MATHEMATIQUES 4EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

IREM DE REIMS

4

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES

N° 5

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES EN 4ème

AU COLLEGE ALBERT CAMUS

Nous voici donc en plein nouveau programme de 4ème, et ce fascicule 5 propose les sept premiers dossiers que nous avons vécus avec nos élèves.

Quelques remarques d'ordre général concernant ce fascicule :

* Nous avons travaillé avec l'avant projet des programmes de 4ème, et donc avons été au-delà de ce qui est finalement proposé dans la moûture définitive de ces programmes.

* La calculatrice (scientifique) est devenue un outil habituel de l'élève en mathématiques. Seules quelques séquences spécifiques sont faites sans calculatrice.

* Devant l'ampleur du programme, certains dossiers, ou certaines parties sont proposées en autonomie complète aux élèves, une simple mise en commun terminant ce travail.

Toujours faute de temps, nous ne pouvons fournir une véritable analyse de ce suivi "scientifique", trop investi dans notre travail de recherche et de production. Nous en restons donc au niveau des impressions : richesse du travil en équipe pour les enseignants, développement de l'autonomie des élèves dans leur apprentissage des mathématiques ; mais aussi impression de courir avec eux pour essayer de voir tous les points du programme.

<u>Voici une analyse succincte des dossiers de ce fascicule</u>

<u>Dossier 24</u> : Ce premier dossier, de géométrie, a été volontairement placé très tôt dans l'année. Il répond à 2 objectifs :

. Introduire les notions du programme sur projection et droite des milieux.

. Amener les élèves à d'autres types de validation d'un résultat que ceux qu'ils ont employés le plus souvent en 6ème - 5ème : mesures et manipulations raisonnées. Ils doivent commencer à comprendre que ce type de validation peut s'avérer insuffisant, voire faux. D'où la nécessité d'un apprentissage de la "démonstration" par raisonnement déductif, déjà amorcé en 6ème - 5ème, et ce qui pose le plus de difficultés : la rédaction.

Remarques : . Nous avons utilisé le mot "hypothèses" pour "données" ; malgré un débat passionné, nous n'avons pu tomber d'accord, et le mot "hypothèses" a reçu le plus de suffrages.

. Nous avons aussi utilisé le mot "théorèmes" pour "résultats", pour indiquer de façon claire les résultats "institutionnalisés" dans ce dossier.

Dossier 25 : Nous avons ensuite introduit très tôt dans l'année la multiplication dans les nombres relatifs. Pour la règle des signes, nous avons eu beaucoup de peine à trouver des justifications qui relèvent d'un modèle concret ! Nous en avons profité pour revenir sur des techniques de calcul sur les fractions, et continué à développer les premières bases du calcul littéral. Nous avons aussi proposé quelques "gammes" aux élèves, car cela nous paraît indispensable pour bien intégrer les règles de calcul dans les relatifs.

Dossier 26 : Ce dossier fait suite au dossier 24 , et aborde le cas particulier de la projection orthogonale, et, ce qui est nouveau en 4ème, le cosinus. C'est la première découverte d'une "fonction" de la calculatrice. Conformément au programme, nous avons très rapidement placé le problème dans un triangle rectangle. Quelques activités en fin de dossier proposent des appplications du cosinus dans différents problèmes : périmètre d'une figure, recherche d'une hauteur en fonction d'un angle, étude d'une variation de périmètre en fonction de l'angle.

Dossier 27 : Ce dossier fait suite au dossier 25. Il généralise le calcul dans les relatifs, en introduisant de façon plus approfondie qu'en 5ème la notion de réduction au même dénominateur. Il développe la notion d'ordre dans les nombres relatifs décimaux ou en écriture fractionnaire. Il aborde la double distributivité et les identités remarquables.
Le nombre d'exercices (54) ne doit pas faire peur. Il nous a simplement permis d'individualiser au maximum la progression des élèves. Ceux qui étaient en difficulté travaillaient avec le professeur, et n'ont fait qu'un petit nombre d'exercices (l'objectif étant la maîtrise de ces exercices.) Les autres ont avancé à leur rythme, avec le corrigé à leur disposition.

Dossier 28 : Dans ce dossier, nous partons des acquis des élèves sur la proportionnalité, pour généraliser à la notion d'application linéaire.
Les premières situations ont été proposées en travail personnel (hors classe aux élèves). Elles n'ont posé aucun problème, le passage suites proportionnelles - graphique - expression algébrique étant maîtrisé par les élèves.
La seconde partie (avec le coefficient négatif, et le passage à un langage plus abstrait) a été plus difficile pour les élèves.

Dossier 29 : Ce dossier se compose de 3 parties :

1ère partie : Introduction de la translation et du vecteur.
Caractérisation et propriétés.
Cette introduction s'appuie sur la connaissance des symétries de 6ème et 5ème.

2ème partie : Lien entre vecteurs et parallélogramme.
Nouvelle caractérisation du milieu et du parallélogramme.
Dans cette partie, nous revenons sur des rédactions de démonstration utilisant les techniques proposées dans le dossier 24.

3ème partie : Dans cette partie, nous essayons de proposer aux élèves quelques pistes d'utilisation des transformations (symétries et translations).
- . les transformations, outils de dessin
- . les transformations, outils de recherche de points
- . les transformations, outils de validation.

Cette partie est proposée aux élèves en autonomie (uniquement pour ceux qui maîtrisent bien les transformations pour les activités 2 et 3).

Remarque : Là encore, nous avons été très au-delà de ce qui est proposé dans la moûture définitive des programmes. En particulier la dernière partie ne peut être qu'une piste d'activité, si on a du temps !

Dossier 30 : Ce dossier propose une initiation à la lecture de tableaux et graphiques donnant les variations d'un indice.
Il est proposé aux élèves comme travail personnel (un délai d'un mois leur a été laissé). Une mise en commun a eu lieu en fin de ce travail.

Et la suite ?

Nous finissons actuellement la rédaction des 7 dossiers suivants :

31 : puissances entières d'un nombre relatif
32 : le triangle rectangle
33 : puissances de 10
34 : application linéaire 2
35 : la sphère
36 : statistiques en 4ème
37 : les notations

Ils constitueront le fascicule 6, qui sera disponible fin mai 1988.

Et pour finir le programme ?

Nous comptons finir ce programme de 4ème avec les 2 dossiers :

38 : problèmes de plus courte distance
39 : équations et inéquations

Ces dossiers seront regroupés avec les 4 premiers de 3ème pour faire le fascicule 7.

Nous continuons à remercier nos partenaires extérieurs dans cette production :

. M. HALAIS et l'équipe administrative du collège, pour les moyens pédagogiques et matériels.

. M. ORTHEAU J.P., I.P.R., pour l'intérêt qu'il porte à notre travail.

. L'IREM de Reims, et en particulier son Directeur, B. TURCO, pour la prise en charge de la publication et la diffusion de ces documents.

. La Mairie de La Chapelle St Luc, qui prend en charge la reproduction des documents pour les élèves.

La mise en forme définitive est effectuée par l'équipe, et ce n'est pas là le moindre travail. En particulier, je tiens ici à remercier Gérald, qui a fourni un travail particulièrement important de frappe des documents, et de mise en forme de ce fascicule.

FASCICULES IREM REIMS

Expérimentation des nouveaux programmes

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES

N°	DOSSIERS	NIVEAU	DATE PARUTION
1	Tests avant formation + grille de capacité 1 - Nombres et écritures, opérations, problèmes 2 - Pavages et aires. Introduction à la géométrie plane et à la symétrie axiale 3 - Repérage sur une demi-droite, dans un quart de plan 4 - Représentation et organisation de données. Introduction des fractions 5 - Proportionnalité 6 - Parallélépipède rectangle et cube. Géométrie dans l'espace 6 bis - Calculatrice	6ème	Disponible
2	7 - Construire en géométrie plane 8 - Symétrie orthogonale (ou axiale ?) 9 - Problèmes et équations 10 - Angles et triangles 11 - Repérage sur une droite. Introduction des relatifs 12 - Repérage dans le plan	6ème	Disponible
3	13 - Addition dans les relatifs 14 - Fraction (simplification, addition, multiplication, division) Applications 14 bis - L'espace et l'art moderne 15 - Géométrie dans l'espace (prisme droit et cylindre de révolution) 16 - Soustraction dans les relatifs. Simplification d'écriture 17 - Constructions et transformations en géométrie plane Symétrie centrale	5ème	Disponible
4	18 - Distributivité. Calcul numérique et littéral 19 - Proportionnalité 20 - Pourcentages 21 - Equations 22 - Echelles 23 - Aires et volumes C1 - Contrôle de certains acquis de 5ème	5ème	Disponible

Nº	DOSSIERS	NIVEAU	DATE PARUTION
5	24 - Projection. Initiation à la démonstration 25 - Multiplication et division dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Distributivité. Factorisations simples 26 - Projection orthogonale. Cosinus 27 - Addition et soustraction dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Double distributivité. Identités remarquables 28 - Application linéaire (1) 29 - Translations, vecteurs et parallélogrammes 30 - Indices	4ème	Disponible
6	31 - Puissances entières d'un nombre relatif 32 - Le triangle rectangle 33 - Puissance de 10 34 - Application linéaire 2 35 - La sphère 36 - Statistiques en 4ème 37 - Les rotations	4ème	Disponible

Commande à envoyer à :

IREM de REIMS
Moulin de la Housse
B.P. 347
51062 REIMS CEDEX

Préciser : nº des fascicules commandés (Prix des fascicules : 30 F)
nombre de fascicules

Donner votre adresse "professionnelle"

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°24

TITRE: PROJECTION SUR UNE DROITE

4

PREREQUIS

- NOTIONS ELEMENTAIRES SUR LES ANGLES ET LE PARALLELISME

OBJECTIFS

- CONSTRUCTION DU PROJETE D'UN POINT
- CONSTRUCTION DU MILIEU PAR PROJECTION
- PROPRIETE DU SEGMENT QUI JOINT LES MILIEUX DE DEUX COTES D'UN TRIANGLE
- MEDIANES - HAUTEURS - ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY
JEAN CLAUDE DUPERRET
ROBERT CHAPOT
GERALD GENTHON
BERNARD CHARLAIX
GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 24

PROJECTION SUR UNE DROITE

Dans tout ce dossier, on sera amené à utiliser des droites graduées. Pour des raisons mathématiques (et de commodité), on choisira la même unité sur toutes les droites.

1 / SITUATIONS D'INTRODUCTION

SITUATION 1 : Tu utiliseras la page 24-3.

Exemple 1 : Trouve les abscisses des points A, B, C, ...
Trace sur le graphique les droites qui te permettent de trouver ces abscisses.

$x_A = -2$; $x_B = \ldots$; $x_C \ldots\ldots$

A-t-on des points d'abscisse 2 ? d'abscisse 1 ? d'abscisse -1 ?

Exemple 2 : Que peut-on dire des points A, B, C, ... , G ?
On peut écrire $y_D = 3$.

Trouve de même y_A ; y_B ; ... ; y_G .

SITUATION 2 : La pluie tombe selon la direction indiquée.

Exemple 1 : Indique si les points A_1, B_1, C_1, D_1 sont abrités par le parapluie.
Trace la zone abritée sur le sol par le parapluie (vue de cette façon, la zone sera un segment).

Exemple 2 : Même travail que précédemment.

Exemple 3 : La pluie tombant toujours dans la même direction, comment faut-il placer le parapluie pour avoir le plus grand segment possible abrité ? Dessine-le.

SITUATION 3 : Tu utiliseras la page 24-4.
J'ai 3 cordes à noeuds et je note à différentes heures de la journée la direction des rayons du soleil et l'ombre des noeuds.
Marque les ombres des noeuds sur le sol, pour chacune des trois cordes.

SITUATION 4 : Pour les cas 1 et 2, place les ombres A_1, B_1, ... , F_1 et A_2, B_2, ... , F_2 des points A, B, ... , F.

SITUATION 5 : La lettre "A" est éclairée par un faisceau lumineux à rayons parallèles. On connait seulement l'ombre S' du sommet S.

a) Trouve la direction des rayons lumineux.

b) Termine la construction de l'ombre de la lettre "A", sachant que les points B et C reposent sur le sol (en particulier, observe la position de la barre du A et celle de son ombre).

Dans ces 5 situations tu viens de faire ce qu'on appelle des projections.
Dans les situations 1, 2, 3 et 4, essaie de mettre en forme (en langage mathématique) ce que tu viens d'observer. Voici des idées pour t'aider.

- Que projette-t-on ?
- Sur quoi projette-t-on ?
- Que faut-il encore connaitre pour faire une projection ?

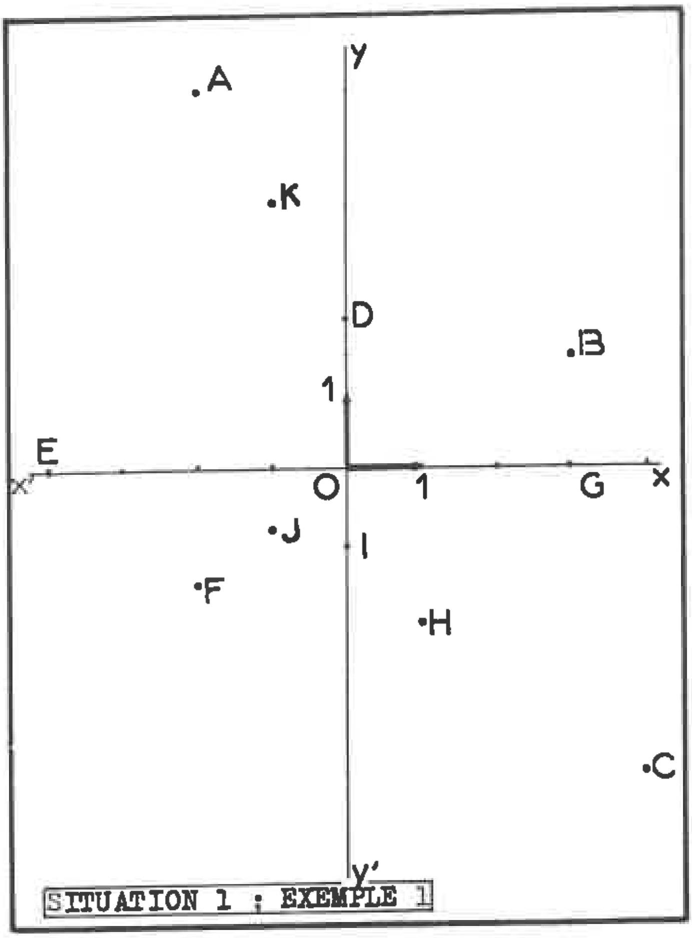
CONCLUSION : On projette des points (du plan ou d'une droite) sur une droite parallèlement à une autre droite (ou encore selon une direction donnée).

Remarques : a) Ce qu'on vient de décrire est-il encore valable dans la situation 5 ? Trouve ce qu'il y a de différent.

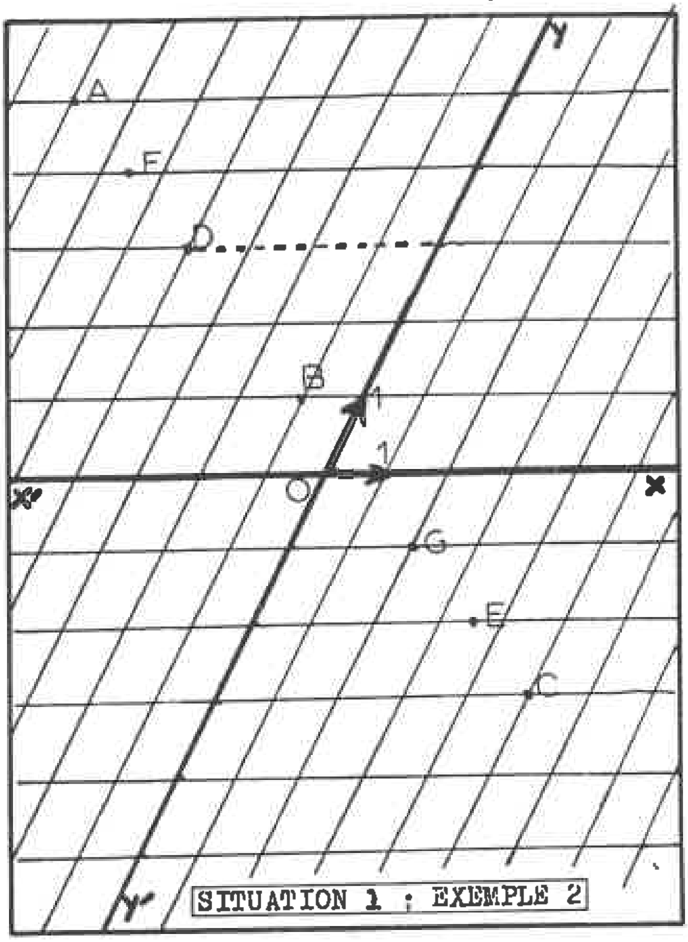
b) Que peux-tu dire de la direction de la projection dans :

- Situation 1, Exemple 1 et droite (x'x) ?
- Situation 4, Exemple 1 et droite Δ_1 ?

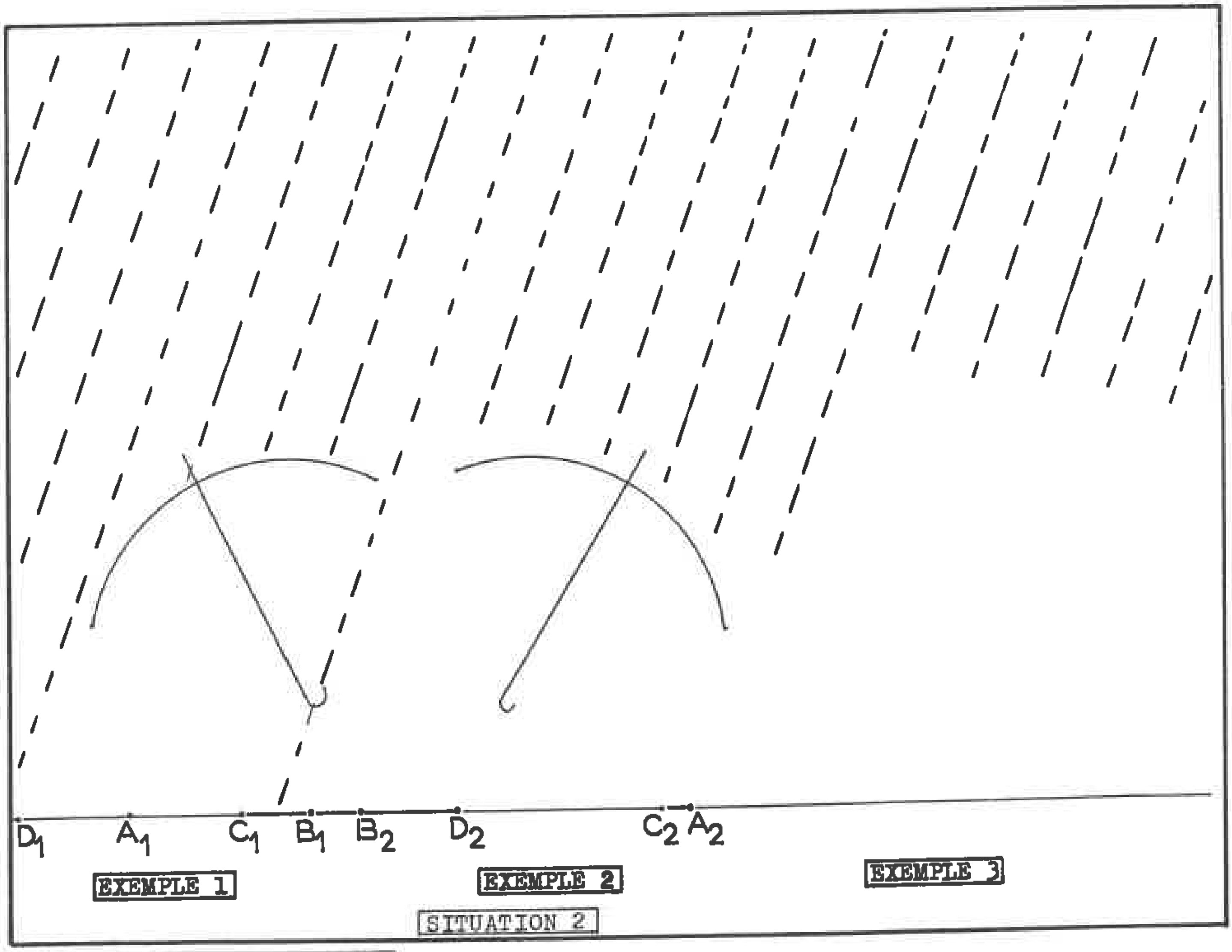
Cette projection est un cas particulier appelé projection orthogonale. Elle fera l'objet d'un futur dossier.



SITUATION 1 ; EXEMPLE 1



SITUATION 1 ; EXEMPLE 2



EXEMPLE 1

EXEMPLE 2

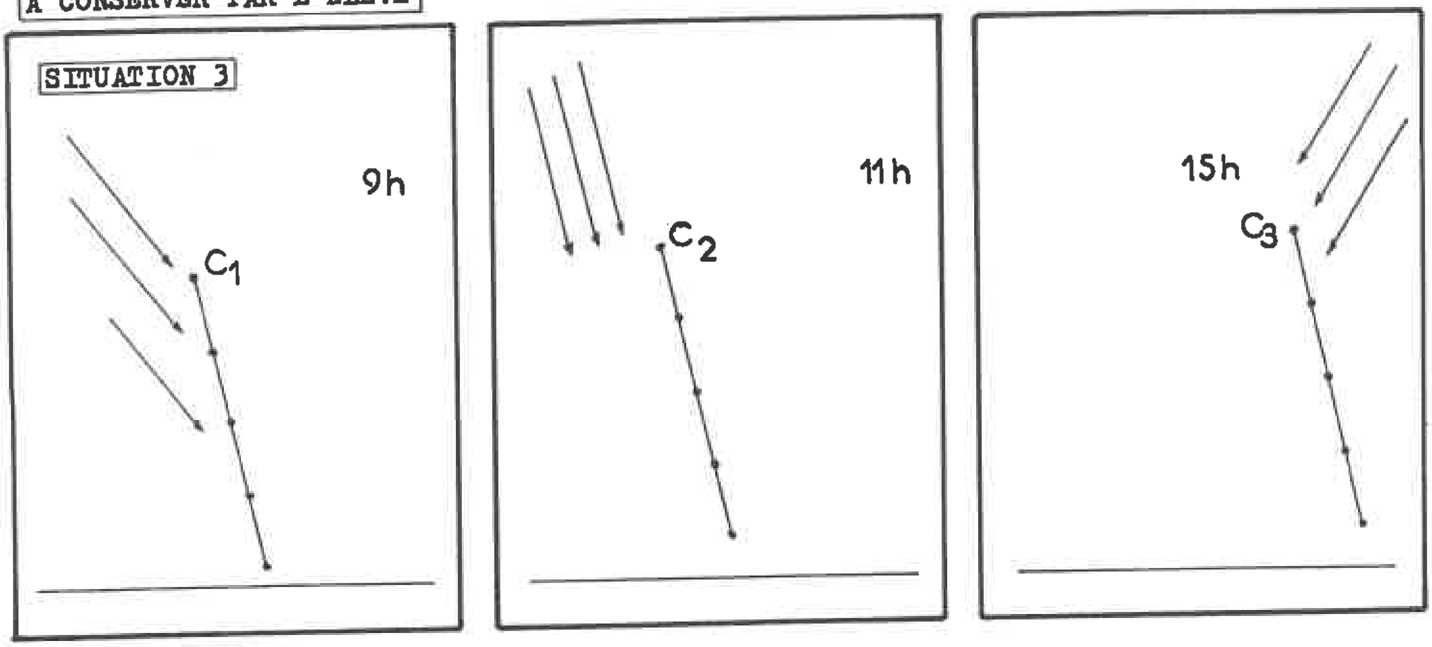
EXEMPLE 3

SITUATION 2

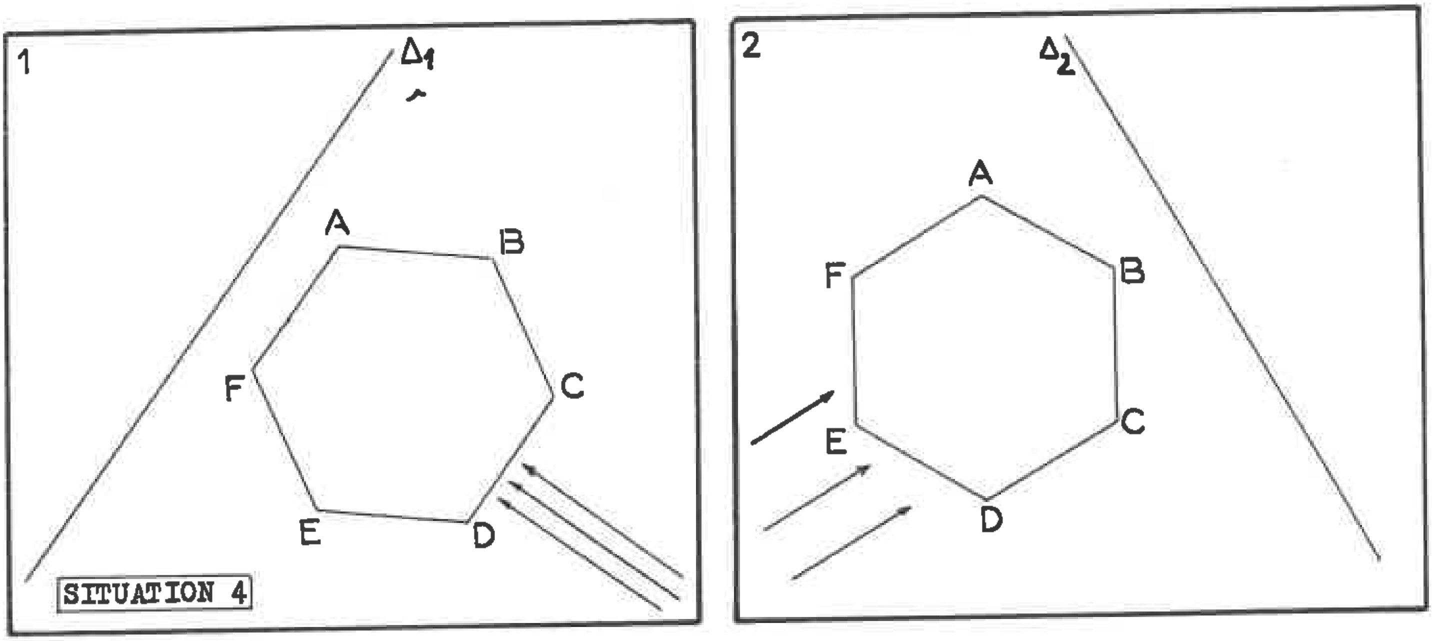
CONSERVER PAR L'ELEVE

A CONSERVER PAR L'ELEVE

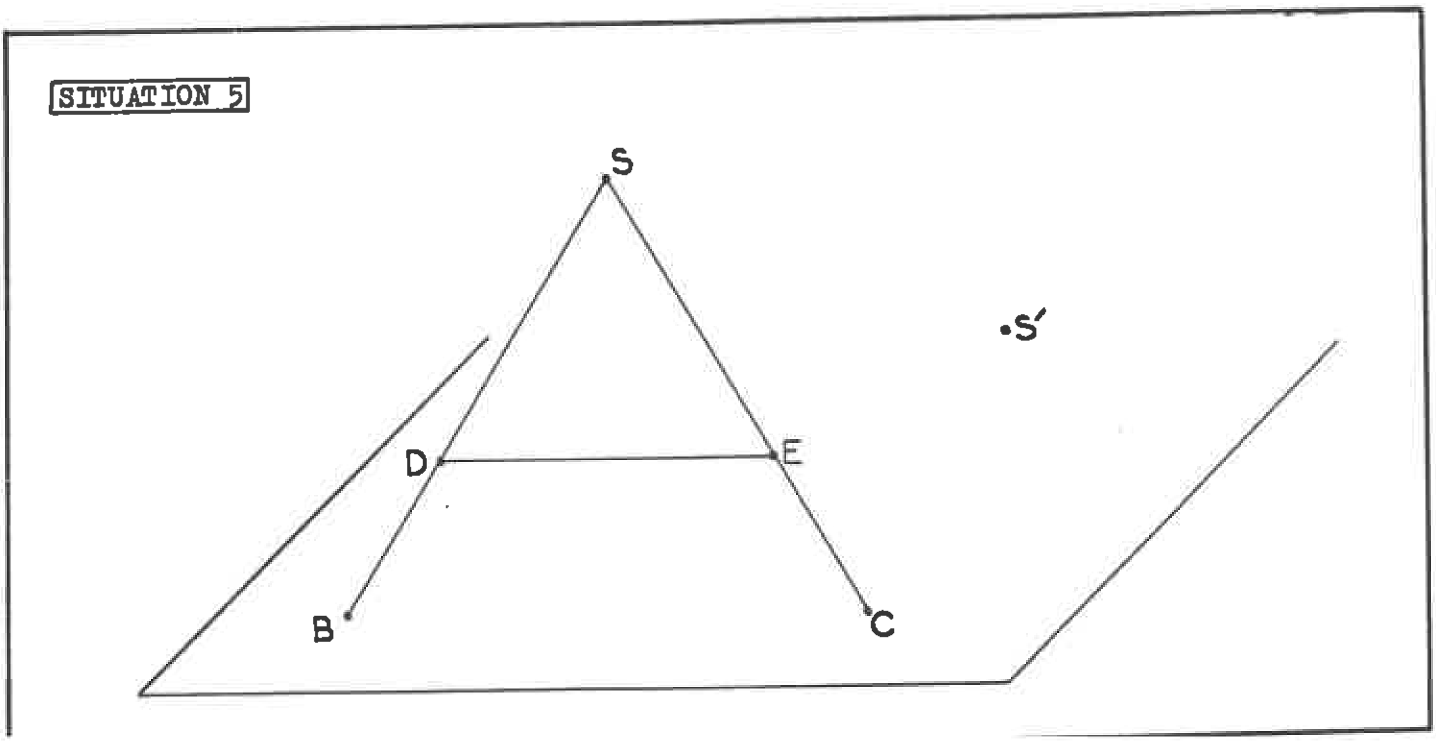
SITUATION 3



SITUATION 4



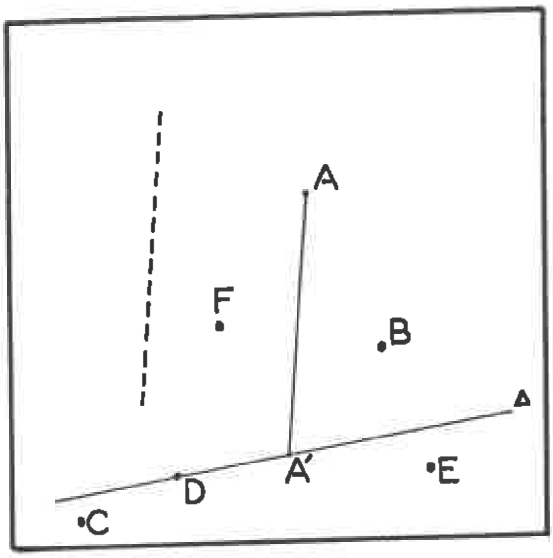
SITUATION 5

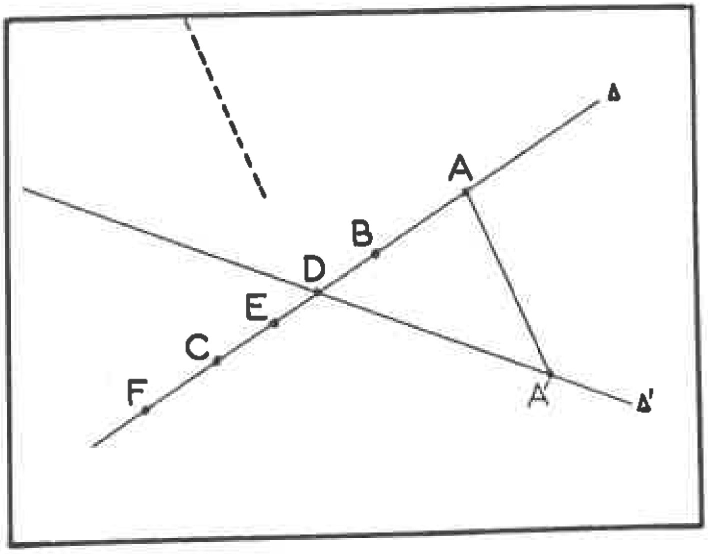


2 / VOCABULAIRE ET PRESENTATION

Tu as vu qu'il fallait une direction pour faire une projection.

