqrt{\frac{65}{8}}$ $\qquad$ $5\sqrt{\frac{8}{10}}\sqrt{\frac{40}{32}}$

EXERCICE 2 : Calcule les nombres suivants :

$\sqrt{25} + \sqrt{144} - \sqrt{16}$ $\qquad$ $\sqrt{0,25} + \sqrt{0,16} - \sqrt{0,09}$

EXERCICE 3 : Ecris chacun des nombres suivants sous la forme a b, où a et b sont des entiers naturels, et où b est le plus petit possible :

$\sqrt{54}$ $\qquad$ $\sqrt{40}$ $\qquad$ $\sqrt{1323}$ $\qquad$ $\sqrt{2025}$ $\qquad$ $\sqrt{8000}$ $\qquad$ $\sqrt{1089}$

EXERCICE 4 : En t'inspirant de ce qui a été fait dans l'exercice 3, écris chacun des nombres suivants sous la forme la plus simple possible :

$2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$ $\qquad$ $5\sqrt{54} - 3\sqrt{24} + 2\sqrt{6}$

EXERCICE 5 : Calcule :

a) $(\sqrt{5} + 3)^2$ $\qquad$ $(2\sqrt{5} + 7\sqrt{2})^2$

b) $(3\sqrt{3} - 2)^2$ $\qquad$ $(6\sqrt{2} - 5\sqrt{5})^2$

c) $(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})$ $\qquad$ $(\sqrt{15} + 7)(\sqrt{15} - 7)$

d) $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 2)$ $\qquad$ $(2\sqrt{3} + 7\sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

EXERCICE 6 : Résous les équations suivantes :

a) $x^2 = 29$ $\qquad$ $x^2 = -6$ $\qquad$ $x^2 = 0$

b) $-5x^2 = -125$ $\qquad$ $\frac{5}{3}x^2 = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $-18x^2 = 46$

c) $(x + 3)^2 = 6x + 25$

EXERCICE 7 : (ABC) est un triangle rectangle en A.

a) AB = 7 ; AC = 3. Donne une valeur approchée de BC à 10^{-3} près.

b) AB = 15 ; BC = 23. Donne une valeur approchée de AC à 10^{-3} près.

CONTROLE 43 - B

EXERCICE 1 : Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{\frac{2030}{1575}} \qquad B = \frac{\sqrt{7191}}{\sqrt{408}}$$

EXERCICE 2 : Donne une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès de :

$$C = \sqrt{\frac{8342}{63}}$$

EXERCICE 3 : Ecris sous forme $a\sqrt{b}$ les quantités suivantes :

$$D = \sqrt{252} \qquad E = \sqrt{130000} \qquad F = \sqrt{39204}$$

EXERCICE 4 : Donne une écriture plus simple de :

$$G = 4\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75} \qquad H = 3\sqrt{80} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$$

EXERCICE 5 : Soit x un nombre.

a) Calcule $y = x^2 - 4x + 5$ pour $x = \sqrt{2}$

b) Donne un encadrement de y sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

EXERCICE 6 : Complète le tableau suivant :

L'expression ↓ est égale à →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	une autre à préciser.
$(\sqrt{2})^2$						
$\frac{1}{\sqrt{4}}$						
$\frac{(-2)}{\sqrt{(-2)^2}}$						
$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$						
$(1 + \sqrt{2})^2 - 2$						

EXERCICE 7 : a) Un triangle équilatéral a 5 cm de côté. Détermine sa hauteur.

b) Un héxagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. Détermine son aire.

c) Reprends le même problème avec un triangle équilatéral de a cm de côté.et un cercle de b cm de rayon.

EXERCICE 8 : Résous les équations suivantes :

(1) $3x^2 = 4$ (2) $-4x^2 = -25$

(3) $-7x^2 = 21$ (4) $-3x^2 = -71$

EXERCICE 9 : Dessine un carré dont l'aire est égale à 2, puis un carré dont l'aire est égale à 5. Dans chaque cas tu laisseras les tracés de constructions apparents.

MATHEMATIQUES 3EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 44

TITRE: VECTEURS - TRANSLATIONS

3

PREREQUIS

- DOSSIER 29

OBJECTIFS

- EGALITE VECTORIELLE
- EGALITE VECTORIELLE ET PARALLELOGRAMME
- RELATION DE CHASLES
- COMPOSITION DE TRANSLATIONS
- COORDONNEES D'UN VECTEUR
- COORDONNEES DE L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE TRANSLATION

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 44

VECTEURS-TRANSLATIONS

1/ ACTIVITES DE REVISION

Activité 1 Reconnaître des transformations

Vous allez retrouver ici des schémas connus. Vous indiquerez pour chacun (1 à   ) quelle transformation géométrique permet de passer de la figure F-1 à la figure F-2, en faisant apparaître clairement les éléments qui la caractérisent.

Dans les cas où vous identifierez une translation, vous ferez apparaître sur F-1, 2 points distincts A et B de votre choix, ainsi que leur image A' et B' sur F-2. Quelle est la nature du quadrilatère AA'B'B ?

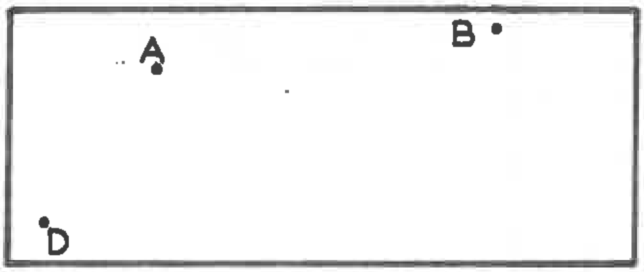
Activité 2 Des frises

La cocotte subit diverses translations. Dessinez son image, puis l'image de l'image, puis...On obtient une frise.

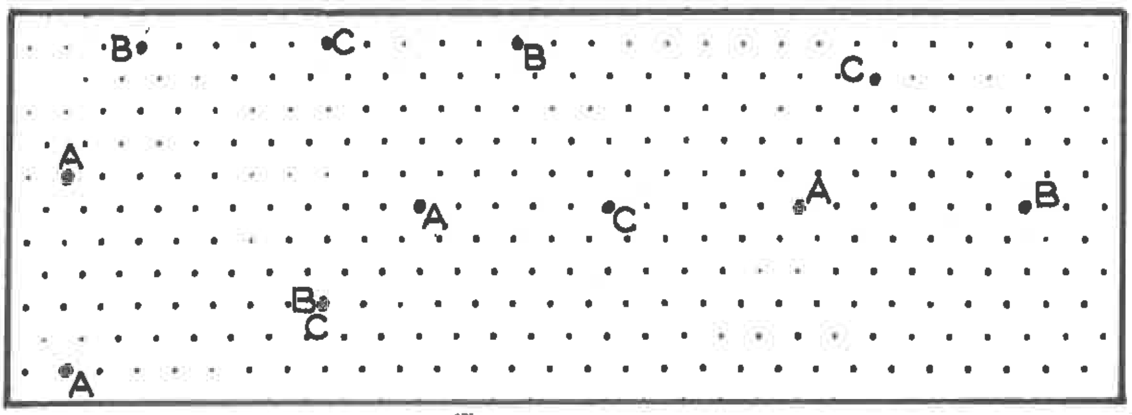
Activité 3 Le parallélogramme, pour quoi faire?

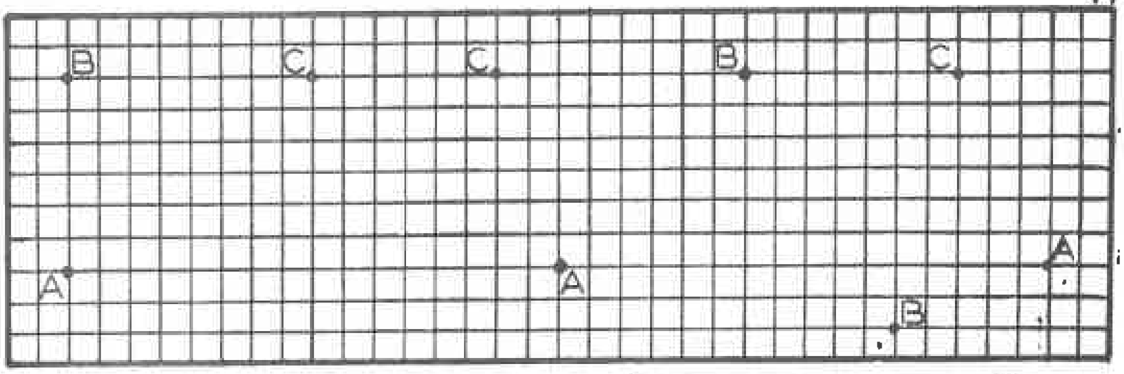
1/ Tracez un parallélogramme ABCD. Rappelez la propriété essentielle du point d'intersection des diagonales.

2/ ABCD est un parallélogramme.Déterminez la position du point C. Expliquez <u>soigneusement</u> la ou les méthodes de construction.

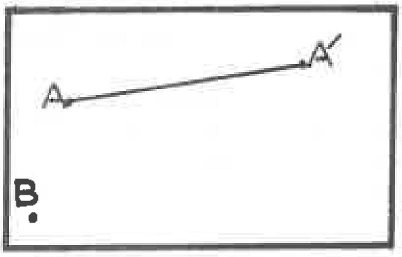


3/ Dessinez des parallélogrammes ABCD.

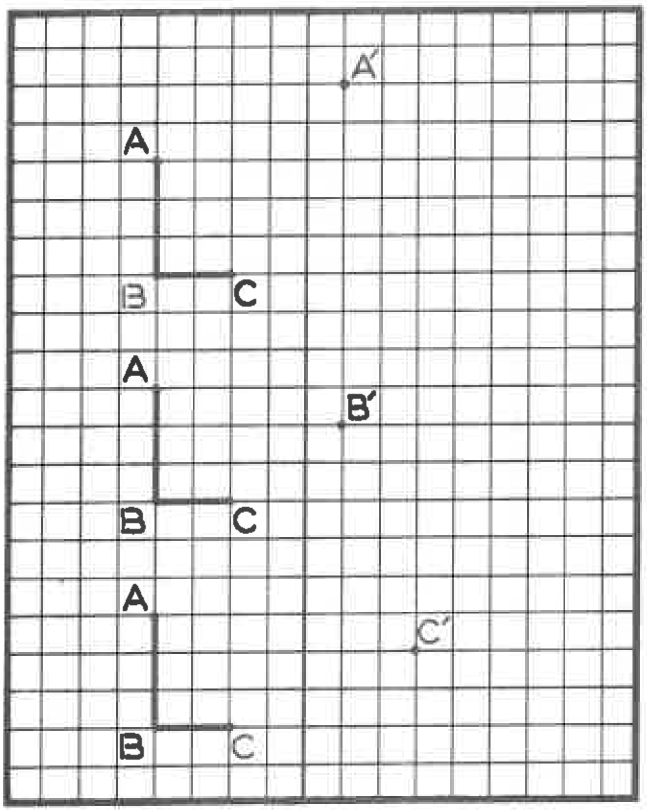




4/ A′ est l′image de A pour une certaine translation Déterminez l′image B′ de B pour la même translation. Expliquez. (Revenez au besoin à l′activité 1)



Activité 4 **Egalité de vecteurs**



Dessinez B′ et C′ images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Dessinez A′ et C′ images de A et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$.

Dessinez A′ et B′ images de A et B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

Vous remarquerez que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sont associés à la même translation. Nous dirons qu′ils sont égaux:

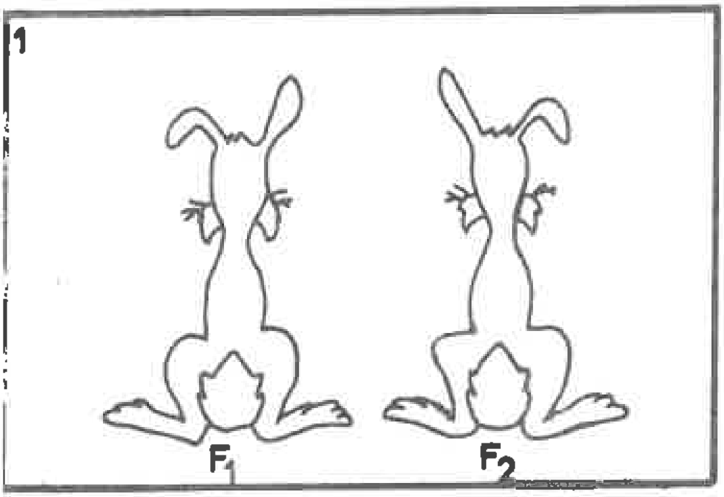
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$

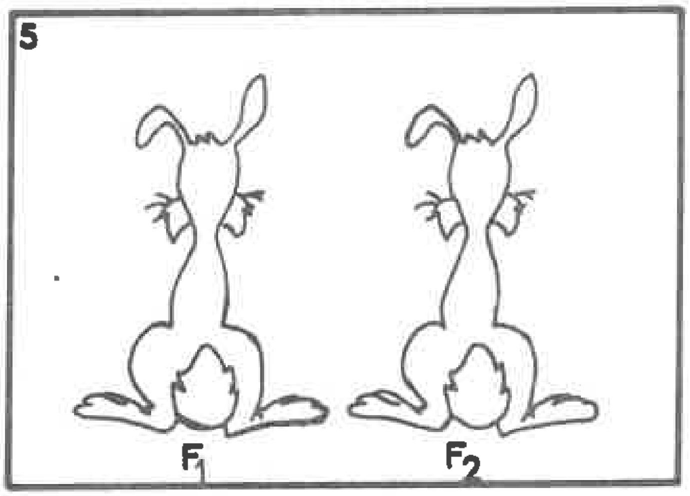
Exercice : Soient A et B 2 points, A′ et B′ les images respectives pour une certaine translation

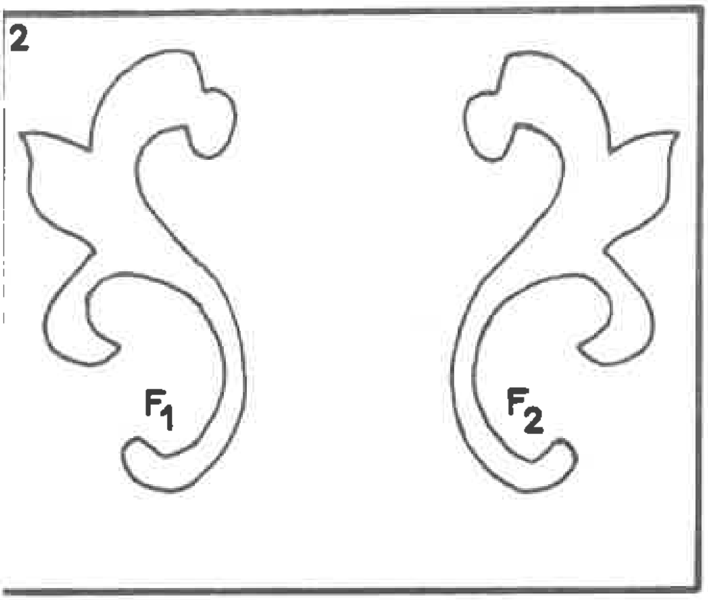
- Pourquoi peut-on écrire $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$?
- Nature du quadrilatère AA′B′B.