On notera désormais cette direction par une ligne pointillée comme ci-dessous :



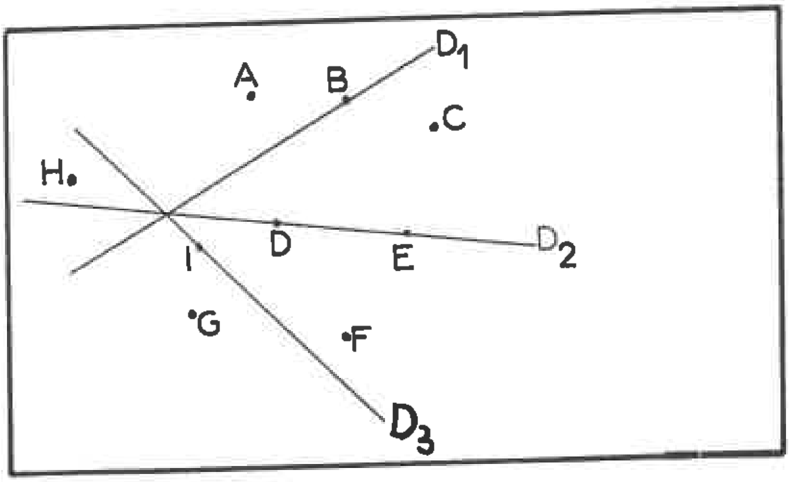


A' est appelé la PROJECTION du point A.

(AA') est appelée la PROJETANTE du point A.

EXERCICE 1 : Après avoir recopié le dessin ci-dessus, trace les projections des points B, C, D, E et F.

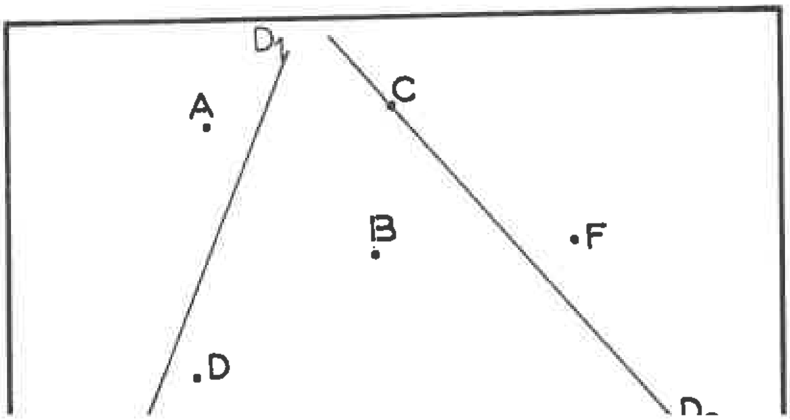
EXERCICE 2 : Dans cet exercice, tu utiliseras 2 couleurs pour distinguer les cas a) et b)



a) Projette les points A, B, ... , I sur D_2 parallèlement à D_1.

b) Projette les points A, B, ... , I sur D_3 parallèlement à D_1.

EXERCICE 3 : Là encore, utilise des couleurs différentes pour chaque cas.



a) Projette les points A, B, ... , F sur D_3 parallèlement à D_2.

b) Projette les points A, B, ... , F sur D_3 parallèlement à D_1.

Pour a) et b), y-a-t-il des points remarquables ?

c) Projette les points A, B, ..., F sur D_2 parallèlement à D_1.

EXERCICE 4 : Trace un triangle (ABC) assez grand et place sur [AB] les points M, N et P.

a) Projette les points A, M, N, P et B sur (AC) parallèlement à (BC).
Tu obtiendras les points A_1, M_1, N_1, P_1 et B_1.

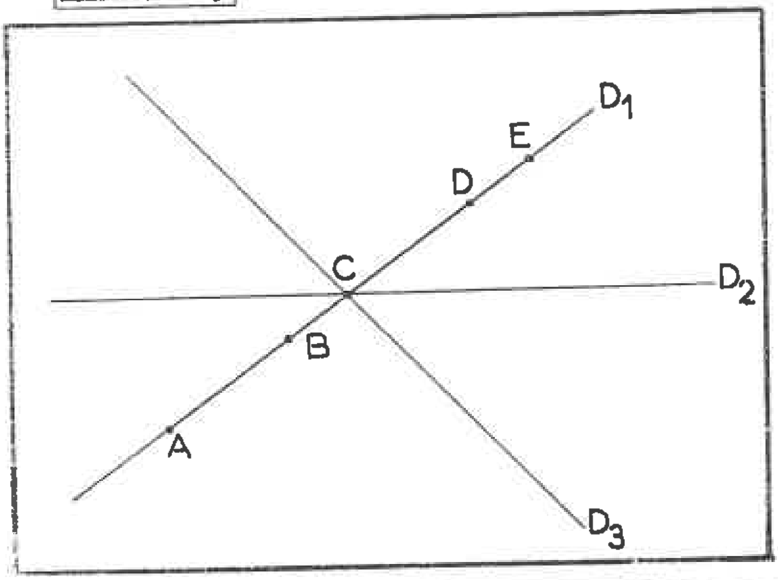
A_1 et B_1 sont des points particuliers. Précise-les.

b) Projette les 5 points que tu viens de trouver, sur (BC) parallèlement à (AB). Tu trouveras des points A_2, M_2, N_2, P_2 et B_2.

Que dire de A_2 et B_2 ?

c) Projette ces 5 nouveaux points obtenus, sur(AB) parallèlement à (AC).

EXERCICE 5 : Même travail que dans l'exercice précédent :



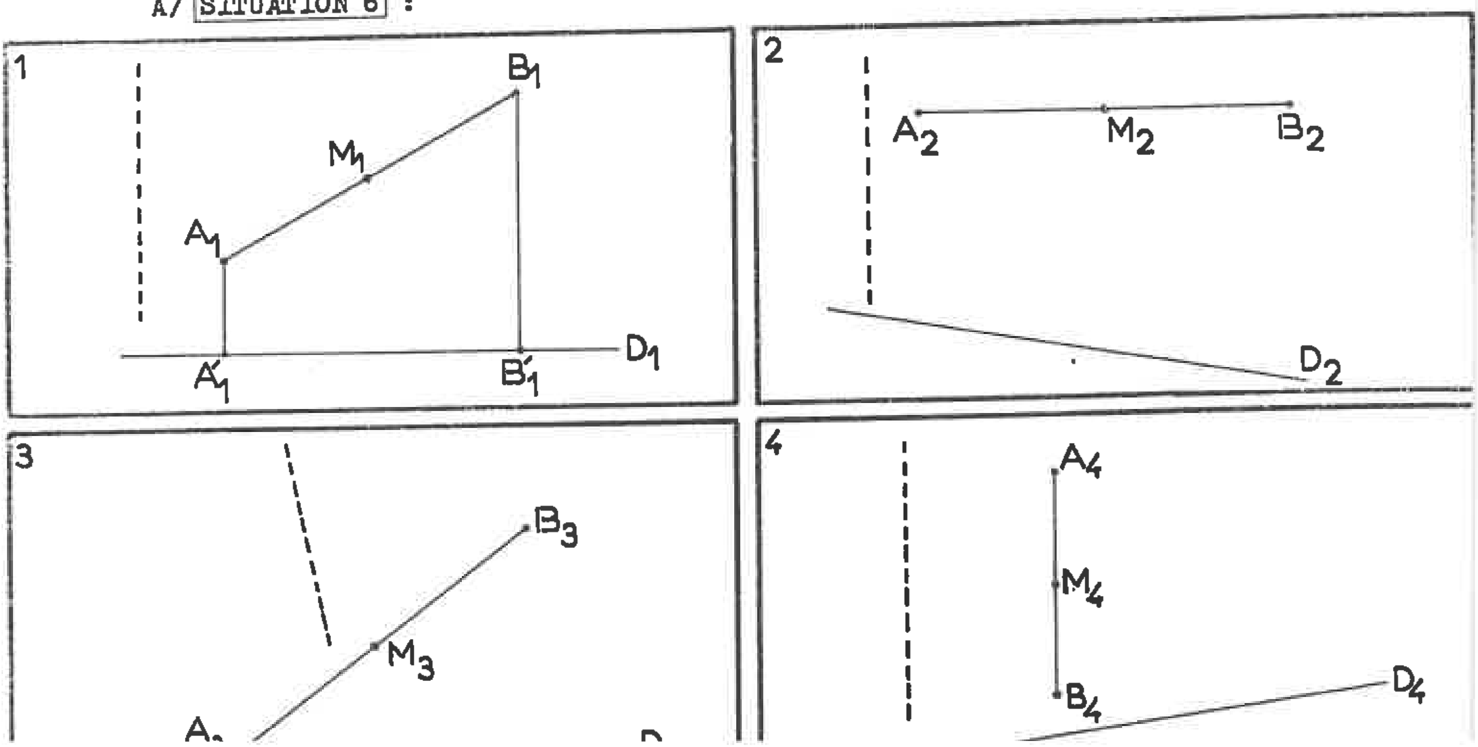
a) On projette D_1 sur D_2 parallèlement à D_3.

b) On projette ensuite D_2 sur D_3 parallèlement à D_1.

c) Enfin, on projette D_3 sur D_1 parallèlement à D_2.

3 / CONSERVATION DU MILIEU

A/ SITUATION 6 :



Reproduis ces 4 dessins et projette les points A, B et M leur milieu sur la droite D selon la direction indiquée.
Que peut-on dire du point M' par rapport aux points A' et B' ?

Ce que tu viens de découvrir, à travers ces 4 cas, est général et nous l'admettrons.

B/ **PROPRIETE** : La projection du milieu d'un segment [AB] sur une droite D est le milieu M' du segment [A'B'], où A' et B' sont les projections respectives des points A et B sur D.

Plus simplement on dira :

La projection conserve le milieu d'un segment.

<u>Remarque</u> : En te souvenant de tes cours de 6ème et de 5ème, dis si la symétrie centrale et la symétrie orthogonale "conservent le milieu".

C/ **APPLICATION AU TRIANGLE**

a) Trace un triangle (ABC) quelconque. Soit I le milieu de [AB].
Projette I sur (AC) parallèlement à (BC). Soit J cette projection.
Que dire de (IJ) et (BC) ?

Sur ce dessin, reconnais-tu la propriété décrite ci-dessus ? Plus précisément, quel est le dessin de la situation 6 qui est semblable à celui qu'on vient d'obtenir ?

Points de (AB)	A	I	B
Projection			

Que peux-tu en déduire ? En conclusion rédige le THEOREME suivant ...

THEOREME 1 : Dans un triangle (ABC), **SI** on trace par I, milieu .....
ALORS ....

Note l'organigramme suivant qui traduis le théorème 1 :

I milieu de [AB]   (IJ) // (BC)
↓
J milieu de [AC]

b) Trace un triangle (ABC), I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
Trace la droite (IJ). Compare les directions des droites (IJ) et (BC).
Peux-tu dire : "Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles" ?

Ces droites sont effectivement parallèles et comme dans la situation 6 nous l'admettons.

Tu peux rédiger :

THEOREME 2 : Dans un triangle, SI on joint ..... ALORS .....

Construis l'organigramme qui traduit le théorème 2.

Z

ATTENTION : Ne pas confondre ces 2 théorèmes. Pour cela tu vas dire dans chaque cas quelles sont les HYPOTHESES (ce que l'on sait, ce que l'on connait) et quelle est la CONCLUSION (ce à quoi on aboutit, ce qu'on prouve).

THEOREME 1	THEOREME 2
Hypothèses:	Hypothèses:
Conclusion:	Conclusion:

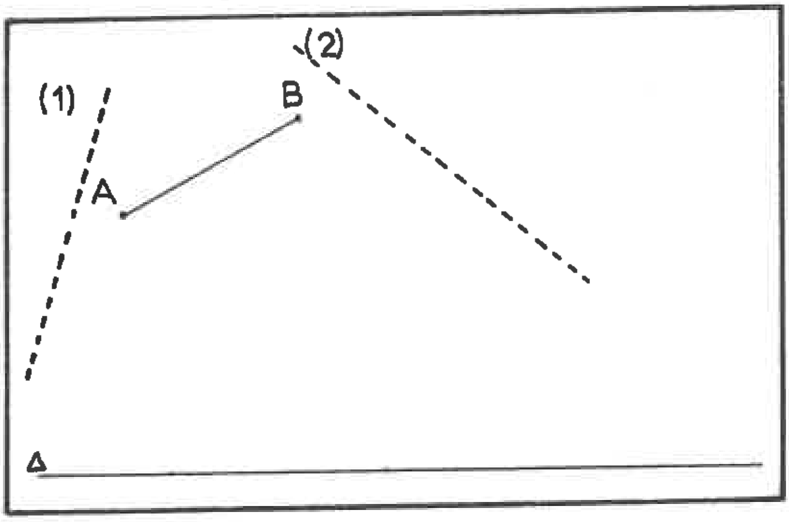
A quoi servent ces 2 théorèmes ?

• Le théorème 1 sert à prouver que ....

• Le théorème 2 sert à prouver que ....

4 / COMPARAISON DES SEGMENTS ET DE LEUR PROJECTION

A/ Ton ombre projetée sur le sol a-t-elle toujours la même longueur ?
De quoi dépend la longueur de ton ombre ?

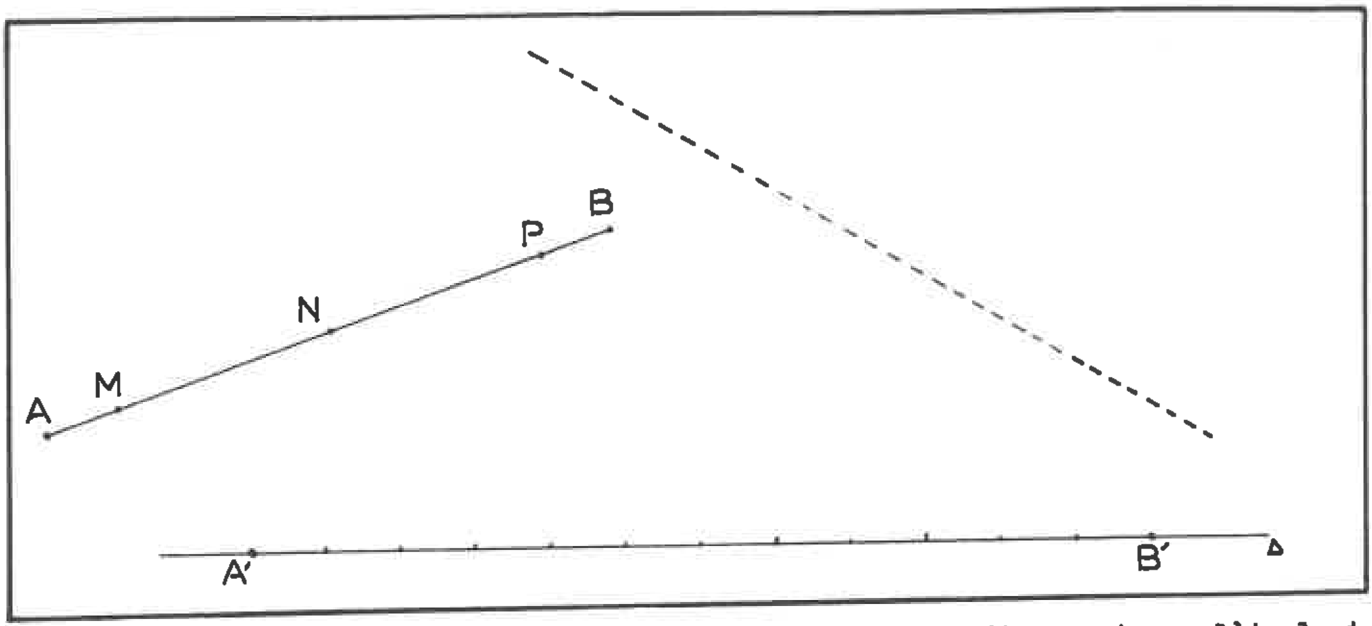


a) Projette [AB] sur Δ selon la direction (1), puis compare A_1B_1 et AB.

b) Projette [AB] sur Δ selon la direction (2), puis compare A_2B_2 et AB.

La projection conserve-t-elle la longueur d'un segment ? Rappelle ce qu'il en était pour la symétrie orthogonale et la symétrie centrale. Tu vois qu'une projection n'appartiendra pas à la même "famille" que les symétries centrales et orthogonales. Tu as quand même vu une propriété commune. Laquelle ?

B/ a)



Projette les points M, N et P. Mesure sur la figure et complète le tableau suivant :

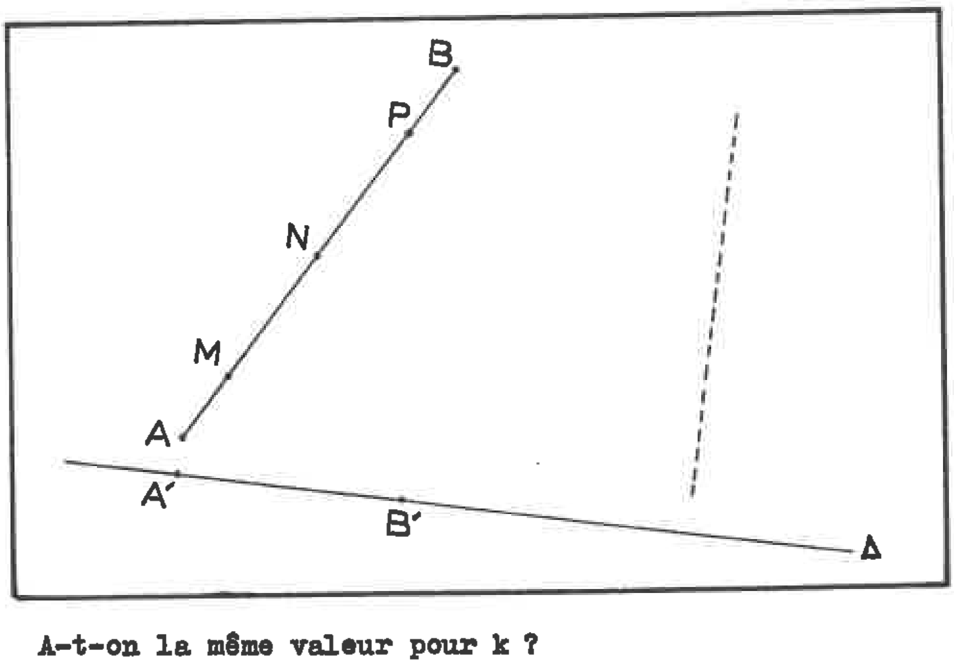
Sur la droite (AB)	AB =	AM =	MN =	NB =	MP =	MB =
Sur la droite (Δ)	A'B' =	A'M' =	M'N' =	N'B' =	M'P' =	M'B' =

Calcule les rapports suivants :

$\frac{A'M'}{AM}$; $\frac{M'N'}{MN}$; $\frac{N'B'}{NB}$. Que constates-tu ?

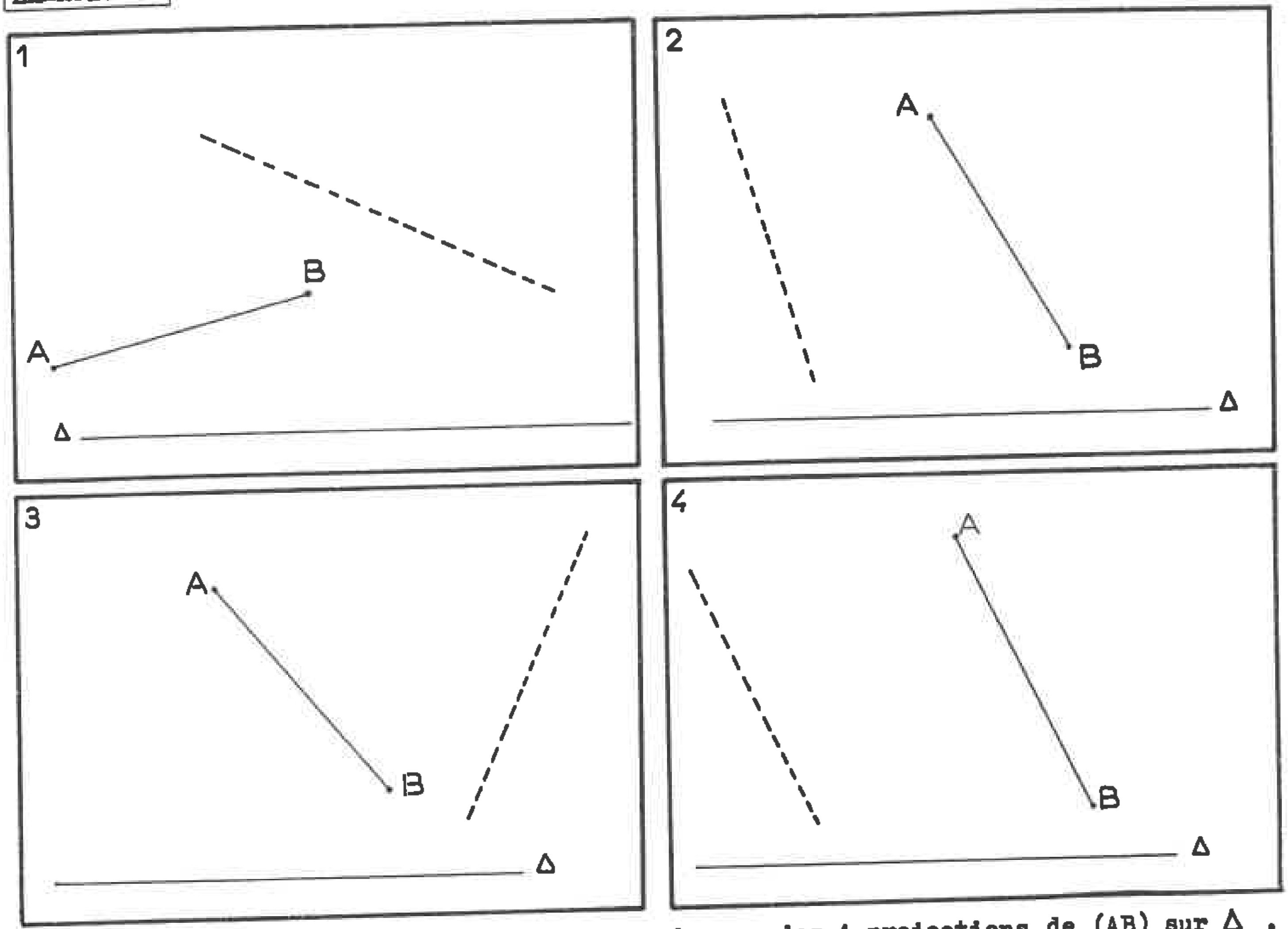
Que peux-tu dire des deux suites qui composent le tableau précédent ?
Quel est, dans ce cas, le coefficient de proportionnalité, k ?
Lors d'une projection, k est appelé le rapport de projection.

b) Même travail pour la projection suivante :



A-t-on la même valeur pour k ?

EXERCICE 6 :



a) Trouve la valeur de k pour chacune des 4 projections de (AB) sur Δ .

b) Dans chaque cas ci-dessus, on te donne AM = 2,5. Calcule pour chacun d'eux A'M'. Vérifie sur ton dessin.

c) Dans les dessins 1, 2 et 3 on te donne A'N' = 0,8. Calcule pour chaque cas la valeur de AN. Vérifie sur ton dessin.

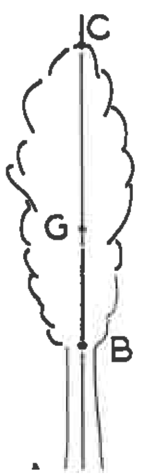
d) Et si on appelle I le milieu de [AB] , que peut-on dire de I' ? Est-ce vrai dans les 4 cas ?

EXERCICE 7 : Voici un arbre et son ombre. reproduis ce dessin à l'échelle $\frac{1}{100}$. On te donne pour cela les mesures suivantes :

AB = 2 m A'B' = 3 m A'C' = 12 m

Pour terminer le dessin, il faudra que tu trouves la hauteur AC de l'arbre. Tu indiqueras la direction des rayons du soleil.

Une boule de gui, G, est sur cet arbre. Son ombre est en G'. Je mesure A'G' = 6 m. Trouve la hauteur AG.



<u>ATTENTION</u> : Ce dessin n'est qu'une représentation de la réalité. Rien n'est fait à l'échelle.

B′ G′

5 / INITIATION A LA DEMONSTRATION

A/ ETUDE D'UN EXEMPLE

a) Préciser hypothèse et conclusion

Construis un triangle (ABC) quelconque. Soit E le milieu de [AB] et F celui de [AC] . Mesure EF et BC. Peux-tu affirmer BC = 2 EF ou BC $\simeq$ 2 EF ?

Question : A-t-on, quel que soit le triangle (ABC), BC = 2 EF ?

b) Conjecturer

Pour avoir une idée plus complète de la question, Pierre fait plusieurs dessins de triangles (ABC) (fais-en de même) et il dit, après les avoir examinés : BC = 2 EF. Pierre a-t-il raison ?

c) Démontrer cette propriété

BC = 2 EF peut s'écrire aussi EF = $\frac{1}{2}$ BC

Utiliser les pages 24-12 et 24-13.

B/ AUTRES EXEMPLES

EXERCICE 8 a) Trace un triangle (ABC) isocèle de sommet A et [AH] la hauteur issue de A et le milieu I de [AC] .

Que dire de (HI) et (AB) ?

Démontrer que (HI) est parallèle à (AB).

Page 24-14 tu trouves 4 étiquettes. Si tu lis ces 4 étiquettes dans l'ordre 1-2-3-4, le texte n'a pas de sens ; il n'est pas logique.

Découpe ces 4 étiquettes et range-les dans un ordre logique.

EXERCICE 9 b) Soit (ABCD) un parallèlogramme de centre O. Par O, on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AB) en I.

Que dire de I pour [AB] ? Démontre-le.

Comme ci-dessus, range les étiquettes 5-6-7-8 dans un ordre logique et la démonstration sera faite.

C/ TU DEMONTRES SEUL !!

Tu peux t'aider de la méthode du B/.

EXERCICE 10 a) (ABC) est un triangle rectangle en A et I est le milieu de [BC] .

Soit Δ la droite passant par I et parallèle à (CA).

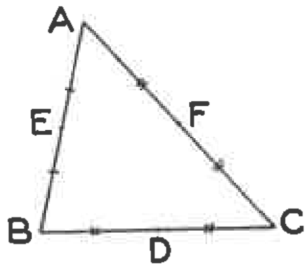
Que peux-tu dire de Δ pour [AB] ?

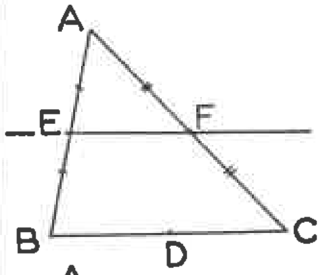
EXERCICE 11 b) (ABC) est un triangle quelconque. Soit D le symétrique de A par rapport à B et E le symétrique de A par rapport à C.

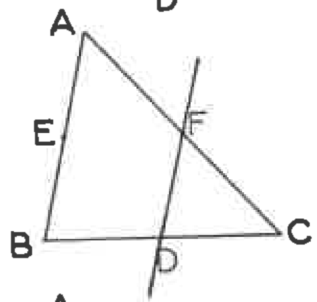
Fais cette figure. Que peux-tu dire de (BC) et (DE) ? En es-tu sûr ?

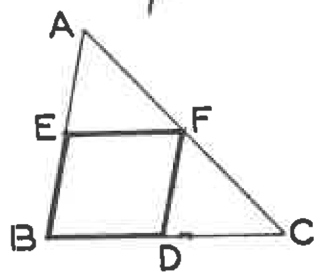
Démontre-le.

Je fais apparaitre D milieu de $[BC]$ pour mettre en évidence $\frac{1}{2}$ BC.









Des questions enchaînées

1) Dans le triangle (ABC) que peut-on dire des droites (EF) et (BC) ?

2) Que dire de (EF) et (BD) ?

3) Dans le triangle (ABC) que peut-on dire des droites (AB) et (DF) ?

4) Que dire de (EB) et (DF) ?

5) En te servant de 2) et 4), que peux-tu dire du quadrilatère (EFDB) ?

6) Que dire des longueurs de $[EF]$ et $[BD]$?

7) Que savait-on sur D par rapport à $[BC]$?

8) Que dire de EF et BC ?

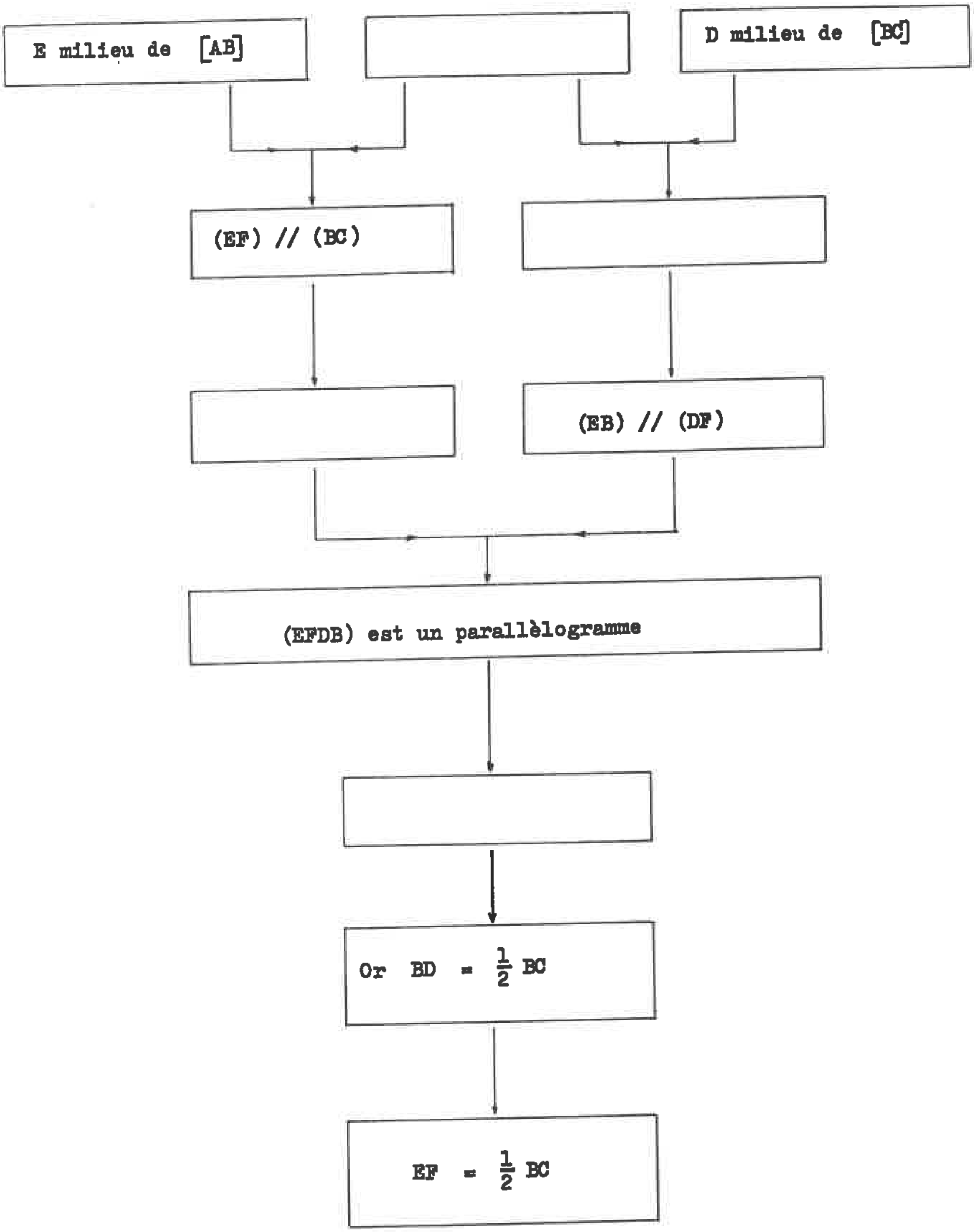
Des réponses enchaînées et justifiées.

Conclusion : EF = $\frac{1}{2}$ BC

$\boxed{\text{THEOREME 3}}$: Dans un triangle (ABC), SI E est le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[AC]$, ALORS EF = $\frac{1}{2}$ BC.

A CONSERVER PAR L'ELEVE

La démonstration précédente peut être décrite par l'organigramme suivant. Complète-le.



EXERCICE 8 :

1 En utilisant le Théorème 2, je peux en déduire que (IH) // (AB).

2 Je peux en déduire que H est le milieu de [BC] .

3 Dans un triangle isocèle (ABC), de sommet A, la hauteur issue de A est aussi

4 Dans le triangle (ABC), j'ai H milieu de [BC] et I milieu de [AC] .

EXERCICE 9 :

5 Donc O est le milieu de [AC] .

6 D'après le Théorème 1, je peux déduire que I est le milieu de [AB] .

7 Dans le triangle (ABC), je sais que O est le milieu de [AC] et (OI) // (BC

8 Dans un parallèlogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

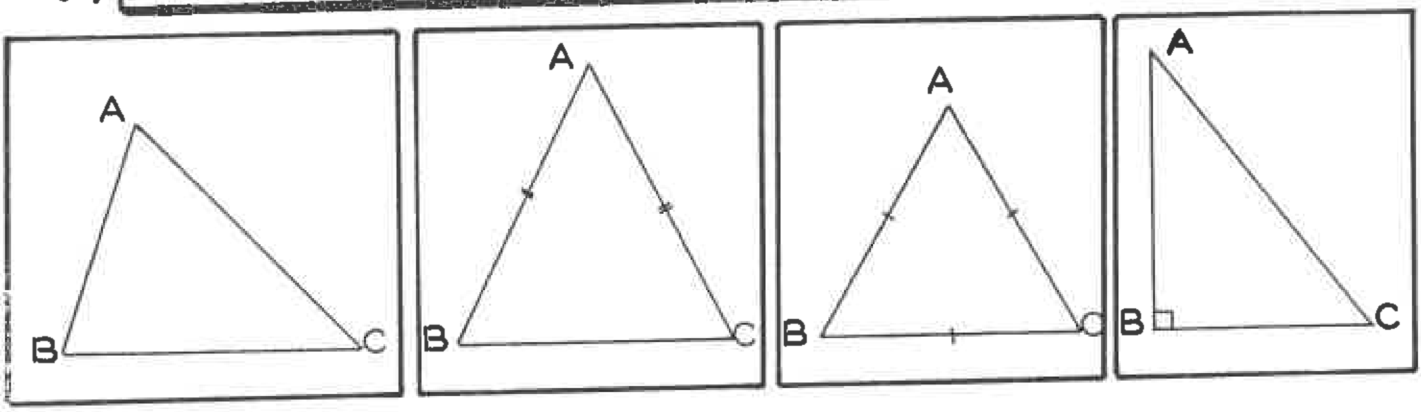
A CONSERVER PAR L'ELEVE

EXERCICE 12 c) Soit (ABCD) un quadrilatère convexe. I, J, K, L sont les milieux respectifs de [AB] , [BC] , [CD] , [DA] . Que dire des droites (IJ) et (KL) ? Démontre que (IJ) // (KL). On t'aide ! Pour cela montre déja que (IJ) // (AC) et puis que (KL) // (AC).

d) Plus difficile.

EXERCICE 13 Dessine un parallèlogramme (ABCD), puis un segment [EF] et une droite Δ qui passe par le milieu I de [EF] .
(Dessine [EF] en dehors du parallèlogramme, pour plus de clarté).
Soit O le milieu de [BD] . Projette B et D sur Δ , parallèlement à (OI). Tu obtiens les points B' et D'.
Que peux-tu dire du quadrilatère (EB'FD') ? Démontre-le.

6 / TRIANGLE - MEDIANE - CENTRE DE GRAVITE



Reproduis ces 4 triangles. Appelle I le milieu de [BC] et trace [AI] .
Dans les 4 cas, [AI] est la médiane issue de A.

DEFINITION : On appelle MEDIANE d'un triangle ....

Trace les autres médianes des triangles (ABC). Que remarques-tu dans chaque cas ?
Le résultat est général et on l'admet (on pourrait le démontrer).

THEOREME 4 : Dans un triangle les 3 médianes sont concourantes en un point appelé CENTRE DE GRAVITE du triangle. On note souvent ce point G.

Question : Où se situe G sur une médiane ?

Prenons [AI] par exemple. G est-il le milieu de la médiane ?
Peut-on avoir $AG = \frac{3}{4}$ AI ou $AG = \frac{2}{3}$ AI ou $AG = \frac{3}{5}$ AI ?

Une de ces réponses est la bonne. Laquelle ? On va le démontrer.

Dessine un triangle (ABC) et les médianes (AI) et (BJ) qui se coupent en G.

a) Précise les hypothèses et la conclusion.
b) Notre conjecture est $AG = \frac{2}{3}$ AI ou encore AG = 2 GI. C'est ce qui nous semble exact.

c) Démontrons-le.

J est le milieu de [AC] ; Dessine K milieu de [JC] et L milieu de [AJ] . On projette les points A, J, K sur (AI) parallèlement à (GJ).

- Où se projette A ?
- Où se projette J ?
- Où se projette K ?

Prouve-le.

Tu sais qu'il y a proportionnalité entre les longueurs des segments et leur projections (cf. 4 /).

Evalue le rapport $\frac{AJ}{AK}$. Qu'en déduis-tu pour le rapport $\frac{AG}{AI}$?

<u>Conclusion</u> : $AG = \frac{2}{3} AI$.

On pourrait faire de même pour les autres médianes.

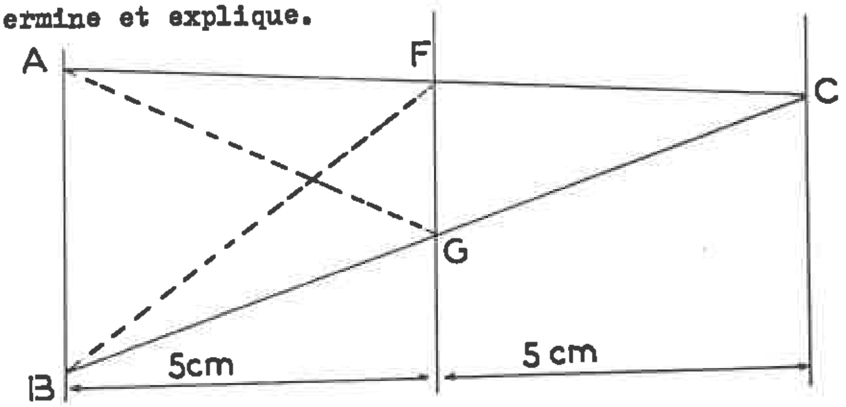
> **THEOREME 5** : Dans un triangle, le centre de gravité est situé sur chaque médiane aux $\frac{2}{3}$ à partir du sommet.

7 / DES EXERCICES EN VRAC

EXERCICE 14 : (D'après des Olympiades de l'Irem de Strasbourg)

Rémi veut obtenir le milieu d'un segment [AB] de 4 cm. Pour cela il ne veut utiliser qu'une règle plate de 5 cm de largeur. Luc lui propose une façon de faire, illustrée, pour son début, par la figure ci-contre.

Termine et explique.



EXERCICE 15 : Dessine un trapèze rectangle (ABCD), (AD) étant perpendiculaire à (AB) et (CD). Soit M le milieu de [BC] .

a) Que dire de M par rapport à la médiatrice de [AD] ?

b) Compare MA et MD.

EXERCICE 16 : Dessine trois points distincts A, B et C. Détermine la projection parallèle telle que le projeté de A soit C et que B soit son propre projeté.

EXERCICE 17 : Comment choisir 4 points A, B, C et D pour qu'il existe une projection parallèle telle que le projeté de A soit C et que le projeté de B soit D ?

EXERCICE 18 : Soit un parallèlogramme (ABCD), et M qui n'est ni sur (AC), ni sur (BD). Que dis-tu des centres de gravité des triangles (MAC) et (MBD) ?

EXERCICE 19 : Soit un triangle (ABC) et le point D tel que C soit le milieu de [BD] .
Place G sur [AC] tel que CA = 3 CG.
(BG) coupe (AD) en K. Que dire de K pour [AD] ?

EXERCICE 20 : Dessine un triangle (ABC), M milieu de [BC] , E et F sur [AB] tels que

$$AE = EF = FB = \frac{1}{3} AB .$$

a) Que dire de (FM) et (EC) ? (Utilise le triangle (BEC))
b) (EC) coupe (AM) en I. Que dire de I pour [AM] ? (Projette A, E et F sur (AM))

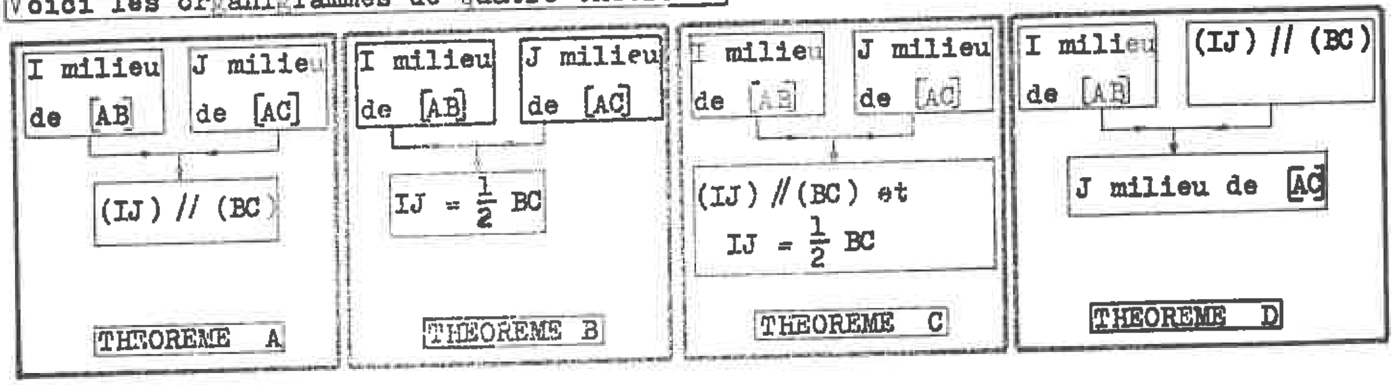
EXERCICE 21 : Dessine quatre points A, B, C et D, puis I milieu de [BC] et J milieu de [AD] . Soit I' le projeté de I sur (BD) parallèlement à (CD), et J' le projeté de J sur (BD) parallèlement à (AB).
Que dis-tu de I' et J' ?

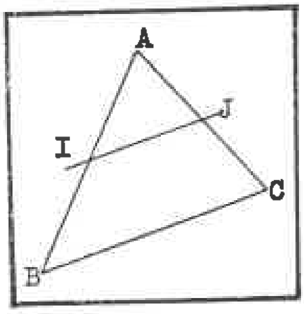
EXERCICE 22 : (AEF) est un triangle isocèle de base [EF] , D est le milieu de [AE] , B celui de [AF] . (FD) et (EB) se coupent en C.
a) Qu'est (AC) pour [FE] ?
b) Soit K le milieu de [AC] . Que dire de DK et EC ? de DC et CF ? de DK et DC ?
c) Quelle est la nature du quadrilatère (DKBC) ?

EXERCICE 23 : Soit une droite Δ , un point B de cette droite, un point A hors de cette droite. Soit D tel que B soit le milieu de [AD] . Soit E le symétrique de D par rapport à Δ.
a) Que peux-tu dire du triangle (EBD) ?
b) Que peux-tu dire du triangle (ABE) ?
c) Que peux-tu dire du triangle (ADE) ?

QUESTIONNAIRE A CHOIX MULTIPLE 1

Voici les organigrammes de quatre théoremes :





1/ R_1 : " J milieu de [AC] " est la conclusion du théorème B.
R_2 : " J milieu de [AC] " est la conclusion du théorème C.
R_3 : " J milieu de [AC] " est la conclusion du théorème D.

2/ R_1 : " (IJ) // (BC) " est une hypothèse du théorème A.
R_2 : " (IJ) // (BC) " est une hypothèse du théorème C.
R_3 : " (IJ) // (BC) " est une hypothèse du théorème D.

3/ R_1 : Le théorème B dert à prouver qu'un point est le milieu d'un segment.
R_2 : Le théorème B sert à prouver que le rapport de projection est $\frac{1}{2}$.
R_3 : Le théorème D sert à prouver qu'un point est le milieu d'un segment.

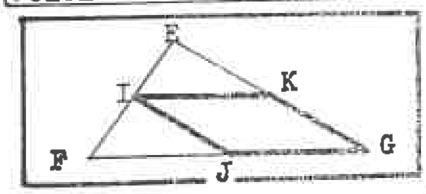
4/ R_1 : Le théorème A sert à prouver que deux droites sont parallèles.
R_2 : Le théorème B sert à prouver que deux droites sont parallèles.
R_3 : Le théorème D sert à prouver que deux droites sont parallèles.

Voici maintenant le théoreme E :

"Dans un triangle, si on joint les milieux de deux côtés, alors la droite obtenue est parallèle au troisième côté."

5/ Le théorème E est : R_1 : Le théorème A.
R_2 : Le théorème B.
R_3 : Le théorème D.

Voici maintenant le théorème F :



"Dans un triangle EFG, si I est le milieu de [EF] , J le milieu de [FG] et K le milieu de [EG] , alors le quadrilatère IJGK est un parallèlogramme."

6/ Dans le théorème F : R_1 : " (IJ) // (KG) " est la conclusion.
R_2 : " K milieu de [EG] " est une hypothèse.
R_3 : " K milieu de [EG] " est dans la conclusion.

SUITE PAGE SUIVANTE

7/ Pour démontrer le théorème F, on doit utiliser :

R_1 : Le théorème B.
R_2 : Le théorème C.
R_3 : Le théorème D.

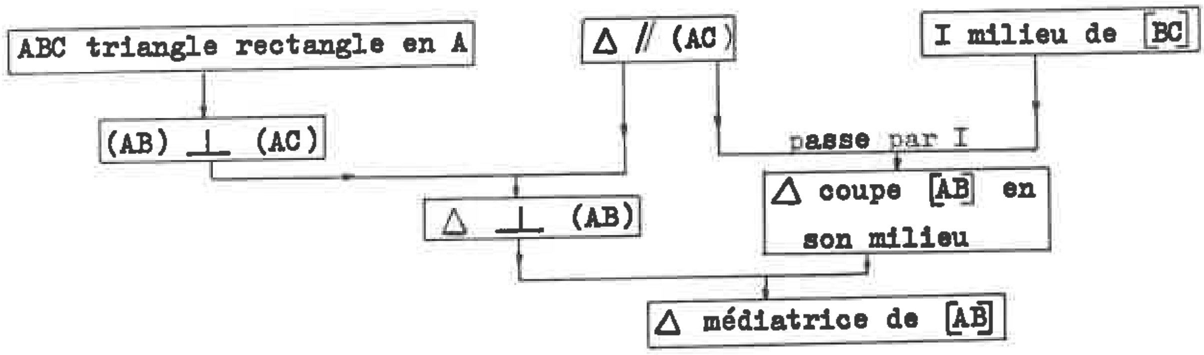
Voici maintenant le théorème G :

"Les milieux A', B' et C' des côtés d'un triangle équilatéral ABC, déterminent un autre triangle équilatéral."

8/ Ce théorème G peut s'écrire plus simplement :

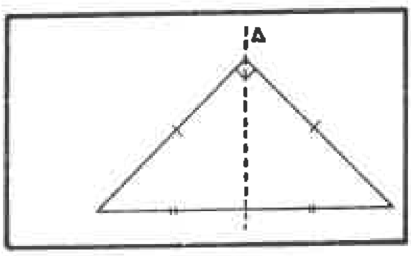
R_1 : Si A'B'C' est équilatéral, alors ABC est équilatéral.
R_2 : Si ABC est équilatéral, alors A'B'C' est équilatéral.
R_3 : Chaque triangle équilatéral ABC et A'B'C' est équilatéral?

Voici maintenant un organigramme :

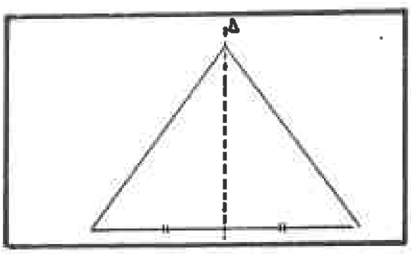


9/ Voici le dessin correspondant :

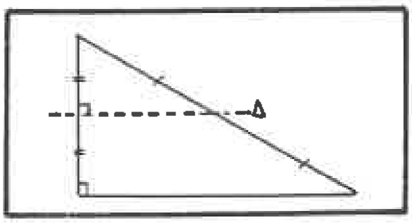
R_1 :



R_2 :



R_3 :



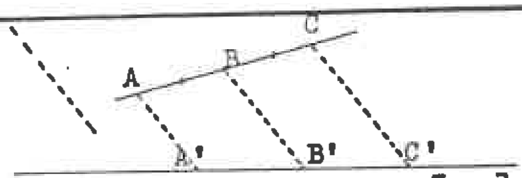
10/ R_1 : Cet organigramme est correct.
R_2 : Cet organigramme est incorrect.
R_3 : On ne peut pas répondre.

QUESTIONNAIRE A CHOIX MULTIPLE 2

1/ $\boxed{R_1}$: Deux droites différentes sont sécantes.
$\boxed{R_2}$: Deux droites perpendiculaires sont sécantes.
$\boxed{R_3}$: Deux droites perpendiculaires sont sécantes.

2/ $\boxed{R_1}$: La projection conserve la distance.
$\boxed{R_2}$: La projection conserve le milieu.
$\boxed{R_3}$: La projection d'un segment de 2 cm est toujours un segment de 2 cm.

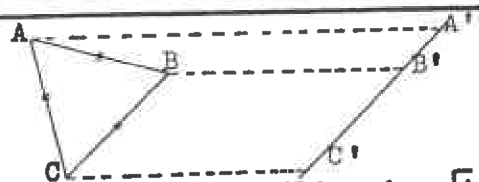
3/



B' est le milieu de [A'C'] .

$\boxed{R_1}$: C'est toujours vrai.
$\boxed{R_2}$: C'est toujours faux.
$\boxed{R_3}$: Cela peut être vrai.

4/



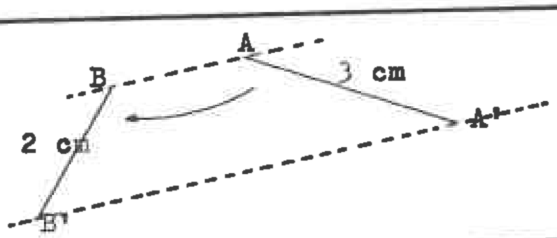
B' est le milieu de [A'C'] .

$\boxed{R_1}$: C'est toujours vrai.
$\boxed{R_2}$: C'est toujours faux.
$\boxed{R_3}$: Cela peut être vrai.

5/ Lors d'une projection de D sur D' parallèlement à Δ , si le segment [AB] a pour image le segment [A'B'] , alors :

$\boxed{R_1}$: (AA') // (BB') // D
$\boxed{R_2}$: (AB) // (A'B') // Δ
$\boxed{R_3}$: (AA') // (BB') // Δ

6/

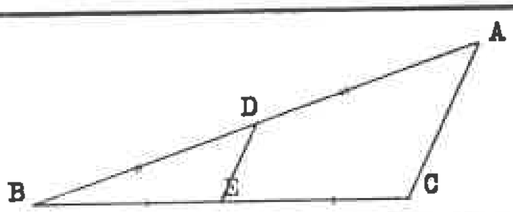


$\boxed{R_1}$: Le rapport de projection est $\frac{2}{3}$.
$\boxed{R_2}$: Le rapport de projection est $\frac{3}{2}$.
$\boxed{R_3}$: Le rapport de projection ne peut être trouvé.

7/ Lors d'une projection de rapport k, si le segment [AB] a pour projeté le segment [A'B'] , alors on a

$\boxed{R_1}$: AA' = k.BB'
$\boxed{R_2}$: A'B' = k.AB
$\boxed{R_3}$: $\frac{AB}{A'B'} = k$

8/



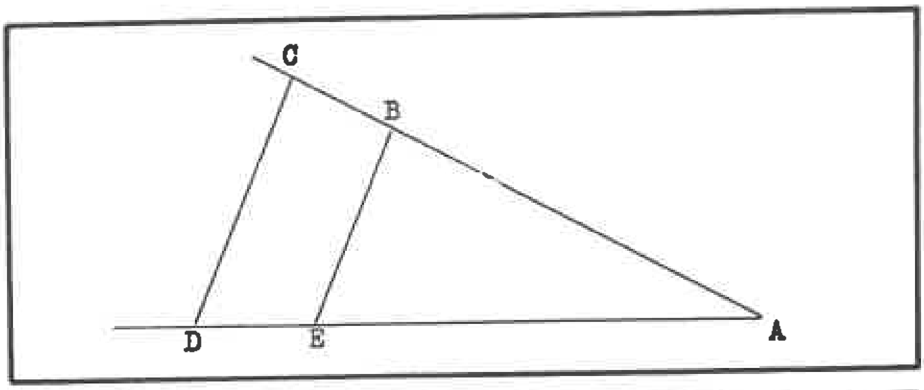
$\boxed{R_1}$: DE = 2.AC
$\boxed{R_2}$: AC = $\frac{1}{2}$ DE
$\boxed{R_3}$: AC = 2.DE

9/ Le centre de gravité G d'un triangle se trouve :

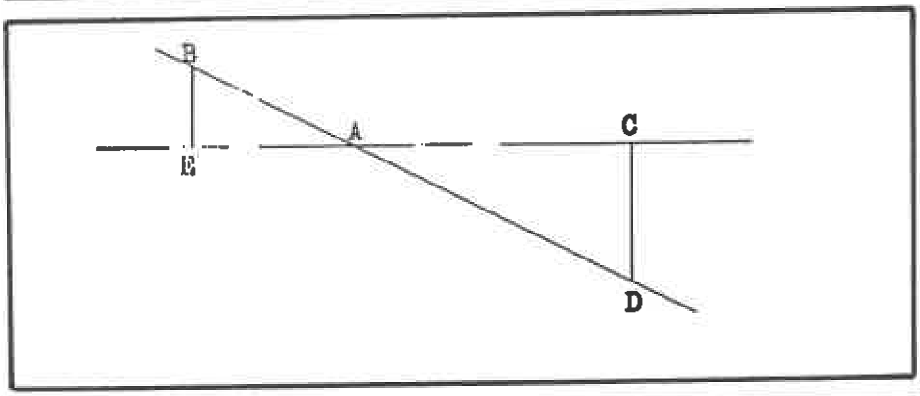
$\boxed{R_1}$: Aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir de son pied.
$\boxed{R_2}$: Au milieu de la médiane.
$\boxed{R_3}$: Au tiers de chaque médiane à partir du pied.

10/ Dans quel cas de figure a-t-on : $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$?

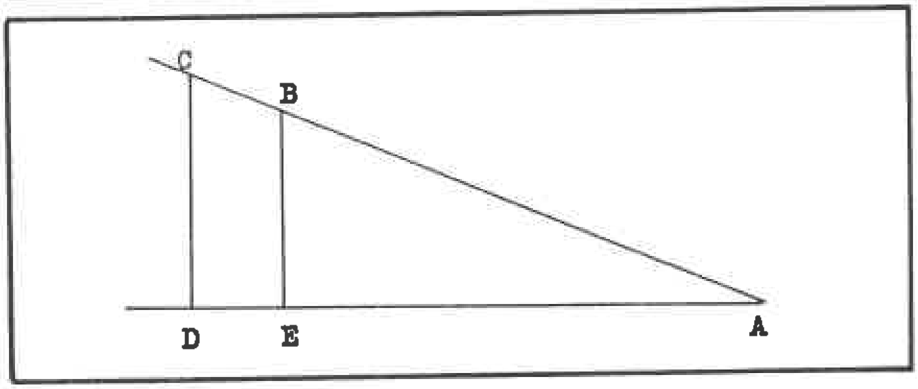
R_1



R_2

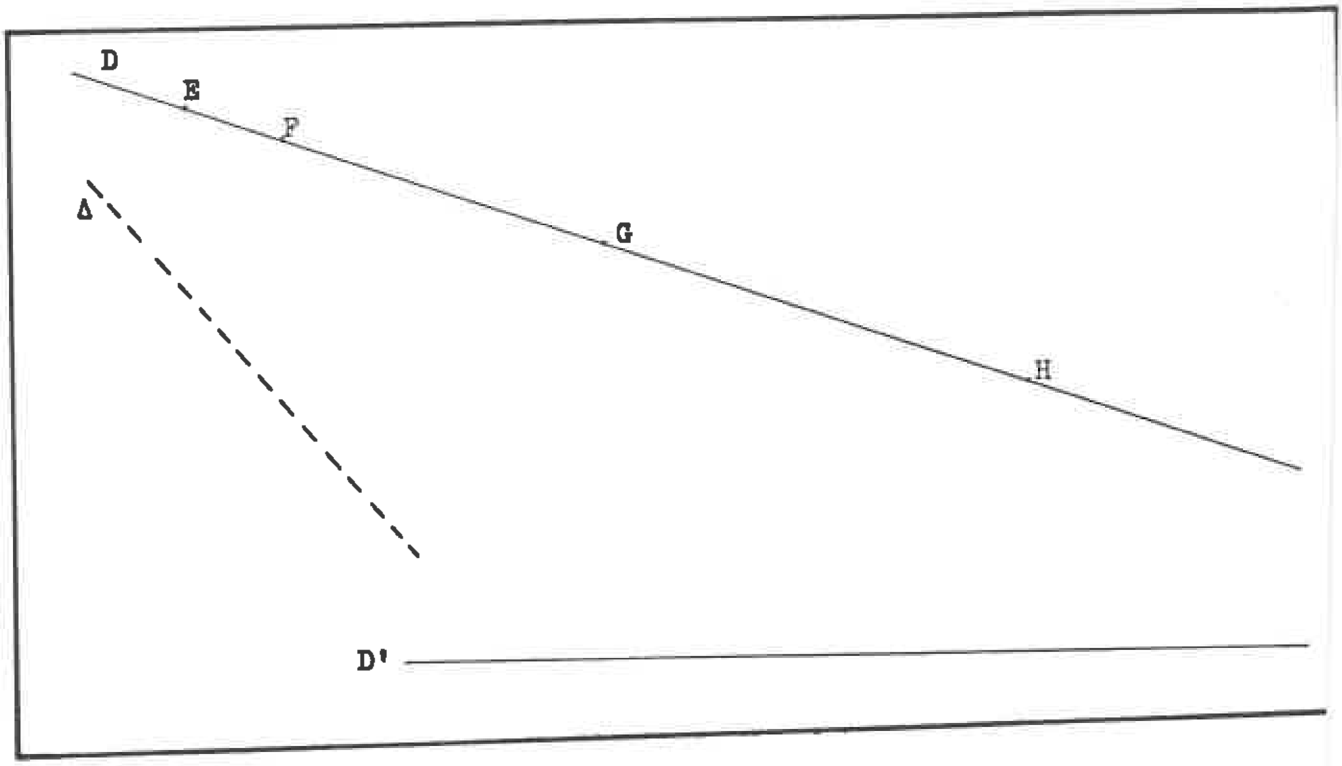


R_3



CONTROLE 24-1

EXERCICE 1 : Voici la projection de la droite D sur la droite D' parallèlement à Δ.



Projette les points E, F, G et H.