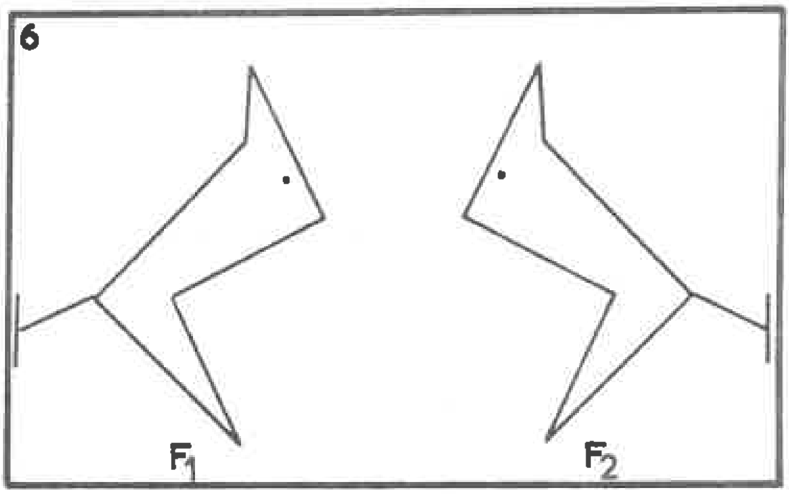
ACTIVITE 1

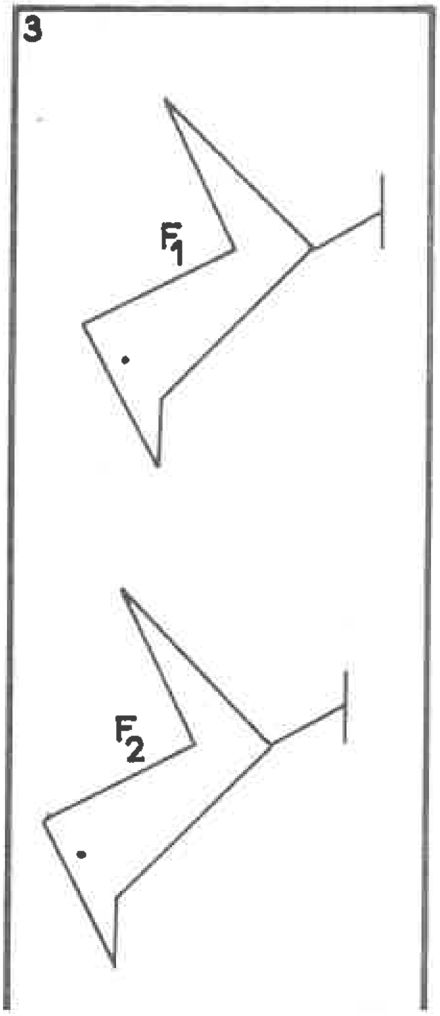
DES TRANSFORMATIONS

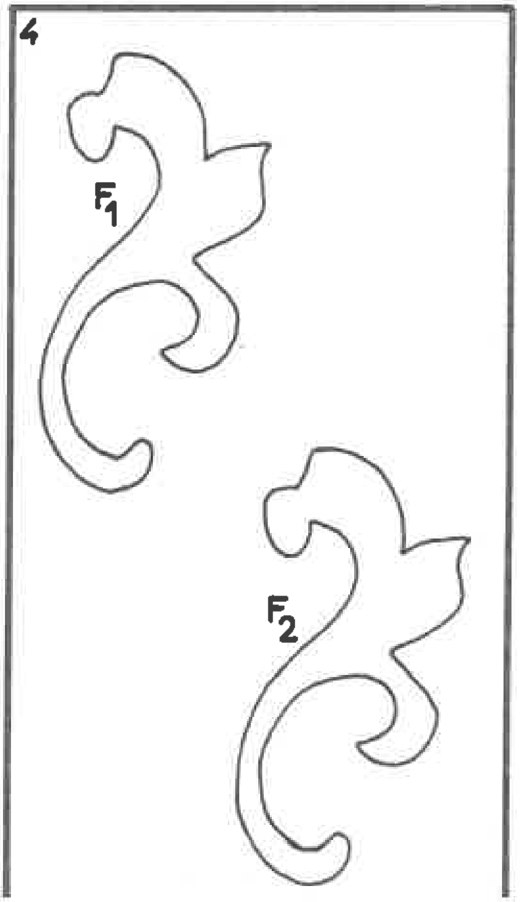


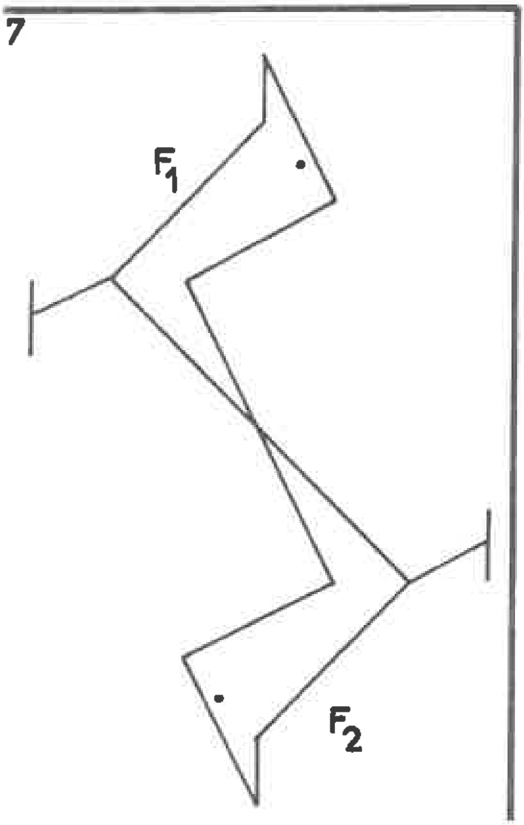




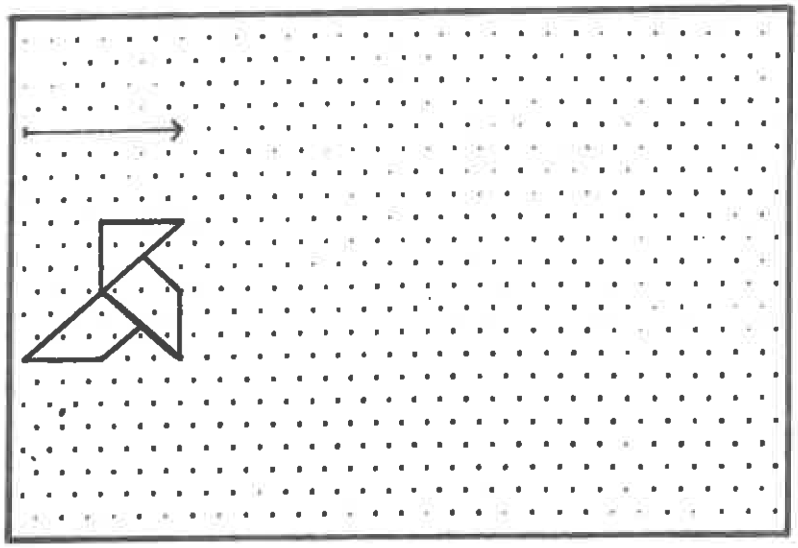


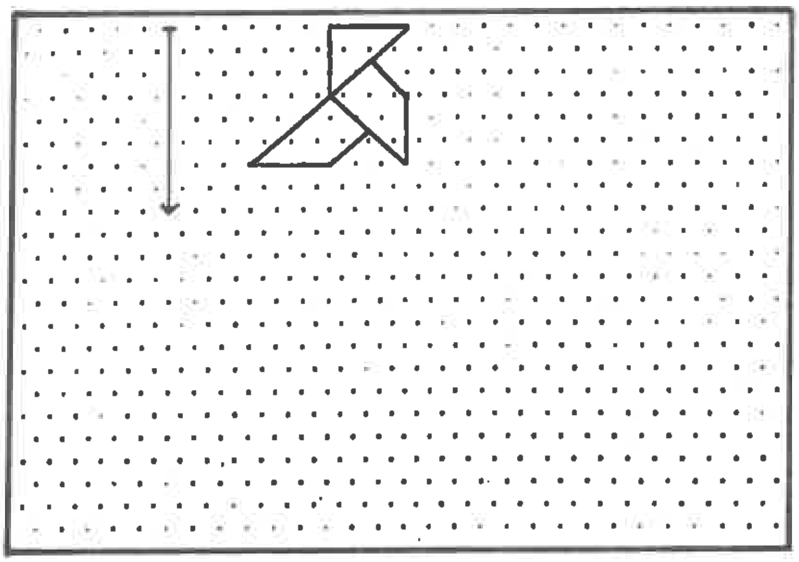


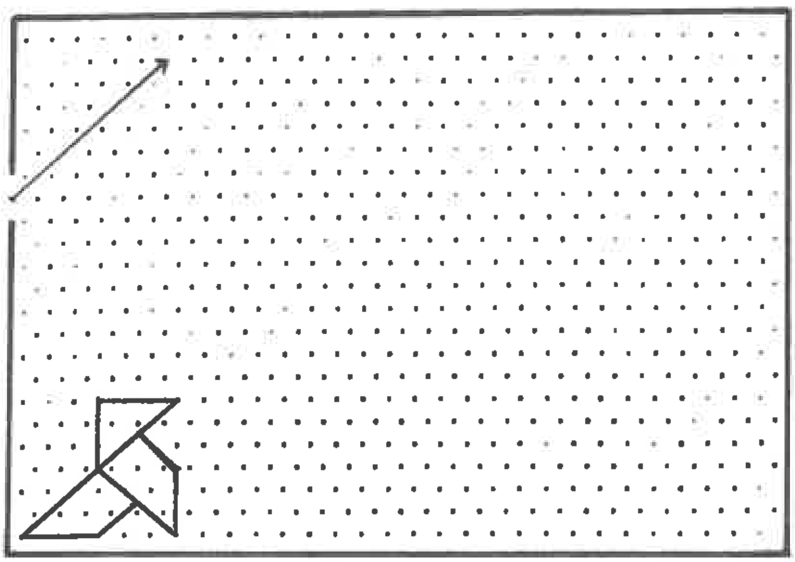




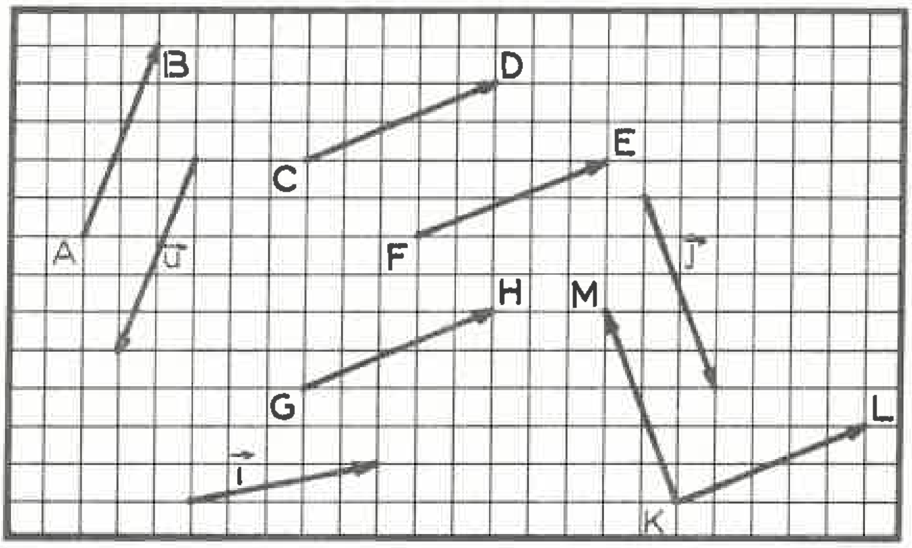
ACTIVITE 2







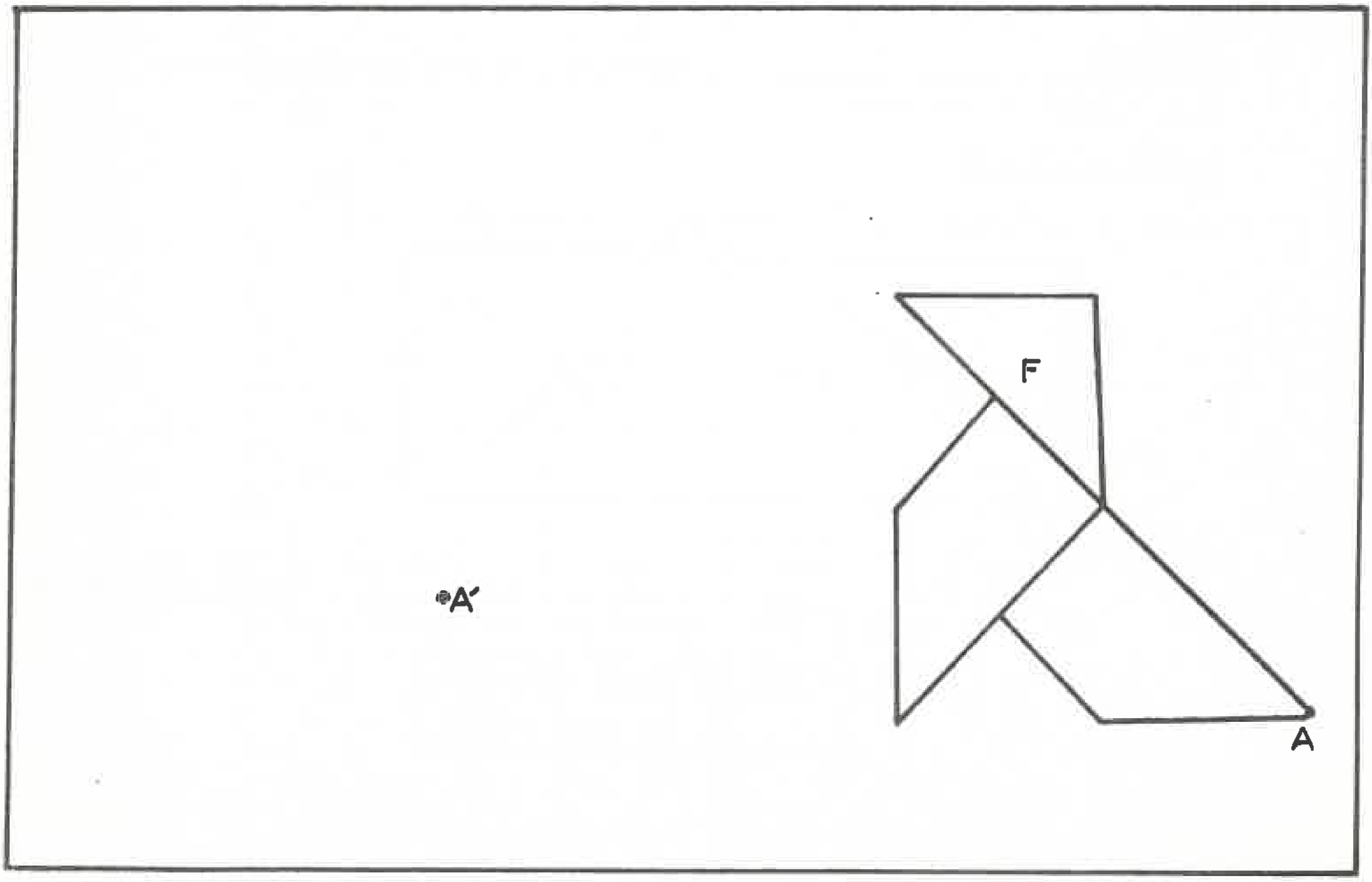
Exercice : Repérez les vecteurs égaux.



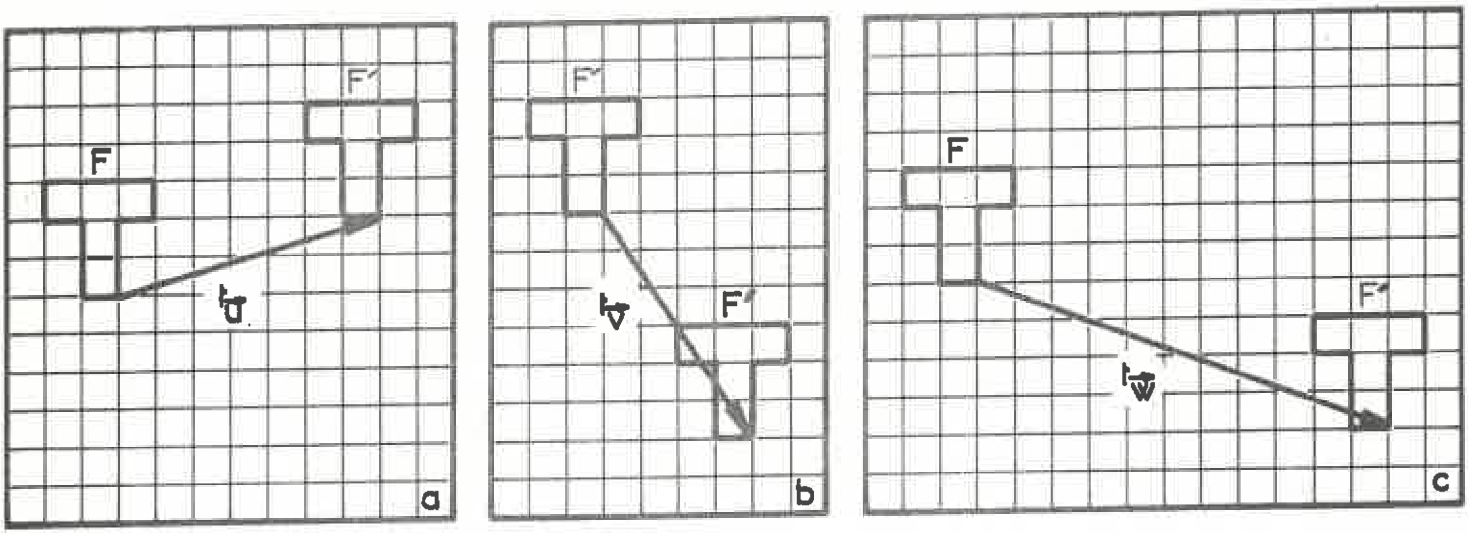
Exercice : Tracez un parallèlogramme ABCD. Quelles égalités vectorielles peut-on écrire ? Quelles translations y sont associées?

Activité 5 Utiliser le parallèlogramme

Construisez l'image F' de la cocotte F, sachant que l'image de A est A'.



2/ COMPOSITION DE 2 TRANSLATIONS. SOMME DE 2 VECTEURS.



- Décalquez les trois figures a-b-c.
- Dessinez la figure F .
- Collez le calque a en faisant coïncider les figures F .
- Collez le calque b en faisant coïncider les figures F'.
- Que faire du calque c ?

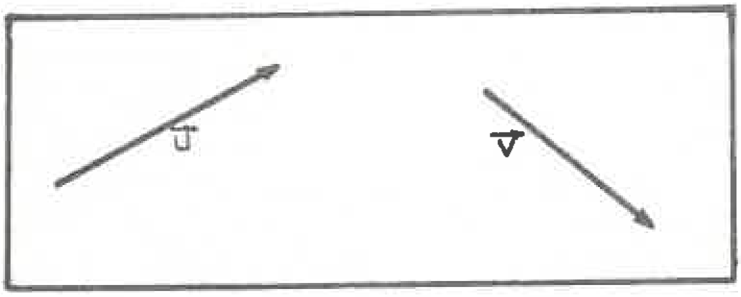
Nous dirons que la translation de vecteur $\vec{w}$ est la __composée__ de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.
On dit que le vecteur $\vec{w}$ représente la __somme des vecteurs__ $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

__Remarque__
En regardant attentivement les calques, donnez un procédé pour additionner 2 vecteurs.

__Exercice dirigé__

Voici 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dessinez le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



__Méthode__ : Placez un point A.
Soit B l'image de A pour la translation de vecteur $\vec{u}$.
Soit C l'image de B pour la translation de vecteur $\vec{v}$.
Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ cherché est représenté par $\vec{AC}$.

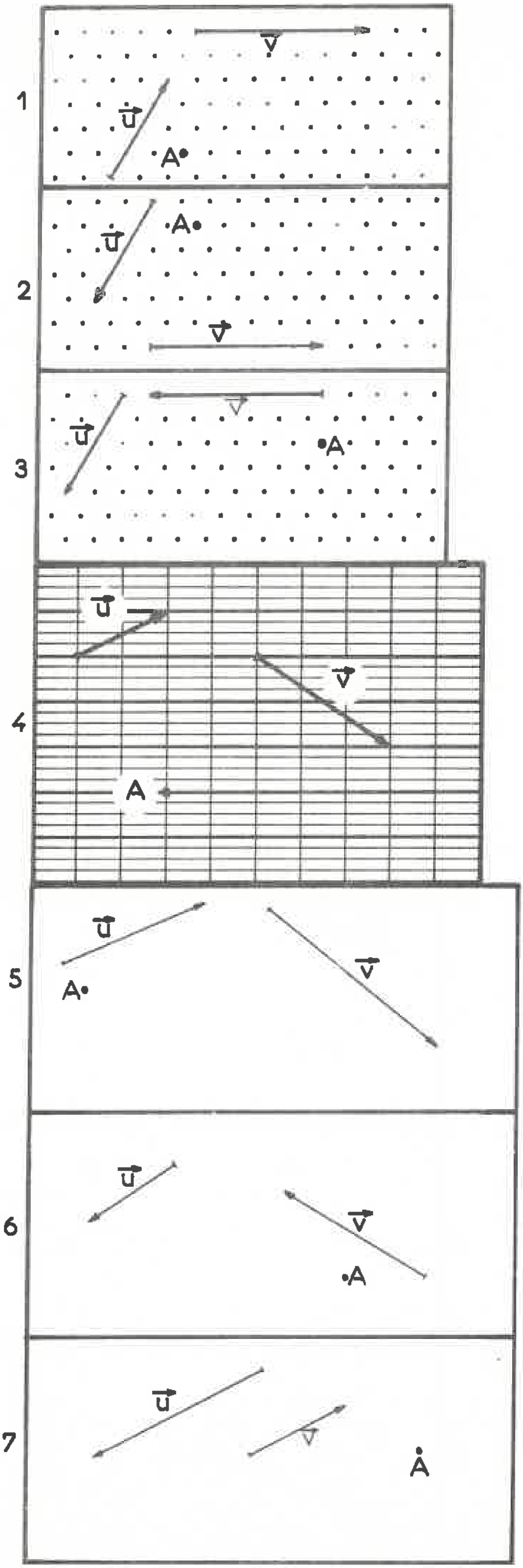
On obtient, __la relation de CHASLES:__

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

__Exercice__: Dessinez $\vec{u} + \vec{v}$, dans les cas suivants. (page 44-7 uniquement)

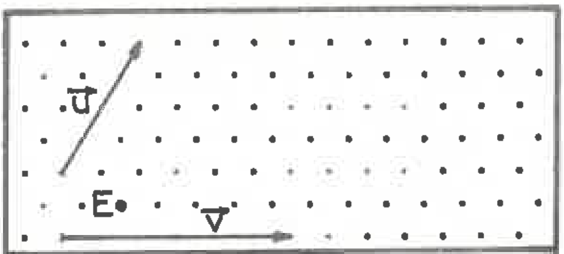
EXERCICE bas page 44-6

A conserver par l'élève

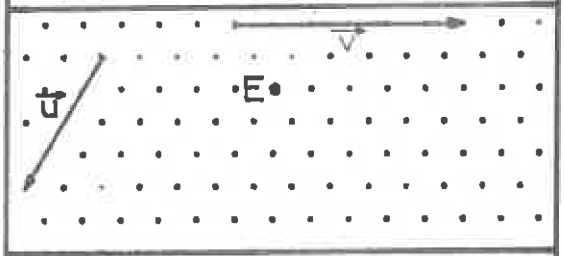


EXERCICE bas page 44-9

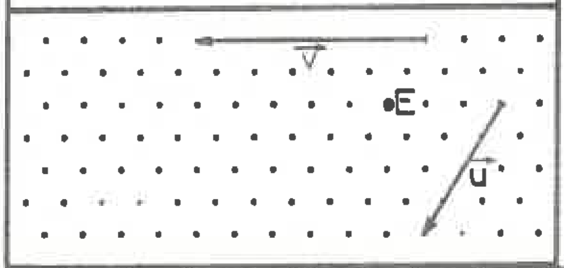
1



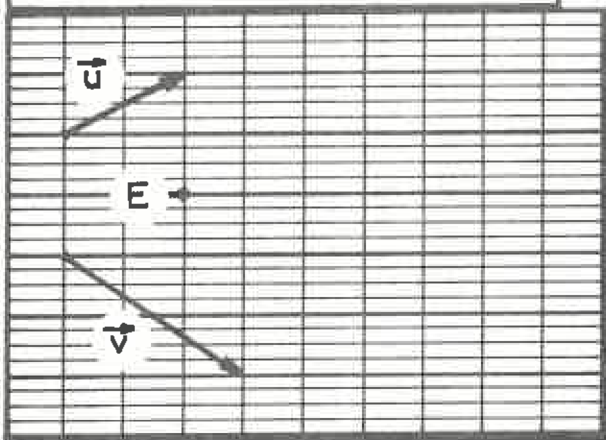
2



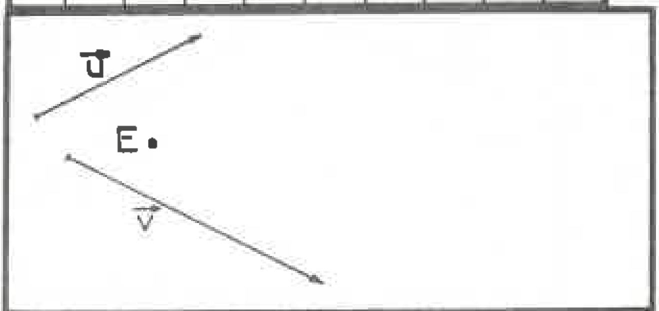
3



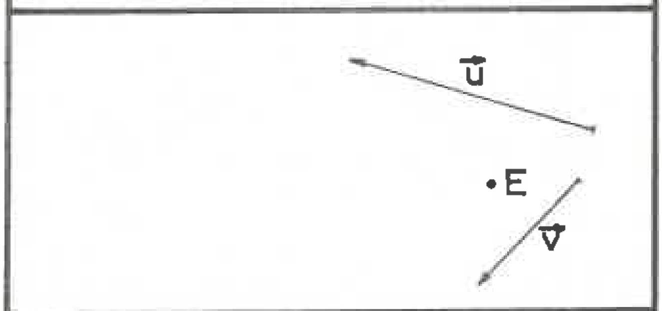
4



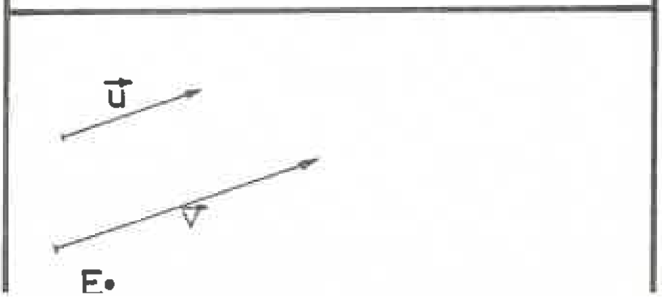
5



6



7

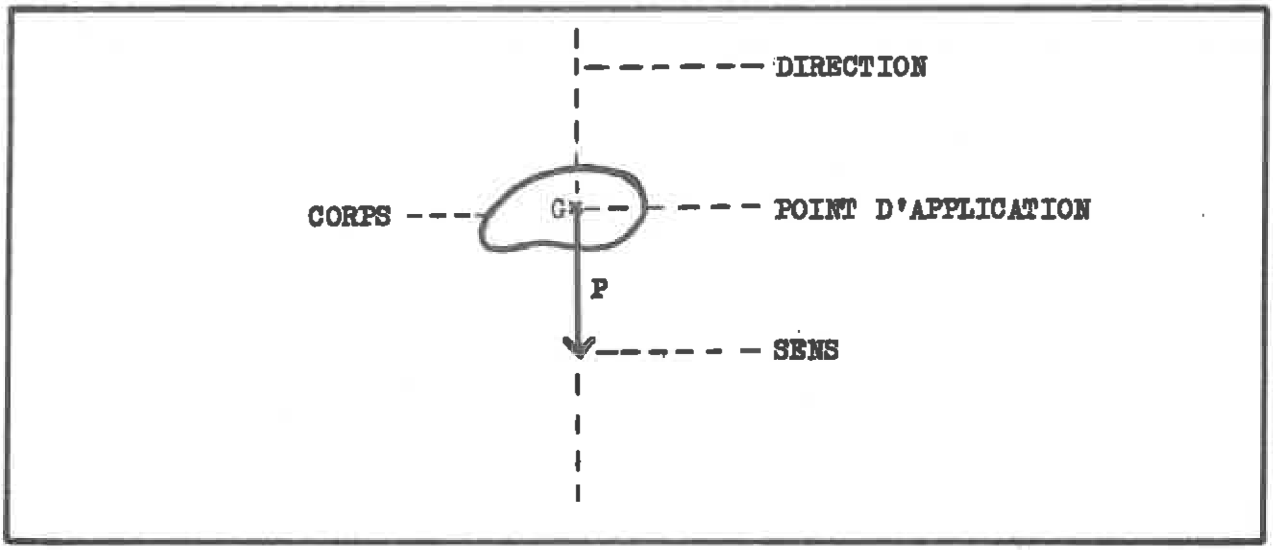


Additionner des vecteurs: autre méthode

Un peu de physique: Vous avez peut-être vu en physique que l'on peut représenter une force par un vecteur. Ce qui caractérise une force est :
- sa direction
- son sens
- son intensité

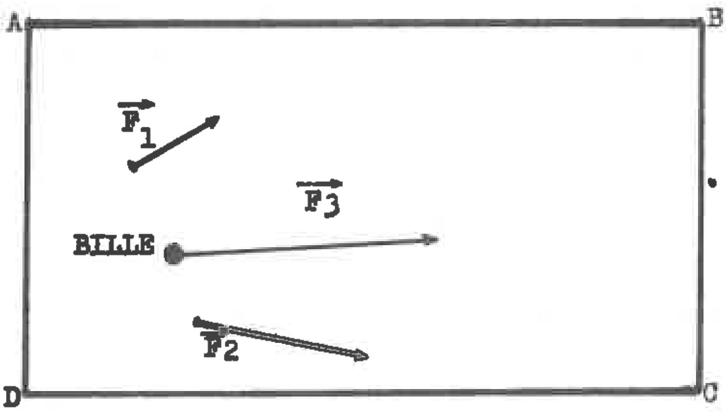
Par exemple, Le vecteur Poids $\vec{P}$:
- sa direction: verticale
- son sens: de haut en bas
- son intensité: le poids en newtons du corps considéré.