Mesure sur la figure et complète le tableau suivant :

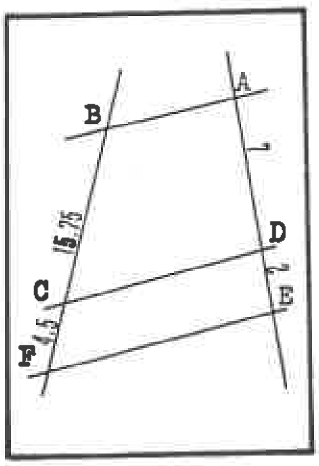
Sur la droite D	EH =	EG =	EF =	FG =
Sur la droite D'	E'H' =	E'G' =	E'F' =	F'G' =

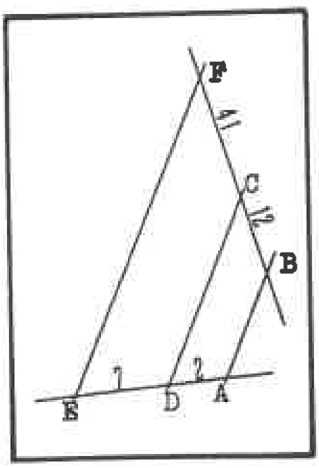
Que peux-tu dire des deux suites ?

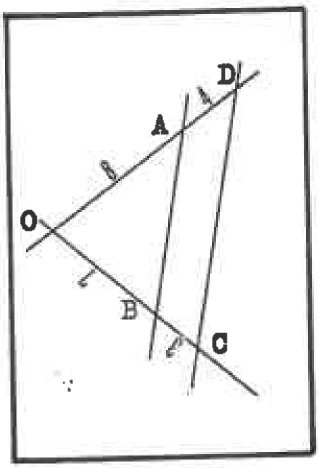
Quel est le rapport de projection ?

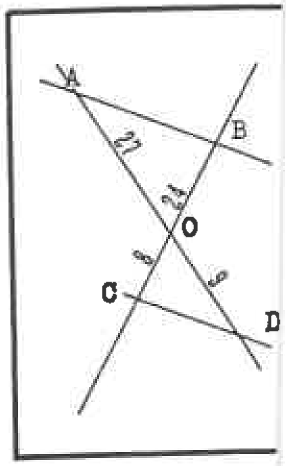
EXERCICE 2 : En calculant deux rapports, justifie que les droites (AB) et (CD) sont (ou ne sont pas) parallèles.

Attention : ces croquis ne sont pas des dessins à l'échelle. Il ne faut donc pas se fier à leur allure.

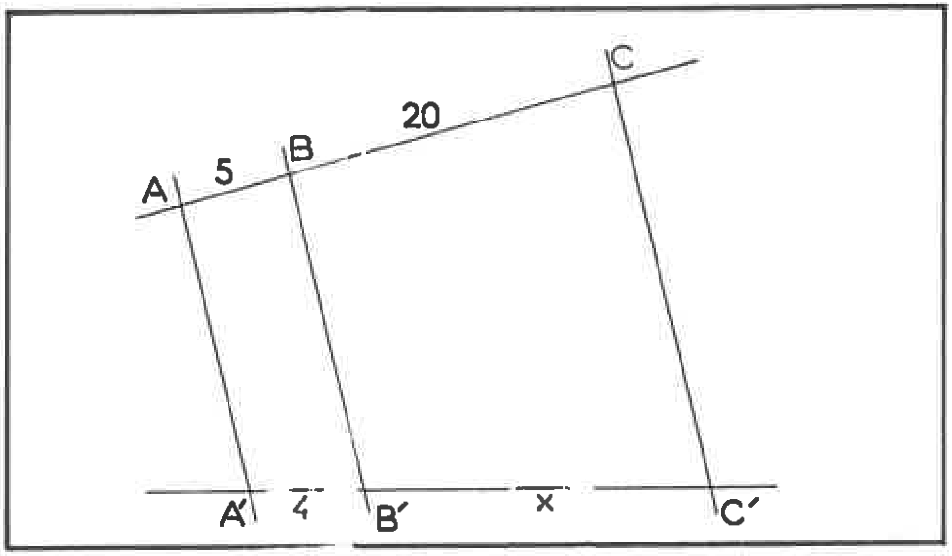




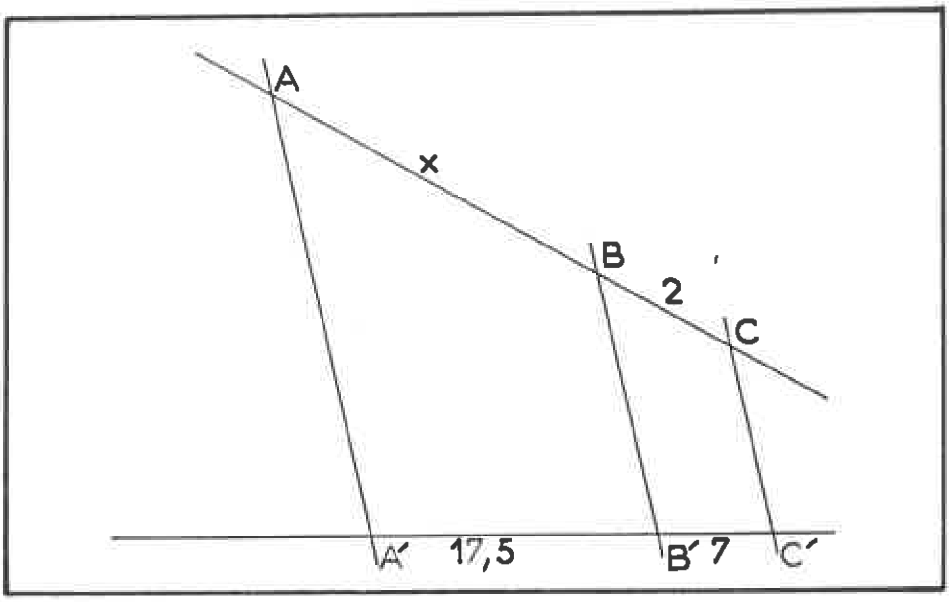




EXERCICE 3 : Trouve la longueur, x, de B'C' .



EXERCICE 4 : Trouve la longueur, x, de AB .



CONTROLE 24-2

EXERCICE 1 : Voici un arbre et son ombre.

Reproduis ce dessin en prenant un carreau pour 1 mètre avec les renseignements suivants :

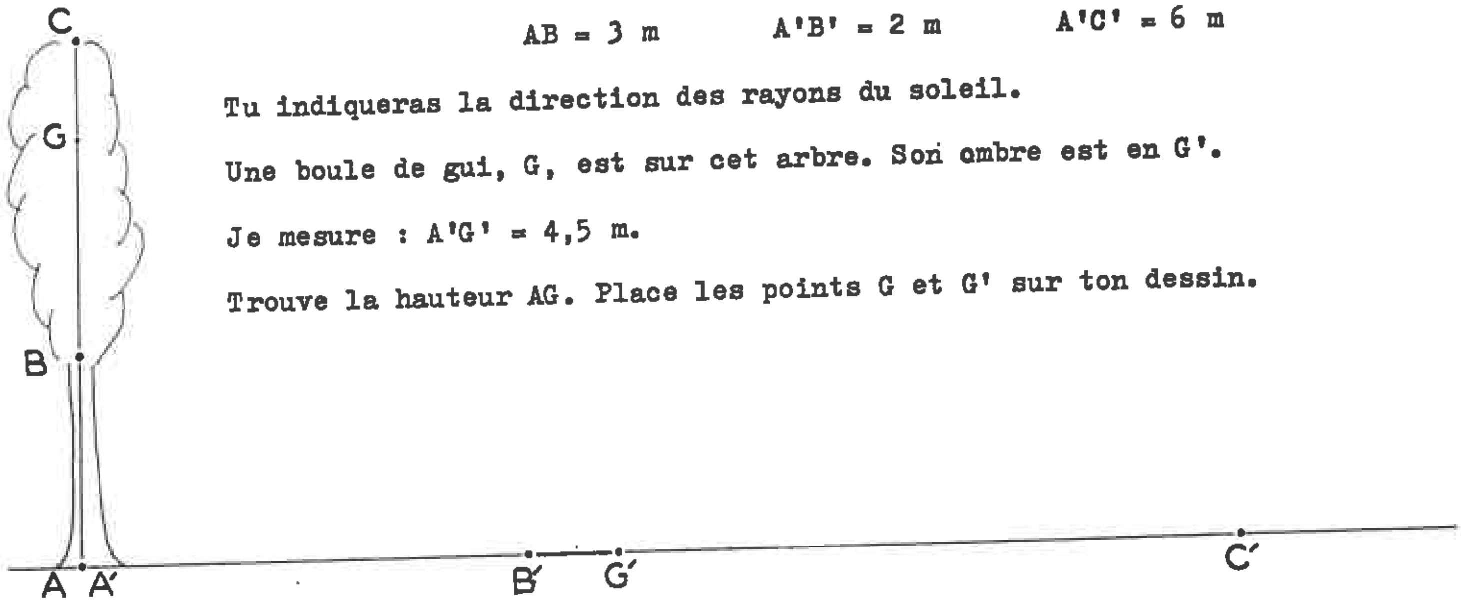
AB = 3 m   A'B' = 2 m   A'C' = 6 m

Tu indiqueras la direction des rayons du soleil.

Une boule de gui, G, est sur cet arbre. Son ombre est en G'.

Je mesure : A'G' = 4,5 m.

Trouve la hauteur AG. Place les points G et G' sur ton dessin.



EXERCICE 2 : Soit un triangle équilatéral ABC.

Le point E est le milieu du côté [BC] .

Le point F est le milieu du côté [AB] .

Les droites (AE) et (CF) se coupent en un point O.

a) Dessine cette figure.

b) Que peux-tu dire du point O ?

c) Que peux-tu en déduire quant à la droite (BO) et le côté [AC] ?

Attention : Il faut, à chaque fois, justifier ta réponse !

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°25

TITRE : NOMBRES RELATIFS MULTIPLICATION DIVISION

4

PREREQUIS

- ADDITION ET SOUSTRACTION DES RELATIFS
- FRACTIONS (NIVEAU 5ème)

OBJECTIFS

- PRODUIT DE DEUX NOMBRES RELATIFS SIMPLES
- REGLES DE CALCUL
- UTLISATION DES PARENTHESES
- FACTORISATIONS SIMPLES

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

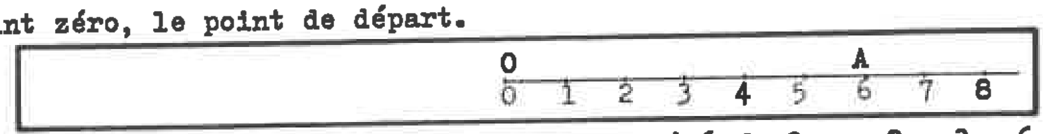
BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 25

NOMBRES RELATIFS
MULTIPLICATION
DIVISION

SITUATION 1 : Alice se promène à une vitesse de 3 kilomètres par heure. J'appelle O le point zéro, le point de départ.

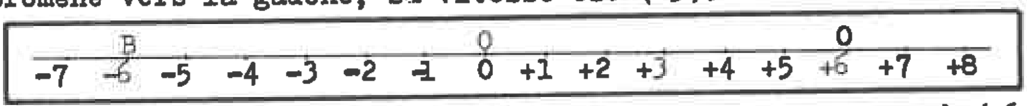


Au bout de 2 heures, elle se trouve en A, à 6 de O : $2 \times 3 = 6$

L'opération est une multiplication.

Et au bout d'une heure ? de trois heures ? de quatre heures ? Ecris chaque égalité.

SITUATION 2 : Lorsqu'Alice se promène vers la droite, sa vitesse est (+3). Lorsqu'elle se promène vers la gauche, sa vitesse est (-3).



A la vitesse (+3), au bout de 2 heures, elle se trouve en A à (+6).

$$(+3) \times 2 = (+6)$$

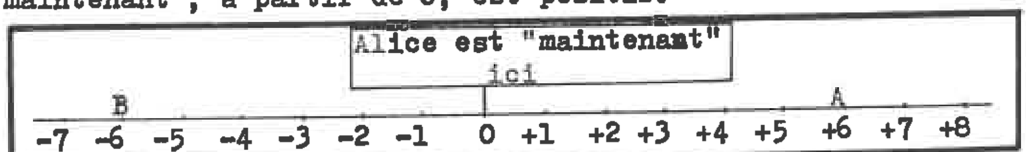
Et au bout d'une heure ? de 3 heures ? de 4 heures ?

A la vitesse (-3), au bout de 2 heures, elle se trouve en B à (-6).

$$(-3) \times 2 = (-6)$$

Et au bout d'une heure ? de 3 heures ? de 4 heures ? Ecris chaque égalité.

SITUATION 3 : Je décide que "maintenant", c'est l'instant zéro. A cet instant zéro, Alice se trouve au point O. On peut dire que le temps qui s'écoule à partir de "maintenant", à partir de O, est positif.



a) A la vitesse (+3), au bout de 2 heures, Alice se trouve en A à (+6).

$$(+3) \times (+2) = (+6)$$

Et au bout d'une heure ? de 3 heures ? de quatre heures ?
Ecris chaque égalité.

b) Mais lorsqu'elle se promène vers la gauche, c'est à dire à la vitesse (-3), au bout de 2 heures, Alice se trouve en B à (-6).

$$(-3) \times (+2) = (-6)$$

SITUATION 4 : On peut dire que le temps qui s'écoule à partir de "maintenant, de l'instant zéro, est positif, et que le temps qui s'est écoulé avant cet instant zéro est négatif.

a) A la vitesse (+3), deux heures auparavant, Alice se trouvait à gauche de la pancarte, en B à (-6).

$$(+3) \times (-2) = (-6)$$

Et il y a une heure ? deux heures ? quatre heures ?

Ecris chaque égalité.

b) A la vitesse (-3) (lorsqu'elle se déplace vers la gauche), deux heures auparavant, Alice se trouvait à droite de la pancarte, en A à (+6).

$$(-3) \times (-2) = (+6)$$

Et il y a une heure ? deux heures ? quatre heures ?

Ecris chaque égalité.

(D'après une idée de Rozsa Peter)

RECAPITULONS

a) <u>Du déja vu !</u>

Vitesse 3 et temps 2
3 x 2 =
3 x 1 =
3 x 3 =
3 x 4 =

Vitesse (+3) et temps 2
(+3) x 2 =
(+3) x 1 =
(+3) x 3 =
(+3) x 4 =

b) <u>Du nouveau ?</u>

Vitesse (-3) et temps 2
(-3) x 2 =
(-3) x 1 =
...

Vitesse (+3) et temps (+2)
(+3) x (+2) =
....

Vitesse (+3) et temps (-2)
(+3) x (-2) =
...

Vitesse (-3) et temps (+2)
(-3) x (+2) =
(-3) x (+1) =
...

c) <u>Du nouveau !</u>

Vitesse (-3) et temps (-2)
(-3) x (-2) =
(-3) x (-1) =
...

I. MULTIPLICATION DES RELATIFS.

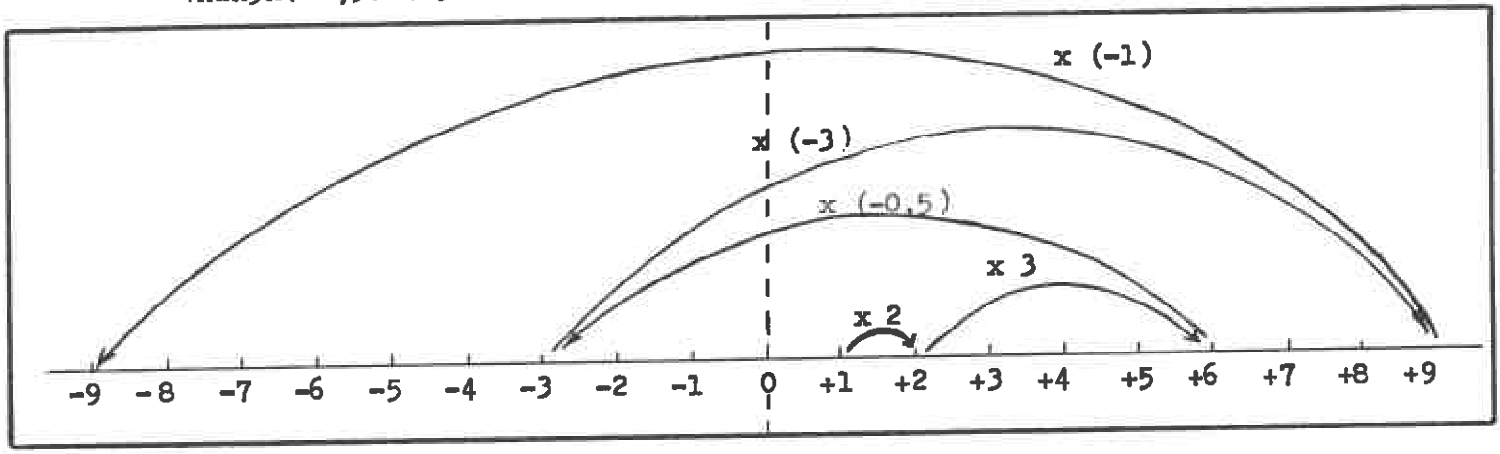
1/ LA REGLE DES SIGNES

A partir de l'activité précédente, cherche et rédige une règle pour trouver le signe du pro-duit de deux nombres relatifs. Règle 1

Comment obtient-on la valeur absolue du produit de deux relatifs?

Exercice 1

On peut représenter une séquence de multiplications, par exemple $1 \times 2 \times 3 \times (-0,5) \times (-3) \times (-1)$ sur une droite graduée:



Représente de même sur une droite graduée, les séquences suivantes:

Ah!	$0,5 \times 4 \times 5 \times 0,5 \times 0,6$
Ah!Ah!	$2 \times (-0,5) \times 8 \times 0,5 \times 0,5 \times (-3)$
Ah!Ah!Ah!	$1 \times (-1) \times (-2) \times (-1,5) \times (-1,5) \times (-2)$

Aurais-tu pu, sans calcul, trouver le signe de ces produits?

Enonce une règle. Règle 2

2/ COMMENT SIMPLIFIER UN CALCUL

Pour le calcul d'un produit,

- détermine d'abord son signe par la règle 2
- simplifie le calcul par l'un des deux procédés ci-dessous.

1° procédé

Dans l'exercice 1, tu as calculé les produits de gauche à droite mais tu aurais pu grouper certains facteurs ainsi:

$$(-3) \times 4 \times (-0,25) \times 5 \times (-2) = -3 \times (4 \times 0,25) \times (5 \times 2)$$
$$= -3 \times 1 \times 10$$
$$= -30$$

Le calcul de gauche à droite donne-t-il le même résultat?

Note importante: Observe la disposition du calcul précédent.

Pour vérifier un calcul, il faut le relire.

Pour cela, un calcul doit être propre et bien disposé.

Exercice 2

Calcule de gauche à droite puis en groupant les facteurs:

a) 1,2x(-5)x(-0,25)x4x0,02x(-5)

b) -1,25x(-8)x2,5x(-6)x(-0,75)x(-2)

2°procédé

Dans le calcul d'un produit, tu peux changer l'ordre des facteurs:

(-4)x(-0,15)x0,25x3 = +4x0,25x0,15x3

= (4x0,25)x(0,15x3)

= 1x0,45

= 0,45

Le calcul de gauche à droite donne-t-il le même résultat?

Enonce une règle résumant ces deux procédés. **Règle 3**

Exercice 3

Calcule le plus simplement possible, puis de gauche à droite:

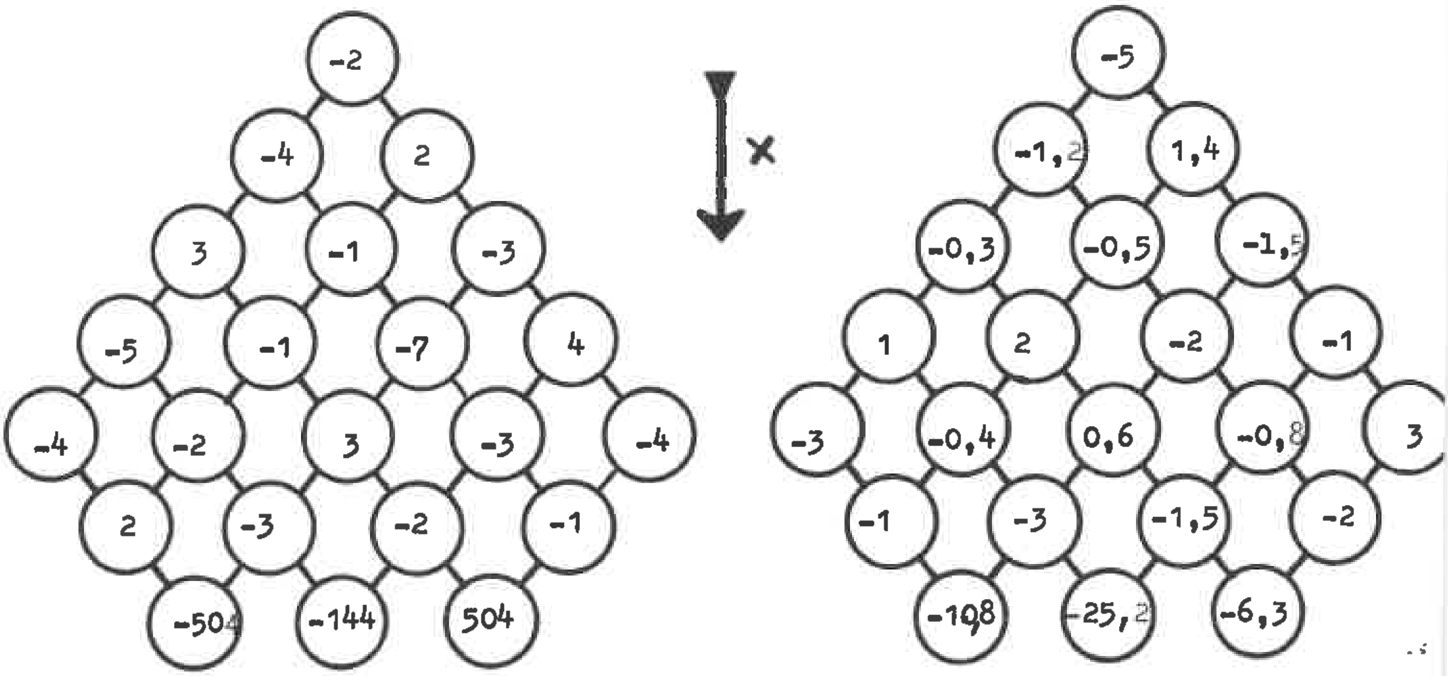
a) (-11)x0,25x(-5)x4x(-0,2)

b) 100x(-0,625)x0,4x(-5)x1,6x(-0,01)

Exercice 4

Trouve un chemin pour aller de -2 à -336, puis de -2 à -144 et enfin de -2 à 504.

De même, trouve un chemin pour aller de -5 à -10,8 puis de -5 à -25,2 et enfin de -5 à -6,3.



3/ MULTIPLICATION PAR -1

Complète le tableau ci-dessous:

-2	-1,5	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2

x(-1)

Si t est un relatif, à quoi est égal (-1).t ?

Le relatif -t est-il positif ou négatif?

Exercice 5

Simplifie les écritures des produits:

(-1)(-a) (-2)(-a) (-a)(-b)

(-5)(-1,2a) (-0,25a)(-14) (-0,8a)(1,5b)

(3a)(-0,6a) (-0,2a)(-5b)(-a) (0,75a)(-11b)(-20b)

(-0,4a)(-7b)(-a)(5b) (-a)(-a)(-a) -(-1,25a)(-7a)(8a)

Exercice 6

Développe en appliquant la distributivité de la multiplication:-2(5x-3)

Calcule -2(5x-3) pour x égal à: -2;-1,5;-1;-0,5;0;0,5;1;1,5;2

Calcule 6-10x pour les mêmes valeurs de x.

Exercice 7

Développe et réduis: 6(2-1,5x)-4(0,75x-1)

Calcule 6(2-1,5x)-4(0,75x- 1) pour x égal à:-4;-2;-1;0;1;2;4

Calcule 16-12x pour les mêmes valeurs de x.

Exercice 8

Développe et réduis: 5x(4x-3)+10

Calcule cette expression ainsi que l'expression développée pour x égal à:

-2;-1;-0,5;0;0,5;1;2

Exercice 9

Développe et réduis:

A= -3(-2t+5)

B= -1,5(5t-4)

C= -5(6x-7y)

D= 1-0,8(5t-3)

E= 2t-3(4t-2)

F= 4(2,5x-1)-3(3-2x)

G= 2t(1,5-t)

H= -0,2(5t-10)-0,5t(6-4t)

I= 1,5(6-x)-0,25(4x-2)

J= 2x(2,5x-1,5)-3x(x-2)

II. DIVISION DES RELATIFS.

1/ LA REGLE DES SIGNES

Situation 1

Complète le tableau de proportionnalité:

S_1	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
S_2						

$\times 5$ $\quad$ $:5$

On doit pouvoir passer de S_2 à S_1 en divisant par 5.

On peut donc écrire: (à partir de la première colonne)

$$\frac{-10}{5} = -2 \quad \text{donc} \quad \frac{-10}{5} = -\frac{10}{5} \qquad (\text{car } 2 = \frac{10}{5})$$

Fais de même avec les deuxième et troisième colonnes.

Situation 2

Calcule chaque terme de la suite S_2 en multipliant le terme correspondant de S_1 par -4:

S_1	-5	-2	-1	1	2	5
S_2						

$\times(-4)$ $\quad$ $:(-4)$

On dira encore que les suites S_1 et S_2 sont proportionnelles et que le coefficient pour passer de S_1 à S_2 est égal à -4.

On doit pouvoir passer de S_1 à S_2 en divisant par le coefficient -4.

On peut donc écrire: (à partir de la première colonne)

$$\frac{20}{-4} = -5 \quad \text{donc} \quad \frac{20}{-4} = -\frac{20}{4} \qquad (\text{car } 5 = \frac{20}{4})$$

De même, on a: (à partir de la dernière colonne)

$$\frac{-20}{-4} = 5 \quad \text{donc} \quad \frac{-20}{-4} = \frac{20}{4}$$

Fais de même avec les autres colonnes.

Conclusion

Quel est le signe du quotient de deux relatifs de même signe ?

Quel est le signe du quotient de deux relatifs de signes contraires ?

Compare avec la règle des signes pour le produit.

A quoi est égale la valeur absolue du quotient de deux relatifs ?

Exercice 10

Détermine le signe puis calcule la valeur absolue (sous forme de fraction irréductible).

$$\frac{-5}{-10} \qquad \frac{6}{-9} \qquad \frac{-2}{8} \qquad \frac{-15}{-5} \qquad \frac{-21}{14} \qquad \frac{28}{-20} \qquad \frac{-121}{-132}$$

$$\frac{-39}{33} \qquad -\frac{45}{-30} \qquad -\frac{-16}{-24} \qquad -\frac{100}{-10} \qquad -\frac{-35}{-55} \qquad \frac{-49}{-56} \qquad -\frac{-72}{36}$$

Exercice 11

Complète les tableaux pour que S_1 et S_2 soient des suites proportionnelles:

A/

S_1	-15	-8			0,5		8	
S_2	6		1	0,2		-1		-6

x ? : ?

B/

S_1	-5	-4	-3			3		
S_2			0,75	0,5	-0,5		-1	-1,25

x ? : ?

C/

S_1	-0,8		-0,4		0,1	0,3		
S_2		0,72		0,24		-0,36	-0,6	-0,84

x ? : ?

Exercice 12

Complète les tableaux. Les suites S_1 et S_2 obtenues sont elles proportionnelles ?

A/ f est la fonction définie par $f(t)=1,5t$ (par exemple $f(-2)=1,5\times(-2)$ donc $f(-2)=-3$)

S_1	t	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
S_2	f(t)								

B/ Même tableau avec $f(t)=-2t$

C/ Même tableau avec $f(t)=-3t+2$

D/ Même tableau avec $f(t)=|2t|$ (Lire: valeur absolue de 2t.)

Par exemple: $f(-5)=|2\times(-5)|=|-10|=10$

2/ PRODUITS ET QUOTIENTS

Pour les entiers naturels (et même pour les décimaux) , tu connais les formules suivantes:

Règle 4 $\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b} \qquad \frac{a}{b}\times b=a}$

Ces formules sont encore vraies lorsque a,b,c,d sont relatifs.

Exemples

$$\frac{-2}{3}\times\frac{-5}{-7}=\frac{(-2)(-5)}{3(-7)}=\frac{+10}{-21}=-\frac{10}{21}$$

$$\frac{-5}{3}\times(-2)=\frac{(-5)(-2)}{3}=\frac{10}{3}$$

$$\frac{4}{-7}\times(-7)=4$$

Exercice 13

Calcule de même:

$\frac{-3}{4}\times\frac{5}{-2}$ $\quad\frac{-4}{7}\times\frac{-3}{-5}$ $\quad\frac{7}{-8}\times\frac{-3}{5}$ $\quad-\frac{5}{7}\times\frac{-2}{7}$ $\quad\frac{-6}{-5}\times(-\frac{7}{4})$

$-\frac{2}{3}\times(-\frac{7}{3})$ $\quad\frac{-6}{11}\times(-3)$ $\quad-6\times\frac{-9}{11}$ $\quad\frac{-8}{-5}\times\frac{-6}{-7}$ $\quad\frac{6}{-5}\times(-5)$

$\frac{-11}{-5}\times\frac{-9}{7}$ $\quad\frac{-6}{5}\times\frac{-6}{5}$ $\quad\frac{-7}{-12}\times 12$ $\quad-3\times(-\frac{10}{7})$ $\quad\frac{-7}{8}\times\frac{7}{-8}$

3/ COMMENT SIMPLIFIER UN CALCUL

Exemples

$$\frac{5(-2)(-3)}{3(-4)} = \frac{+\ 2\times3\times5}{-\ 2\times2\times3} = -\frac{2}{2}\times\frac{3}{3}\times\frac{5}{2} = -1\times1\times\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{-8}{15}\times\frac{9}{-28} = \frac{-8\times9}{15\times(-28)} = \frac{-2\times4\times3\times3}{-3\times5\times7\times4} = \frac{3}{3}\times\frac{4}{4}\times\frac{2\times3}{5\times7} = 1\times1\times\frac{6}{35} = \frac{6}{35}$$

Exercice 14

Calcule de même:

$\frac{-16}{21}\times\frac{-14}{32}$ $\qquad \frac{15}{-8}\times\frac{4}{35}$ $\qquad \frac{-32}{25}\times\frac{-15}{8}$

$\frac{-51}{13}\times\frac{39}{68}$ $\qquad \frac{-4}{35}\times\frac{45}{-16}$ $\qquad \frac{-48}{25}\times\frac{-5}{84}$

$\frac{-35}{18}\times\frac{27}{-65}$ $\qquad \frac{18}{-39}\times\frac{26}{-9}$ $\qquad \frac{63}{44}\times\frac{-33}{-27}$

$\frac{-38}{35}\times\frac{-21}{8}\times\frac{-10}{19}$ $\qquad \frac{66}{15}\times\frac{-56}{99}\times\frac{45}{-8}$ $\qquad \frac{-48}{25}\times\frac{35}{-9}\times\frac{-45}{16}$

$-36\times\frac{-39}{48}\times\frac{18}{-65}$ $\qquad \frac{-22}{81}\times\frac{54}{-20}\times\frac{25}{-11}$ $\qquad \frac{56}{-65}\times\frac{60}{-49}\times(-13)$

III. INVERSE D'UN NOMBRE.

1/ INTRODUCTION

Exemple 1

Voici deux suites de nombres proportionnelles:

xa	-4	-2	-1	+1	+2	+4
	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1

xb

Calcule a, b, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$

Deux suites S_1 et S_2 proportionnelles étant données, si le coefficient pour passer de S_1 à S_2 est le nombre a, quel est le coefficient pour passer de S_2 à S_1 ?

Exemple 2

Calcule a, b, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ pour ces deux suites proportionnelles:

xa	-4	-2	-1	+1	+2	+4
	8	4	2	-2	-4	-8

xb

Diviser par le nombre a revient à multiplier par $\frac{1}{a}$

Définition

Un nombre a différent de 0 étant donné, le nombre $\frac{1}{a}$ est appelé <u>l'inverse de a</u>.

<u>Remarque</u>:

Pourquoi doit-on préciser que a est différent de 0 ?

2/ PROPRIETES

Propriété 1 Signe et valeur absolue de l'inverse d'un nombre

Calcule les inverses des nombres suivants:

+1 -1 +2 -2 +4 -4 +5 -5 +8 -8 +10 -10 +20 -20

+0,1 -0,1 +0,2 -0,2 +0,4 -0,4 +0,8 -0,8 +0,01 -0,01

a) Compare les signes de a et de $\frac{1}{a}$.

b) Si $|a| > 1$, que peux-tu dire de $\left|\frac{1}{a}\right|$? Et si $|a| < 1$?

Propriété 2 Inverse d'un inverse

Complète le tableau suivant:

x	-4	-2	-1	+1	+2	+4
$\frac{1}{x}$						
Inverse de $\frac{1}{x}$						

L'inverse de $\frac{1}{x}$ se note $\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$. Le trait principal se met sur la même ligne que le signe =.

Si x est un nombre différent de 0, à quoi est égal l'inverse de $\frac{1}{x}$?

Propriété 3 Equation a.x = 1

Résous les équations suivantes:

$4\,x = 1$ $\quad -0,2\,x = 1$ $\quad -5\,x = 1$ $\quad 0,4\,x = 1$

D'une manière générale, si le nombre a est différent de 0, quelle est la solution de l'équation a.x = 1 ?

Propriété 4 Inverse d'une fraction

Résous les équations suivantes:

$\frac{5}{2}\,x = 1$ $\quad \frac{-3}{4}\,x = 1$ $\quad \frac{1}{-8}\,x = 1$ $\quad \frac{8}{5}\,x = 1$

Mets les solutions obtenues sous forme de fractions.

D'une manière générale, a et b étant deux entiers non nuls, résous l'équation $\frac{a}{b}\,x = 1$.

Quelle est l'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$?

Propriété 5 Produit de deux inverses

Calcule les produits suivants: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}$ $\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-2}$ $\quad \frac{1}{-7}\cdot\frac{1}{-3}$ $\quad \frac{1}{-5}\cdot\frac{1}{2}$

D'une manière générale, si a et b sont deux entiers non nuls, à quoi est égal le produit $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$?

Propriété 6 **Produit d'un entier et d'un inverse**

Calcule les produits suivants: $5 \cdot \frac{1}{4}$ $\quad -2 \cdot \frac{1}{7}$ $\quad -6 \cdot \frac{1}{-5}$ $\quad 3 \cdot \frac{1}{-8}$

D'une manière générale, si a et b sont deux entiers et si $b \neq 0$, écris $\frac{a}{b}$ sous la forme d'un produit.

Propriété 7 **Valeur décimale approchée ou exacte**

Peut-on toujours calculer la valeur décimale exacte d'un inverse ?
A l'aide d'une calculatrice, détermine la valeur décimale approchée à 0,000 001 prés des inverses des entiers suivants:

9 45 3 225 18 15 1125
11 22 27 54 37 74 7 48

Exercice 15

Calcule $\frac{1}{2}(3t - \frac{5}{2})$ pour t égal à: 0 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1 ; -1 ; $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{5}{6}$; $-\frac{5}{6}$

Développe l'expression précédente.
Calcule l'expression obtenue pour les mêmes valeurs de t. Que constates-tu?

Exercice 16

Même exercice que le précédent avec $\frac{3}{4}(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}) - \frac{3}{2}(\frac{1}{2}t - 3)$ et pour t égal à: 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$

Exercice 17

Développe et réduis:

$A = -\frac{3}{2}(2t-3)$

$B = \frac{5}{4}(1 - \frac{4}{5}t)$

$C = \frac{7}{5}(\frac{10}{21}u - \frac{15}{14}v)$

$D = \frac{1}{10} - \frac{1}{4}(t - \frac{2}{5})$

$E = \frac{t}{2}(3t - \frac{2}{3})$

$F = \frac{3t}{4} - \frac{t}{2}(\frac{t}{2} + \frac{3}{2})$

$G = \frac{3}{5}(2t - \frac{1}{3}) - 4(\frac{t}{5} - \frac{1}{10})$

$H = \frac{3}{8}(4t - \frac{2}{3}) - \frac{2}{5}(\frac{5}{8} - \frac{15}{4}t)$

Exercices résolus

Rappel: -Développer a(b+c) c'est écrire: $a(b+c) = ab + ac$
-Inversement, factoriser $ab + ac$ c'est écrire: $ab + ac = a(b+c)$
(On dit aussi que l'on a mis le nombre a en facteur)

a) Mettre -5 en facteur dans $-10t-5$

$$-10t-5 = (-5)(2t) + (-5).1 = (-5)(2t + 1)$$

car $\frac{-10t}{-5} = 2t$ et $\frac{-5}{-5} = 1$
on a mis -5 en facteur.

b) Mettre 2t en facteur dans $6t^2-10t$

$$6t^2-10t = (2t)(3t) + (2t)(-5) = (2t)(3t-5)$$

car $\frac{6t^2}{2t} = 3t$ et $\frac{-10t}{2t} = -5$
On a mis 2t en facteur.

Exercice 18

Mets de même en facteur:

-5 dans $-15t+10$

$3a$ dans $15ab-6a$

$-4t$ dans $-20t-4t^2$

-2 dans $-4t+1$

$\frac{1}{2}$ dans $\frac{t}{2} - \frac{3}{2}$

$\frac{1}{3}$ dans $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}t$

$-\frac{7}{2}$ dans $-\frac{35}{8} - \frac{63}{10}t$

6 dans $18-12t$

t dans $7t^2-3t$

$2t$ dans $14t-18t^2$

5 dans $5t-1$

$-\frac{3}{2}$ dans $-\frac{3}{2}t - \frac{9}{2}$

$\frac{2}{5}$ dans $\frac{4t}{15} + \frac{6}{5}$

$\frac{2}{3}$ dans $\frac{4}{9}u + \frac{22}{27}v$

3/ APPLICATIONS

A/ Pour des nombres relatifs a,b,c,d éventuellement non nuls, nous allons démontrer les formules:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Démontrons la première égalité:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a.\frac{1}{\frac{b}{c}}$$ d'aprés la propriété 6 page 10

$$= a.\frac{c}{b}$$ d'aprés la propriété 4 page 9

$$= \frac{ac}{b}$$ d'aprés la règle 4 page 7

Démontre de même les deux autres égalités.

Exercice 19

En appliquant les formules précédentes, trouve une fraction irréductible égale à:

1)	$a=\dfrac{1}{\frac{1}{5}}$	$b=\dfrac{1}{\frac{3}{4}}$	$c=\dfrac{1}{\frac{2}{-7}}$	$d=\dfrac{1}{-\frac{7}{3}}$	$e=\dfrac{-1}{\frac{-2}{-3}}$	$f=\dfrac{-1}{-\frac{5}{4}}$
2)	$a=\dfrac{3}{\frac{4}{3}}$	$b=\dfrac{3}{\frac{3}{4}}$	$c=\dfrac{\frac{4}{3}}{3}$	$d=\dfrac{\frac{3}{4}}{3}$	$e=\dfrac{-3}{\frac{4}{-3}}$	$f=\dfrac{-3}{\frac{-4}{-3}}$
3)	$a=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$	$b=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$	$c=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}$	$d=\dfrac{\frac{-7}{5}}{\frac{5}{-7}}$	$e=\dfrac{\frac{-3}{5}}{\frac{3}{-5}}$	$f=\dfrac{\frac{-5}{3}}{-5}$
4)	$a=\dfrac{\frac{-24}{35}}{\frac{9}{-25}}$	$b=\dfrac{\frac{1}{-36}}{\frac{-15}{27}}$	$c=\dfrac{\frac{-56}{11}}{-28}$	$d=\dfrac{-42}{\frac{-18}{5}}$	$e=\dfrac{\frac{-64}{35}}{\frac{10}{-21}} \times \dfrac{25}{-16}$	
5)	$a=\dfrac{-\frac{33}{54}}{-\frac{55}{72}}$	$b=\dfrac{\frac{84}{-5}}{-63}$	$c=\dfrac{-45}{\frac{-16}{21}} \times \dfrac{-8}{27}$	$d=\dfrac{\frac{-35}{66}}{\frac{42}{77}} \times \dfrac{25}{-7}$		

B/ Pour des nombres relatifs a,b,c,d éventuellement non nuls,

$$\boxed{\text{l'équation } \frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d} \text{ a pour solution } \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a}}$$

Démontre cette propriété en multipliant les deux membres de l'équation par un nombre convenable.

Exercice 20

Résous les équations:

1) $-\frac{4}{3}x = 1$

2) $-\frac{5}{8}x = -1$

3) $\frac{3}{2}x = -6$

4) $\frac{5}{3}x = -\frac{25}{6}$

5) $-\frac{26}{33}x = -\frac{65}{44}$

6) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$

7) $\frac{3}{2} + \frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$

8) $\frac{4}{3}x - 1 = \frac{3}{5}$

9) $\frac{5}{3}x - \frac{3}{4} = \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$

10) $\frac{3}{2}x - 1 = \frac{5}{3}x - \frac{1}{4}$

DOSSIER 25

CONTROLE

EXERCICE 1

1°/ Calcule l'expression $3(3-4x)-5(1-2x)$ pour x égal à: 1; 2; -1; -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$

2°/ Développe et réduis cette expression.

3°/ Calcule l'expression trouvée dans le 2° avec les valeurs de x données dans le 1°.

EXERCICE 2

Calcule et donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$a = \frac{-2}{7} \quad \frac{-5}{3}$ $\qquad b = \frac{-5}{6} \quad \frac{3}{2}$ $\qquad c = -\frac{7}{4}\,(-6)$ $\qquad d = \frac{-16}{25} \quad \frac{35}{-24}$

$e = \frac{-1}{2} \quad \frac{-2}{3} \quad \frac{-3}{4} \quad \frac{-4}{5} \quad \frac{-5}{6}$ $\qquad f = \frac{-6}{\frac{-3}{4}}$ $\qquad g = \frac{-\frac{9}{2}}{-6}$ $\qquad h = \frac{\frac{-16}{49}}{\frac{12}{35}}$

EXERCICE 3

Résous les équations suivantes:

1°/ $-5x = -1$

2°/ $-\frac{3}{4}x = 1$

3°/ $-\frac{7}{2}x = -3$

4°/ $-\frac{2}{5}x = \frac{5}{6}$

5°/ $\frac{7}{4}x - \frac{5}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$

6°/ $\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

EXERCICE 4

Mets en facteur:

1°/ -4 dans $-12x-16$

2°/ $\frac{1}{5}$ dans $\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$

3°/ $-\frac{3}{2}$ dans $-\frac{15}{2}x - \frac{9}{2}$

4°/ x dans $-8x+5x^2$

5°/ $-7x$ dans $-35x - \frac{14}{3}x^2$

6°/ $\frac{3x}{4}$ dans $\frac{21}{4}x^2 - \frac{9}{8}x$

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°26

TITRE: PROJECTION ORTHOG. COSINUS

4

PREREQUIS

DOSSIER 24

OBJECTIFS

- COSINUS ET TRIANGLE RECTANGLE
- UTILISATION DE LA CALCULATRICE POUR LA DETERMINATION APPROCHEE :
  - DU COSINUS CONNAISSANT L'ANGLE
  - DE L'ANGLE CONNAISSANT LE COSINUS

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

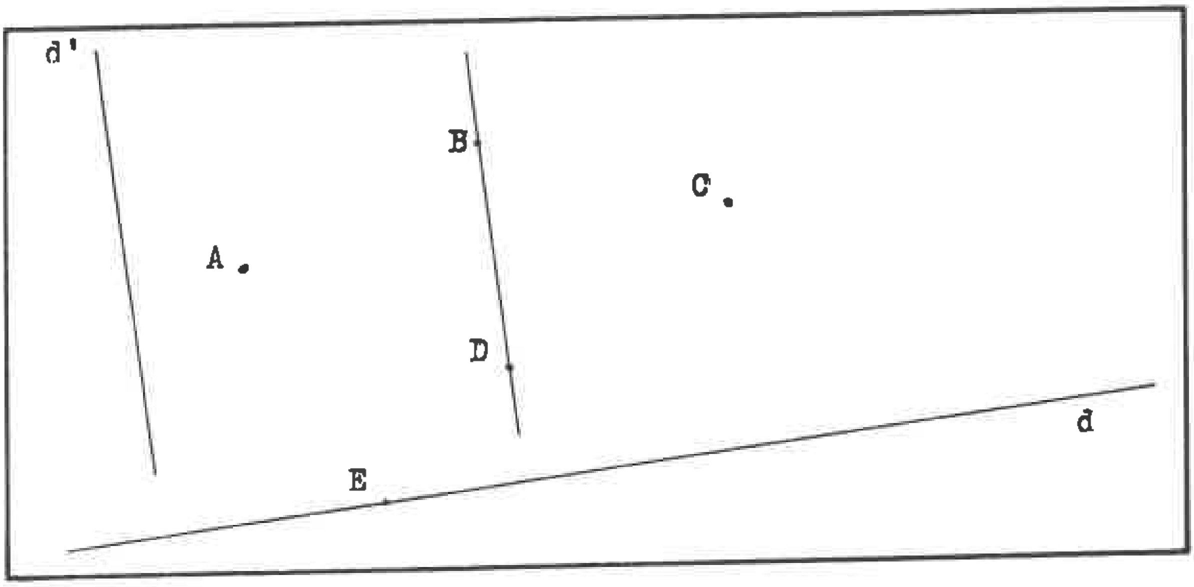
COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 26

PROJECTION ORTHOGONALE
COSINUS D'UN ANGLE AIGU

1/ PROJECTION ORTHOGONALE

Soient deux droites d et d' <u>perpendiculaires</u>



Projetez les points A, B, C, D, E sur la droite d selon la direction d'. Nous appellerons A', B', C', D', E' les projections respectives.

- Que dire du point E' ?
- Que dire des points B' et D' ?
- Que dire de la droite (BD) ?

<u>REMARQUES</u>

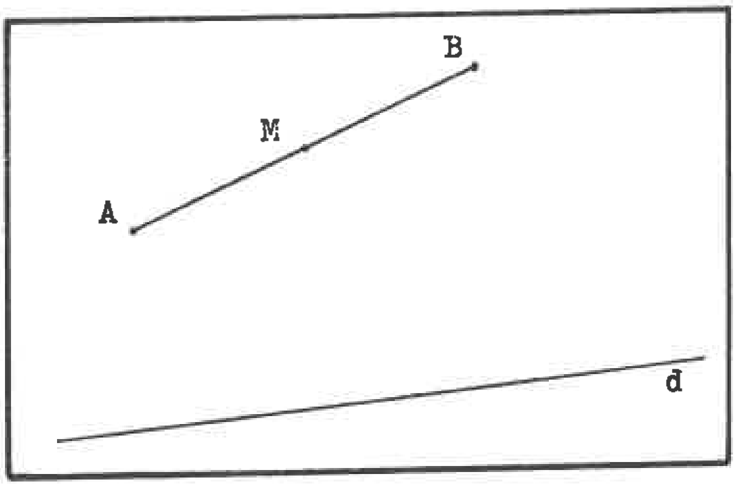
1/ La donnée de la droite d' est inutile si on parle de PROJECTION ORTHOGONALE des points A, B, C, D, E sur la droite d .Géométriquement il suffit de tracer la droite perpendiculaire à la droite d passant par le point que l'on veut projeter; la projection cherchée est l'intersection des deux droites.

2/La projection orthogonale est une projection. <u>Donc</u> les propriétés vues dans le dossier PROJECTION sont évidemment encore valables ici.

Exercice

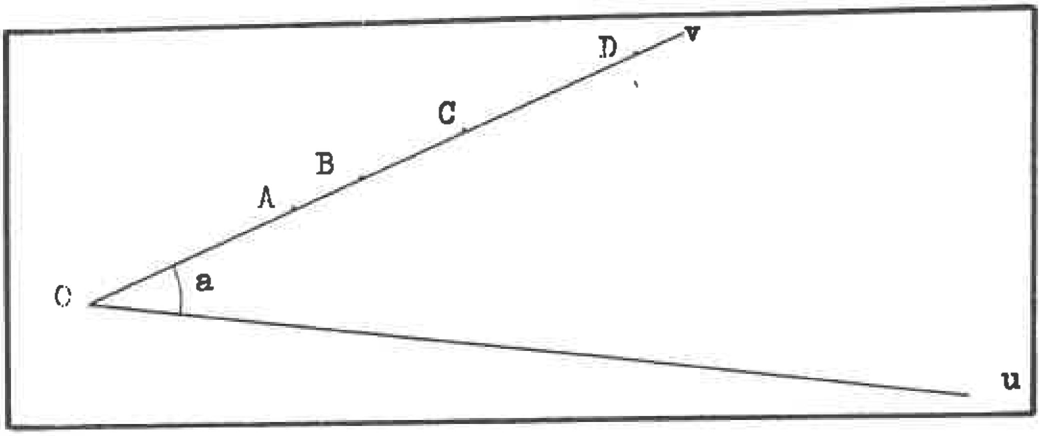
Projetez orthogonalement les points A,M,B sur d.

M est le milieu du segment [AB],que dire du projeté M' ?



2/ RAPPORT DE PROJECTION ORTHOGONALE

Tracez 2 demi-droites Ou et Ov telles qu'elles forment un angle a=30°.
Placez sur Ov quatre points quelconques A, B, C, D.



Projetez orthogonalement les points O, A, B, C, D sur Ou. Quelle est la projection du point O ? Soient A',B',C',D' les projections de A, B, C, D.

Complétez le tableau suivant:

S1	OA	OB	OC	OD	AB	AC	AD	BC	BD
S2	OA'				A'B'				

Les nombres de la suite S1 correspondent aux mesures des segments déterminés sur Ov. Ceux de la suite S2 correspondent aux mesures des segments projetés

On remarque que c'est un tableau de proportionnalité.Quel est le coefficient k? Nous savons que ce nombre est le rapport de projection orthogonale de la demi-droite Ov sur la demi-droite Ou.

Projetez orthogonalement les points O, A',B',C',D' de Ou sur Ov.Quelle est la projection du point O ? Soient A",B",C",D" les projections de A',B',C',D' .

Complétez le tableau suivant

S2	OA'	......	....
S3	OA"	......	....

Les nombres de la suite S3 correspondent aux mesures des segments projetés.

Nous avons encore ici un tableau de proportionnalité. Quel est le coefficient k'? Que remarque-t-on?

Le rapport de projection orthogonale de Ov sur Ou est égal au rapport de projection orthogonale de Ou sur Ov.

DEFINITION

On appelle **COSINUS de l'angle a** des deux demi-droites Ou ,Ov le rapport de projection orthogonale de l'une sur l'autre.

Soit en abrégé : k = k' = COS a = COS 30°.

Exercice

La suite S3 est-elle proportionnelle à la suite S1 ? Si oui, quel est le coefficient de proportionnalité ?

3/ UTILISATION DE LA CALCULATRICE

a/ Calcul du cosinus d' un angle

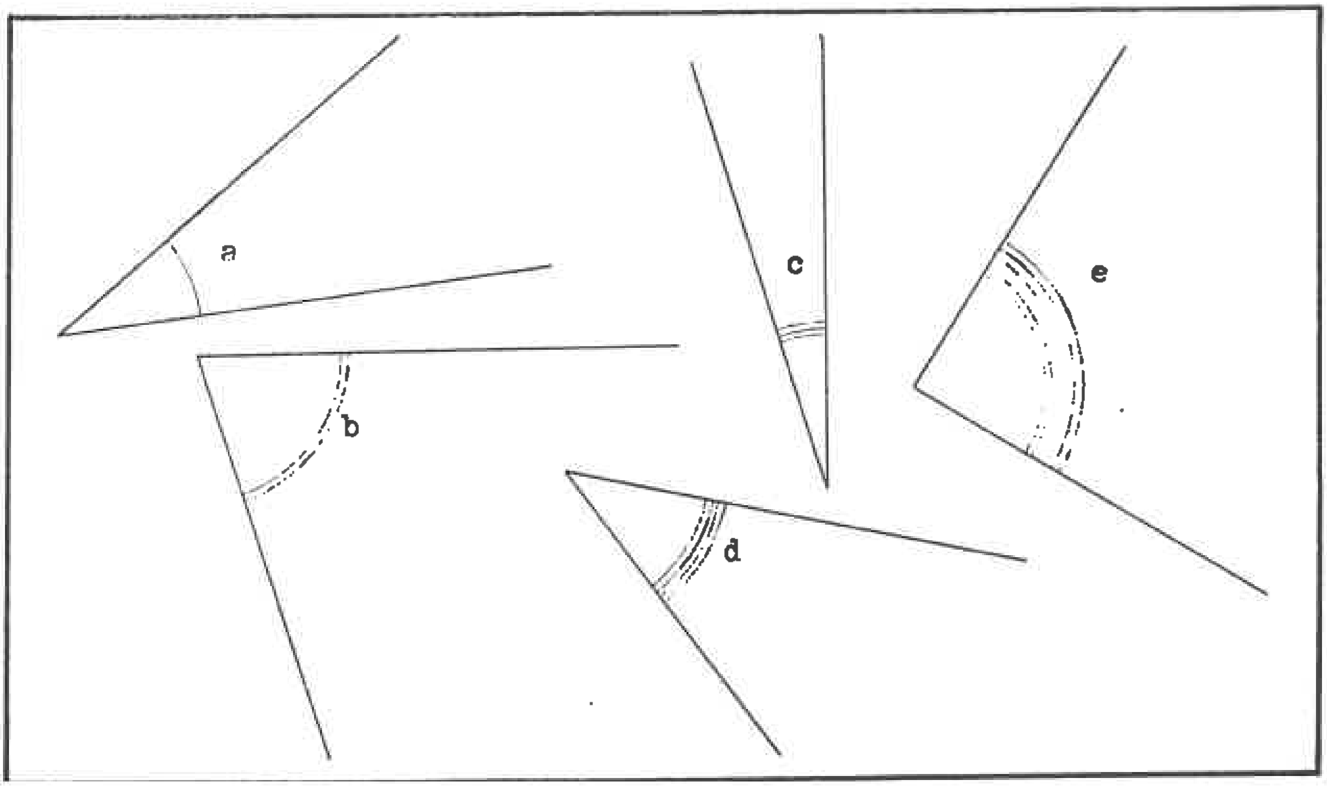
Ex: Soit à calculer Cos 30°.

-Passez en mode degrés.
-Tapez 30
-Appuyez sur la touche Cos.

AFFICHAGE: 0.866026

Exercice: Calculez Cos 0°, Cos 5°, Cos 10°,..........,Cos 90°.
Faites figurer vos résultats dans un tableau.(Nous en aurons besoin)

Exercice: Calculez le Cosinus des angles suivants:



b/Calcul d'un angle aigu connaissant son Cosinus

Les Cosinus précédents sont tous compris entre 0 et 1 .Nous prendrons donc pour le moment des nombres compris entre 0 et 1.

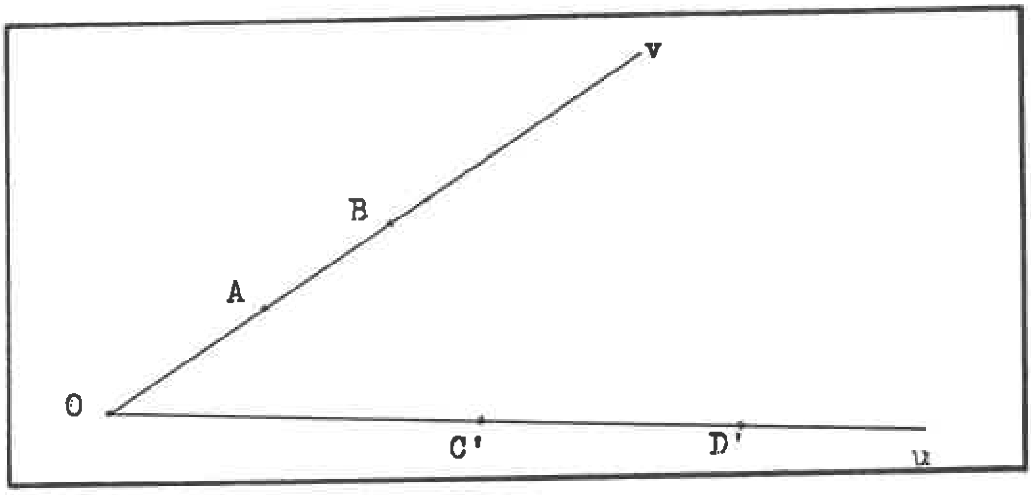
Exercice Soit à trouver l' angle aigu a tel que Cos a = 0.5

-Passez en mode degrés.
-Tapez 0.5 .
-Appuyez sur INV puis COS.

AFFICHAGE: 60 ou 59.99999 .

Exercice Calculez les angles aigus ayant pour Cosinus respectifs: 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ;............;1 . Dessinez les angles correspondants

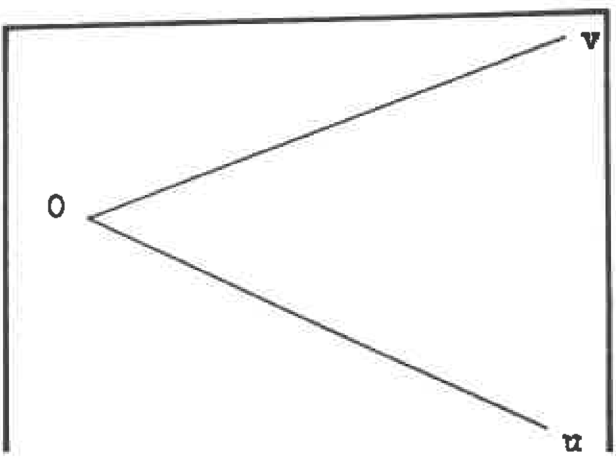
Exercice Reproduisez la figure suivante



On considère la projection orthogonale de Ov sur Ou.
Les points A et B appartiennent à Ov ,C' et D' à Ou.
- Placez les points A' et B' projetés de A et B.Calculez A'B' .
- C et D sont les points de Ov ayant C' et D' pour projetés. Calculez CD.
- Vérifiez vos calculs sur le dessin.

Exercice

Reproduisez (utilisation du compas) la figure suivante:

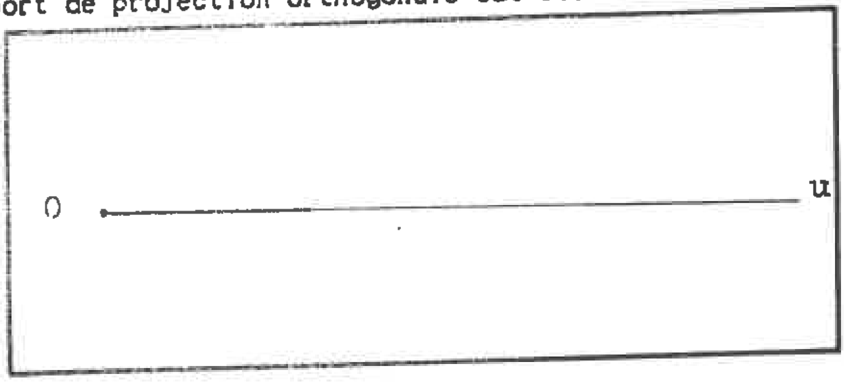


Quel est le rapport de projection orthogonale de Ov sur Ou ?

Quel est le rapport de projection orthogonale de Ou sur Ov ?

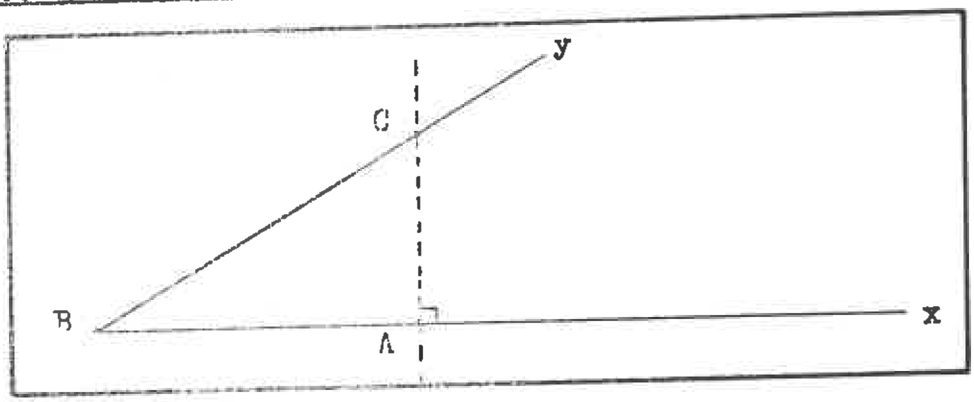
Exercice

Le rapport de projection orthogonale est 0.642788 .Tracez Ov .(2 solutions)



4/COSINUS ET TRIANGLE RECTANGLE

a/Soit la figure suivante (que vous pouvez reproduire).



- Quelle est la nature du triangle ABC ?
- A est le projeté de C dans la projection orthogonale sur Bx.
- Quel est le projeté de B ?
- Quel QUOTIENT nous donne le rapport de projection ?

Si on note $\hat{B}$ l'angle des deux demi-droites on obtient :

$\cos \hat{B}$ = ...

b/Cosinus d'un angle d'un triangle rectangle

Dessinez un triangle rectangle en A .
Remarquez que A est le projeté orthogonal de B dans la projection orthogonale de [CB) sur [CA).