Remarque: Le point d'application d'une force (là où elle s' exerce) est le centre de gravité du corps.



Activité:
ABCD est un billard vu de dessus. Dessinez la trajectoire de la bille si elle subit la force $\vec{F_1}$ seule, puis la force $\vec{F_2}$ seule.

Posons nous alors une question: Et si la bille subissait simultanément $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$?....L'expérience montre que tout se passe comme si la bille était soumise à la force $\vec{F_3}$.

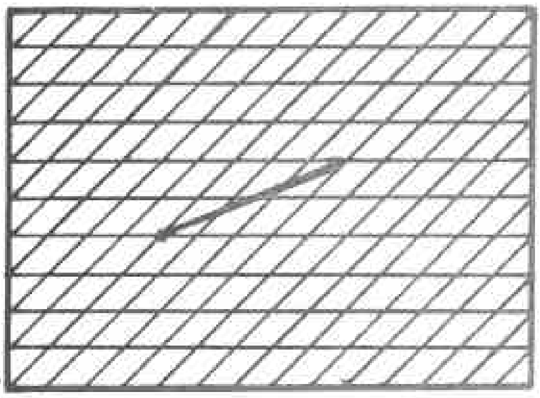


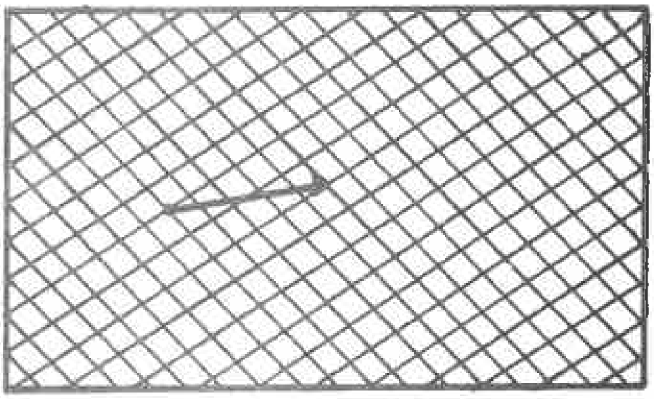
Exercice: Montrez que la force $\vec{F_3}$ est égale à $\vec{F_1} + \vec{F_2}$, définie par la méthode précédente.

Exercice: Dessinez $\vec{u} + \vec{v}$.(Méthode de la bille). (page 44-8)

3/ DECOMPOSITION D'UNE TRANSLATION

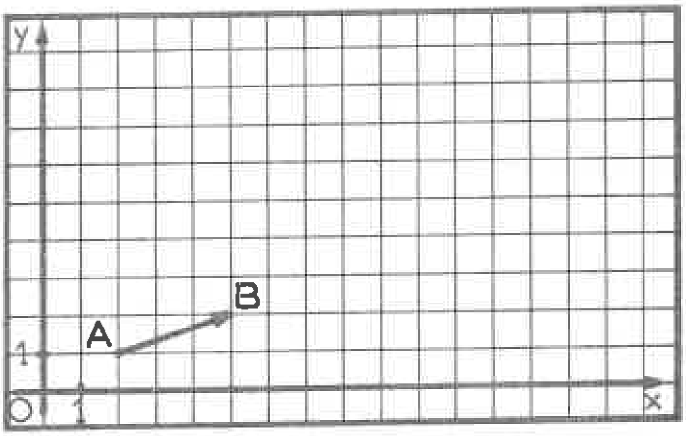
1/ Sans repère (2 directions de droites sont données).



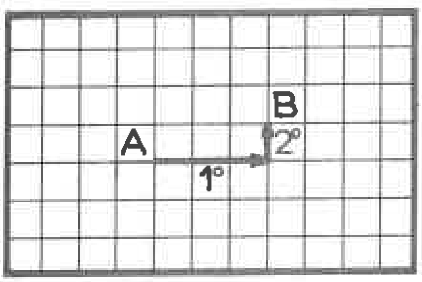


Décomposez les translations en utilisant <u>uniquement</u> des translations dont les vecteurs ont même direction que les droites du quadrillage.
Combien a-t-on de translations dans les décompositions minimuns?

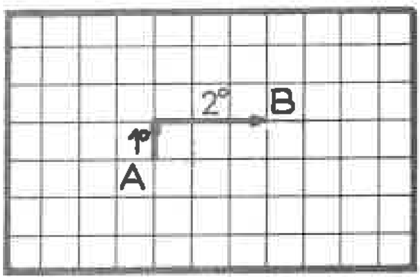
2/ Avec repère



Déterminez les coordonnées (x,y) des points A et B.
Soit $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation qui transforme A en B.
D'après les décompositions minimales précédentes on a:



ou



On conviendra d' effectuer en priorité la translation selon la direction de l' axe des abscisses puis l'autre.

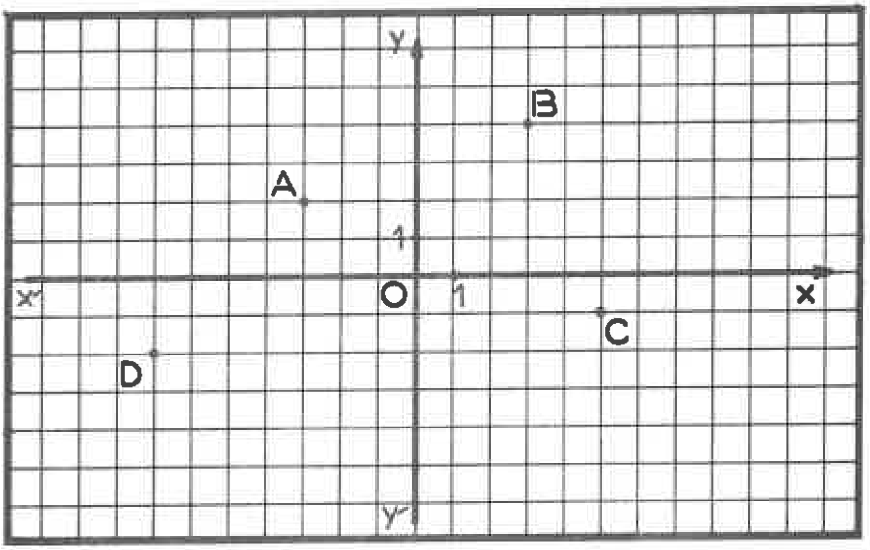
Autrement dit:

Je déplace le point A de 3 unités sur la droite puis de 1 unité vers le haut.

Le couple (3,1) détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice

Quelles sont les coordonnées des vecteurs suivants:
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$?



Exercice

Soient les points, A(2,5) , B(-4,3) , C(-1,0) , D(3,-2)
Quelles sont les coordonnées des vecteurs suivants:

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$?
(Si possible ,évitez ici de faire un dessin).

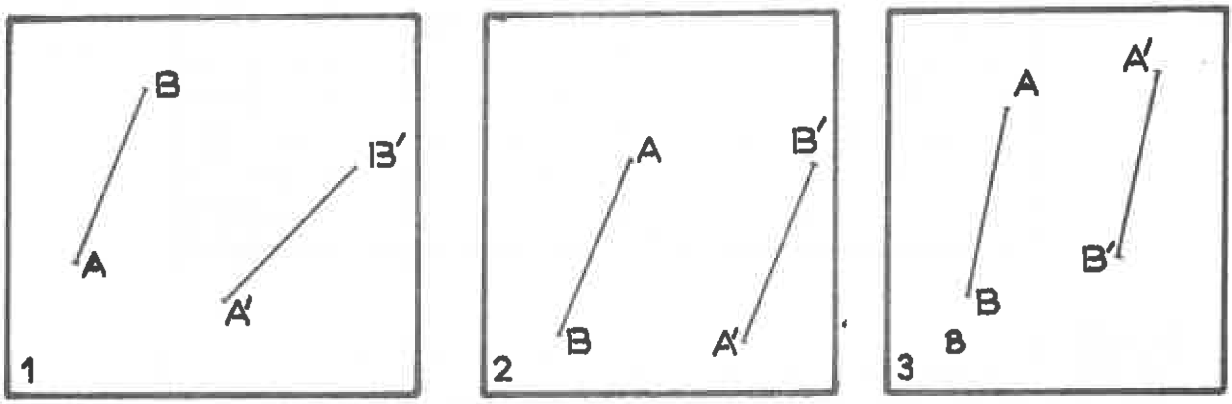
4/ DES EXERCICES...

Exercice 1

Soient 4 points A,B,A',B'. Quelle condition doit être vérifiée, pour qu'une translation transforme le point A en A' et le point B en B'?

Exercice 2

On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Est ce que le segment [A'B'] est l' image du segment [AB] dans les trois cas suivants ?



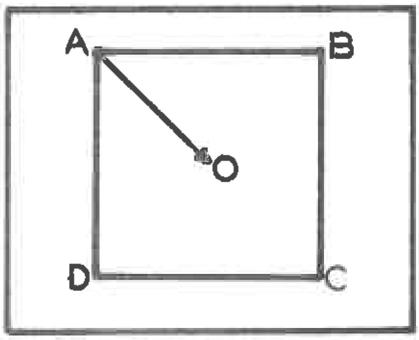
Exercice 3

Soient C et C' deux cercles de même rayon.

Peut-on trouver une translation qui transforme le cercle C en C' ?

Exercice 4

Soit un carré ABCD de centre O.
Dessinez l' image A'B'C'D'de ce carré dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
Quelle translation permet au carré A'B'C'D' de "revenir" sur ABCD ?



Exercice 5

Soient le point A(1,-2) et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (2,3).
 -Placez le point A et dessinez un représentant du vecteur $\vec{u}$.
 -Placez le point B image de A pour la translation $t_{\vec{u}}$.
 Comment obtenir les coordonnées de B en utilisant les coordonnées de A et $\vec{u}$?
Soit le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (4,1).
 -placez le point C image de B pour la translation $t_{\vec{v}}$.
 Quelles sont les coordonnées du point C ?
 -Quelle translation permet de passer de A à C?
 Quelles sont les coordonnées du vecteur de cette translation?
 Comment les obtenir à l' aide des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

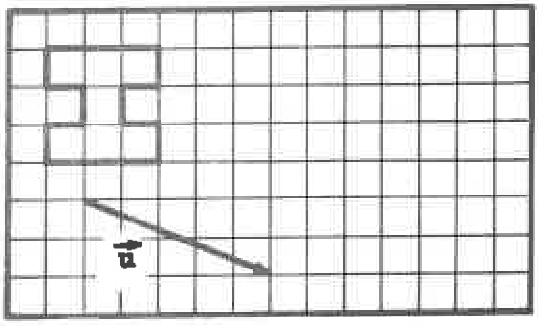
Exercice 6

Soit un point A de coordonnées (x,y) et un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a,b).
Le point A subit 10 fois la translation de vecteur $\vec{u}$. Quelles sont les coordonnées de l'image finale de A ?

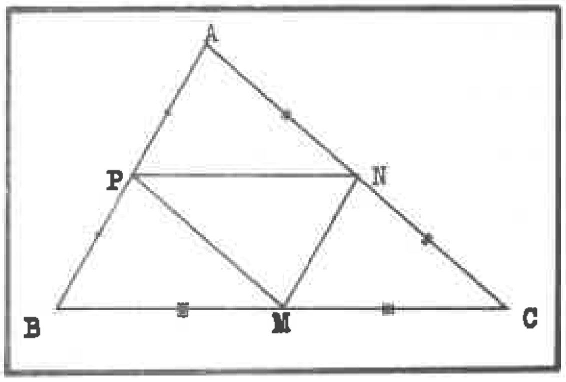
CONTROLE 44

EXERCICE 1

Tracez l'image de la figure suivante par la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$.



EXERCICE 2



Avec les points de cette figure:

Quels sont les vecteurs égaux,

à $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$?

EXERCICE 3

Dessinez trois points A, B, C, tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .Que signifie cette égalité vectorielle?

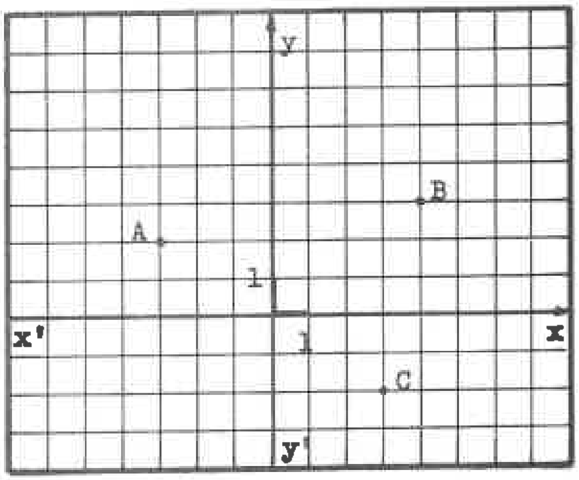
EXERCICE 4

Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$?

Quelles sont les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$?

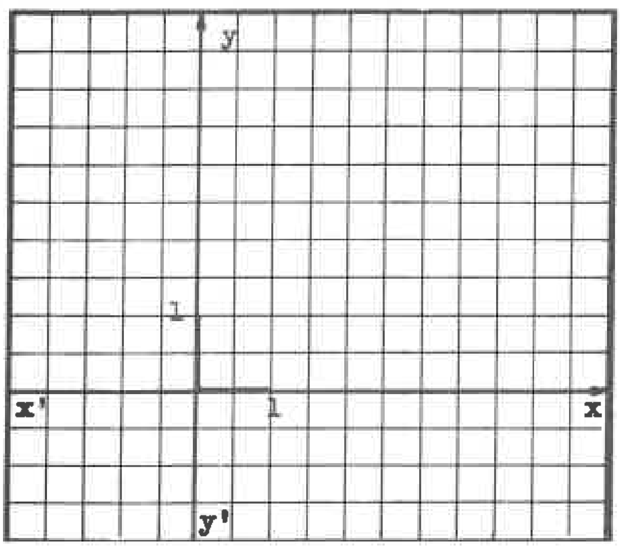
Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$?

Dessinez les points D et E.
Que dire des points E, A .D ?



EXERCICE 5

Soient trois vecteurs $\overrightarrow{U}$ (1 , 2), $\overrightarrow{V}$ (2 ,-1), $\overrightarrow{W}$ (-1 ,-2).



Dessinez un représentant de chaque vecteur $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$.
Placez un point A.
Soit B l'image de A pour $t\overrightarrow{U}$.
(Translation de vecteur $\overrightarrow{U}$)
Soit C l'image de B pour $t\overrightarrow{V}$.
Soit D l'image de C pour $t\overrightarrow{W}$.

Placez les points B, C, D.

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

<u>Démontrez</u> que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}$.

1) Sur le pavage des oiseaux, hachure les oiseaux (1'), (2') et (3'), images des oiseaux (1), (2) et (3) par la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$. A chaque fois, représente ce vecteur de translation.

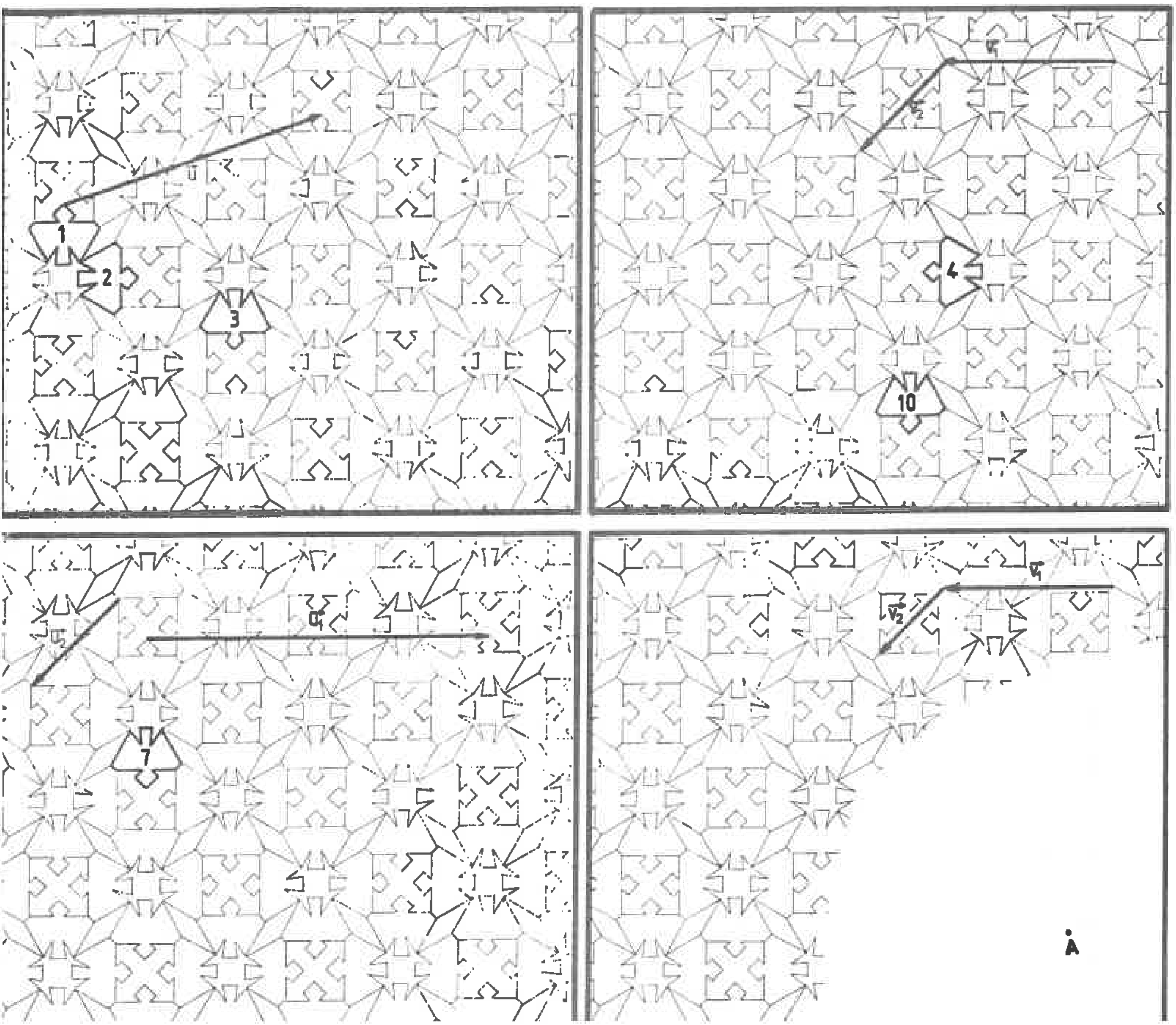
2) Colorie en rouge les oiseaux (4), (5) et (6) sachant que : (4) a pour image (5) par la translation de vecteur $\overrightarrow{V_1}$, oiseau (5) qui a pour image (6) par la translation de vecteur $\overrightarrow{V_2}$.

   L'oiseau (4) peut-il avoir pour image (6) par une translation de vecteur $\overrightarrow{V_3}$? Si oui, représente en rouge ce vecteur V_3. Ecris une égalité à proos de $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$.

3) Reprends la question (2), en bleu, avec les oiseaux (7), (8) et (9) et $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$.

4) Reprends la question (2), en vert, avec les oiseaux (10), (11) et (12) et $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

5) Construis les points B et C tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{V_2}$. Nomme le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



1) Colorie en rouge les oiseaux (1), (2), (3) et (4) sachant que :

(1) a pour image (2) par la translation de vecteur $\vec{U_1}$

(2) a pour image (3) par la translation de vecteur $\vec{U_2}$

(1) a pour image (4) par la translation de vecteur $\vec{U_2}$.

Quelle est l'image de l'oiseau (4) par la translation de vecteur $\vec{U_1}$?

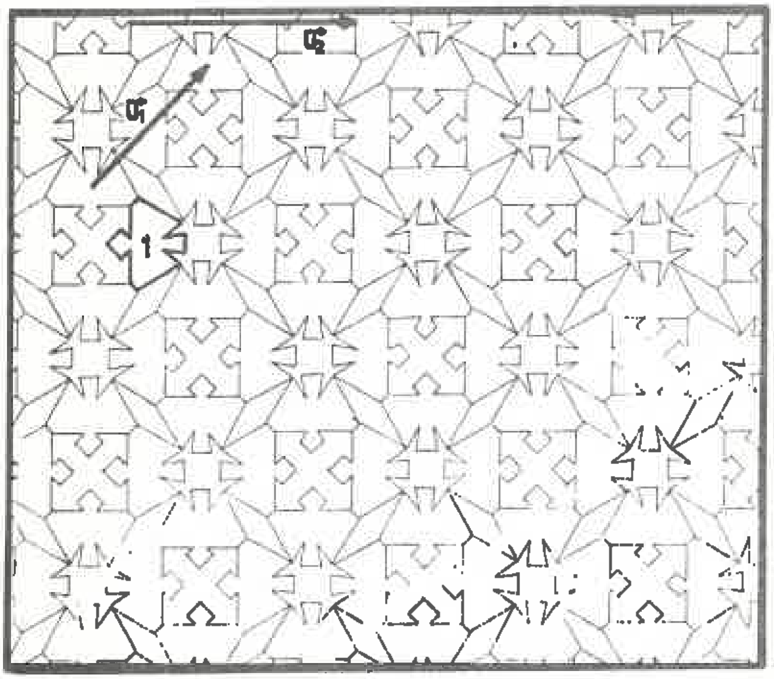
L'oiseau (1) a pour image (3) par la translation de vecteur U_3. Ecris trois égalités à propos des vecteurs $\vec{U_1}$, $\vec{U_2}$ et $\vec{U_3}$.

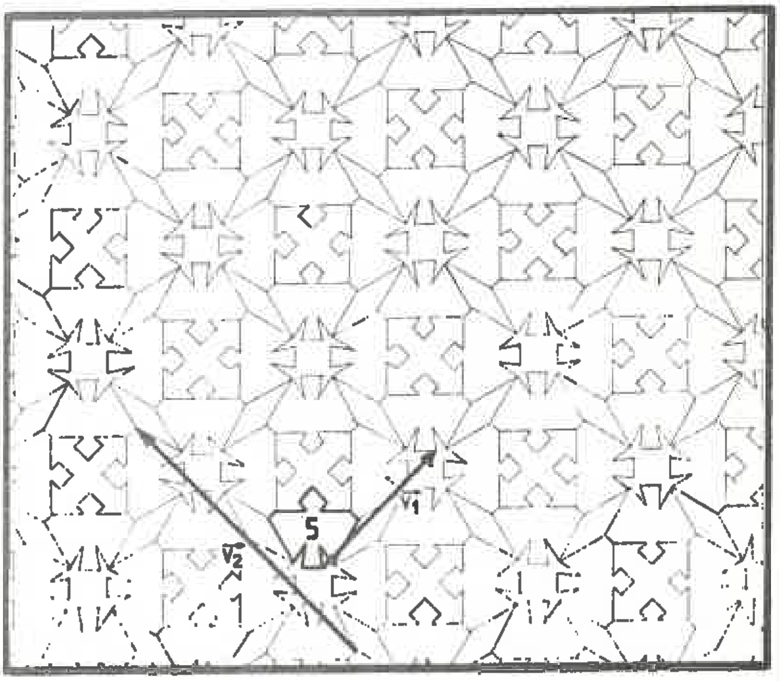
2) Mêmes questions pour les oiseaux (5), (6), (7) et (8) avec les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

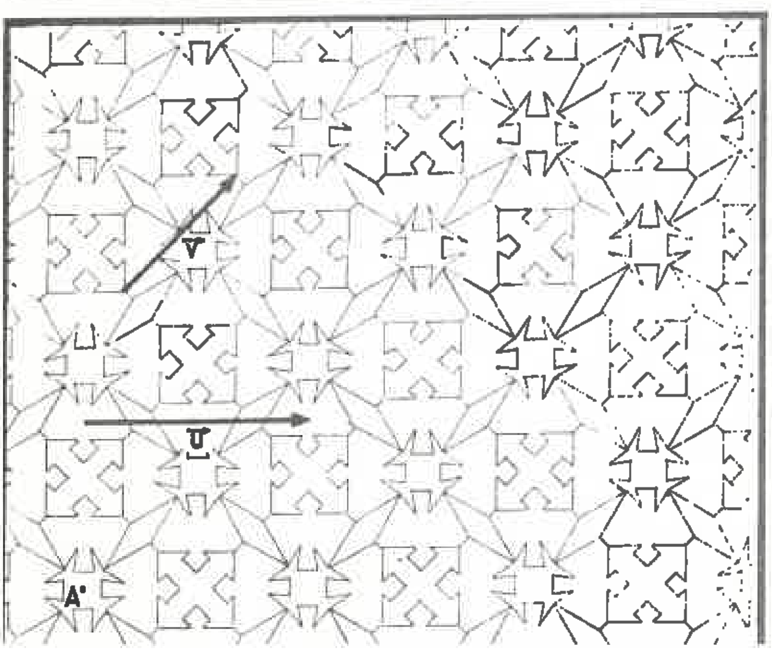
3) Mêmes questions pour les points A, B, C et D avec les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

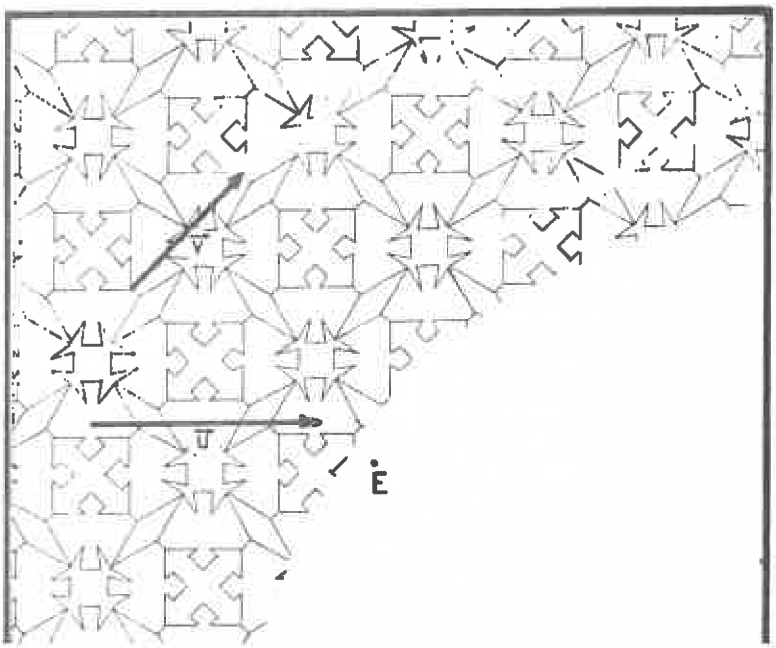
4) Mêmes questions pour les points E, F, G et H avec les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

5) Dans chaque, écris trois égalités vectorielles. Que peux-tu dire des quadrilatères ABCD et EFGH ?









MATHEMATIQUES 3 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 45

TITRE: SINUS - TANGENTE

3

PREREQUIS

- DOSSIER 26

OBJECTIFS

- SINUS . TANGENTE
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- UTILISATION DE LA CALCULATRICE
- RELATIONS DANS LE TRIANGLE RECTANGLE
- CALCUL DU SINUS CONNAISSANT LE COSINUS
- ANGLE AU CENTRE, ANGLE INSCRIT
- APPLICATIONS A DES PROBLEMES PRATIQUES

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX GERARD PAPA

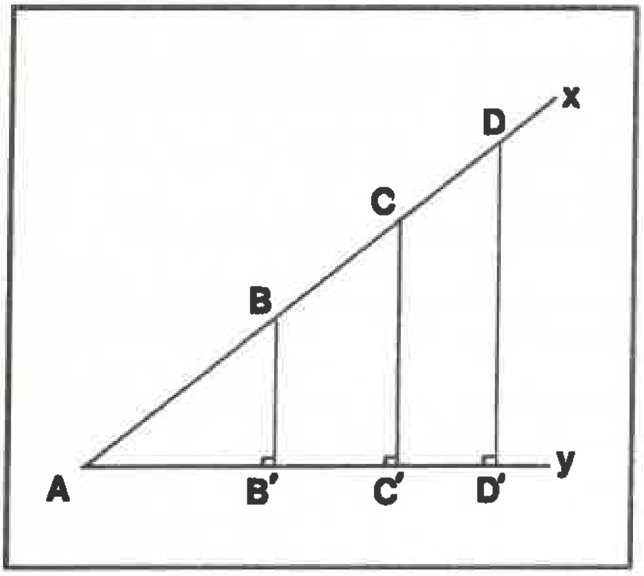
COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 45

SINUS ET TANGENTE d'un angle aigu

I RAPPELS SUR LE COSINUS

1. PROJECTION ORTHOGONALE



a_Comment appelle-t-on les points B', C', D' correspondant respectivement à B, C, D ?

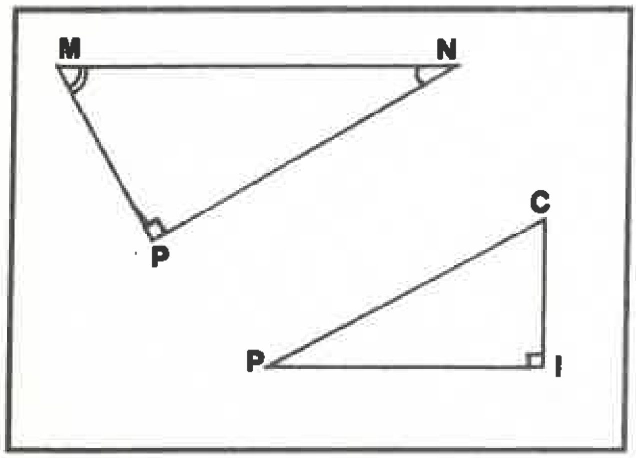
b_Comment appelle-t-on le rapport $\frac{B'C'}{BC}$?

c_Donne deux autres rapports égaux au rapport précédent.

Le Cosinus d'un angle est un rapport de projection orthogonale

d_Illustre cet énoncé en t'aidant de la figure ci-contre.

2. TRIANGLES RECTANGLES



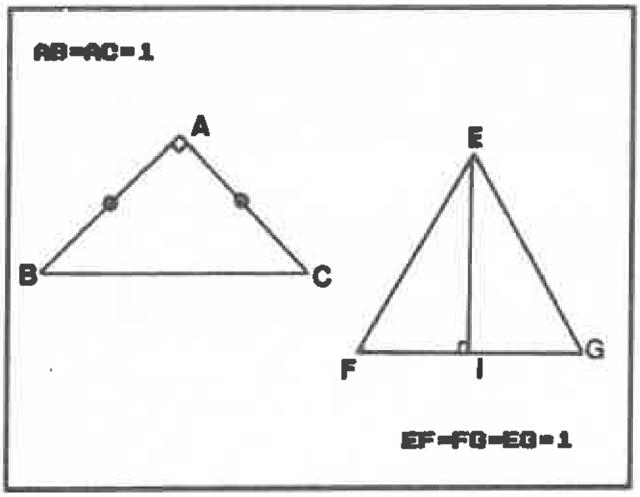
...Exprime le cosinus de l'angle $\widehat{N}$ et celui de l'angle $\widehat{M}$ par des rapports ?

...Complète la formule suivante:

cosinus = $\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$

...Calcule le cosinus de l'angle $\widehat{P}$, puis les angles $\widehat{P}$ et $\widehat{C}$ sachant que PI = 3,2 cm et que PC = 5 cm.
Déduis-en la longueur du côté IC.

3.ANGLES PARTICULIERS

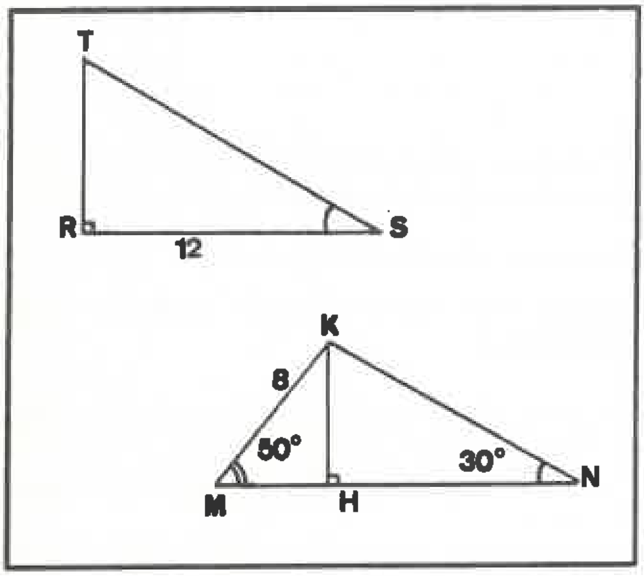


a–Combien mesurent les angles aigus du triangle ABC ? Justifie ta réponse.
-Quel Théorème faut-il utiliser pour calculer BC ?
-Calcule BC et déduis-en la valeur de cos 45°.

b-Combien mesurent les angles aigus du triangle EFI ? Justifie ta réponse.
-Calcule cos 60° .
-Calcule EI et déduis-en la valeur de cos 30° .

c-Quand l'angle croît de 0° à 90°, que fait le cosinus de l'angle?

4.EXERCICES



a–Construire sans rapporteur un angle aigu dont le cosinus est 0,7.

b-Sachant que le cosinus de l'angle $\widehat{RST}$ est égal à 0,8 et que RS = 12, calcule l'hypoténuse du triangle.
-Calcule les angles aigus du triangle.
-Calcule la longueur TR.
-Vérifie le théorème de Pythagore.

c-Résoudre l'équation cos x = 0,4 où x est un angle aigu.

d-Calcule une valeur approchée à 0,1 près des longueurs KH et KN.

II SINUS D'UN ANGLE AIGU

1. ACTIVITES

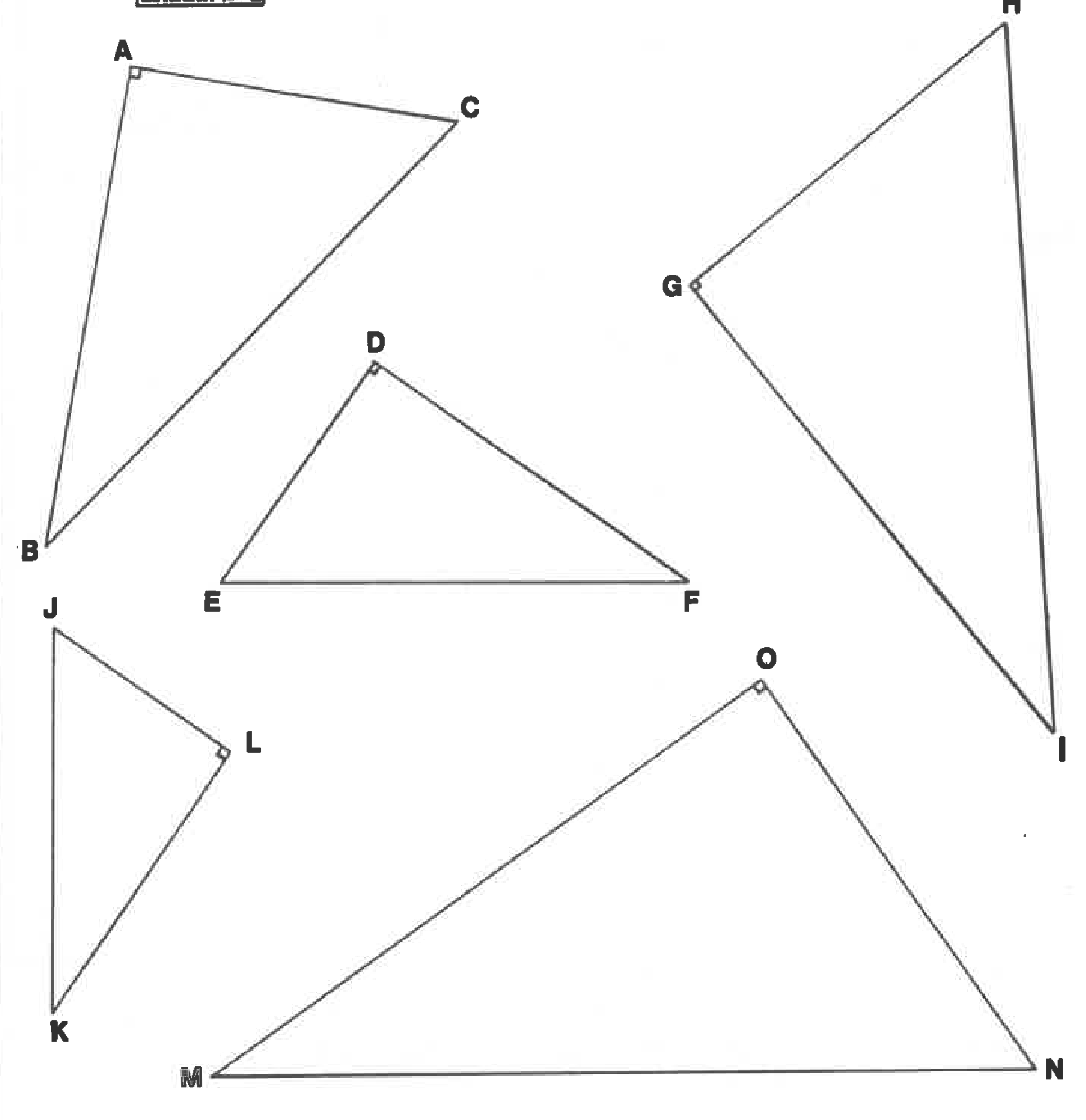
A. Etude d'un rapport

Pour chacun des deux angles des triangles rectangles de l'encadré 1, calcule le rapport du côté opposé à l'angle à l'hypoténuse avec une approximation de 0,01.

Compare ces rapports entre eux. Que constate-tu ? Mesure les angles des triangles avec un rapporteur.

Pour un angle donné, le rapport dépend-il du triangle choisi pour le calculer ?

Encadré 1



Pour la figure 1 de l'encadré 2, démontre que les rapports $\frac{AA'}{OA}, \frac{BB'}{OB}, \frac{CC'}{OC}$ sont égaux.

Quel théorème appliques-tu ?

Après avoir mesuré les longueurs au mm près, calcule une valeur approchée à 0,01 près de ce rapport pour chacune des trois figures.

Encadré 2

Fig 1

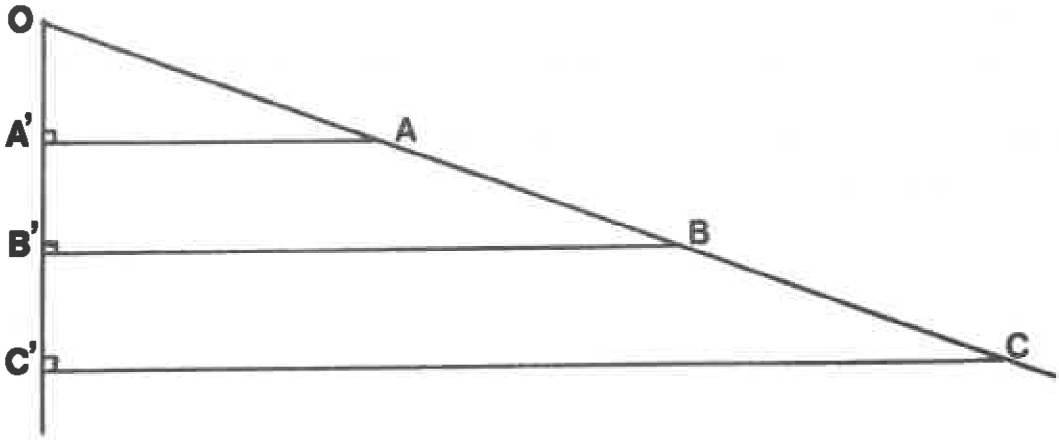


Fig 2

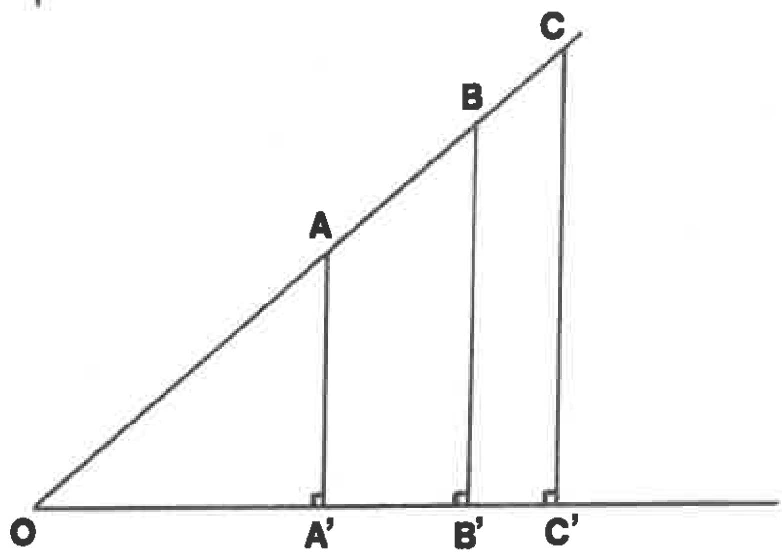
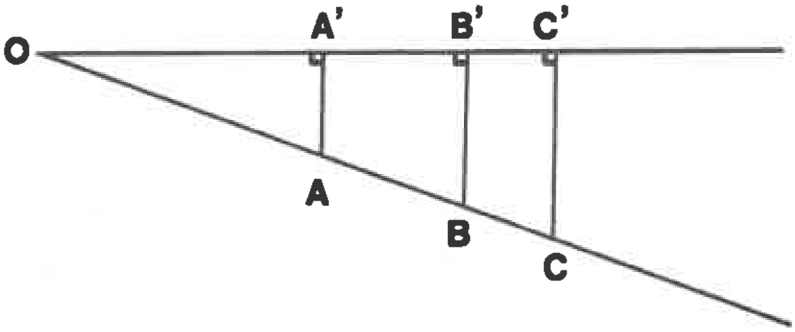