$\cos \hat{C}$ =...........

Complétez : A est le projeté orthogonal de C dans ....

$\cos \hat{B}$ =............

Et pour ceux qui ont bien compris (et pour les autres aussi):

Quel est le projeté orthogonal de B sur [AC) ?
Quel est le projeté orthogonal de A sur [AC) ?
Quel est le rapport de projection orthogonale de [AB) sur [AC) ?
Quel résultat retrouvez-vous ?

c/ Exercices sur les triangles rectangles

Ex 1

Dessinez un triangle tel que AB =3 cm ,AC =4 cm ,BC =5 cm .

- Vérifiez qu'il est rectangle en A .
- Calculez Cos $\widehat{B}$.
- Déterminez l'angle $\widehat{B}$ avec la calculatrice .
- Que vaut la somme des angles d'un triangle (rectangle ou non)?
- En déduire $\widehat{C}$.
- Reprenez cette démarche en partant de Cos $\widehat{C}$.

Ex 2

Tracez un triangle rectangle en A ,

tel que Cos $\widehat{C}$ = 0.422618 et AB = 5 cm

Calculez $\widehat{B}$ .En déduire Cos $\widehat{B}$,puis BC .

Calculez AC.

REMARQUE
Nous venons de résoudre un triangle rectangle : c'est-à-dire que l'on a déterminé ses angles et ses côtés.

Ex 3

Résoudre le triangle rectangle en A ,tel que AB = 7 cm et Cos $\widehat{B}$ =0.906308

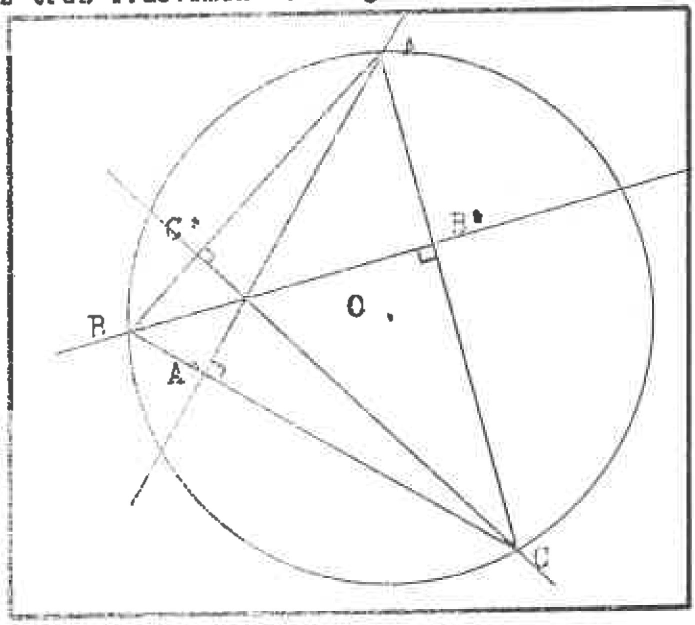
Ex 4

Dessinez soigneusement un "grand" triangle rectangle en A .

- Déterminez (après avoir mesuré) Cos $\widehat{B}$.
- Calculez $(\cos \widehat{B})^2$.
- Déterminez Cos $\widehat{C}$, puis calculez $(\cos \widehat{C})^2$.
- Avez-vous tous $(\cos \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{C})^2 = 1$ (ou presque) ?

5/ TRIANGLE . ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE

Reproduisez très fidèlement la figure suivante :



A' est le projeté de A dans la projection orthogonale sur la droite (BC).
Quel est le projeté de B ? (Pour la même projection).
Quel est le rapport de projection de (AB) sur (BC) ?

B' est le projeté de B dans la projection orthogonale sur (CA).
Quel est le projeté de C ?
Quel est le rapport de projection de (BC) sur (CA) ?

C' est le projeté de C dans la projection orthogonale sur (AB).
Quel est le projeté de A ?
Quel est le rapport de projection de (CA) sur (AB) ?

Nous constatons que les hauteurs (AA') ,(BB') et (CC') se coupent en un même point.
On l'appelle ORTHOCENTRE du triangle et on le note H .

DEFINITION
On appelle orthocentre d'un triangle ....

Remarque
On peut évidemment essayer de démontrer la constatation précédente (?)
Essayons donc.

Pour ce faire il faut connaître le résultat suivant:
Vérifiez sur la figure F1 que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ ont même mesure.

Nous dirons mathématiquement qu'ils sont inscrits dans un même cercle et qu'ils interceptent le même arc $(\overset{\frown}{AC})$, donc ils ont même mesure.

Les figures F2 et F3 représentent le même triangle ABC. Pour F2 seules les hauteurs (AA') et (CC') sont tracées, pour F3 seules les hauteurs (AA') et (BB') sont tracées.

Prenez la figure F2

- Montrez que l'angle $\widehat{ABC}$ a même mesure que $\widehat{AH_1C}$.(Tracez H_1C).
- En déduire que l'angle $\widehat{BCC'}$ a même mesure que l'angle $\widehat{A'CH_1}$.
- En déduire que H_1 est le symétrique de H dans la symétrie orthogonale d'axe (BC).
- On peut démontrer de même que H_2 est le symétrique de H dans la symétrie orthogonale d'axe (AB).(C'est inutile mais c'est un très bon exercice)

Prenez la figure F3

Appelons H' le point d'intersection de (AA') et(BB'). Il faut bien entendu arriver à montrer que H=H'.

- Montrer que H_1 est le symétrique de H' dans la symétrie orthogonale d'axe (BC).

<u>C'EST FINI : H=H'. LES TROIS HAUTEURS SONT CONCOURANTES.</u>

Exercice

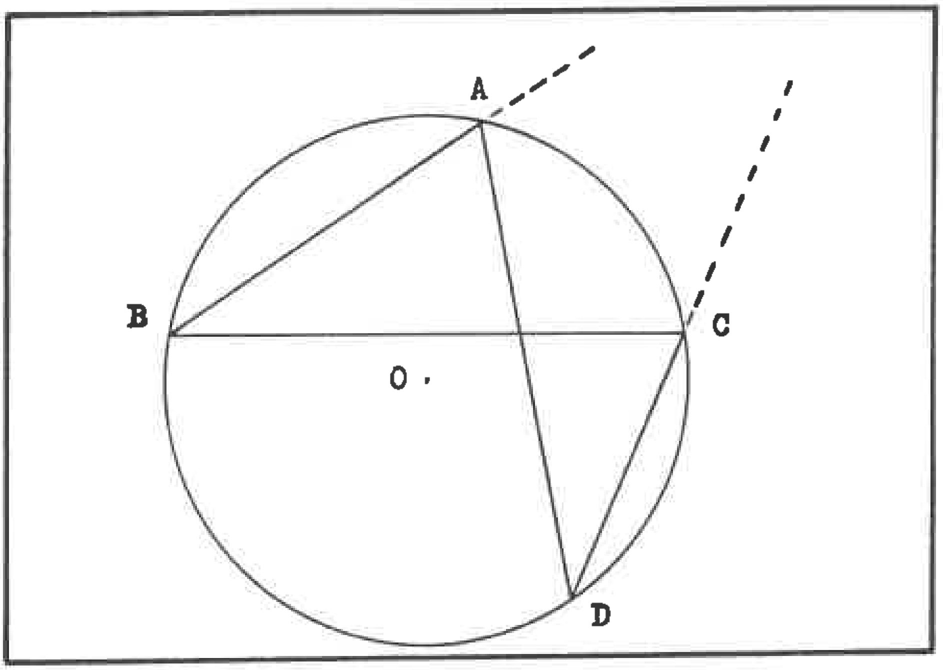
Tracez l'orthocentre d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle. (Si vous avez des remarques à formuler ne vous génez pas !)

Exercice

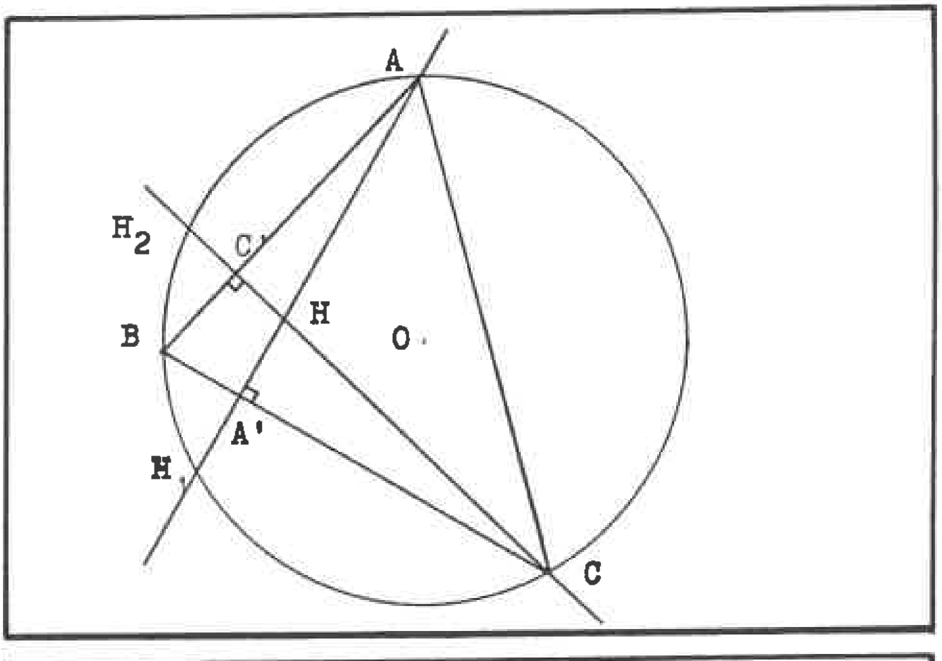
ABC est un triangle. On connait B, C et l'orthocentre H.
Déterminez la position du point A.

FEUILLE A CONSERVER PAR LES ELEVES

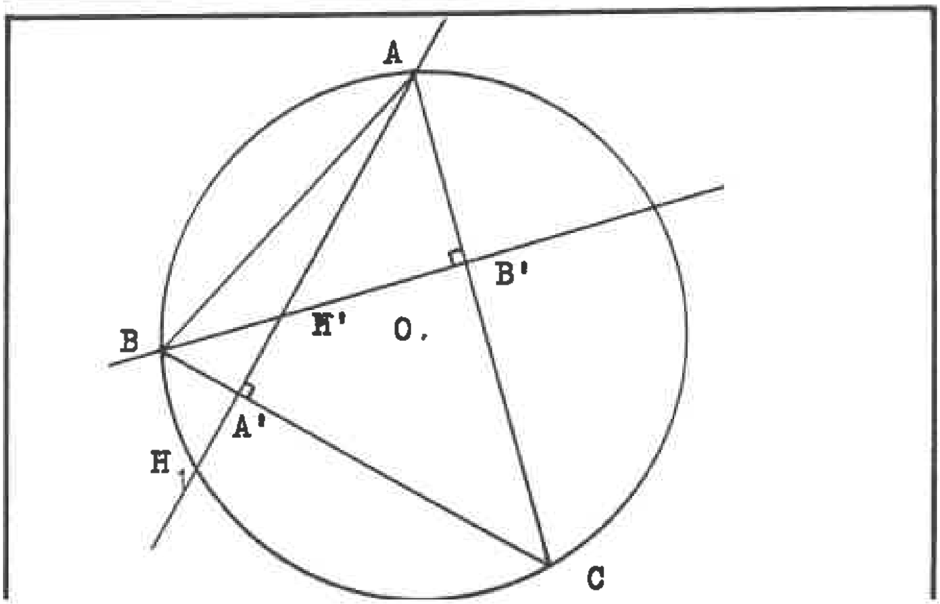
F 1



F 2



F 3



ET POUR FINIR : DES EXERCICES

Exercice 1

Utilisez la feuille de papier millimétrée 1 (PM1).

-Placez le point M du quart de cercle tel que $\widehat{MOA} = 5°$
-Soit m la projection orthogonale de M sur (OA).

a/ Mesurez Om.
b/ Calculez le rapport Om/OM .C'est à dire Cos 5°.
c/ Recommencez pour 10°, 15°, 20°,........,90°.
d/ Faites figurer vos résultats dans un tableau.
e/ Comparez ce tableau avec celui de la page 3.
f/ Placez dans le repère de la feuille PM2, les points de coordonnées (x,Cos x)
g/ On pourrait aller au delà de 90°. Continuez jusqu'à 360°. Donnez le Cosinus avec la calculatrice et placez les points dans le repère.Joignez les points successifs par une courbe régulière.(Connaissez vous cette courbe ?)

Exercice 2

Soit un triangle ABC rectangle en A et M le milieu de l'hypoténuse [BC] .
I est la projection orthogonale de M sur (AB).
J est la projection orthogonale de M sur (AC).

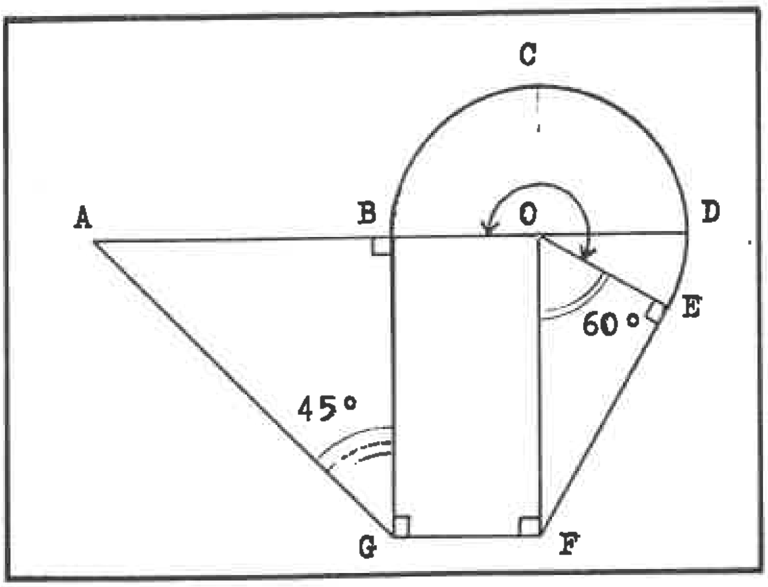
a/ Que représente la droite (MI) pour le segment [AB] .
b/ Que représente la droite (MJ) pour le segment [AC] .
c/ Quelle est la nature du quadrilatère AIMJ ?
d/ Comparez IJ à BC .

Exercice 3

Soit ABC un triangle non rectangle. M et N sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [CA] . Placez M' et N' projections orthogonales de M et N sur (AB).
Montrez que M'N' = AB/2

Exercice 4

a/Calculez la valeur en degrés de l'angle rentrant $\widehat{BOE}$.
En déduire la longueur de l'arc rentrant $\overset{\frown}{BE}$,sachant que le rayon est 2 cm.
b/Calculez OF avec Cos 60°.
c/Montrez que OF=BG=AB.
d/Calculez EF avec Cos 30°.
e/En déduire le périmètre de la figure.



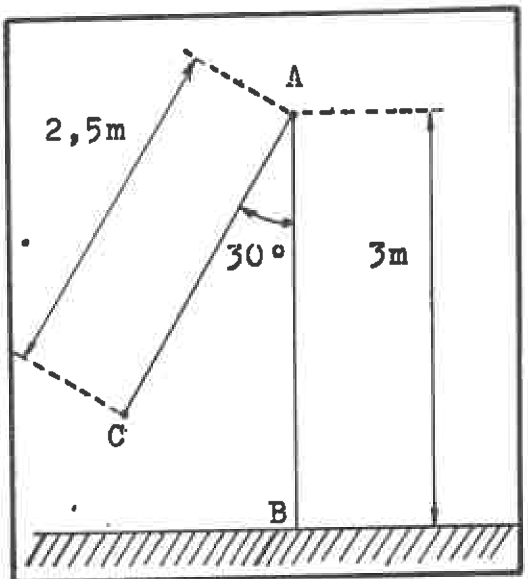
Exercice 5

Déterminer un angle sans avoir recours à la calculatrice

Exemple: Trouver a tel que COS a = 2/3
Méthode
-Tracez une demi-droite Ox
-Placez sur Ox un point A tel que OA =2
-Tracez la perpendiculaire à Ox passant par A
-Tracez un arc de cercle de rayon 3 qui coupe la perpendiculaire en B
(2 positions sont possibles pour B)
-Mesurez l'angle $\widehat{AOB}$ avec un rapporteur

Faites de même pour:

COS a = 1/2 ; 3/4 ; 4/5 ; et attention piège: 4/3.



Exercice 6

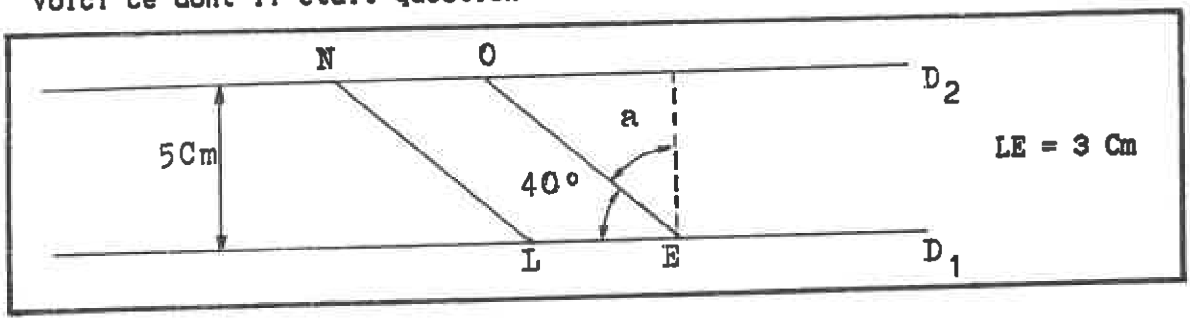
[AB] représente le mât d'un manège.
A l'arrêt le bras [AC] forme un angle de 30°
avec le mât.
-A quelle hauteur du sol se trouve C ?

Sous l'effet de rotation le bras [AC] s'écarte,
si bien que l'angle $\widehat{CAB}$ augmente.
-En faisant varier l'angle $\widehat{CAB}$ de 10° en 10°,
calculez la hauteur du point C par rapport
au sol.

Exercice 7

Vous avez effectué (?) dans le dossier 17, un exercice que nous allons reprendre (avec l' aide de la calculatrice et du Cosinus).

Voici ce dont il était question:



NOEL est un parallèlogramme tel que les points L et E restent fixes tandis que l' angle $\widehat{LEO}$ varie.

Calculons OE
- a = ...
- COS a = ... (calculatrice)
- COS a = ... (rapport)
- En déduire OE.

Complétez (Faire varier l'angle $\widehat{LEO}$ de 10° à 390°,de 10° en 10°)

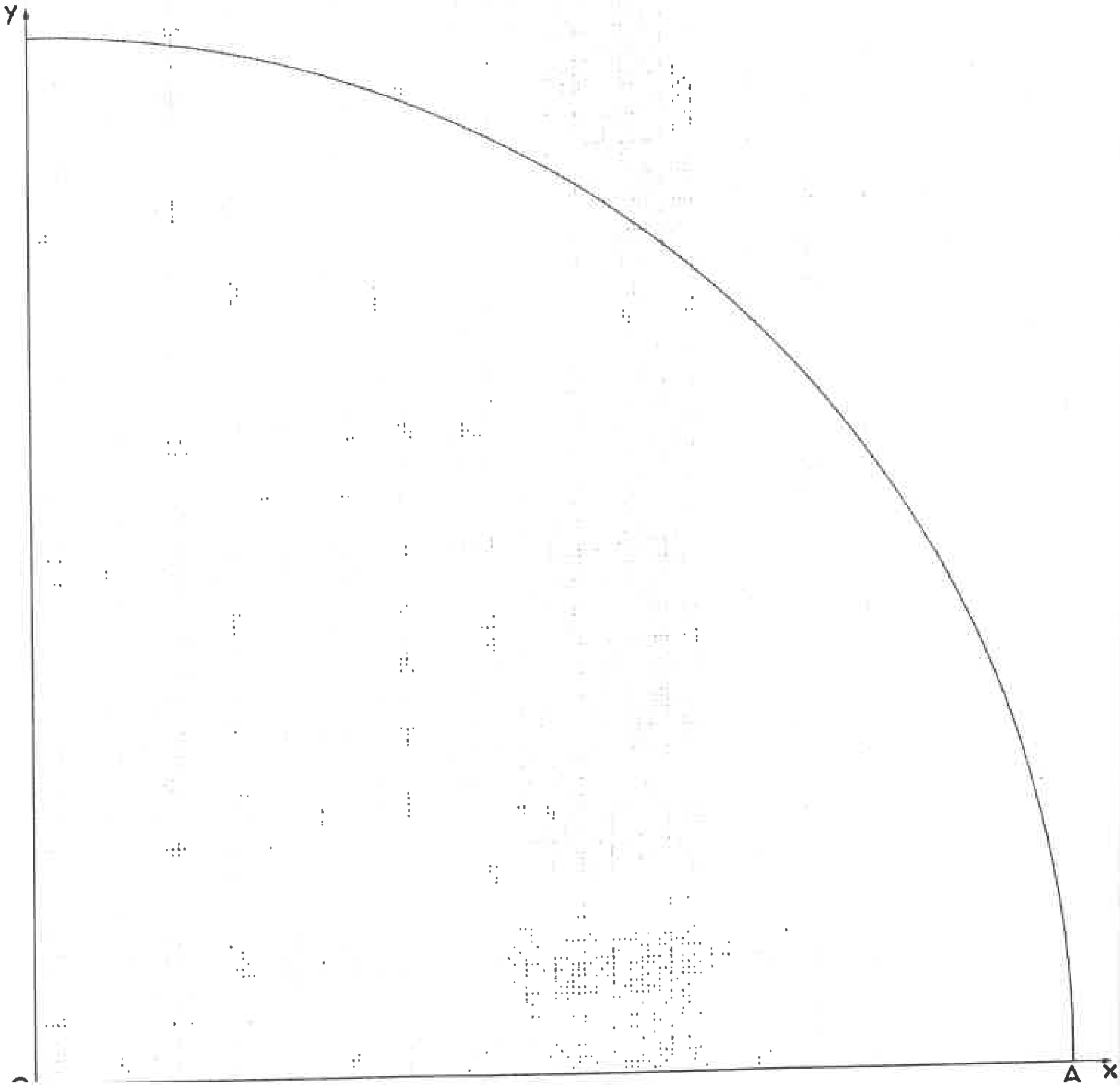
$\widehat{LOE}$	
a	
COS a	
OE	
P	

P = périmètre de NOEL

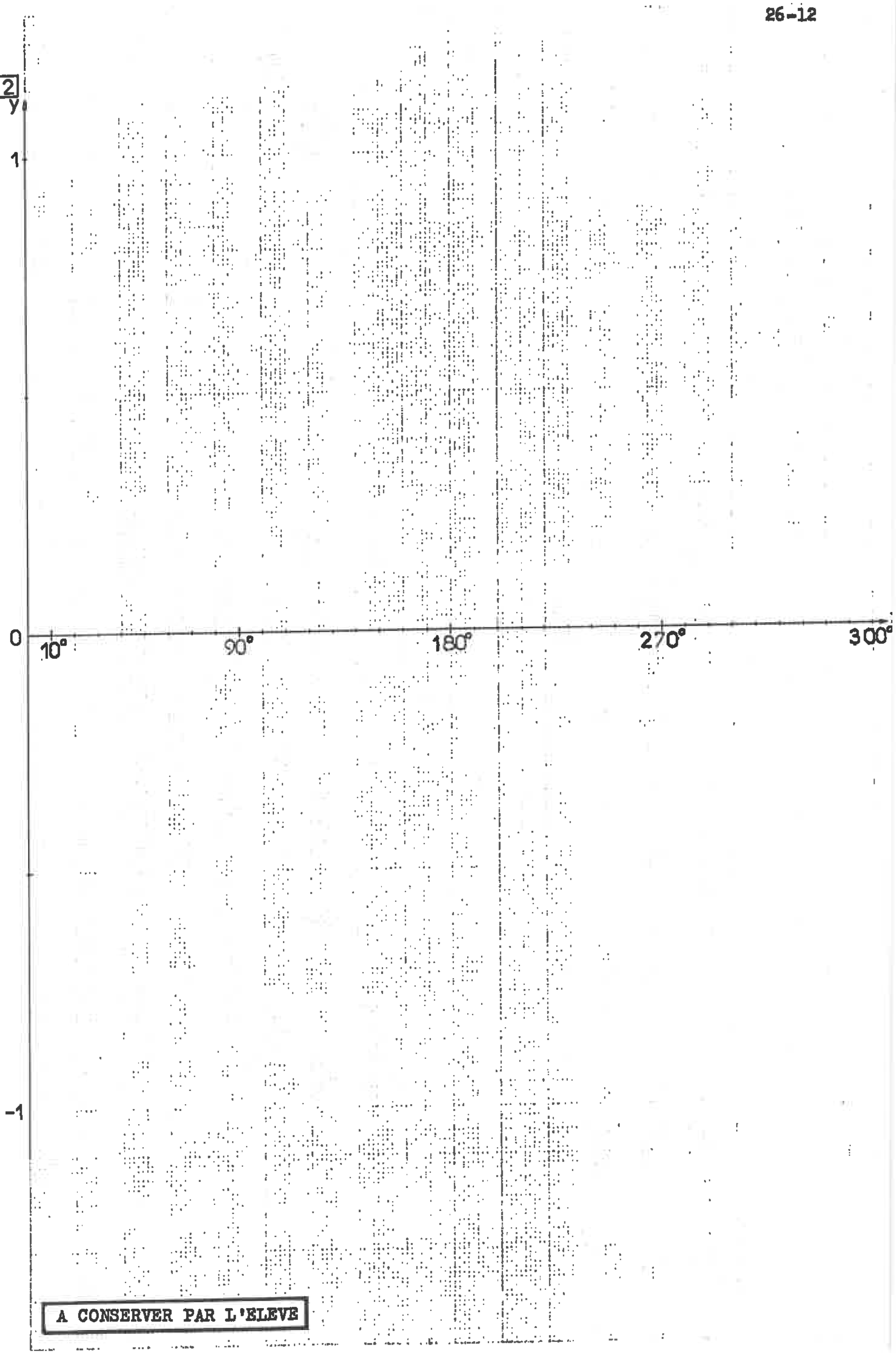
Pour quelle valeur de l'angle $\widehat{LEO}$(ou de l'angle a), le périmètre est-il minimum ?
Représentez graphiquement les variations du périmètre en fontion de l'angle $\widehat{LEO}$.

A CONSERVER PAR L'ELEVE

PM1



PM2



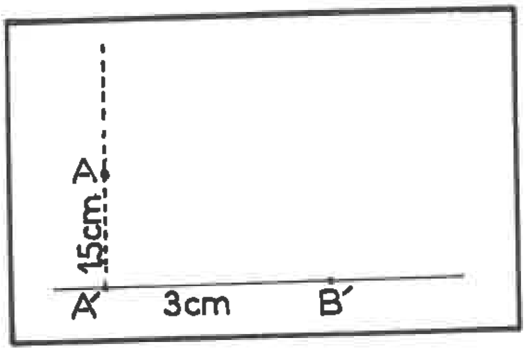
A CONSERVER PAR L'ELEVE

DOSSIER 26

CONTROLE

EXERCICE 1

Reproduisez la figure suivante:
Placez le point B, sachant que sa projection orthogonale est B' et que le rapport de projection orthogonale de la droite (AB) sur la droite D est 1/2.
(Justifiez par des calculs S.V.P.)



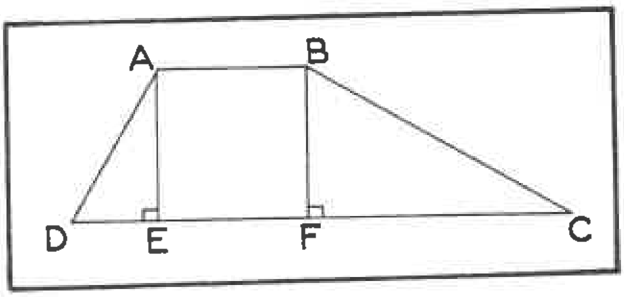
EXERCICE 2

Dessinez un triangle ABC tel que AB= 6cm ; AC= 4,5cm ; BC= 7,5cm .

- -Vérifiez qu'il est rectangle.
- -Calculez Cos $\hat{B}$ puis Cos $\hat{C}$.
- -Vérifiez la relation suivante: $(\cos \hat{B})^2 + (\cos \hat{C})^2 = 1$

EXERCICE 3

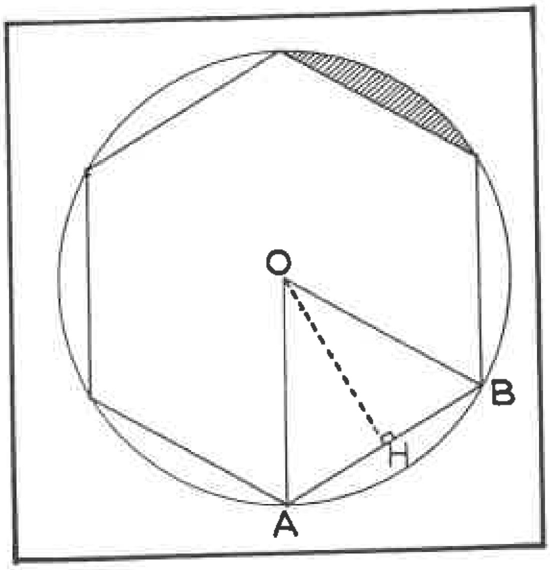
Le quadrilatère ABCD est trapèze de petite base AB=4cm, de hauteur AE=BF=4cm. Les angles $\hat{D}$ et $\hat{C}$ mesurent respectivement 60° et 30°.
(Inutile de reproduire la figure)



-Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DAE}$?
En déduire AD puis DE.
-Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CBF}$?
En déduire BC puis FC.
-Quel est le périmètre du trapèze ?

EXERCICE 4

Reproduisez l'hexagone régulier suivant.(Le cercle a pour rayon 3cm)



-Quelle est la nature du triangle OAB ?
-Quelle est la mesure $\widehat{AOH}$?
-Quelle est la mesure OH ?
-Quelle est l'aire du triangle OAB ?
-Quelle est l'aire de l'hexagone ?
-Quelle est l'aire du disque de centre O et de rayon 3cm ?
$(3,14 \times R^2)$
-Quelle est l'aire de la partie hachurée ?