Fig 3



En conclusion:

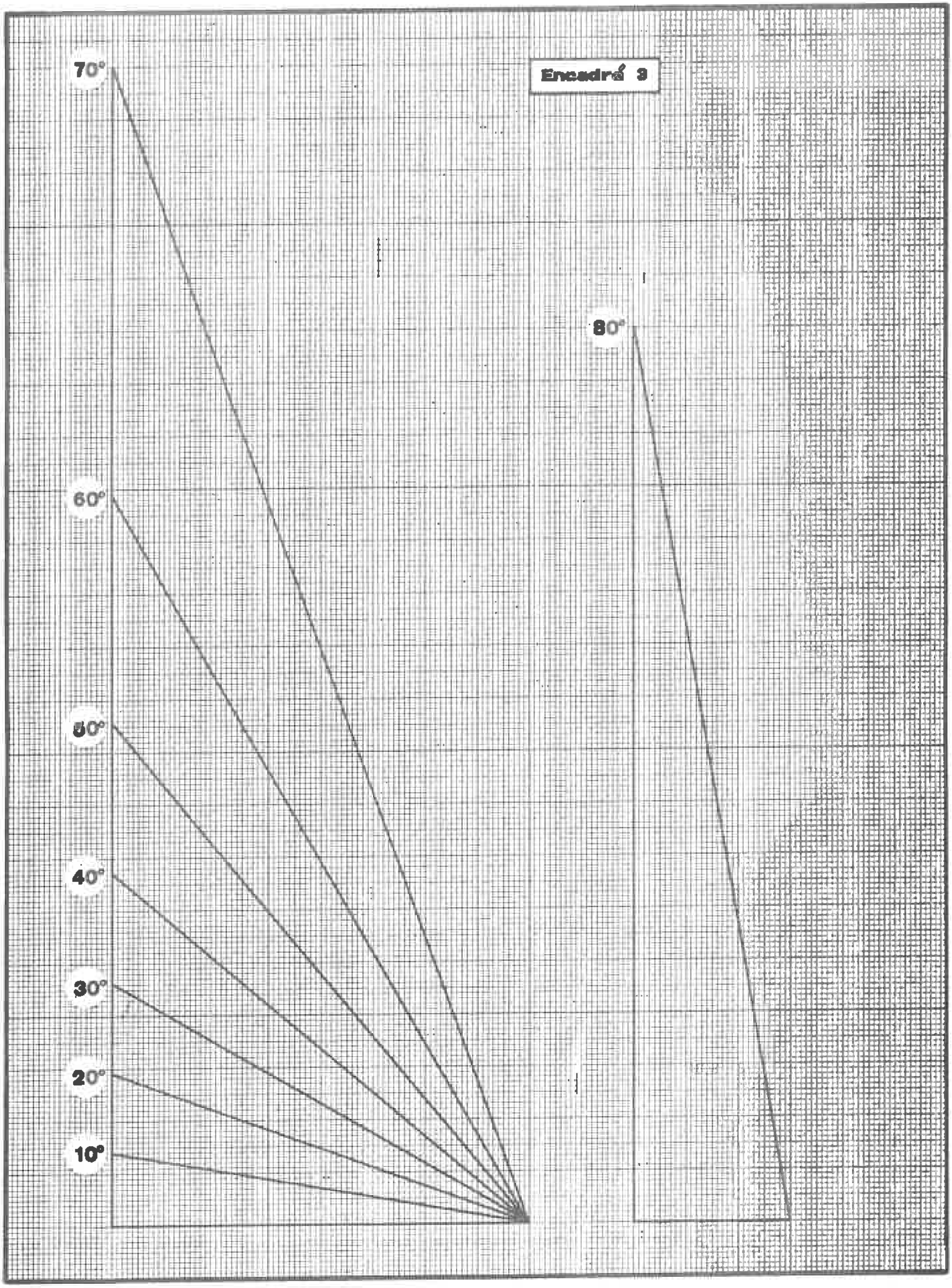
> Pour un angle donné, le rapport du côté opposé à l'angle sur l'hypoténuse ne dépend pas du triangle rectangle.
>
> Ce rapport ne dépend que de l'angle, on l'appelle le SINUS de l'angle. (Notation: sin)

B. Table de valeurs

A partir de la figure de l'encadré 3, tu dois faire une table des valeurs du sinus pour les angles de 0° à 90° avec un pas de 10°.

Pour cela, mesure les longueurs à 1 mm près et arrondis le résultat du calcul à 0,001 près.

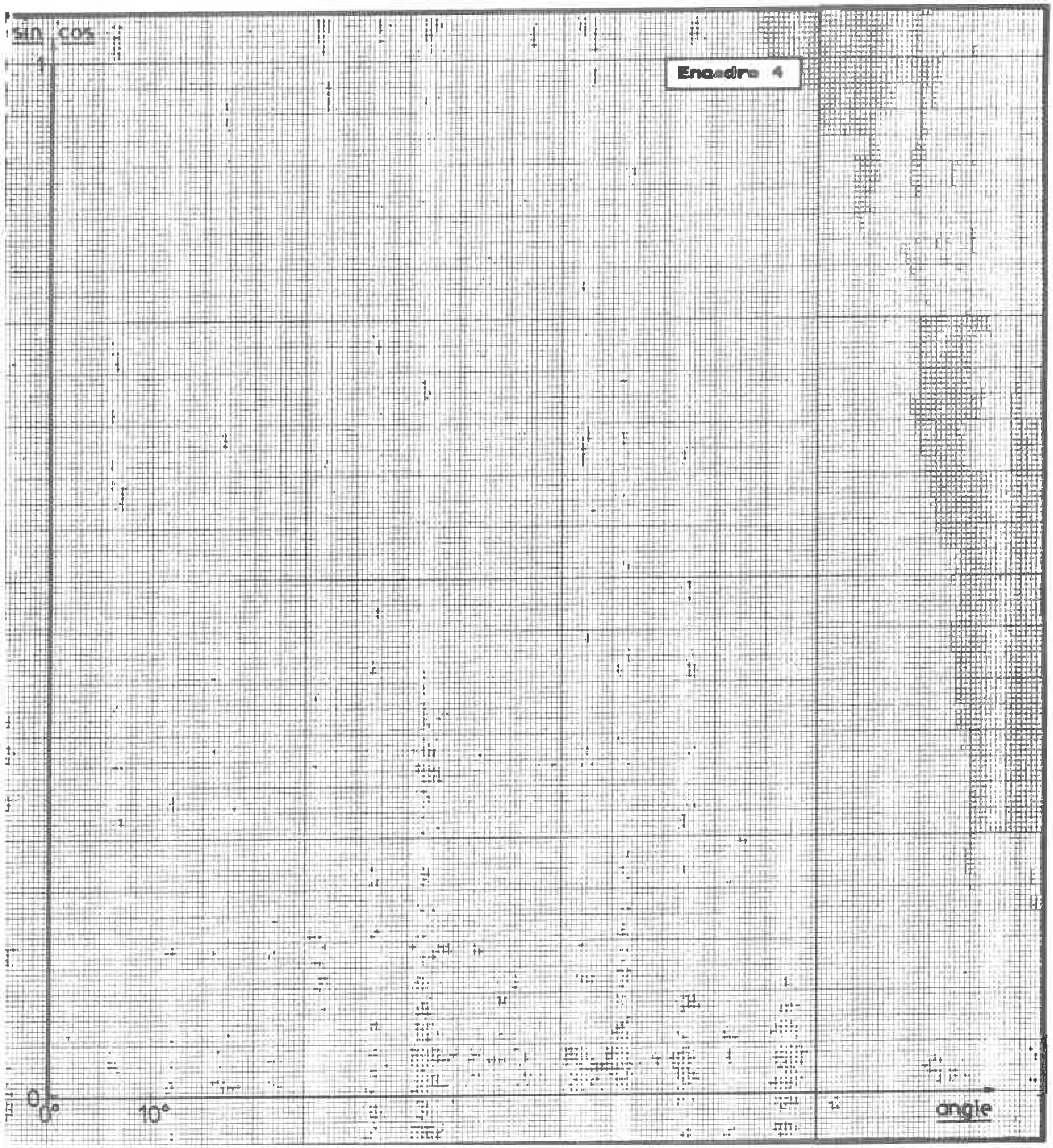
Compare les valeurs que tu as trouvées avec celles données par la calculatrice.



C. Représentation graphique

a_Avec la calculatrice fais une table de valeurs approchées à 0,001 près du sinus et du cosinus pour les angles de 0° à 90° avec un pas de 5°.

b-Dans le repère de l'encadré 4, trace les points de coordonnées (x, cos x) et (x, sin x) pour x variant de 0° à 90° en te servant du tableau précédent.



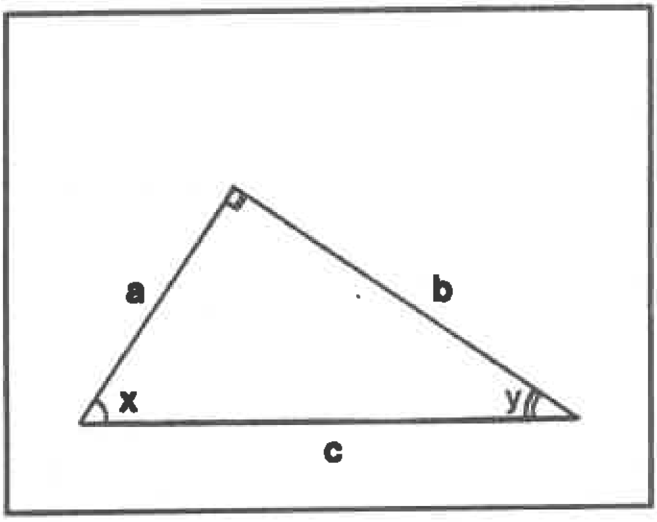
c. Quand l'angle croît de 0° à 90°, que fait le sinus de l'angle ?
Complète l'encadrement suivant, x étant un angle aigu quelconque: .... < sin x < ....

d. En te servant du graphique précédent, donne une valeur approchée à 0,01 près de la solution de chacune des équations: x étant la mesure d'un angle aigu

sin x = cos 80°	sin x = cos 40°	cos x = sin 45°
sin x = cos 60°	sin x = cos 20°	cos x = sin 75°
cos x = sin 60°	cos x = sin 30°	sin x = cos 15°

Comment peux-tu calculer x sans te servir du graphique ?
Complète les formules suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin x = \cos(\ldots\ldots - x)\\ \cos x = \sin(\ldots\ldots - x)\end{array}}$$



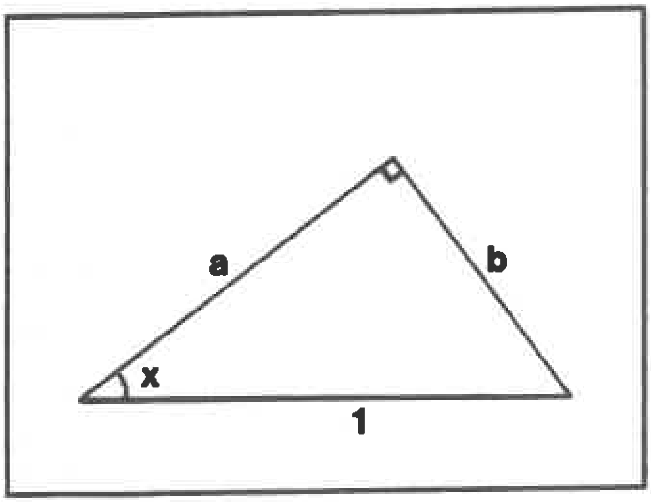
Démontre les formules précédentes en te servant de la figure ci-contre.
Pour cela:
Exprime y en fonction de x.
Exprime cos x et sin y comme rapport de deux longueurs et conclus.
Fais de même avec sin x et cos y.

Quand dit-on que deux angles sont complémentaires ?
Que peut-on dire du sinus d'un angle et du cosinus de l'angle complémentaire ?
Dans un triangle rectangle, que peux-tu dire des deux angles aigus, de leur sinus et de leur cosimus ?

D. Relation entre le sinus et le cosinus

On donne la fonction f définie par la formule: $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
$\sin^2 x$ est une notation de $(\sin x)^2 = (\sin x)(\sin x)$.

1. Ecris la séquence de touches qui permet de trouver f(x) avec la calculatrice.
2. Calcule f(x) de 0° à 90° de 10° en 10°.
3. A partir des calculs précédents, énonce une propriété vraie pour tout angle aigu x.

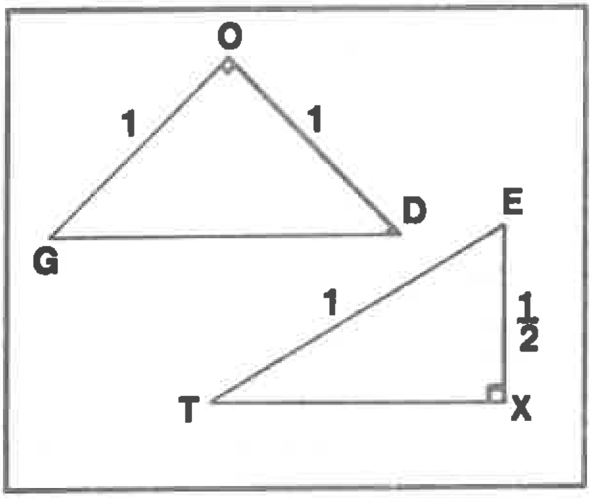


4. En te servant de la figure ci-contre, tu vas démontrer cette propriété:

- Calcule sin x et cos x en fonction de a et b.

- Quel théorème dois-tu citer pour terminer la démonstration ?

E. Angles particuliers



a_En te servant du triangle GOD, démontre que:
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b_En te servant du triangle TEX, démontre que:
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c_Retrouve ces résultats à partir des propriétés vues dans l'activité C.

2. RESUME

a_Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport du côté opposé à l'angle sur l'hypoténuse.
Ce rapport ne dépend pas du triangle rectangle utilisé pour le calculer mais seulement de l'angle.

b_Quand l'angle croît de 0 à 90, le sinus de l'angle croît de 0 à 1:

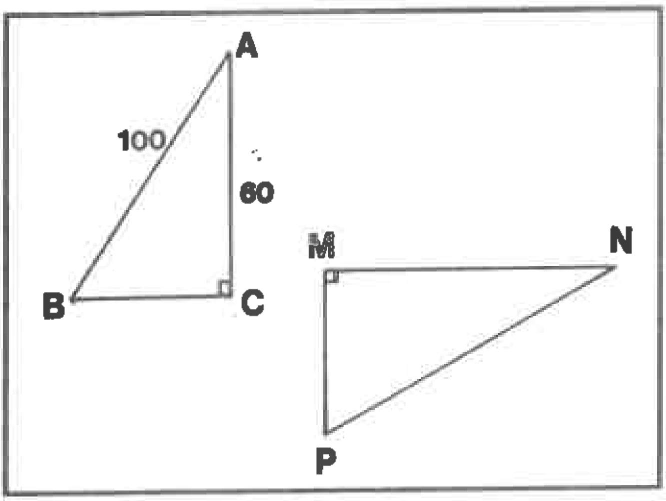
$\sin 0° = 0$ $\quad$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sin 90° = 1$

c_Si deux angles sont complémentaires, alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre: $\boxed{\sin(90° - x) = \cos x}$ $\quad$ $\boxed{\cos(90° - x) = \sin x}$

d_Pour tout angle aigu x, on a la relation: $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

3. EXERCICES

Exercice 1



a_Pour le triangle ABC, calcule sin B à 0,001 près, puis l'angle $\widehat{B}$ à 1 degré près.

b_Pour le triangle MNP, calcule N à 1 degré près sachant que MP=5cm et PN=10cm.

c_Dans le triangle VUC rectangle en C, l'hypoténuse est égale à 8cm et l'angle $\widehat{U}$ est égal à 25°.
Calcule les longueurs des côtés de l'angle droit au millimètre près.

d_Sachant que $\widehat{F}=20°$, que $\widehat{G}=50°$ et que EF=10cm, calcule EH puis EG. Calcule ensuite FG en remarquant que FG=FH+HG.

Exercice 2

Construis sans rapporteur un angle aigu de sinus égal à 0,7.

Exercice 3

Détermine l'angle aigu x solution des équations suivantes:

$\sin 38° = \cos x$ $\quad$ $\sin 54° = \cos x$

$\cos 86° = \sin x$ $\quad$ $\cos 33° = \sin x$

Exercice 4

Voici un exemple d'application de la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Soit à calculer cos x sachant que sin x = 0,6:

$\sin x = 0{,}6$ donc $\sin^2 x = 0{,}36$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos^2 x = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

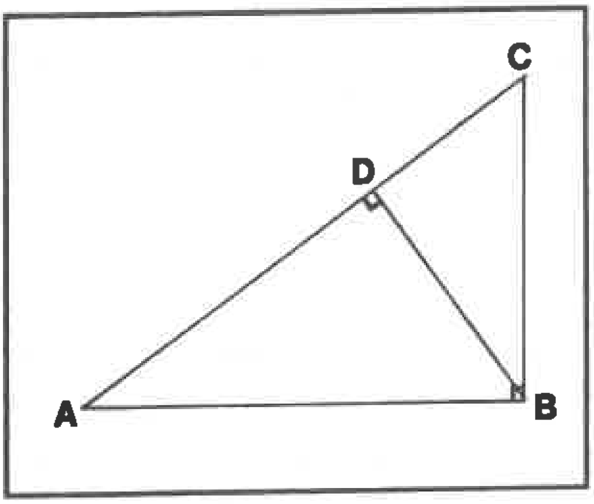
$\cos x = \sqrt{0{,}64}$

$\cos x = 0{,}8$

a_Calcule cos x à 0,001 près, sachant que sin x = 0,1.

b_Calcule sin x à 0,001 près, sachant que cos x = 0,9.

Exercice 5



Sachant que l'angle A du triangle ABC est égal à 35° et que son hypoténuse est égal à 20cm, calcule:

a_la longueur BC.

b_les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$.

c_la longueur DC

Exercice 6

a_Dans le triangle FIG rectangle en G , l'angle $\widehat{I}$ est égal à 15° et le côté GF est égal à 50cm.
Calcule l'hypoténuse à 1mm près.

b_Le triangle RST rectangle en S est tel que: RS=12m et $\widehat{T}$=72°.
Calcule RT à 1cm près.

c_Un triangle POC rectangle en P est tel que: OC=75m et OP=25m.
Calcule les angles du triangle à 0,1 degré près.

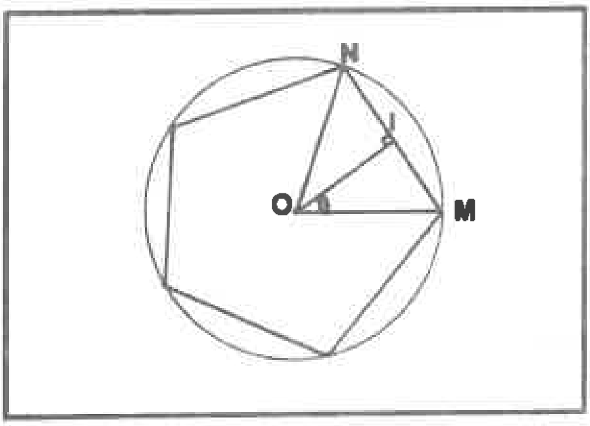
Exercice 7

Les longueurs des côtés du triangle ZIG sont: ZI=0,9mm ZG=1,2mm GI=1,5mm

a_Démontre que ce triangle est rectangle.

b_Calcule les angles aigus à 1 degré près.

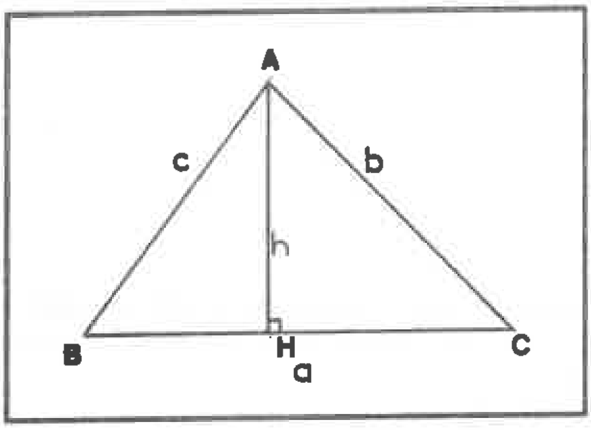
Exercice 8



Le pentagone régulier ci-contre est inscrit dans un cercle de 2cm de rayon.

Calcule la longueur du côté du pentagone à 0,1mm près.

Exercice 9

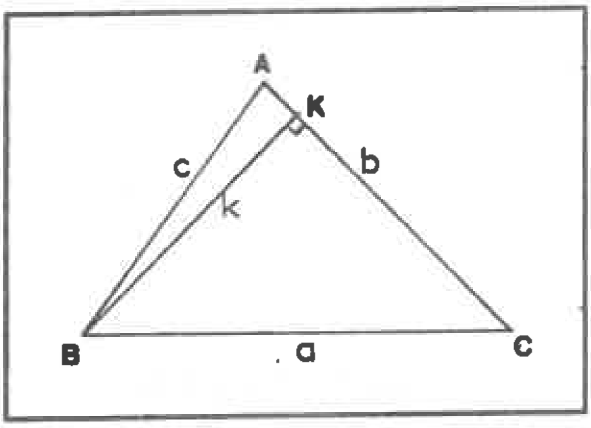


Partie 1

a_Dans le triangle ABH, exprime sin $\widehat{B}$, puis calcule h en fonction de c.

b_Calcule de même, dans un autre triangle, h en fonction de b.

c-Déduis des résultats précédents une proportion liant sin B, sin C, b et c.



Partie 2

a_Comme dans la partie précédente, calcule k en fonction de a puis en fonction de c.

b_Déduis en une proportion liant sin $\widehat{A}$, sin $\widehat{C}$, a et c

c_Application: a=10m $\widehat{B}=45°$ $\widehat{C}=60°$
Calcule A, b et c.

Partie 3:

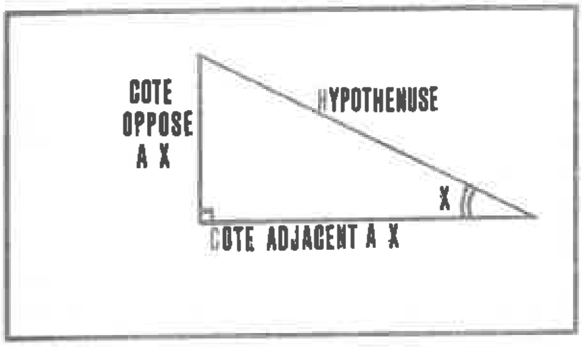
a_Exprime l'aire du triangle ABC en fonction de a, b, c (Sers-toi de la question 1-b).

b_Application: Calcule l'aire du triangle ABC.
Calcule l'aire d'un triangle sachant qu'il a un angle de 25° et que les côtés adjacents à cet angle mesurent 8cm et 6,5cm.

III TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

1. ACTIVITES

A. Etude d'un rapport



Reprends l'étude que tu as faite page 3 et 4 pour le sinus, avec le rapport :

côté opposé à l'angle sur côté adjacent

En conclusion:

> Pour un angle donné, le rapport du côté opposé à l'angle sur le côté adjacent ne dépend pas du triangle rectangle utilisé pour le calcul.
>
> Ce rapport ne dépend que de l'angle, on l'appelle la TANGENTE de l'angle. (Notation: tan)

B. Table de valeurs

_A partir des figures de l'encadré 3 page 5, fais une table des valeurs de la tangente pour les angles de 0° à 80°.

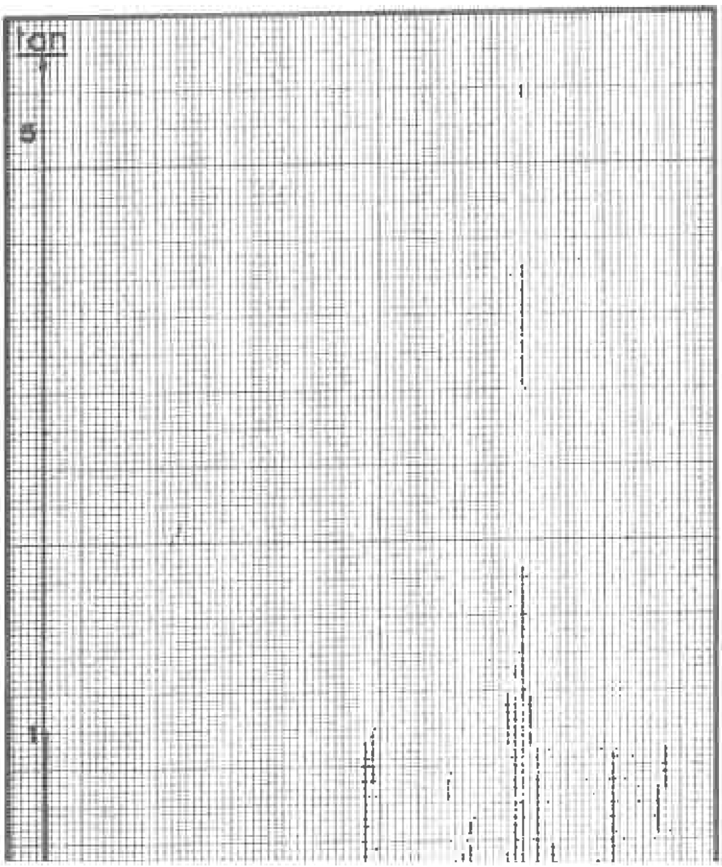
_Quelle valeur obtiens-tu pour 0° ?

_Avec la machine, calcule la tangente des angles suivants à 1 unité près:

89°   89,9°   89,99°   89,999°   89,9999°

_Que se passe-t-il pour 90° ?

C. Représentation graphique



a_En te servant des valeurs que tu as trouvées en B, trace les points de coordonnées (x, tan x) dans le repère de l'encadré 5.

b_Quand l'angle croît de 0° à 90°, que fait la tangente de l'angle ?
L'angle peut-il prendre la valeur 90° ?

c_Si sur le graphique, tu traçais les points de coordonnées (x, tan x) pour des valeurs de x très rapprochées, tu obtiendrais une courbe régulière. Trace cette courbe.

_En te servant de la courbe, trouve des valeurs approchées à 0,1 près de tan 55° et tan 75°

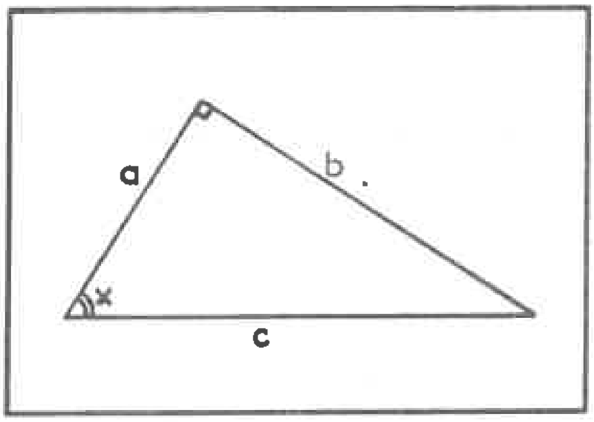
_Inversement, trouve des valeurs approchées à 1 degré près des angles qui ont pour tangente 2 et 0,7.

_Compare les valeurs que tu as trouvées avec celles que te donne la calculatrice.

D. Relation entre sinus cosinus et tangente

On donne la fonction 'smurf' définie par la formule: smurf(x)= $\frac{\sin x}{\cos x}$

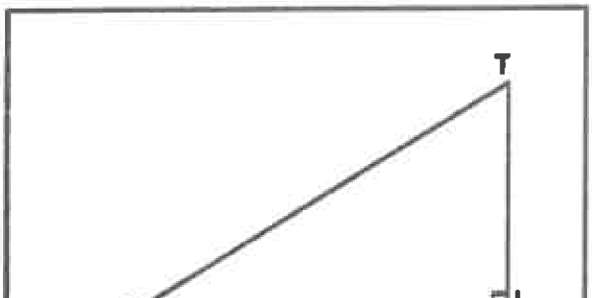
1.Calcule smurf(x) de 0° à 80° de 10° en 10°. Compare les valeurs trouvées avec les valeurs de tan(x). Quelle supposition peux-tu faire ?



2.En te servant de la figure ci-contre, exprime sin x , cos x, $\frac{\sin x}{\cos x}$, tan x, en fonction des longueurs a, b et c.
Que peux-tu conclure ?

3.A partir de la propriété que tu viens de trouver, explique pourquoi on ne peut pas calculer la tangente de 90°.

E. ANGLES PARTICULIERS



CT=1
TI=$\frac{1}{2}$

1.Rappelle les valeurs exactes de tan 0° et tan 45°.

2.Quelle est la valeur exacte de CI ?
Calcule tan 30° et tan 60° en te servant du triangle TIC.

3.Retrouve ces deux résultats à partir de la formule trouvée dans l'activité D.

2. RESUME

a_Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égal au rapport du côté opposé à l'angle sur le côté adjacent.
Ce rapport ne dépend pas du triangle rectangle utilisé pour le calculer mais seulement de l'angle.

b_Quand l'angle croît, la tangente de l'angle croît.
La tangente de l'angle devient aussi grande que l'on veut, lorsqu'on se rapproche de 90°.

tan 0°= 0 **tan 30°=** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **tan 45°= 1** **tan 60°=** $\sqrt{3}$

c_Pour tout angle aigu x, on a la relation: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

3. EXERCICES

Exercice 1

a_Les côtés du triangle ROC sont tels que: RO=8cm OC=6cm et CR=10cm.
Démontre que ce triangle est rectangle.
Calcule $\tan \widehat{C}$ et $\tan \widehat{R}$ à 0,001 près.
Déduis-en la valeur des angles aigus à 1 degré près.

b_Dans le triangle ALI on a: AL=25m et $\widehat{A}=30°$.
Calcule la valeur exacte de LI puis une valeur approchée à 1cm près.

c_Le triangle ZOC rectangle en O est tel que: $\widehat{C}=60°$ et ZO=16cm.
Calcule la valeur exacte de OC puis une valeur approchée au mm près.

Exercice 2

Trace sans rapporteur un angle de tangente égale à $\frac{3}{5}$

Exercice 3

Calcule l'angle aigu x tel que tan x = 100 à 0,1 degré près.
.... tan x = 1000 à 0,01 degré près.
.... tan x = 10 000 à 0,001 degré près.
.... tan x = 100 000 à 0,000 1 degré près.
Bizarre... Non ?

Exercice 4

a_Les longueurs des diagonales d'un losange sont: 48cm et 30cm.
Calcule les angles du losange à 1 degré près.

b_Les bases d'un trapèze rectangle sont égales à 24cm et 40cm. Sa hauteur est égale à 15cm.
Calcule les angles du trapèze à 0,1 dgré près.

Exercice 5

Soit MNP un triangle quelconque de hauteur MH=4cm, d'angles N=80° et M=55°
Calcule NP à 1mm près, en remarquant que NP=NH+HP.

Exercice 6

a_Un angle aigu a un sinus égal à 0,2. Calcule son cosinus puis sa tangente à 0,001 près sans calculer l'angle.

b_Calcule la tangente de l'angle aigu qui a pour cosinus 0,9.

Exercice 7

Soient 'zéphir' et 'aquilon' les fonctions définies par les expressions:

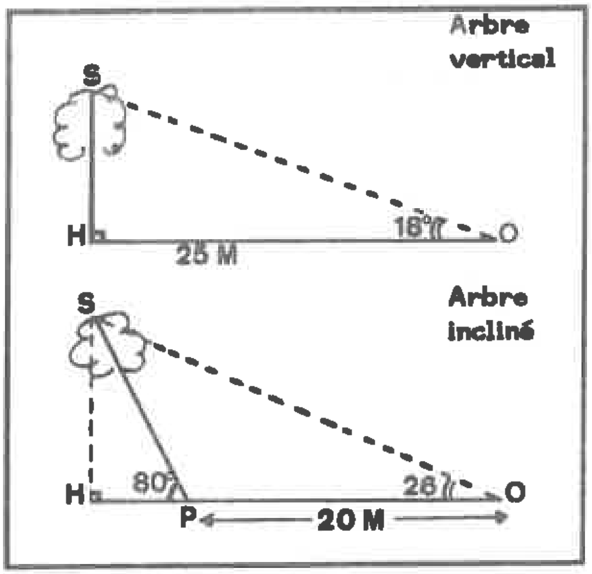
$$\text{zéphir}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{aquilon}(x) = 1 + \tan^2 x$$

a_Calcule zéphir(x) et aquilon(x) de 0° à 80° par pas de 10° à 0,001 près. Quelle supposition peux-tu faire après ces calculs ?

b_Démontre cette supposition à partir de aquilon(x), en remplaçant tan x par son expression en fonction de sin x et de cos x .

c_Démontre de même que: $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$

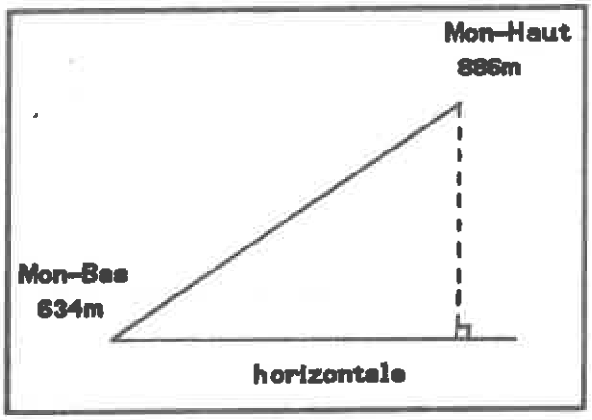
Exercice 8



Hauteur d'un arbre:

Calcule à 1 dm près la hauteur de l'arbre vertical et celle de l'arbre incliné.

Exercice 9



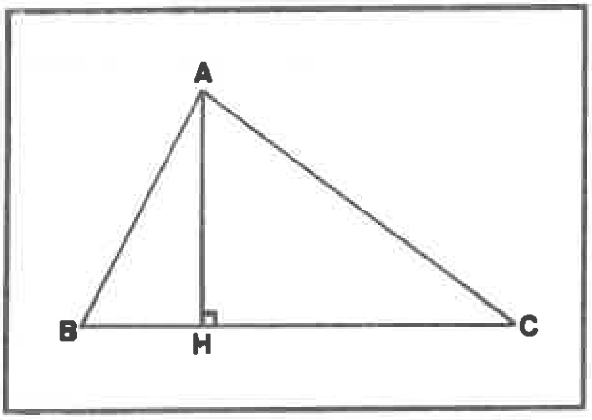
Pente d'une route:

Une route monte régulièrement entre deux villages Mon-Bas et Mon-Haut distants de 4,2 km.

a. De combien de mètres s'élève la route entre deux bornes hectométriques.
Exprime cette élévation en pourcentage. Tu obtiens ainsi la pente de la route.

b. Quel angle fait la route avec l'horizontale ?

Exercice 10



Soit ABC un triangle de hauteur AH=2cm, tel que de plus BH=4cm et HC=1cm.

a_Démontre que la relation: $AH^2 = BH.HC$ est vérifiée.

b_Fais une figure. Quelle remarque fais-tu à propos du triangle ABC ?
Refais une figure en prenant BH=8cm et HC=2cm et AH de sorte que la relation précédente soit encore vraie.
Quelle supposition peut-on faire ?

c_Démontre la propriété suivante:

Si dans un triangle ABC de hauteur AH, on a la relation: $AH^2 = BH.HC$, alors ce triangle est rectangle en A.

Pour cela, exprime tan $\widehat{ABC}$ et tan $\widehat{HAC}$ en fonction des longueurs AH, BH, HC. Qu'en déduis-tu ?
Démontre que $\widehat{BAH}=\widehat{HCA}$ puis que $\widehat{BAH}+\widehat{HAC}=90°$.

d_La propriété réciproque est-elle vraie ?

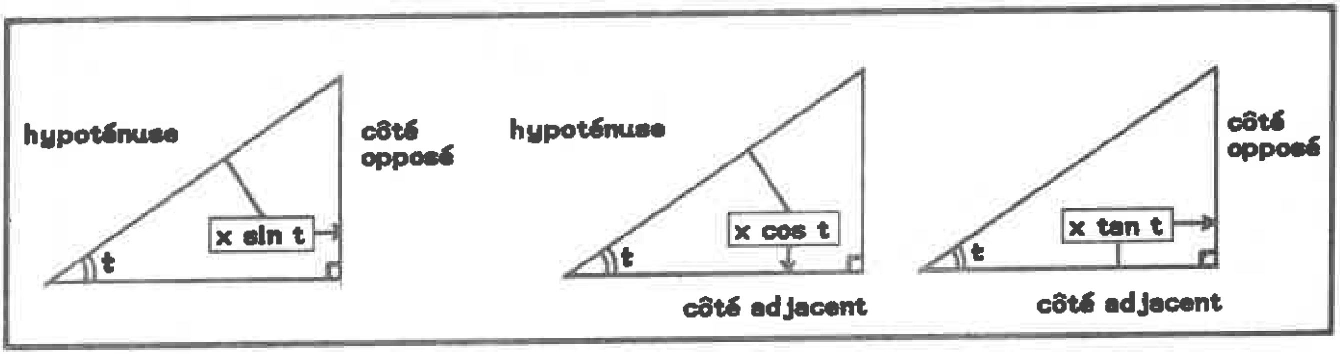
IV FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

1.RECAPITULATION

SINUS, COSINUS, TANGENTE sont des FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES.

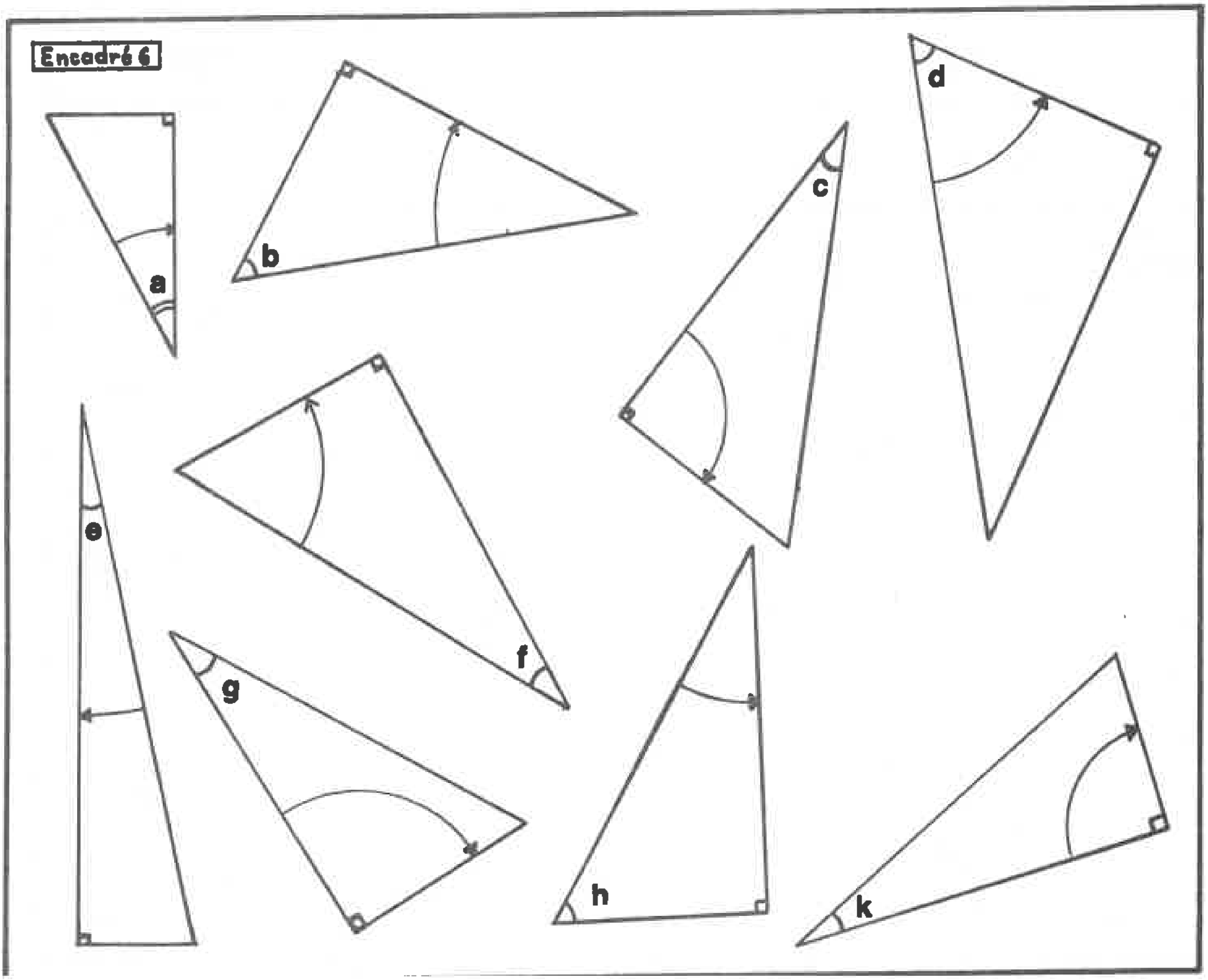
On les appelle ainsi car elles servent à faire des calculs dans les triangles. (Trigonométrie vient de trigone, synonyme de triangle)

Tu retiendras les trois schémas suivants:



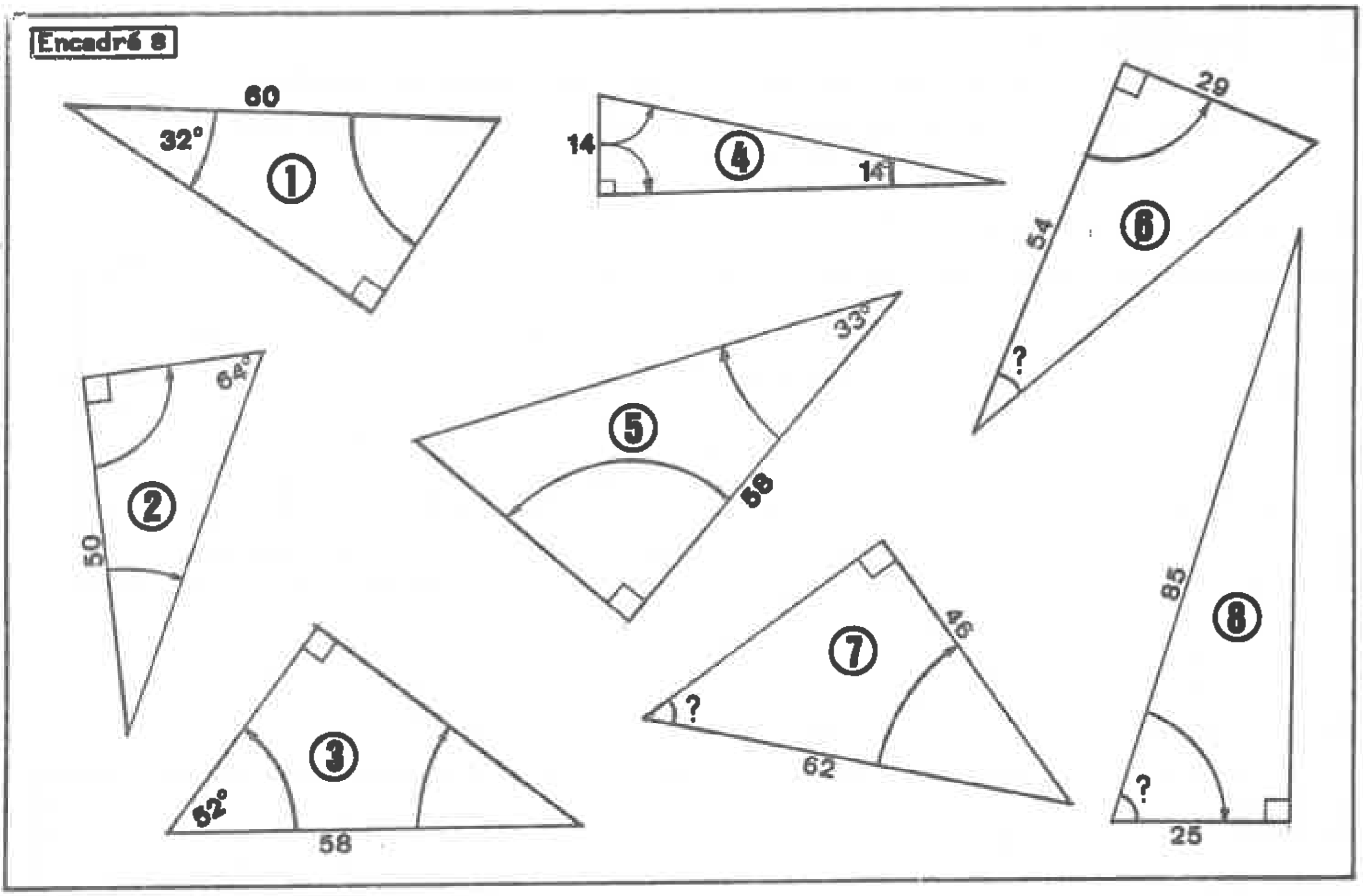
Exercice 1

Pour chaque triangle de l'encadré 6, trouve le multiplicateur.