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°27

TITRE : NOMBRES RELATIFS

ADDITION
SOUSTRACTION
ORDRE

4

PREREQUIS

DOSSIER 24

OBJECTIFS

- SOMME ET DIFFERENCE DE RELATIFS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE
- DEVELOPPEMENT NUMERIQUE OU LITTERAL D'EXPRESSIONS DU TYPE (A + B)(C + D)

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

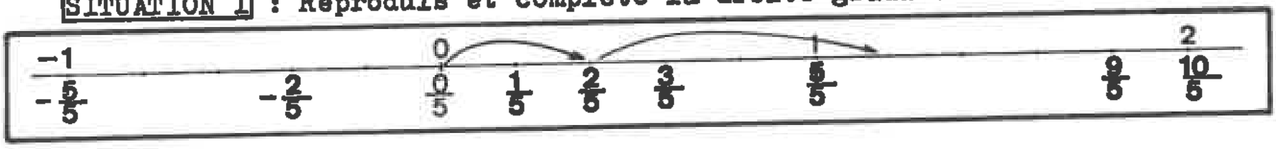
DOSSIER 27

NOMBRES RELATIFS
ADDITION
SOUSTRACTION
ORDRE

1 / ADDITION

A) LES FRACTIONS ONT LE MEME DENOMINATEUR

SITUATION 1 : Reproduis et complète la droite graduée suivante :



En reprenant le principe de l'activité A du dossier 13, Jules se trouve en 0. On donne l'ordre suivant : "avance de $\frac{2}{5}$ puis avance de $\frac{4}{5}$. Cet ordre peut être remplacé par l'ordre unique : "avance de $\frac{6}{5}$". On peut écrire :

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

Complète alors le tableau suivant :

Premier ordre	Deuxième ordre	Ordre unique	Traduction en adddition
Avance de $\frac{4}{5}$	Avance de $\frac{2}{5}$	Avance de $\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$
Avance de $\frac{6}{5}$	Recule de $\frac{2}{5}$	Avance de $\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5} + \frac{-2}{5} = \frac{4}{5}$
Recule de $\frac{7}{5}$	Avance de $\frac{3}{5}$		
Recule de $\frac{4}{5}$	Recule de $\frac{5}{5}$		
Recule de $\frac{2}{5}$	Avance de $\frac{6}{5}$		
Recule de $\frac{4}{5}$	Avance de $\frac{0}{5}$		
Avance de $\frac{3}{5}$	Recule de $\frac{7}{5}$		
Avance de $\frac{3}{5}$	Avance de $\frac{7}{5}$		
Recule de $\frac{2}{5}$	Recule de $\frac{8}{5}$		

Avec le même principe, peux-tu trouver : $\frac{4}{5} + \frac{-3}{5} + \frac{7}{5} = \dots$?

En observant tous ces calculs, tu peux énoncer une règle :

RÈGLE : La somme de 2 (ou plusieurs) fractions de même dénominateur est égale ....

EXERCICE 1 : Calcule les sommes suivantes :

a) $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{-7}{8}$ b) $\frac{-7}{11} + \frac{3}{11} + \frac{-6}{11} + \frac{1}{11}$

c) $\frac{-3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{9} + \frac{-7}{9} + \frac{4}{9}$

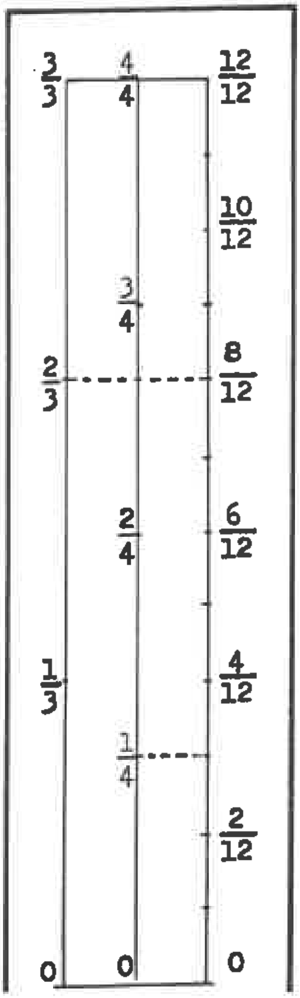
e) $\frac{-9}{7} + \frac{4}{7} + \frac{-2}{7}$ f) $\frac{7}{15} + \frac{-2}{15} + \frac{-5}{15} + \frac{3}{15}$

Remarque importante : Dans les 2 résultats e) et f), la somme que tu viens de trouver peut se simplifier. Fais-le !

Conclusion : Toujours penser à simplifier les résultats chaque fois que cela est possible.

B) LES FRACTIONS ONT DES DENOMINATEURS DIFFERENTS

SITUATION 2 : Dans une éprouvette graduée, on verse $\frac{2}{3}$ l, puis $\frac{1}{4}$ l. Jules dit : "On a $\frac{3}{7}$ l". Est-ce possible ? Pourquoi ? As-tu trouvé l'opératio (fausse !!) que Jules a faite ? Alors, comment faire la somme ?



Tu a vu, dans le § précédent, comment ajouter des fractions ayant le même dénominateur. Donc pour pouvoir faire la somme $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ il faudrait transformer les 2 fractions en fractions ayant le même dénominateur. Pour cela, sers-toi du graphique ci-contre

$\frac{2}{3} = \dots\dots$

$\frac{1}{4} = \dots\dots$

D'où $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \dots\dots + \dots\dots = \frac{11}{12}$

Conclusion : Avant de faire la somme de fractions ayant des dénominateurs différents, il faut déja réduire ces fractions au même dénominateur.

C'est ce que nous allons apprendre à faire dans le paragraphe suivant.

C) RECHERCHE DU DENOMINATEUR COMMUN ET REDUCTION AU MEME DENOMINATEUR

On a écrit dans B) : $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$ et $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$

Le dénominateur commun 12 est un multiple de 3 et de 4. C'est un multiple commun de 3 et de 4, et c'est même le plus petit. On l'appelle le **PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE** de 3 et 4. En abrégé **PPCM** . On note PPCM(3;4).

a) Méthode de détermination du PPCM de 2 nombres

. On peut le trouver de façon directe. Par exemple, dans les tables de multiplication. 30 est le PPCM de 6 et 5.

. On peut aussi prendre les multiples consécutifs du plus grand des 2 nombres et chercher parmi ces multiples ceux qui sont multiples de l'autre nombre.

<u>Exemple</u> : PPCM de 8 et 12.

On écrit les multiples de 12 : 12, 24, 36, 48, 60 ...
en cherchant (dans l'ordre) le premier qui est multiple de 8. Et ontrouve alors PPCM (8 ; 12) = ...

<u>Remarque</u> : 48 est aussi multiple de 8 et 12, mais ce n'est pas le plus petit.

EXERCICE 2 : Complète le tableau suivant:

Premier dénominateur	8	5	8	6	15	5	9	24	14	20	36
Deuxième dénominateur	12	4	9	4	20	7	12	6	4	30	9
Dénominateur commun	24										

Le même travail peut être fait pour plus de 2 nombres : par exemple 4, 6 et 8 ont pour PPCM le nombre 24.

EXERCICE 3 : Trouve le PPCM des triplets de nombres suivants :

(5 ; 4 ; 6) (18 ; 2 ; 9) (10 ; 4 ; 25) (6 ; 18 ; 12) (9 ; 3 ; 27

b) Réduction au même dénominateur

Cherchons à réduire $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ au même dénominateur.

Le PPCM de 8 et 12 est 24. On peut écrire :

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24} \quad \text{et} \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}$$

EXERCICE 4 : Réduire au même dénominateur :

$\frac{-2}{5}$ et $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{6}$ et $\frac{-8}{9}$; $\frac{3}{5}$ $\frac{-2}{4}$ et $\frac{-7}{20}$; $\frac{-5}{18}$ $\frac{7}{2}$ et $\frac{-4}{9}$

D) EXERCICES

EXERCICE 5 : Calculer :

$$\frac{-1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{-5}{15} + \frac{12}{15} = \frac{7}{15}$$

a) $\frac{1}{6} + \frac{-2}{5}$ $\qquad$ $\frac{-3}{8} + \frac{-5}{9}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{-7}{30}$ $\qquad$ $\frac{-11}{24} + \frac{7}{6}$

c) $\frac{9}{20} + \frac{-7}{30}$ $\qquad$ $\frac{-5}{36} + \frac{-4}{9}$

d) $\frac{5}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{7}{6}$ $\qquad$ $\frac{-7}{2} + \frac{-5}{18} + \frac{4}{9}$

E) CAS PARTICULIERS ET REMARQUES

a) $\frac{12}{15} + \frac{30}{20}$ peut se calculer en réduisant au même dénominateur qui est 60.

Fais-le.

Les fractions de départ ne sont pas irréductibles.

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ et $\frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ D'où $\frac{12}{15} + \frac{30}{20} = \frac{4}{5} + \frac{3}{2} = \frac{8}{10} + \frac{15}{10} = \frac{23}{10}$

C'est quand même plus simple !

Conclusion : Dans une somme de fractions, avant de réduire au même dénominateur, il faut simplifier les fractions.

EXERCICE 6 : Calculer :

a) $\frac{60}{16} + \frac{-27}{18}$ $\qquad$ $\frac{-30}{28} + \frac{-15}{20}$

b) $\frac{20}{15} + \frac{14}{12}$ $\qquad$ $\frac{3}{6} + \frac{-4}{10} + \frac{15}{18}$

c) $\frac{-3}{4} + \frac{9}{24} + \frac{-16}{20}$ $\qquad$ $\frac{-20}{32} + \frac{-7}{12} + \frac{25}{100}$

b) Cas d'une fraction et d'un nombre entier

Exemple : $\frac{12}{5} + 2 = \frac{12}{5} + \frac{2}{1} = \frac{12}{5} + \frac{10}{5} = \frac{22}{5}$

EXERCICE 7 : Calculer :

a) $\frac{-25}{3} + 7$ $\qquad$ $\frac{11}{4} + (-4)$ $\qquad$ $\frac{-13}{4} + \frac{25}{15} + 2$

b) $9 + \frac{-14}{20}$ $\qquad$ $6 + \frac{75}{10}$ $\qquad$ $\frac{15}{12} + 3 + \frac{-128}{12}$

2 / SOUSTRACTION

A) DEFINITION

En cinquième, pour expliquer 3 - 8, on avait dit : $3 - 8 = 3 + \text{opp}(8)$

$= 3 + (-8)$

Une soustraction se ramenait à une addition.

Cette définition est encore valable pour les relatifs en écriture fractionnaire :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \text{opp}\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

(Rappel Dossier 25 : $-\frac{c}{d} = \frac{-c}{d} = \frac{c}{-d}$)

Faire une soustraction revient donc à faire une addition. Tu vas donc pouvoir réutiliser tout ce que tu as appris dans le premier paragraphe.

Exemple de calcul :

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{6} = \frac{3}{4} + \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{9}{12} + \frac{-14}{12} = \frac{-5}{12} = -\frac{5}{12}$$

Mais on peut calculer plus vite :

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{6} = \frac{9}{12} - \frac{14}{12} = \frac{9 - 14}{12} = \frac{-5}{12} = -\frac{5}{12}$$

De même :

$$\frac{-3}{8} - \frac{-5}{6} = \frac{-9}{24} - \frac{-20}{24} = \frac{-9}{24} + \frac{20}{24} = \frac{11}{24}$$

B) EXERCICES SUR LA SOUSTRACTION

Pense à simplifier éventuellement les fractions données et le résultat que tu trouveras.

EXERCICE 8 : Calculer :

a) $\frac{17}{12} - \frac{6}{12}$ $\qquad$ $\frac{-8}{5} - \frac{7}{5}$ $\qquad$ $\frac{7}{20} - \frac{12}{20}$

b) $\frac{11}{5} - \frac{3}{20}$ $\qquad$ $\frac{-5}{6} - \frac{3}{6}$ $\qquad$ $\frac{-3}{16} - \frac{9}{16}$

c) $\frac{12}{5} - \frac{3}{20}$ $\qquad$ $\frac{3}{8} - \frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{11}{4} - \frac{-5}{12}$

d) $\frac{-10}{18} - \frac{5}{15}$ $\qquad$ $\frac{5}{12} - \frac{-6}{4}$ $\qquad$ $\frac{-15}{10} - \frac{-3}{4}$

e) $5 - \frac{3}{8}$ $\qquad$ $-6 - \frac{4}{15}$ $\qquad$ $\frac{-4}{5} - 3$

C) SOMME ALGEBRIQUE

Une SOMME ALGEBRIQUE est une suite d'additions et de soustractions.

Exemple : $\frac{-3}{5} - 1 + \frac{6}{8} = \frac{-3}{5} - 1 + \frac{3}{4} = \frac{-12}{20} - \frac{20}{20} + \frac{15}{20} = \frac{-17}{20} = -\frac{17}{20}$

EXERCICE 9 : Calculer :

a) $\frac{17}{3} + \frac{2}{18} - \frac{1}{9}$ $\qquad$ $\frac{-4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{-8}{6} - 2$

b) $\frac{18}{6} - \frac{1}{4} + \frac{5}{28}$ $\qquad$ $3 - \frac{1}{2} + \frac{-4}{12} - 2 - \frac{15}{18}$

EXERCICE 10 : Calcule la valeur de $A = a - b + c - d$ pour :

a) $a = \frac{2}{3}$ $\quad$ $b = -2$ $\quad$ $c = \frac{1}{4}$ $\quad$ $d = \frac{5}{12}$

b) $a = -5$ $\quad$ $b = \frac{2}{5}$ $\quad$ $c = \frac{14}{10}$ $\quad$ $d = -\frac{3}{4}$

EXERCICE 11 : Calcule la valeur de $B = \frac{2a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{c}{6}$ pour :

a) $a = -6$ $\quad$ $b = 3$ $\quad$ $c = -1$

b) $a = 4$ $\quad$ $b = -6$ $\quad$ $c = -5$

EXERCICE 12 : Observe : $\frac{2a}{3} - \frac{5a}{6} + \frac{a}{2} = \frac{4a}{6} - \frac{5a}{6} + \frac{3a}{6} = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$

Calcule de même :

a) $\frac{5x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4}$ $\qquad$ $\frac{4a}{5} + \frac{3a}{10} - \frac{7a}{20}$

b) $\frac{4t}{6} - 2t + \frac{-5t}{2}$ $\qquad$ $\frac{3a}{4} - a + \frac{7a}{2} - 9a - \frac{11a}{6}$

3 / O R D R E S U R L E S R E L A T I F S

A) REVISION

EXERCICE 13 : Classe les nombres suivants et rappelle chaque fois la règle que tu utilise

et que tu as vue en cinquième :

a) -3 ; 2 ; $-1,5$; -2 ; $0,1$; $-0,5$; $-0,75$; $1,2$; -1 ; $-0,8$

b) $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{11}$

c) $\frac{7}{15}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{1}{15}$

B) COMPARAISON DE DEUX RELATIFS

On se propose, ici, de comparer les relatifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$.

- Façon 1 : On cherche la valeur décimale, exacte ou approchée, des fractions : $\frac{2}{3} = \ldots$ $\frac{3}{5} = \ldots$ D'où ...

- Façon 2 : On réduit les deux fractions au même dénominateur et on compare les numérateurs. Fais le !

- Façon 3 : On a trouvé $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. Que peut-on dire de $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$?

  On sait que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Que peut-on dire de $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$?

  Ce qu'on a vérifié sur cet exemple est général.

  Enonce alors une règle.

- Façon 4 : C'est une application à la calculatrice de la troisième façon. On calcule la valeur de la première fraction qu'on rentre en $\boxed{M+}$. On calcule ensuite la valeur de la deuxième fraction qu'on rentre en $\boxed{M-}$. Puis on frappe sur la touche $\boxed{MR}$.

  Voici la séquence pour $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$: 2 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{M+}$ 3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{M-}$ $\boxed{MR}$

  Quel est l'élément affiché qui nous interesse ?

  Fais de même pour $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

EXERCICE 14 : Compare les nombres suivants en utilisant la méthode de ton choix. Si tu es consciencieux tu les essaieras toutes pour les comparer.

a) $\frac{3}{16}$ et $\frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{13}{18}$ et $\frac{5}{7}$

b) $\frac{-4}{9}$ et $\frac{-7}{15}$ $\qquad$ $-\frac{9}{20}$ et $\frac{-7}{15}$

c) -2 et $-\frac{15}{7}$ $\qquad$ $-\frac{4}{12}$ et $-\frac{5}{15}$

C) REMARQUE ET CAS PARTICULIERS

a) Quand on a un relatif positif et un relatif négatif, la comparaison est rapide et facile. Compare, par exemple, $-\frac{7}{9}$ et $\frac{4}{13}$.

b) Compare maintenant $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{4}$. En cherchant les parties entières, on a :

$$\frac{7}{12} = 0 + \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

d'où : $\frac{7}{12} < 1$ et $\frac{5}{4} > 1$. Donc $\frac{7}{12} < \frac{5}{4}$

Compare de même $\frac{10}{3}$ et $\frac{12}{5}$; $\frac{34}{15}$ et $\frac{37}{20}$; $-\frac{7}{4}$ et $-\frac{11}{5}$.

EXERCICE 15 : Range dans l'ordre croissant :

a) $-\frac{4}{15}$; $-\frac{9}{4}$; $\frac{3}{4}$; -2 ; $\frac{7}{5}$; $-\frac{7}{4}$; $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{5}{2}$; $-\frac{2}{5}$; $-0,4$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$; -1

4 / REGLE DE PRIORITE DANS LES CALCULS

Les règles vues dans les classes antérieures sont encore valables avec les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire.

Rappel : a) On fait les calculs dans les parenthèses et les crochets, en commençant par les parenthèses les plus internes.

b) En l'absence de parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions.

c) On effectue ensuite les additions et les soustractions.

Exemple : $5 - \left(4 + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{6}{5} - 1 = 5 - \left(\frac{48}{12} + \frac{9}{12} - \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{6}{5} - 1$

$$= 5 - \frac{56}{12} \cdot \frac{6}{5} - 1$$

$$= \frac{25}{5} - \frac{28}{5} - \frac{5}{5}$$

$$= -\frac{8}{5}$$

EXERCICE 16 : Calcule :

a) $4 - 3 \cdot \frac{1}{2}\left(-5 - \frac{2}{3}\right)$ $\qquad \left(\frac{3}{5} - 3 \cdot 2\right)\left(2 \cdot 4 - \frac{1}{2}\right)$

b) $\left(\frac{9}{4} + \frac{5}{4} + \frac{8}{3}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{7}{4}$ $\qquad \frac{3}{8} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} - 1\right)\frac{5}{2} + \frac{3}{2}$

$\boxed{\text{EXERCICE 17}}$: Calcule la valeur numérique de $A = 2(a - c) + ab - b$ pour

a) $a = -2$ $b = 5$ $c = -3$

b) $a = 6$ $b = -\frac{1}{3}$ $c = -1$

$\boxed{\text{EXERCICE 18}}$: Calcule la valeur numérique de $B = b - a(a - \frac{a}{b}) + a$ pour

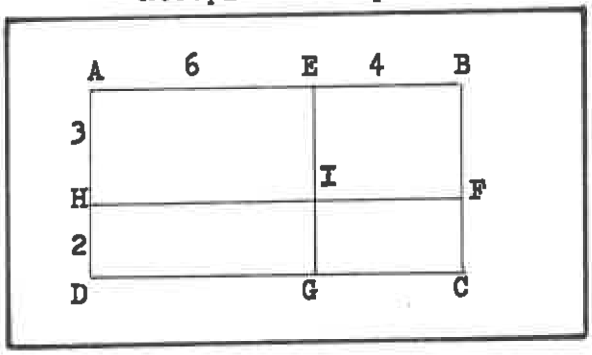
a) $a = -5$ $b = -8$

b) $a = \frac{1}{2}$ $b = -3$

5 / PRODUIT DE SOMMES ALGEBRIQUES

A) SITUATION 3

Recopie et complète :



Aire AEIH = 6 x 3

Aire EBFI = ...

Aire ABFH = (6 + 4) x 3

= (6 x 3) + (4 x 3)

Tu reconnais la distributivité déja vue.

De même, détermine : Aire HIGD = 6 x 2

Aire IFCG = ...

Aire HFCD = ...

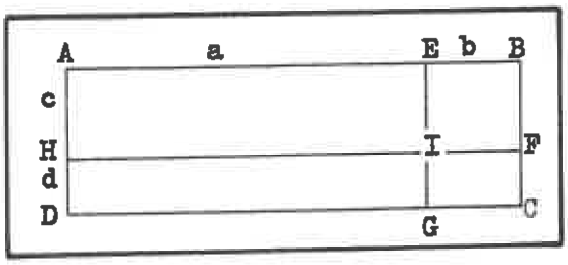
Aire ABCD = (6 + 4)(3 + 2) = ...

Conclusion : (6 + 4)(3 + 2) = 6 x 3 + 4 x 3 + 6 x 2 + 4 x 2

Dans le deuxième membre, il n'y a pas de parenthèses ; mais on conserve les règles de priorité.

B) SITUATION 4

Tu généralises. Recommence l'étude faite dans la situation précédente.



Aire AEIH = ...

Aire EBFI = ...

Tu dois arriver à Aire ABCD = (a + b)(c + d) = ...

$\boxed{\text{Conclusion}}$: Produit de sommes algébriques

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Par cette formule, tu viens de transformer un produit de 2 sommes en une somme de 4 produits.

En utilisant des dessins (analogues à ceux de la situation 4) que tu dois trouver, tu peux aussi écrire les égalités suivantes :

$(a - b)(c + d) = \ldots\ldots\ldots$

$(a + b)(c - d) = \ldots\ldots\ldots$

$(a - b)(c - d) = \ldots\ldots\ldots$

Tu as bien remarqué la règle des signes.

Remarque : On a écrit $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

peut-on écrire $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$?

Tu procèderas donc en respectant l'une ou l'autre de ces deux écriture

EXERCICE 19 : Calcule en utilisant la distributivité. Tu peux vérifier seul ton exercice en formant directement le produit.

a) $(5 + 3)(8 + 1)$ b) $(12 - 4)(9 + 5)$

c) $(7 + 3)(4 - 1)$ d) $(4 - 8)(11 - 3)$

e) $(2 + \frac{3}{4})(4 - \frac{1}{2})$ f) $(5 - \frac{1}{3})(2 - \frac{1}{2})$

g) $(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})(3 + \frac{1}{2})$ h) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$

EXERCICE 20 : Effectue les calculs suivants :

a) $(x + y)(c + a)$ b) $(2 + a)(c + a)$

c) $(\frac{3}{4} + x)(1 - y)$ d) $(2x + 1)(b - 2c)$

e) $(3a - b)(b - 2c)$ f) $(a - 2b)(b + 2a)$

g) $(\frac{3a}{4} - 1)(b - \frac{1}{3})$ h) $(\frac{2x}{3} + \frac{1}{4})(\frac{y}{4} - 3)$

Dans les exercices précédents, dans les sommes algébriques, il n'y avait que 2 termes. On peut généraliser à 3, 4 ou plus de termes encore. Ainsi

$$(a - b)(c + d - e) = ac + ad - ae - bc - bd + be$$

Nous avons ici $2 \times 3 = 6$ termes.

EXERCICE 21 : Calcule en utilisant la distributivité :

a) $(12 - 4)(7 - 8 + 2)$ b) $(4 - 9)(4 + 3 - 10)$

c) $(\frac{3}{4} - 1)(8 - 2 + 12)$ d) $(-8 + 4 + 9)(7 - 11)$

e) $(x - 1)(-y + z - 2)$

f) $(5 - 2a)(b - 3a + 4c)$

g) $(-4 + 2b - 3x)(-a - 5b)$

g) $(\frac{x}{2} - 2)(9a - 6y + \frac{x}{4})$

C) EFFECTUER ET REDUIRE

$(a + b)(c + d) + (a - b)(c - d)$ (1)

$= ac + ad + bc + bd + ac - ad - bc + bd$ (2)

Tu vois qu'on peut réduire des termes semblables (même groupement de lettres). Fais-le. Tu dois trouver $2ac + 2bd$.

EXERCICE 22 : Effectue et réduis (si nécessaire) les calculs suivants :

a) $(2a + 3)(b - 2) + (2b - 1)(a - 3)$

b) $(x - 4)(2y - 1) + (4y + 3)(2x - 4)$

c) $4x(y - 2) - 3y(2x + 5) + (x - 1)(-2y + 4)$

d) $(4a + 5)(2b - 3) - (2a + 1)(b - 4)$

(Attention : pense bien à la priorité des opérations)

e) $\frac{5}{2}(6a - 4b) + (a - 2)(b - 1) - (2a - 4)(b - \frac{5}{2})$

D) IDENTITES REMARQUABLES

On les appelle aussi PRODUITS REMARQUABLES.

Effectue les 3 calculs suivants et reduis-les :

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \ldots\ldots\ldots$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = \ldots\ldots\ldots$

$(a - b)(a + b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les résultats que tu as obtenus sont vrais quelles que soient les valeurs que tu donnes à a et b. Nous te conseillons de les retenir par coeur car tu auras souvent l'occasion de t'en servir.

Avant de faire l'exercice suivant, examine attentivement l'exemple suivant :

a) $(4x - 3)^2 = (4x - 3)(4x - 3) = 16x^2 - 12x - 12x + 9 = 16x^2 + 24x + 9$

b) $(4x - 3)^2 = (4x)^2 - 2.4x.3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$

Dans le a) on a utilisé la distributivité. Dans le b) on a appliqué directement les identités remarquables.

$\boxed{\text{EXERCICE 23}}$: En t'inspirant de l'exemple ci-dessus, effectue les calculs suivants :

a) $(b - 3)^2$ b) $(5 + 3a)^2$ c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

d) $(3a + 2b)^2$ e) $(x - 3a)^2$ f) $(4x - 6)(4x + 6)$

E) $\boxed{\text{FACTORISER}}$

Tu as déja appris à factoriser dans le dossier 25. Tu vas maintenant compléter ton apprentissage.

Dans le dossier 25, on te disait ce qu'il fallait mettre en facteur :

Mettre 3 en facteur dans $3a - 15$......... $3a - 15 = 3(a - 5)$

Mettre 7 en facteur dans $35a - 7b + 42c$ ...$35a - 7b + 42c =$.........

A partir de maintenant tu vas trouver tout seul le facteur commun.

$\boxed{\text{EXERCICE 24}}$: Factorise :

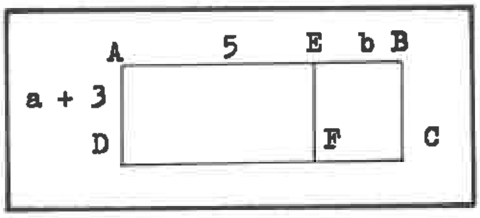
a) $48 + 8a$; $6a - 3b + 12c$; $3a - 2ab$; $4a^2 - 4a$

b) $12x - 4xt + 8xy$; $3a + ab + 6ac$; $5xy + x$

c) $5ax - 3axy + 2abx$; $20ab - 4ac - 16ax + 4a$

d) $49xy - 56xz + 14xt$; $36ab + 24ac - 12bc$

D'autres factorisations :



Aire AEFD $= 5(a + 3)$

Aire EBCF $= b(a + 3)$

Aire ABCD $= (a + 3)(5 + b)$

D'où : $5(a + 3) + b(a + 3) = (a + 3)(5 + b)$

Le facteur commun est $a + 3$.

Si on avait $5(a + 3) - b(a + 3)$, que trouverais-tu ?

$\boxed{\text{EXERCICE 25}}$: Factorise de même :

a) $b(3a - 4) + 4(3a - 4)$ b) $a(2a - 1) - 5(2a - 1)$

c) $8(3a + 5) - 5b(3a + 5)$ d) $(x + a)x - (x + a)y$

e) $5(x + 1) - 3a(x + 1)$ f) $(a + 1)(2b + 3) + (a + 1)(-4b + 2)$

g) $(x - 5)(b + 3) - (x - 5)(2b - 6)$

h) $(2x - 5)(2x + 5) - x(2x - 5)$

i) $(2x - 1)(-2x + 5) - (2x - 1)(6 - 4x)$

Jusqu'à maintenant, dans toutes ces séries d'exercices, le facteur commun était évident. Mais en général, ce n'est pas toujours le cas.

<u>Exemple</u> : Factorisons $a(a + 3) + 2a + 6$. Tel quel cet exercice ne présente pas de facteur commun. Mais $2a + 6 = 2(a + 3)$.

D'où : $a(a + 3) + 2a + 6 = a(a + 3) + (2a + 6)$

$= a(a + 3) + 2(a + 3)$

$= (a + 3)(a + 2)$

EXERCICE 26 : Factorise de même :

a) $3(2x - 1) + 4x - 2$; $3a - 6b - 4(a - 2b)$

b) $3a(2a - 3b) + 6a - 9b$; $4x - 12y + 5(x - 3y)$

c) $5x(3x - 2y) + 3ax - 2ay$; $3a(2b - 1) - 4b + 2$ (attention !)

5 / ET MAINTENANT . . . DES EXERCICES

Pour maitriser ce dossier, comprendre et assimiler les techniques vues, il faut faire d'autres exercices. C'est donc parti !

EXERCICE 27 : Calcule :

a) $\frac{-4}{7} + \frac{8}{7} + \frac{1}{7}$ $\quad\frac{5}{12} + \frac{-3}{12} + \frac{-5}{12}$ $\quad\frac{-2}{16} + \frac{-5}{16} + \frac{1}{16} + \frac{7}{16}$

b) $\frac{4}{15} + \frac{-7}{15} + \frac{-9}{15} + \frac{-3}{15}$ $\quad\frac{-5}{16} + \frac{7}{16} + \frac{-6}{16}$ $\quad\frac{-4}{9} + \frac{-7}{9} + \frac{-1}{9}$

EXERCICE 28 : Réduire au même dénominateur les fractions suivantes. Faire ensuite la somme des 2 fractions, puis leur différence.

a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{-2}{9}$ $\quad\frac{-3}{5}$ et $\frac{7}{9}$ $\quad\frac{5}{7}$ et $\frac{-3}{4}$ $\quad\frac{-9}{4}$ et $\frac{-2}{5}$ $\quad\frac{-7}{39}$ et $\frac{5}{13}$

b) $\frac{-3}{5}$ et $\frac{7}{9}$ $\quad\frac{-3}{15}$ et $\frac{-4}{75}$ $\quad\frac{2}{-5}$ et $\frac{-1}{6}$ $\quad\frac{5}{9}$ et $\frac{-2}{27}$

c) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{30}{65}$ $\quad\frac{72}{20}$ et $\frac{10}{28}$ $\quad\frac{-25}{45}$ et $\frac{96}{-40}$ $\quad\frac{9}{25}$ et $\frac{-11}{12}$ $\quad\frac{-8}{45}$ et $\frac{-23}{15}$

EXERCICE 29 : Calculer $a + b$ pour :

a) $a = -\frac{3}{2}$ $\quad b = \frac{12}{9}$ $\qquad$ b) $a = -\frac{26}{24}$ $\quad b = -\frac{14}{42}$

c) $a = \frac{3}{4}$ $\quad b = \frac{12}{9}$ $\qquad$ d) $a = \frac{36}{42}$ $\quad b = \frac{-27}{36}$

Calculer $a - b$ pour les nombres ci-dessus.