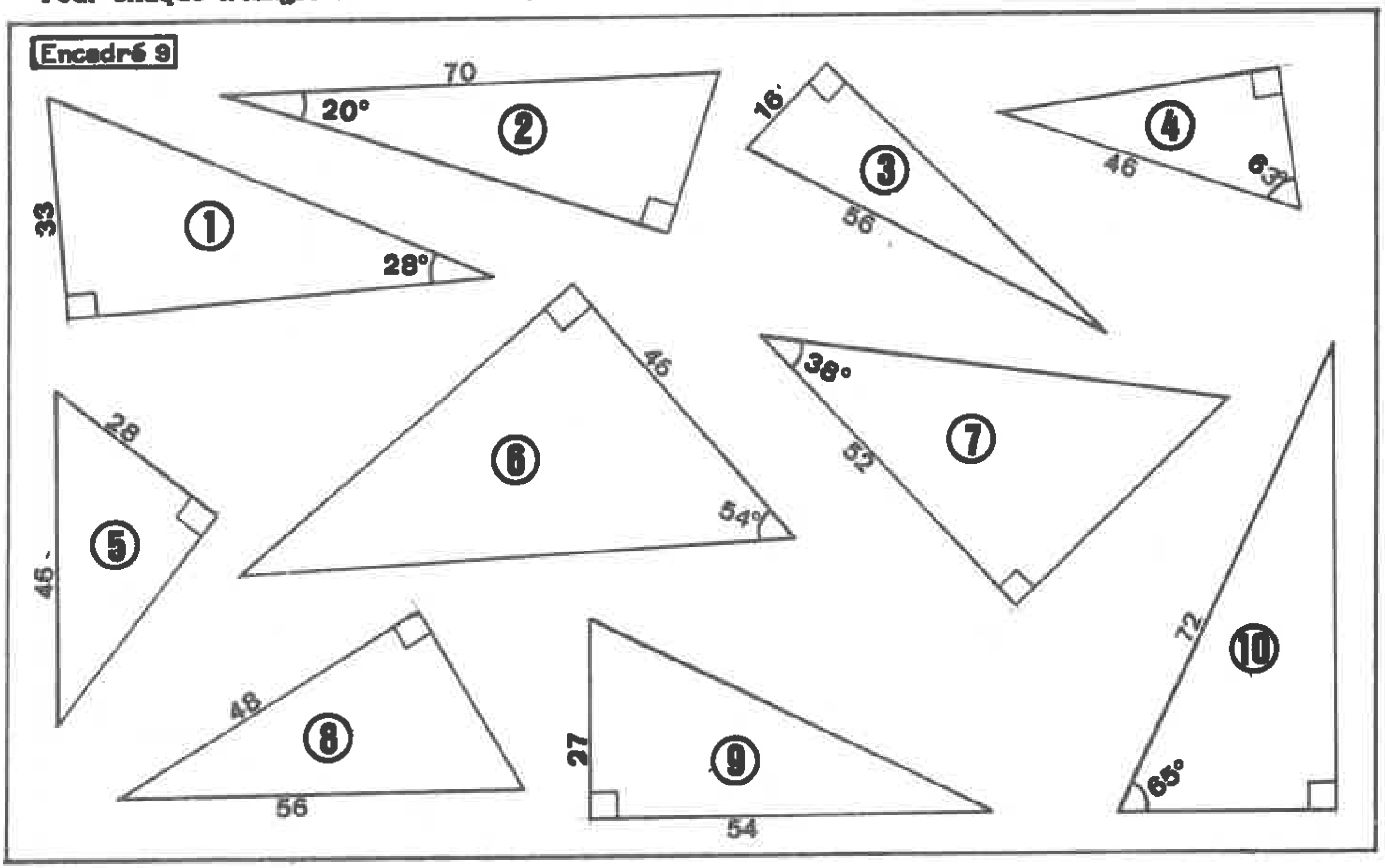
Exercice 2

Pour chaque triangle de l'encadré 8, trouve les longueurs ou les angles demandés.



Exercice 3

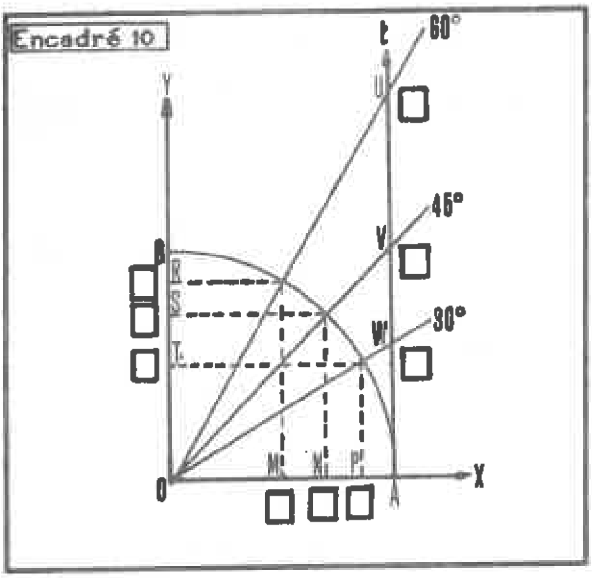
Pour chaque triangle de l'encadré 9, calcule les angles et les longueurs inconnus.



2. REPRESENTATION SUR UN QUART DE CERCLE

Complète le tableau suivant avec les valeurs exactes:

x	0°	30°	45°	60°	90°
sin x					
cos x					
tan x					

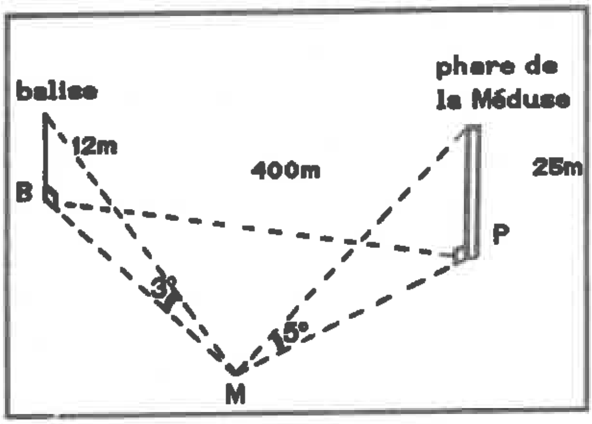


a_Refais la figure de l'encadré 10.

b_Calcule exactement les longueurs suivantes:
OM ON OP OR OS OT AU AV AW
Ecris ces valeurs dans le cadre correspondant.

c_Sur quel axe lit-on le cosinus de l'angle ?
Son sinus ? Sa tangente ?

Exercice 4



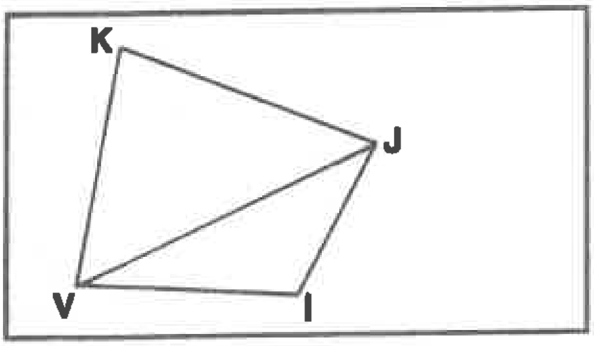
_Tu es le gardien du phare de la Méduse et tu viens de recevoir le SOS suivant d'un pêcheur qui a le compas dans l'oeil et des problèmes de santé:

"Ma barque est percée. Dans 6 minutes, nous sombrerons. D'où je suis, je vois le phare de le méduse sous un angle de 5 degrés et la balise sous un angle de 3 degrés. Au Secours ! "

_Auras-tu le temps de déterminer la position du malheureux marin ?

_Fais un plan à l'échelle 1:5000.

Exercice 5



_Un géomètre doit mesurer la surface d'un terrain qui a la forme ci-contre.

_Le géomètre place d'abord un appareil de visée à l'un des coins V du terrain, puis à l'aide d'un décamètre mesure la distance de V à chacun des trois autres coins.
Il trouve: VI=60m VJ=100m VK=75m

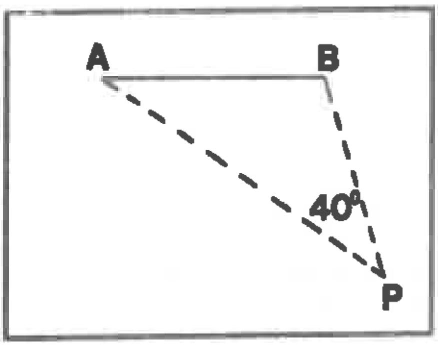
_A l'aide de son appareil de visée, il mesure ensuite les angles IVJ et JVK.
Il trouve: IVJ=28° JVK=54°

Voici enfin son calcul: aire = $\frac{100\times60\times\sin28}{2} + \frac{100\times75\times\sin54}{2} = 4442{,}2\text{m}$

Explique et vérifie ce calcul.

V ANGLE AU CENTRE ET ANGLE INSCRIT

Activité 1



..Lorsqu'un photographe regarde à travers l'objectif de son appareil, il ne voit que ce qui se trouve dans un certain angle (en réalité dans un cône).

..Sur du papier calque trace un angle de 40°. Ce sera l'angle de vision

.. Le sommet de l'angle représentera l'oeil du photographe.

..Au centre d'une feuille blanche, trace un segment [AB] de 4cm.

..En déplaçant le calque détermine les points où le photographe doit se placer pour voir exactement le segment [AB].

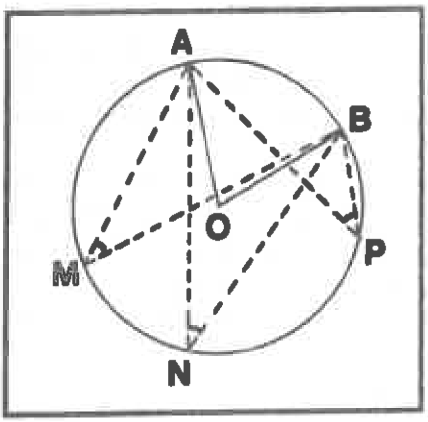
..Quelles figures obtiens-tu ?
..Trace les axes de symétrie.
..Appelons M et N deux des points que tu viens de tracer. Que peux-tu dire des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$?

ACTIVITE 2

..Trace un cercle de centre O et de rayon R=5cm.
..Trace deux points A et B du cercle tels que AB=4cm.
..Choisis sur le cercle et du même côté que O par rapport à la droite(AB), trois points M, N, P.
..Compare les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$, $\widehat{APB}$, $\widehat{AOB}$.

..Refais une figure avec AB=6cm et une autre avec AB=8cm. Mesure les mêmes angles.

CONCLUSION



Définitions

_L'angle AOB est appelé **angle au centre**.

_Les angles AMB, ANB, APB, sont appelés **angles inscrits**.

_On dit que les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$, $\widehat{APB}$ **interceptent le même arc** AB.

Propriétés

_Enonce une propriété concernant un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.
_Quelle propriété ont deux angles inscrits qui interceptent le même arc.

Remarque: _Que se passe-t-il si le sommet de l'angle ne se trouve pas du même côté que le centre par rapport à la droite(AB)?

EXERCICE

1_Trace un triangle ABC tel que: AB=6,2cm BC=4,8cm AC=9cm.

2_Détermine le centre O du cercle circonscrit à ABC et trace ce cercle.

3_Soit D le symétrique de B par rapport à O. Rappelle pourquoi le triangle BCD est rectangle.

4_Démontre que les angles A et D sont égaux

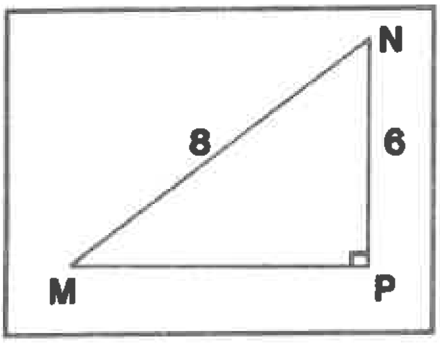
5_Calcule sin $\widehat{D}$ en fonction de BC et de R.

6_Déduis-en que dans un triangle le rayon R est égal à: $\dfrac{BC}{2\sin \widehat{A}}$

Application:
7_Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle que tu as tracé et vérifie ton calcul en mesurant le rayon sur la figure.

CONTROLE
Dossier 45

EXERCICE 1

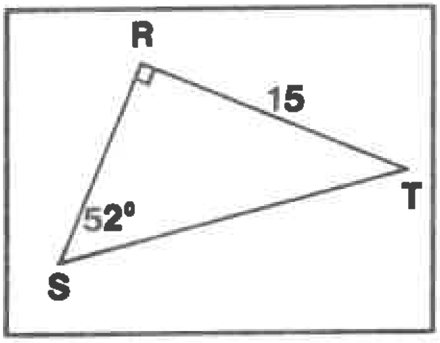


a_Calcule sin $\widehat{M}$ à 0,001 près, puis $\widehat{M}$ à 1 degré près.

b_Calcule tan $\widehat{M}$ à 0,001 près et déduis-en MP à 0,1 près.

c_Vérifie la réciproque du théorème de Pythagore.

EXERCICE 2



a_Calcule sin $\widehat{S}$ et déduis-en RS à 0,01 près.

b_Calcule tan $\widehat{S}$ et déduis-en ST à 0,01 près.

EXERCICE 3

Un triangle EFG a pour hauteur FH=5cm et pour côtés EF=8cm FG=10cm.
a_Calcule l'angle E à 1 degré près et déduis-en EH.
b_Calcule $\widehat{HFG}$ à 1 degré près et déduis-en $\widehat{FGH}$.
c_Calcule HG et EG à 1mm près.

EXERCICE 4

Les diagonales d'un losange ABCD de centre I sont AC=10cm et BD=16cm.
Calcule à 0,1 degré près les angles du losange puis la longueur de son côté à 1mm près.

EXERCICE 5

Soient Ox et Oy deux demi-droites perpendiculaires et M, N, P trois points du quart de plan ainsi défini tels que:
OM=1 ON=2 OP=3 $\widehat{xOM}=30°$ $\widehat{xON}=45°$ $\widehat{xOP}=60°$

M se projette orthogonalement en M' sur Ox et en M" sur Oy.
N .... N' .... N".........
P.. P' .... P".........

Fais une figure en prenant 4cm comme unité de longueur.
Calcule les valeurs exactes des longueurs suivantes puis donnes-en une valeur approchée à 0,1 près: OM' OM" MM' ON' ON" NN' OP' OP" PP'

MATHEMATIQUES 3EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 46

TITRE: STATISTIQUES EN TROISIEME

3

PREREQUIS

- DOSSIER 36

OBJECTIFS

- MOYENNE ARITHMETIQUE SIMPLE
- MOYENNE ARITHMETIQUE PONDEREE
- MEDIANE
- USAGE DE LA CALCULATRICE

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 46

STATISTIQUES EN TROISIEME

1 / MOYENNE ARITHMETIQUE

A) MOYENNE ARITHMETIQUE SIMPLE

Situation 1 : Voici les notes obtenues en mathématiques par un élève au cours du premier trimestre :

15 - 7 - 9 - 13 - 18 - 6 - 8 - 12

Calcule sa moyenne trimestrielle en mathématiques.

Situation 2 : a) On a relevé les températures observées dans un certain nombre de villes de France le 14 juillet 1988 à 16 heures :

19 - 22 - 12 - 14 - 12 - 13 - 15 - 17 - 23 - 22 - 10 - 24

Quelle était la température moyenne ?

b) On a effectué le même relevé en novembre 1988 à 6 heures :

3 -5 -2 4 0 5 -6 -2 -1 0 4 -2

Quelle était la température moyenne ?

Un peu de langage mathématique

Nous noterons " $\overline{x}$ " la moyenne obtenue dans chacun des cas. Nous verrons plus loin le pourquoi de cette notation.

Dans le premier cas, tu as du faire : $\overline{x} = \dfrac{\text{somme des notes}}{\text{nombre de notes}}$

Dans le deuxième cas, tu as du faire : $\overline{x} = \dfrac{\text{somme des températures}}{\text{nombre de villes observées}}$

De manière plus générale

> La moyenne arithmétique simple de n "quantités" est donnée par
>
> $$\boxed{\overline{x} = \frac{S}{n}}$$
>
> où S est la somme des n quantités.

EXERCICE 1 : Calcule les moyennes arithmétiques des "séries" suivantes :

a) 7,2 - 3,5 - 8,4 - 5,2 - 13,5 - 8,9

b) 3,75 - 7,13 - 15,04 - 8,23 - 7,58

c) 125 - 43,172 - 6,052 - 77,22

Remarque : Dans la situation 2b, tu as été amené à calculer une moyenne d'une série où il y avait des nombres négatifs. Ceci se généralise en considérant que S est une somme algébrique.

EXERCICE 2 : Calcule les moyennes arithmétiques des "séries" suivantes :

a) -3 -9 -18 -4 -10 -9 -14

b) 17 -19 0 -8,3 13 18,5 -10,4

c) 0 0 0 0 0 0 -6

Utilisation de la calculatrice (CASIO FX 82B)

a) On se met en mode statistique

MODE · (SD est affiché à droite de l'écran)

b) On vide les mémoires statistiques

INV AC (C'est l'instruction SAC)

c) On entre les données

Dans la situation 1, on procède ainsi :

15 M+ (En fait, c'est l'instruction "x")
7 M+
....
12 M+

d) On lit les résultats

INV 7 (C'est l'instruction $\overline{x}$). Cela donne la moyenne (ici $\overline{x} = 11$)

INV 6 (C'est l'instruction n). Cela donne le nombre de quantités entrées (ici n = 8)

INV 5 (C'est l'instruction $\sum x$). Cela donne la somme des n quantités entrées (ici S = 88)

e) Erreurs d'entrée ; modification d'une donnée

Si on s'aperçoit d'une erreur après avoir introduit une donnée, on peut annuler cette dernière donnée en faisant :

INV M+ (C'est l'instruction DEL)

f) Pour quitter le mode statistique

On fait MODE 0 (SD s'éteint ; on est revenu en mode calcul)

Remarque : Tu peux voir sur ta calculatrice qu'il y a 3 autres résultats possibles à lire (INV 8 : σ_n ; INV 9 : σ_{n-1} ; INV 4 : $\sum x^2$). Nos connaissances de 3ème ne nous permettent pas d'interpréter ces résultats. Tu les utiliseras plus tard !

EXERCICE 3 : Vérifie tes exercices 2 et 3 en utilisant le mode statistique de ta calculatrice.

B) MOYENNE ARITHMETIQUE PONDEREE

Situation 3 : Dans la plupart des examens, chaque matière a un coefficient qui indique sa pondération (c'est à dire son poids par rapport aux autres matières).

Par exemple, au BEPC (l'ancêtre du Brevet ce Collèges), il y avait 4 matières avec les coefficients suivants :

Français (6) Maths (6) Langue vivante (4) Histoire (4)

Un élève a obtenu les notes suivantes (sur 20) :

Français : 9 Maths : 14 Anglais : 7 Histoire : 9

Calcule sa moyenne simple. A-t-il son BEPC avec cette moyenne ?

Calcule sa moyenne pondérée. Pour cela tu procèdes ainsi :

$$T = (9 \times 6) + (14 \times 6) + (7 \times 4) + (9 \times 4)$$

$$N = 6 + 6 + 4 + 4$$

On a alors : $\overline{x} = \frac{T}{N}$

A-t-il son BEPC ?

Situation 4 : On a relevé les températures dans un certain nombre de villes de France le 15 juin 1988 à 16 heures :

Température	12	14	15	17	19	22	23
Nombre de villes	1	2	3	4	7	10	3

Quelle était la température moyenne ?

On pourrait utiliser ce qui a été vu dans A) :

$$S = 12 + 14 + 14 + 15 + 15 + 15 + \ldots + 23 + 23 + 23$$

$$n = 30$$

Mais on peut aussi se ramener à la situation 3 :

$$T = (12\times1) + (14\times2) + (15\times3) + (17\times4) + (19\times7) + (22\times10) + (23\times3)$$

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 10 + 3$$

On vérifie immédiatement que $S = T$ et $n = N$.

Réponds alors à la question posée.

Un peu de langage mathématique

La moyenne arithmétique pondérée de n "quantités" est donnée par

$$\overline{x} = \frac{T}{N}$$

où N est la somme des pondérations (coefficients) et T est la somme des produits des quantités par leur coefficient de pondération.

EXERCICE 4 : Soient les quantités 7 ; 8 ; 9 ; 13 ; 6 ; 12 ; 5. Chacune d'entre elles a pour pondération respective 3 ; 2 ; 7 ; 1 ; 5 ; 4 ; 2.

Calcule la moyenne pondérée.

Tu peux t'aider du tableau suivant :

Quantités	7	8	9	13				Sommes
Coefficients	3	2	7					N =
Produits	21	16						T =

EXERCICE 5 : Calcule les moyennes pondérées des séries suivantes :

a) 13 (3) - 8 (2) - 5 (6) - 4 (5) - 3 (6)

b) 13,2 (6) - 6,8 (5) - 14,5 (8) - 3,2 (7)

Utilisation de la calculatrice (CASIO FX 82B)

On peut entrer les données avec leur coefficient de pondération. Om procède ainsi dans le cas de la situation 3 :

9 [x] 6 [M+]
14 [x] 4 [M+]
7 [x] 4 [M+]
9 [x] 4 [M+]

Remarque importante : Il faut d'abord entrer la valeur, et ensuite le coefficient de pondération (après le signe x).

Tout le reste du travail sur la calculatrice est le même qu'en A).

EXERCICE 6 : Vérifie tes exercices 4 et 5 en utilisant le mode statistique de ta calculatrice.

C) MOYENNE ARITHMETIQUE D'UNE SERIE STATISTIQUE

Il ne s'agit évidemment que de séries statistiques à caractère quantitatif. Pour cela se reporter au dossier 36.

Les "quantités" correspondent alors aux différentes valeurs du caractère. Les "coefficients de pondération" correspondent aux effectifs.

Situation 5 : La série statistique suivante représente la répartition des familles d'un quartier de La Chapelle St Luc suivant le nombre d'enfants

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7	Sommes
Nombre de familles	7	5	28	35	40	25	13	11	N =
Produits									T =

Complète le tableau et calcule la moyenne d'enfants par famille dans ce quartier.

EXERCICE 7 : Pour une étude marché, on a fait une enquête auprès de 50 familles de La Chapelle St Luc pour savoir combien elles possédaient d'appareils ménagers. Voici les résultats :

9 - 5 - 4 - 4 - 5 - 2 - 1 - 5 - 6 - 6 - 6 - 5 - 4 - 4 - 3 - 4 - 3 - 6 - 7
4 - 4 - 2 - 4 - 5 - 9 - 7 - 8 - 8 - 3 - 7 - 2 - 5 - 6 - 5 - 7 - 5 - 9 - 2
3 - 5 - 5 - 4 - 6 - 8 - 3 - 6 - 7 - 4 - 10 - 10

Complète le tableau suivant et calcule la moyenne d'appareils par famille.

Nombre d'appareils	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sommes
Effectifs											N =
Produits											T =

Retrouve cette moyenne directement avec les données d'origine et la calculatrice. Vérifie avec la moyenne pondérée.

Remarque importante : La moyenne arithmétique d'une série statistique est la moyenne arithmétique de toutes ses valeurs. On la calcule en utilisant une moyenne pondérée pour simplifier les calculs (voir situation 4).

EXERCICE 8 : Après enquête, calcule la moyenne d'enfants par famille des élèves de ta classe.

Cas des valeurs réparties par classe

Comme on ne connait pas la répartition des valeurs dans chacune des classes, on suppose qu'elle est "linéaire" ou "proportionnelle".
Au lieu de prendre toutes les valeurs de la classe, on prend le "centre" de la classe, c'est à dire la moyenne des valeurs extrêmes de la classe, et on met comme coefficient de pondération l'effectif de la classe.

La situation 6, qui va suivre, en est un exemple :

Situation 6 : On achète le même article dans différents magasins. On obtient les prix suivants (en francs) :

Prix (en F)	[54;56[	[56;58[	[58;60[	[60;62[	[62;64[	[64;66[	Sommes
Nombre de magasins	1	4	10	5	3	1	N =
Centre des classes	55	57					
Produits	55	228					T =

Complète le tableau et calcule le prix moyen de l'article.

EXERCICE 9 : Les résultats des 150 élèves du Collège Albert Camus au brevet blanc de mathématiques ont été rangés par classe :

Notes	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16;20[	Sommes
Nombres d'élèves	10	25	60	35	20	N =
Centre des classes						
Produits						T =

Calcule la moyenne des résultats à ce brevet blanc.

EXERCICE 10 : Une étude sur la répartition des salaires des 400 employés d'une entreprise est donnée par le tableau suivant :

[3600;4400[	20
[4400;4800[	30
[4800;5200[	75
[5200;5600[	120

[5600;6000[	130
[6000;6400[	13
[6400;6800[	12

Calcule le salaire moyen.

EXERCICE 11 : a) On a noté les poids de 25 élèves d'une classe de 5ème du collège :

39 - 41 - 33 - 47 - 52 - 38 - 31 - 48 - 43 - 44 - 58 - 46 - 38 - 43
47 - 53 - 44 - 47 - 37 - 54 - 42 - 49 - 51 - 36 - 41

Calcule le poids moyen.

b) On range les résultats obtenus par classes de 5 kg.

Poids	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	Sommes
Nombre d'élèves							N =
Centre des classes							
Produits							T =

Calcule la moyenne en utilisant ce tableau. Compare les deux résultats.

EXERCICE 12 : On a relevé les tailles en cm des élèves d'une classe de première année de LEP :

163 - 158 - 176 - 165 - 158 - 162 - 168 - 164 - 154 - 155 - 164 - 161
162 - 161 - 157 - 161 - 162 - 157 - 161 - 150 - 155 - 166 - 156 - 168
164 - 164 - 158 - 158 - 162 - 163 - 160 - 158 - 164 - 162

Calcule la taille moyenne.

Classe les résultats dans un tableau par intervalles de 5 cm : [150;155[, [155;160[......

Calcule la moyenne en utilisant ce tableau.

Compare les deux résultats.

2 / MEDIANE

A) EXEMPLE ET DEFINITION

Situation 6 : a) Gérard a obtenu les notes suivantes :

13 - 7 - 11 - 15 - 15 - 6 - 10 - 9 - 18

Il décide de trouver sa note "milieu". Pour ceci, il ordonne ses notes et les partage en 2 parties comportant le même nombre de notes.

$$\underbrace{6 - 7 - 9 - 10 - \boxed{11}}\underbrace{\ - 13 - 15 - 15 - 18}$$

4 notes sont inférieures à 11 et 4 notes sont supérieures à 11.

Sa note "milieu" est donc 11.

b) Karine, qui a fait un controle de plus, veut faire le même travail avec ses notes :

6 - 11 - 15 - 8 - 7 - 12 - 9 - 15 - 8 - 17

Elle trouve alors la série suivante :

$$\underbrace{6 - 7 - 8 - 8 - \boxed{9 - 11} - 12 - 15 - 15 - 17}$$

Aucune de ses notes n'est au "milieu". Elle décide de prendre pour note "milieu" la demi-somme des notes centrales, soit :

$$\frac{9 + 11}{2} = 10$$

c) Compare leurs notes "milieu" avec leurs moyennes respectives

> **DEFINITION** : On appelle **MEDIANE** d'une série statistique ordonnée, une valeur du caractère qui partage la série suivant des effectifs égaux.
> **Attention** : Il est indispensable que la série soit ordonnée, contrairement à la moyenne.

B) CALCUL PRATIQUE DE LA MEDIANE

a) **Cas d'un effectif "petit"**

Deux cas se présentent selon la parité de l'effectif n.

i) **L'effectif est impair**

La médiane est la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$.

C'est le cas de la situation 6a) : $n = 9$; $\frac{n+1}{2} = 5$. la médiane est le terme de rang 5, c'est à dire 11 (c'est la note "milieu").

ii) **L'effectif est pair**

On prendra pour médiane la demi-somme des valeurs occupant les rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$.

C'est le cas de la situation 6b) : $n = 10$; $\frac{n}{2} = 5$; $\frac{n}{2} + 1 = 6$

La médiane est la demi-somme des termes de rang 5 et 6, c'est à dire 9 et 11. On prendra donc 10 pour médiane.

EXERCICE 13 : Calcule la médiane des séries suivantes :

a) 9 - 13 - 2 - 5 - 8 - 6 - 4 - 13 - 18 - 2 - 6 - 7

b) 13 - 25 - 8 - 9 - 15 - 16 - 30 - 18 - 10 - 8

Médiane et moyenne

Yann a obtenu les notes suivantes : 0 - 10 - 5 - 11 - 12 - 12 - 0
Calcule sa moyenne et sa médiane.

Conclusion :
- La médiane ne tient compte que de la répartition des notes. Elle n'est donc pas influencée par les notes extrèmes.
- La moyenne, au contraire, tient compte du poids des notes. Elle est donc très influencée par les notes extrèmes.

b) **Cas d'un grand effectif**

Si N est l'effectif total, on prendra pour médiane :

- Le terme de rang $\frac{N}{2}$ si N est pair.
- Le terme de rang $\frac{N+1}{2}$ si N est impair.

C) **METHODE GRAPHIQUE DE DETERMINATION DE LA MEDIANE**

Nous travaillerons dans le cas où les valeurs ont été rangées par classe.
Pour trouver graphiquement la médiane, nous allons utiliser les notions vues dans le dossier 36 (en 4ème) et concernant les effectifs cumulés croissants et décroissants et les poygones correspondants.

Situation 7 : On donne une série statistique des notes obtenues par les 200 candidats à un examen :

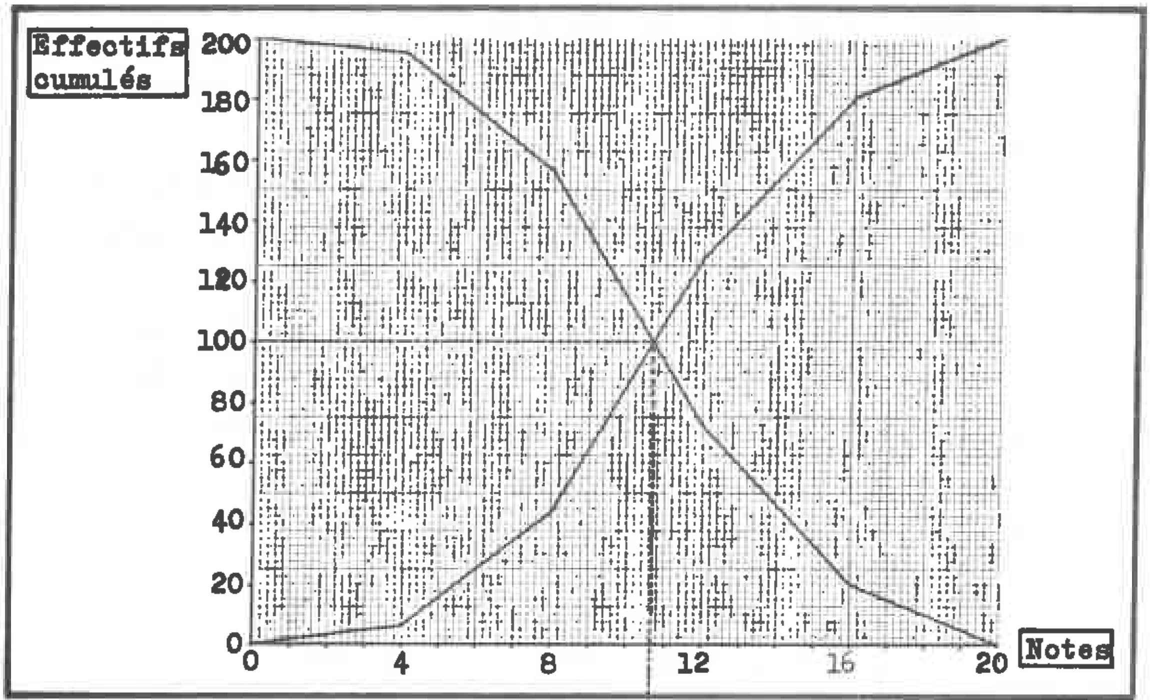
Classes de notes	Effectif	Effectif croissant	Effectif décroissant
[0 ; 4[	6	6	200
[4 ; 8[	38	44	194
[8 ; 12[	84	128	156
[12 ; 16[	52	180	72
[16 ; 20[	20	200	20

On admet que les valeurs se répartissent de façon "linéaire" dans chaque classe, ce qui se traduit graphiquement par la construction des polygones des effectifs cumulés croissants (ou décroissants).

Les polygones sont obtenus en représentant graphiquement le tableau :

Notes	0	4	8	12	16	20
Effectifs cumulés croissants	0	6	44	128	180	200
Effectifs cumulés décroissants	200	194	156	72	20	0
Somme	200	200	200	200	200	200

On obtient alors le graphique suivant :



Comme N = 200, la médiane est la valeur du terme de rang 100.

On lit graphiquement <u>m = 10,7</u>

La médiane s'obtient aussi comme l'abscisse du point d'intersection des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

<u>Situation 8</u> : Les résultats du saut en hauteur au cours d'une séance d'athlétisme sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Hauteur (cm)	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[90 ; 95 [	2		
[95 ; 100 [	8		
[100 ; 105 [	12		
[105 ; 110 [	25		
[110 ; 115 [	14		
[115 ; 120 [	10		
[120 ; 125 [	9		

Complète le tableau, puis représente graphiquement les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants en prenant en abscisse 2 cm pour 5 cm et en ordonnée 1 cm pour 10.

Détermine graphiquement la hauteur "médiane".

D) CALCUL DE LA MEDIANE

Nous allons préciser par le calcul la valeur de la médiane obtenue graphiquement.

Revenons à la situation 8.

On a : Effectif total $N = 80$

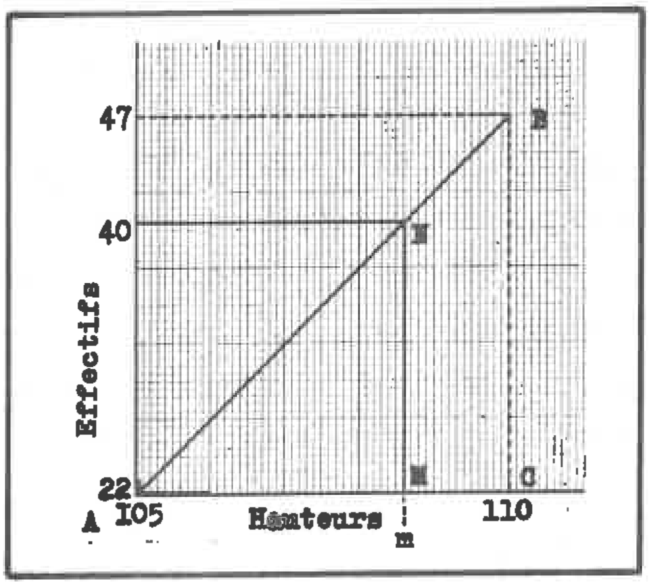
donc : rang de la médiane $= \frac{80}{2} = 40$

En utilisant les effectifs cumulés croissants, on constate que la médiane se trouve dans la classe [105;110[.

De manière plus précise, tu as du trouver, pour construire le polygone des effectifs cumulés croissants, les résultats suivants :

Hauteur (cm)	105	110
Effectifs cumulés croissants	22	47

Agrandissons la partie du polygone qui nous intéresse :



Posons $x = AM$

Nous allons utiliser le théorème de Thalès pour calculer x.

Dans le triangle (ABC), on a (MN)//(BC).

$$\text{Donc } \frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Or $CA = 110 - 105 = 5$

$BC = 47 - 22 = 25$

$MN = 40 - 22 = 18$

D'où la proportion suivante : $\frac{x}{5} = \frac{18}{25}$

On obtient donc : $x = \frac{18 \cdot 5}{25}$ donc $x = 3{,}6$

On en déduit : $m = 105 + 3{,}6$ donc $\boxed{m = 108{,}6}$

La médiane est donc 108,6 cm. Compare avec la valeur trouvée graphiquement.

On peut résumer ce calcul :

Nombre de valeurs dans la classe : 47 - 22 = 25
Rang de la médiane dans la classe : 40 - 22 = 18
Longueur de la classe : 110 - 105 = 5

Soit x le nombre de cm au-dessus de 105 pour la médiane. En utilisant la proportionnalité-linéarité, on a la proportion :

Nombre de cm au-dessus de 105	x	5
Rang de la classe	18	25

EXERCICE 14 : En utilisant la méthode précédente, calcule la médiane de la situation 7. Compare avec la solution graphique.

EXERCICE 15 : Dans un lycée, on a relevé l'age des enseignants :

Tranches d'ages	Nombres d'enseignants	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[20 ; 26[	18		
[26 ; 32[	22		
[32 ; 38[	25		
[38 ; 44[	13		
[44 ; 50[	10		
[50 ; 56[	8		
[56 ; 62[	4		

Complète ce tableau. Détermine par le calcul l'age médian (la médiane). Vérifie graphiquement en construisant les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants en prenant les échelles suivantes :

abscisses : 1 cm pour 4 ans
ordonnées : 1 cm pour 10.

Remarque : On constate que la méthode graphique est moins précise que la méthode par le calcul.

3 / QUELQUES PROBLEMES DE STATISTIQUE

Les problèmes suivants ont pour objectif de faire la synthèse de tout ce que tu as étudié en statistique au collège :

- Ranger des données dans un tableau.
- Représenter ces données par des diagrammes et des graphiques.
- Exploiter ces données : calcul de fréquences, d'effectifs cumulés, de moyennes, de médianes.

PROBLEME 1

Le tableau ci-dessous donne la production française d'acier brut (en milliers de tonnes) de 1970 à 1979.

Années	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Production	23,8	22,8	24,1	25,3	27	21,5	23,2	22,1	22,8	23,4

a) Représente ce tableau par un diagramme en barres en prenant l'échelle suivante :
   abscisses : largeur des barres de 1 cm par année
   ordonnées : 1 cm pour 1 million de tonnes, en commençant à 20.

b) Calcule la production moyenne sur ces 10 ans.

c) Quelle est la médiane sur ces 10 ans ?

d) Enquête : Complète ce tableau de 1980 à 1986, puis reprends les questions a, b et c.

PROBLEME 2

Le tableau ci-dessous donne la répartition suivant le sport pratiqué dans un lycée.

Sports pratiqués	Effectifs	Fréquences	Fréquences en %
Athlétisme	37		
Basket-ball	25		
Football	53		
Handball	29		
Natation	12		
Volley-ball	24		

a) Complète le tableau pour les fréquences.

b) Représente graphiquement ce tableau par un diagramme en bandes de longueur 15 cm.

c) Représente graphiquement ce tableau par un diagramme circulaire.

d) Enquête : fais la même enquête dans ton collège pour savoir les sports pratiqués par les élèves de troisième.

e) Remarque : Peut-on ici parler de moyenne et de médiane ? Pourquoi ?

PROBLEME 3

On lance un dé 50 fois de suite. Voici les numéros de la face supérieure lors de chaque lancer :

2 - 1 - 2 - 1 - 4 - 5 - 1 - 1 - 5 - 3 - 3 - 1 - 3 - 4 - 2 - 1 - 6 - 5 - 1 - 4
6 - 6 - 3 - 5 - 2 - 3 - 2 - 4 - 3 - 4 - 6 - 3 - 5 - 5 - 1 - 5 - 2 - 2 - 5 - 5
2 - 4 - 6 - 3 - 2 - 6 - 1 - 5 - 2 - 3

a) Classe ces résultats dans le tableau ci-dessous :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois						
Produits						
Fréquences (%)						

b) Complète ce tableau.

c) Calcule la moyenne et la médiane.

d) Représente graphiquement ce tableau par un diagramme en bâtons.

e) Jouons : Chaque élève de la classe fera l'expérience chez lui (50 jets de dé), notera les résultats, les classera et déterminera la moyenne et la médiane. On comparera les résultats.

PROBLEME 4

Dans une entreprise de 200 employés, les salaires bruts mensuels se répartissent ainsi :

Salaires	Effectifs	Centres	Produits	Fréquences	Cumulés croissants	cumulés décroissants
[4000 ; 5000[	30					
[5000 ; 6000[	50					
[6000 ; 7000[	40					
[7000 ; 8000[	35					
[8000 ; 9000[	30					
[9000 ; 10000[	10					
[10000 ; 11000[	5					

a) Construis l'histogramme et le polygone des effectifs.
En abscisse, tu prendras 2 cm pour 1000 francs (en commençant à 3000 F).
En ordonnée, tu prendras 2 cm pour 10.

b) Calcule le salaire moyen (moyenne).

c) Calcule le salaire médian (médiane).

d) Retrouve graphiquement cette médiane en construisant les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
Tu prendras 2 cm pour 1000 francs en abscisse, en commençant à 1000 F, et 1 cm pour 10 en ordonnée.

PROBLEME 5

Mène une enquête auprès de tous les élèves de troisième du collège, sur leur taille.

Range alors ces résultats et exploite-les suivant le modèle du problème 4.

Fiche dublirem

TITRE : MATHEMATIQUES EN ACTIVITES - N° 7

AUTEUR : EQUIPE Enseignants IREM de Reims-Collège Albert Camus (Aube)

NIVEAU : 3ème - Année scolaire 88-89

DATE : Mars 1989

MOTS-CLE : spécialité MATHEMATIQUES

autres EXPERIMENTATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES

RESUME : Voici 4 ans que notre équipe bien soudée, accomplit ce travail en commun.

Le fascicule n° 7 comprend 8 dossiers de 3ème et fait suite aux fascicules :
n° 1 & 2 (couverture verte) concernent la 6ème (85-86 & 86-87)
n° 3 & 4 (couverture bulle) concernent la 5ème (86-87 & 87)
n° 5 & 6 (couverture rose) concernent la 4ème (87-88 & 88)

- voici le numéro 7 concernant la 3ème (88-89)
le numéro 8 " " " " " est prévu en Juin 89 -

CONTENU DU FASCICULE N° 7 :

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	132	30 F	Re26