EXERCICE 30 : Calculer :

a) $-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{-1}{6}$ $\qquad \frac{-3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{-7}{2}$ $\qquad \frac{10}{12}+\frac{-9}{15}+\frac{3}{10}$

b) $\frac{-5}{4}+\frac{11}{2}+\frac{-5}{6}$ $\qquad \frac{5}{10}+\frac{-2}{15}+\frac{4}{12}$ $\qquad \frac{-16}{20}+\frac{75}{50}+\frac{-27}{90}$

c) $\frac{7}{12}+\frac{-4}{16}+\frac{10}{-24}$ $\qquad \frac{45}{8}+\frac{-70}{21}+\frac{-4}{5}$ $\qquad \frac{222}{333}+\frac{-1111}{5555}$

EXERCICE 31 : Calculer

a) $-2+\frac{-6}{5}$ $\qquad \frac{-5}{2}+8$ $\qquad -4+\frac{-5}{2}$ $\qquad \frac{-1}{-3}+(-4)$

b) $\frac{-9}{12}+\frac{7}{4}+3$ $\qquad \frac{-4}{5}+3+\frac{-6}{11}$ $\qquad -2+\frac{4}{7}+\frac{-8}{5}$ $\qquad \frac{-3}{8}+1+\frac{15}{18}$

EXERCICE 32 : Trouver l'entier naturel a tel que :

a) $\frac{5}{2}+\frac{7}{4}=\frac{a}{4}$ $\qquad$ b) $\frac{8}{9}+\frac{1}{12}=\frac{a}{36}$

EXERCICE 33 : Ecrire les nombres suivants comme somme de leur partie entière et d'une fraction.

$\frac{15}{8}$ $\qquad \frac{13}{2}$ $\qquad \frac{11}{4}$ $\qquad \frac{30}{25}$ $\qquad \frac{50}{42}$ $\qquad \frac{48}{12}$

EXERCICE 34 : Calculer :

a) $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}$ $\qquad \frac{-2}{9}-\frac{14}{16}$ $\qquad \frac{2}{3}-\frac{5}{4}$ $\qquad \frac{3}{5}-\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{15}{21}-\frac{3}{7}$

b) $\frac{16}{15}-2$ $\qquad \frac{8}{9}-\frac{9}{8}$ $\qquad \frac{8}{7}-\frac{7}{8}$ $\qquad \frac{-3}{8}-(-\frac{5}{7})$ $\qquad \frac{18}{30}-\frac{3}{20}$

c) $\frac{-2}{7}-\frac{3}{36}$ $\qquad -\frac{5}{4}-(-\frac{18}{12})$ $\qquad \frac{11}{66}-\frac{-14}{24}$ $\qquad \frac{-16}{20}-\frac{12}{18}$

d) $-4-\frac{3}{5}$ $\qquad \frac{8}{12}-3$ $\qquad 9-\frac{1}{9}$ $\qquad \frac{1}{10}-10$

EXERCICE 35 : Calculer :

a) $\frac{8}{9}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ $\qquad \frac{6}{5}-\frac{3}{4}-\frac{9}{10}$ $\qquad \frac{-16}{20}-\frac{75}{50}-\frac{-27}{90}$ $\qquad \frac{5}{6}-2-\frac{1}{4}$

b) $\frac{7}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$ $\qquad -\frac{9}{6}+3-\frac{8}{3}$ $\qquad \frac{5}{6}-3-\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{1}{2}-1+\frac{1}{9}$

EXERCICE 36 : Simplifier l'écriture de :

a) $\frac{a}{3}+\frac{5a}{2}-\frac{3a}{4}$ $\qquad \frac{b}{5}-\frac{2b}{3}+\frac{b}{2}$ $\qquad \frac{-3c}{4}+c-\frac{c}{3}$

b) $b-\frac{2b}{3}+\frac{3b}{5}$ $\qquad \frac{7a}{2}-\frac{5a}{12}+\frac{2a}{3}$ $\qquad \frac{4c}{5}-5c+\frac{c}{15}-\frac{c}{3}$

EXERCICE 37 : Pour faire l'expérience des liquides qui ne se mélangent pas, on verse dans une éprouvette : $\frac{1}{4}$ de glycérine, $\frac{1}{3}$ d'eau, $\frac{2}{5}$ d'huile de paraffine. Quelle quantité d'alcool doit-on verser pour remplir l'éprouvette ?

EXERCICE 38 : Dans une classe, les $\frac{2}{3}$ des élèves ont plus de la moyenne à leur devoir de maths et $\frac{1}{4}$ des élèves ont une note supérieure à 15.

a) Quelle fraction des élèves ont une note entre 10 et 15 ?

b) Quelle fraction des élèves ont une note entre 0 et 9 ?

EXERCICE 39 : Comparer :

a) $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ $\qquad \frac{-7}{8}$ et $\frac{-8}{9}$ $\qquad \frac{7}{6}$ et $\frac{4}{5}$ $\qquad \frac{-7}{6}$ et $\frac{-4}{5}$ $\qquad \frac{11}{2}$ et $\frac{7}{3}$

b) $\frac{-9}{8}$ et $\frac{-11}{10}$ $\qquad \frac{5}{4}$ et $\frac{21}{16}$ $\qquad -\frac{7}{9}$ et $-\frac{5}{6}$ $\qquad -\frac{7}{8}$ et $-\frac{9}{4}$

EXERCICE 40 : On donne $a = \frac{2}{5}$ et $b = \frac{3}{4}$.

a) Compare a et b.

b) Compare les opposés de a et b.

c) Compare les inverses de a et b

EXERCICE 41 : Même exercice que n° 40 avec $a = -\frac{7}{4}$ et $b = -\frac{8}{5}$.

De ces deux exercices, peux-tu tirer une conclusion quant à la comparaison de 2 nombres et celle de leurs inverses ?

EXERCICE 42 : Ranger dans l'ordre croissant :

a) $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{6}$

b) $-\frac{3}{5} \quad -\frac{2}{7} \quad -\frac{5}{6} \quad \frac{4}{5} \quad 1 \quad \frac{7}{10} \quad -1$

c) $6 \quad \frac{7}{2} \quad -\frac{11}{3} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{2}{6} \quad \frac{3}{8} \quad -2 \quad \frac{7}{12}$

d) $\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad -2 \quad 3 \quad -\frac{7}{2} \quad 0 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{7}$

EXERCICE 43 : Calculer :

$$\left(\frac{3a}{4} + \frac{5b}{8}\right) \cdot \frac{4}{5} \quad \text{pour}$$

a) $a = \frac{6}{5} \qquad b = \frac{4}{5}$

b) $a = -6 \qquad b = -3$

c) $a = -\frac{1}{6} \qquad b = -\frac{2}{15}$

EXERCICE 44 : Calculer $X = b - 1 + 3(a - 2ab)$ pour :

a) $a = -2 \qquad b = -\frac{1}{6}$

b) $a = -\frac{1}{3} \qquad b = -\frac{5}{6}$

EXERCICE 45 : Calculer :

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \ \frac{6}{5} - 2 + \frac{1}{5}$

b) $\frac{4}{5} \ \frac{15}{8}(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}) - \frac{3}{2}$

c) $(\frac{7}{4} - \frac{2}{5}) : (- \frac{54}{15})$

d) $(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + 1)(-2 + \frac{3}{5})(3 - \frac{1}{2})$

EXERCICE 46 : Calculer de deux façons différentes :

a) $(12 - 4)(5 - 3)$ $\quad (3 + \frac{1}{2})(4 - 2)$ $\quad (4 - \frac{1}{3})(1 - \frac{5}{4})$

b) $(7 - 11)(4 - 3 + 5)$ $\quad (12 - 3 - 1)(5 - 7)$ $\quad (-7 + 2 - 5)(6 - 2)$

c) $(\frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{3})(2 - \frac{1}{2})$ $\quad (\frac{1}{5} + 2)(- \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2)$

EXERCICE 47 : Effectuer et reduire si nécessaire :

a) $3(3b - 2a) - 2(-3a + b) + 5(2c - 3)$

b) $-2(7a + 4b) + 5(-2a + 3b - 2c) - 7(a + 2b)$

c) $4b - 3(7 - 4a) + 8(9 - 7a + 2b)$

EXERCICE 48 : Même exercice avec :

a) $(x - 2y)(x - 1)$ $\quad (2a - 3b)(4c + 5d)$ $\quad (-4x + 2)(2y - 1)$

b) $(4x + 1)(\frac{1}{4}y - x)$ $\quad (\frac{2a}{3} - 3)(6b - \frac{1}{2})$ $\quad (3a - 5b)(2c - 3 + 4d)$

c) $(5c - 2a)(4b - 3 + 7d)$ $\quad (\frac{3a}{4} - 5)(2b - a + \frac{1}{6})$

EXERCICE 49 : Même exercice avec :

a) $(a - 3)(b + 2) + 3(b - d)$ $\quad (b - c)(a - 1) + (b - 2)(c - a)$

b) $(c - d)(a - 1) - (b + 2)(d - c) - c(a + b)$

c) $(4a - 5)(2a - 3) - (2a - 5)(3a + 2)$

d) $(2x - 1)(3x - 2) - (2x - 1)(4x - 1)$

e) $(5x - 2)(3x + 4) + (5x - 2)(-2x - 4)$

f) $(5a + 3)(2b - 1) - (2b - \frac{1}{2})(4a - 6) - 2b(a - \frac{5}{2})$

EXERCICE 50 : Calcule de deux façons : d'une part en développant, d'autre part en utilisant les formules des identités remarquables :

a) $(4x + 3)^2$ $\quad (5x - 2)^2$ $\quad (4a - 2b)(4a + 2b)$

b) $(3x - 2y)^2$ $\quad (6a - \frac{1}{2})^2$ $\quad (4x - \frac{3}{4})(4x + \frac{3}{4})$

c) $(\frac{2}{3}u - 3)(\frac{2}{3}u + 3)$ $\quad (2ab - 3)^2$ $\quad (ac + 2bd)^2$

$\boxed{\text{EXERCICE 51}}$: Factoriser :

a) $5(2b - 1) + a(2b - 1)$; $5y(4x + 1) + 3x(4x + 1)$

b) $(a - 5)(a + 3) + a(a + 3)$; $(2x - 1)(y + 2) + (y + 2)(2x + 1)$

c) $(3c - 4)(4a - 1) - (4a - 1)(c + 6)$; $(a + 2)(b + 3) +(2x - 7)(2x - 1$

$\boxed{\text{EXERCICE 52}}$: Factoriser :

a) $5a + 10 + (a + 2)(5a - 1)$; $(b - 2)(1 - 3c) + b - 3bc$

b) $(x - 4)(x - 4) + 2x - 8$; $(3x - 2)^2 + 12x - 8$

c) $14a - 21 + (7b - 3)(2a - 3)$; $(2a + 3)(2a - 3) - 6a + 9$

d) $(2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)(x + 1)$

e) $(7x - 1)^2 - (7x - 1)(3x + 2)$

f) $x - 3)(8x + 2) - (2x - 6)(x - 5)$

g) $4 - 3x)(2 + 3x) - 2(1 - 2x)(3x - 4)$

h) $(x - 8)(4x - 1) + x^2 - 8x$

i) $(3x + 1)^2 - (4x + 2)(3x + 1) + 3x^2 + x$

j) $5x + 9 - (5x + 9)^2 + 5x^2 + 9x$

k) $(2x - 5)(x + 1) + (5 - 2x)^2 - (2x - 5)(3x + 7)$

l) $x(2x + 7)(3x + 8) + 3x^2(-2x - 7) + 2x^2 + 7x$

$\boxed{\text{EXERCICE 53}}$: Effectuer et réduire si nécessaire :

a) $(x - 1)^2 - 2(x + 7)$; $9x - 2(3 - 2x) + (4x - 1)(4x + 1)$

b) $3(2 - 3x) + (7 - x)^2$; $(5x - 1)^2 - (3x + 2)$

c) $(a + b + c)^2$; $(2x - 3)^2 - 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x+3)^2$

$\boxed{\text{EXERCICE 54}}$: Deux fontaines alimentent un bassin. La première l'emplit en 6 heures. La seconde l'emplit en 3 heures.

En combien de temps les deux fontaines, coulant ensemble, rempliraient-elles le bassin ?

CONTROLE 27 - 1

relatif aux § 1-2-3-4

EXERCICE 1 : Réduis au même dénominateur :

$-\frac{14}{27}$ et $\frac{5}{36}$ $\qquad$ $-\frac{4}{11}$ et $-\frac{9}{13}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}$ et $\frac{6}{5}$

EXERCICE 2 : Calcule :

$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}+\frac{-6}{-3}$ $\qquad$ $\frac{11}{4}+\frac{-5}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{7}-\frac{-3}{7}$ $\qquad$ $\frac{-3}{5}-\frac{-4}{5}$

EXERCICE 3 : Calcule :

$-\frac{7}{45}+\frac{2}{60}$ $\qquad$ $\frac{-3}{-13}+\frac{1}{7}$ $\qquad$ $\frac{8}{15}+\frac{7}{60}$ $\qquad$ $\frac{-4}{27}-\frac{5}{21}$ $\qquad$ $\frac{-11}{28}-\frac{5}{16}$ $\qquad$ $\frac{17}{60}-\frac{-17}{-75}$

EXERCICE 4 : Effectue :

$(3+\frac{9}{20})+(2+\frac{7}{5})+\frac{3}{10}$

$(5-\frac{4}{9}+\frac{2}{3})-(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-\frac{7}{15})-(-\frac{7}{9}+3-\frac{5}{6})$

$(\frac{7}{9}+5+\frac{3}{4})-(3-\frac{1}{4}-\frac{5}{6})$

$(17-\frac{-4}{5})-(2+\frac{3}{-10}+\frac{1}{-2}-5-\frac{-2}{-5})$

EXERCICE 5 : Compare :

a) $\frac{5}{6}$ et $\frac{83}{100}$ par calcul de la valeur décimale.

b) $\frac{15}{-7}$ et $\frac{17}{-9}$ par réduction au même dénominateur.

c) $\frac{-8}{11}$ et $\frac{1,1}{1,3}$ avec la calculatrice, les touches M+, M-, MR. Détaille la manière dont tu t'y prends.

d) $\frac{-7}{11}$ et $\frac{-31}{30}$ par comparaison à un entier. Explique ta méthode.

EXERCICE 6 : Ecris sous forme d'un entier plus une fraction les relatifs suivants :

a) $\frac{24}{17}$ $\qquad$ b) $\frac{-355}{113}$

EXERCICE 7 : Ordonne les relatifs suivants :

$-\frac{5}{2}$ $\quad$ $\frac{11}{4}$ $\quad$ $\frac{-7}{6}$ $\quad$ $\frac{9}{5}$ $\quad$ $\frac{12}{7}$

CONTROLE 27 - 2

relatif au § 5

EXERCICE 1 : Développe :

$A = 2 + (3a - 4) - 5 - (6 - 7a) + 4 - (3a - 8)$

$B = 4b - 3(7 - 4a) + 8(9 - 7a + 2b)$

$C = 2a(3 - 4b) + 2b(5a - 3)$

$D = 3a(3ab + 4b) - 3b(2a - 2ab)$

$E = (2x - 7)(3x - 2) + (-2x - 5)(-x + 9)$

EXERCICE 2 : Factorise :

$F = (2x - 1)(3x - 2) - (2x - 1)(4x - 1)$

$G = (5x - 2)(3x + 4) - (5x - 2)(4x - 1)$

$H = 2(7 + 2x)(5 - x) - 3(9 - 2x)(7 + 2x) + (7 + 2x)$

$I = 3(3x - 6)(2 - x) - 5(2x - 4)(x + 3) + 3(4x - 8)(3 - x)$

$J = (3x - 2)(7 - 2x) - (2 - 3x)(4 - 2x) + (3x - 2)(5 + x)$

EXERCICE 3 : Développe et réduis :

$K = (2x - 3)^2$

$L = (\frac{11}{2} a + \frac{3}{4})^2$

$M = (5x + 4)(5x - 4)$

EXERCICE 4 : Factorise :

$N = (2x - 1)^2 - (5 + x)^2$

$O = (3a + 1)^2 - 2(3a + 1)(5b - 7) + (5b - 7)^2$

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°28

TITRE: APPL. LINEAIRES PROPORTIONNALITE

4

PREREQUIS

- PROPORTIONNALITE
- DOSSIER 19
- DOSSIER 20
- DOSSIER 23

OBJECTIFS

- SAVOIR TRADUIRE UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE PAR UNE RELATION TELLE QUE $Y = \frac{1}{2} X$
- DETERMINER UNE APPLICATION LINEAIRE PAR LA DONNEE D'UN NOMBRE NON NUL ET DE SON IMAGE
- REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE APPLICATION LINEAIRE DONNEE ET SON EXPLOITATION

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 28

APPLICATIONS LINEAIRES ET PROPORTIONNALITE (1)

1 / SITUATIONS LINEAIRES

A) SITUATION DECRITE PAR UN TABLEAU (Débit)

Pour arroser mon jardin, j'ai un robinet extérieur. Curieux de savoir quelle sera la dépense correspondant à un arrosage, je construis un petit réservoir que je gradue en litres.

J'ouvre mon robinet (à débit constant) pour remplir le réservoir, et je chronomètre. J'obtiens les résultats suivants :

d (durée en min)	0	1	2	3	4	5
q (quantité d'eau en l)	0	14	28	42	56	70

a) Que peux-tu dire de ces deux suites ?

b) Représente graphiquement cette situation en prenant pour échelle :

en abscisse... d : 1 cm pour 1 min.

en ordonnée... q : 1 cm pour 10 litres.

Que constates-tu ?

c) En t'aidant du graphique, réponds aux questions suivantes :

d = 2 m 30 s q =	q = 21 l d =
d = 4 m 30 s q =	q = 49 l d =
d = 7 min q =	q = 84 l d =

d) La quantité d'eau (en l.) est fonction de la durée d (en min).

. Trouve la formule exprimant cette relation : $q = \boxed{} . d$

.. En utilisant cette formule, réponds aux questions suivantes :

d = 30 min q =	q = 350 l d =
d = 45 min q =	q = 525 l d =
d = 3 h q =	q = 5040 l d =

... En période de sécheresse, il m'est arrivé d'arroser 1 h 25 m le soir. Sachant que le m^3 d'eau m'est facturé 2,80 TTC, quelle a été ma dépense en arrosage ce soir là ?

B) $\boxed{\text{SITUATION DECRITE PAR UNE FORMULE (Masse volumique)}}$

Pour un corps physique déterminé (bois, aluminium, cuivre, fer, eau ...) la masse est proportionnelle au volume.

On appelle $\boxed{\text{MASSE VOLUMIQUE}}$ d'un corps, la masse de l'unité de volume de ce corps.

On l'exprime en g/cm^3 ou en kg/dm^3 ou encore en t/m^3. Pourquoi est-ce pareil ?

La masse volumique du bois de sapin est 0,65 g/cm^3. Si on exprime la masse en grammes et le volume em cm^3, on a donc :

$$M = 0{,}65\ V$$

a) En utilisant cette formule :

. Complète :

$V = 200\ cm^3$	$M =$	$M = 234\ g$	$V =$
$V = 520\ dm^3$	$M =$	$M = 299\ kg$	$V =$
$V = 80\ m^3$	$M =$	$M = 19{,}5\ t$	$V =$

.. J'achète 5 planches de sapin de 200 x 40 x 5 (en cm). Quelle est la masse du bois acheté ?

... J'ai acheté un meuble en sapin dont la masse est 78 kg. Quel est le volume de bois utilisé, sachant qu'il y a une perte de 40 % pour la fabrication du meuble ?

b) Complète le tableau suivant :

$V\ (dm^3)$	0	20	40			100	
$M\ (kg)$				39	52		78

Que peux-tu dire de ces deux suites ?

Que représente le coefficient de proportionnalité ?

c) En utilisant le tableau ou la formule, représente graphiquement la situation précédente en prenant pour échelle :

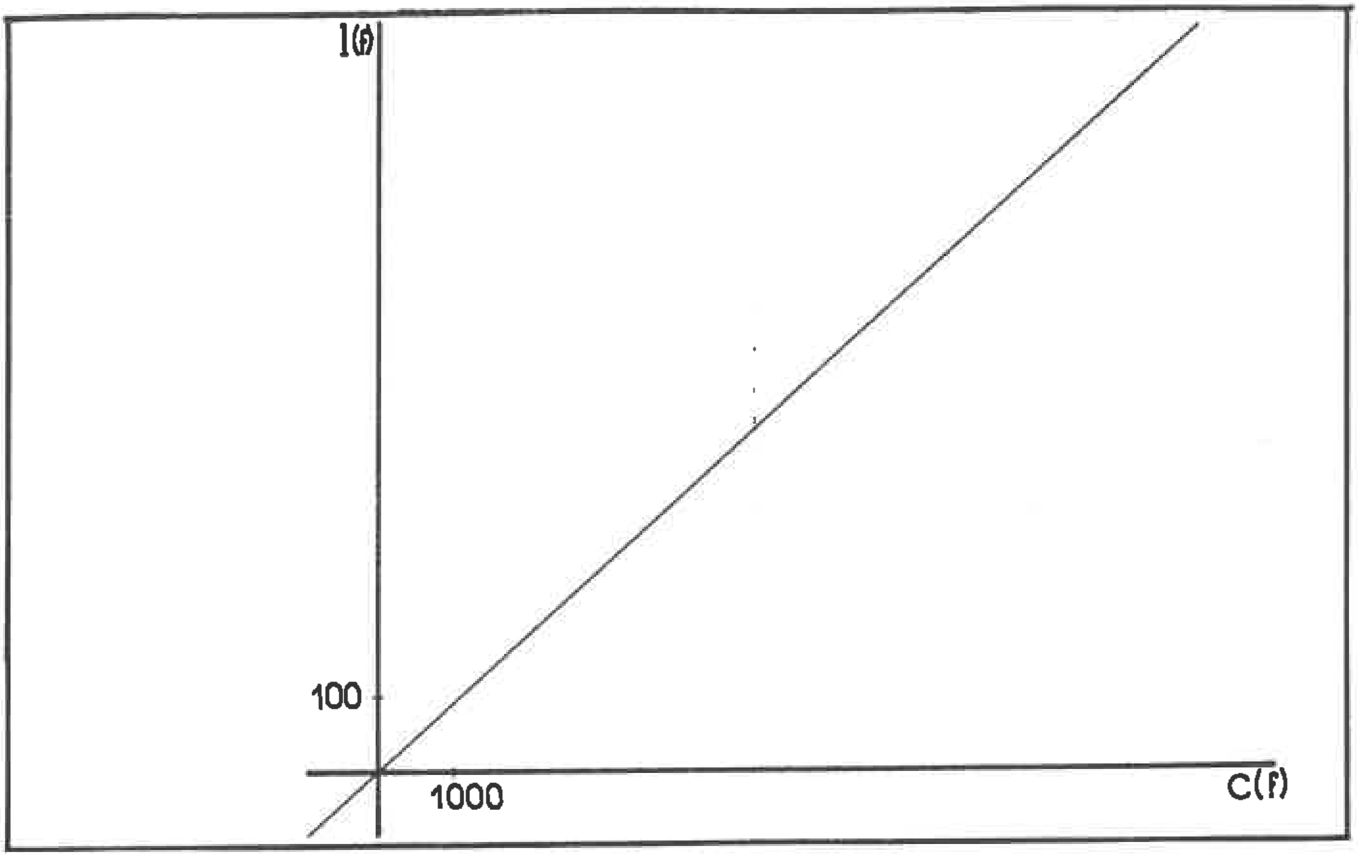
en abscisse : 1 cm pour 10 dm^3

en ordonnée : 1 cm pour 10 kg

C) $\boxed{\text{SITUATION DECRITE PAR UN GRAPHIQUE (Intérêt et capital)}}$

Ayant une certaine somme d'argent à placer, je vais voir ma banque et lui demande un placement intéressant.

On me propose la formule suivante, qui indique, par un graphique, les intérêts annuels I en fonction du capital placé C :



a) Que peux-tu dire du graphique ?

En lisant ce graphique, complète :

C = 1000 f I =	I = 270 f C =
C = 5000 f I =	I = 810 f C =
C = 8000 f I =	I = 1080 f C =

b) De manière plus générale, complète le tableau suivant :

C (f)	0	1000	2000			8000	10000
I (f)				360	540		

Que peux-tu dire de ces deux suites ?

c) L'intérêt I (f) est fonction du capital C (f). Trouve la formule exprimant cette relation :

$$I = \boxed{} . C$$

Quel est le taux de placement ? (C'est le coefficient de proportionnalité exprimé en %.)

d) En utilisant la formule, complète :

C = 25000 f I =	I = 1026 f C =
C = 37800 f I =	I = 4887 f C =

e) Si je place un capital de 10000 f, quel est mon nouveau capital au bout d'un an ?

En laissant ce capital placé pendant deux ans, quel sera mon intérêt ?

D) SYNTHESE

Les trois situations que tu viens d'étudier sont des **SITUATIONS LINEAIRES** ou de **PROPORTIONNALITE**.

a) Tu dois être capable de les reconnaître :

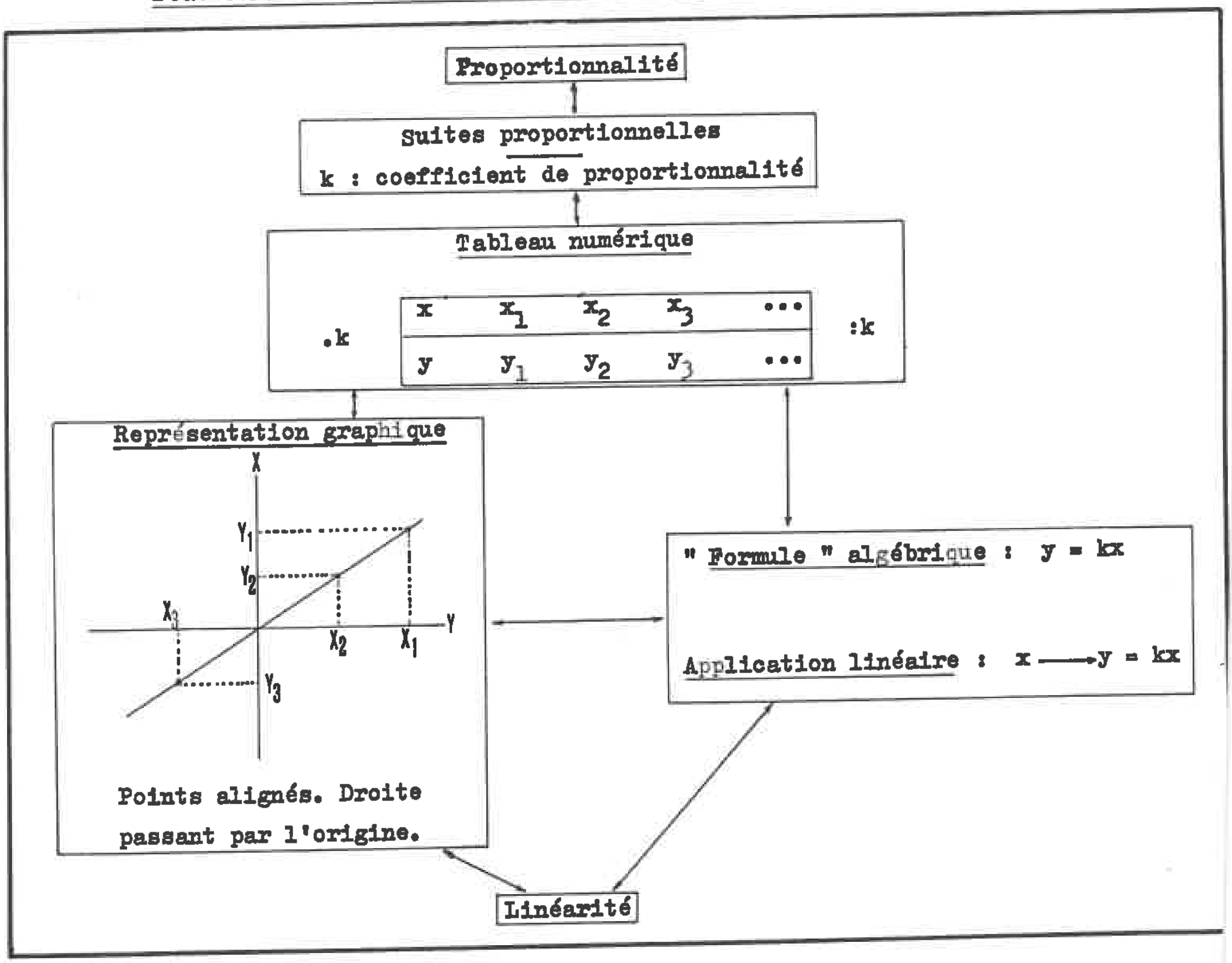
. dans un tableau numérique : les suites sont proportionnelles.

.. dans une expression algébrique : elle doit être de la forme $y = kx$

... dans une représentation graphique : les points sont alignés avec l'origine.

b) Tu dois être capable de passer d'un mode de représentation à l'autre.

Tout cela est résumé dans le schéma suivant :



2 / APPLICATIONS LINEAIRES

DEFINITION : On appelle **APPLICATION LINEAIRE** toute fonction (cf. dossiers 12 et 18) de la forme

$$f : x \longrightarrow y = kx$$

où k est un nombre qui détermine la fonction.

k est appelé le **COEFFICIENT DIRECTEUR**.

RESULTATS : a) Si $y_1 = kx_1$, $y_1 = kx_2$, $y_3 = kx_3$ ... alors la suite y_1 , y_2 , y_3 ... est proportionnelle à la suite x_1 , x_2 , x_3 ... et le coefficient directeur k de f est le coefficient de proportionnalité.

b) Si on représente graphiquement une application linéaire, on obtient une droite passant par l'origine. k est aussi appelé le coefficient directeur.

EXERCICE 1 : On donne l'application linéaire $f_1 : x \longrightarrow 1,5x$.
Complète le tableau suivant, et représente graphiquement cette fonction sur le graphique de la page 28-6. Appelle Δ_1 la droite obtenue.

x	-16		-2	0	1			53
y		-18,75				4,5	6	

EXERCICE 2 : On donne le tableau suivant :

x	-10	-8	-6	-1	2	3	7
y	-5	-4	-3	-0,5	1	1,5	3,5

Vérifie qu'il représente une situation linéaire, et donne l'expression de l'application linéaire correspondante f_2.
Représente graphiquement cette application linéaire sur le graphique de la page 28-6. Appelle Δ_2 la droite obtenue.

EXERCICE 3 : Pourquoi la fonction f_3 représentée sur le graphique de la page 28-6 par la droite Δ_3 est-elle linéaire ?

En utilisant le graphique, complète le tableau :

x		-3,5		0		2,5	
y	-10		-2		4		9

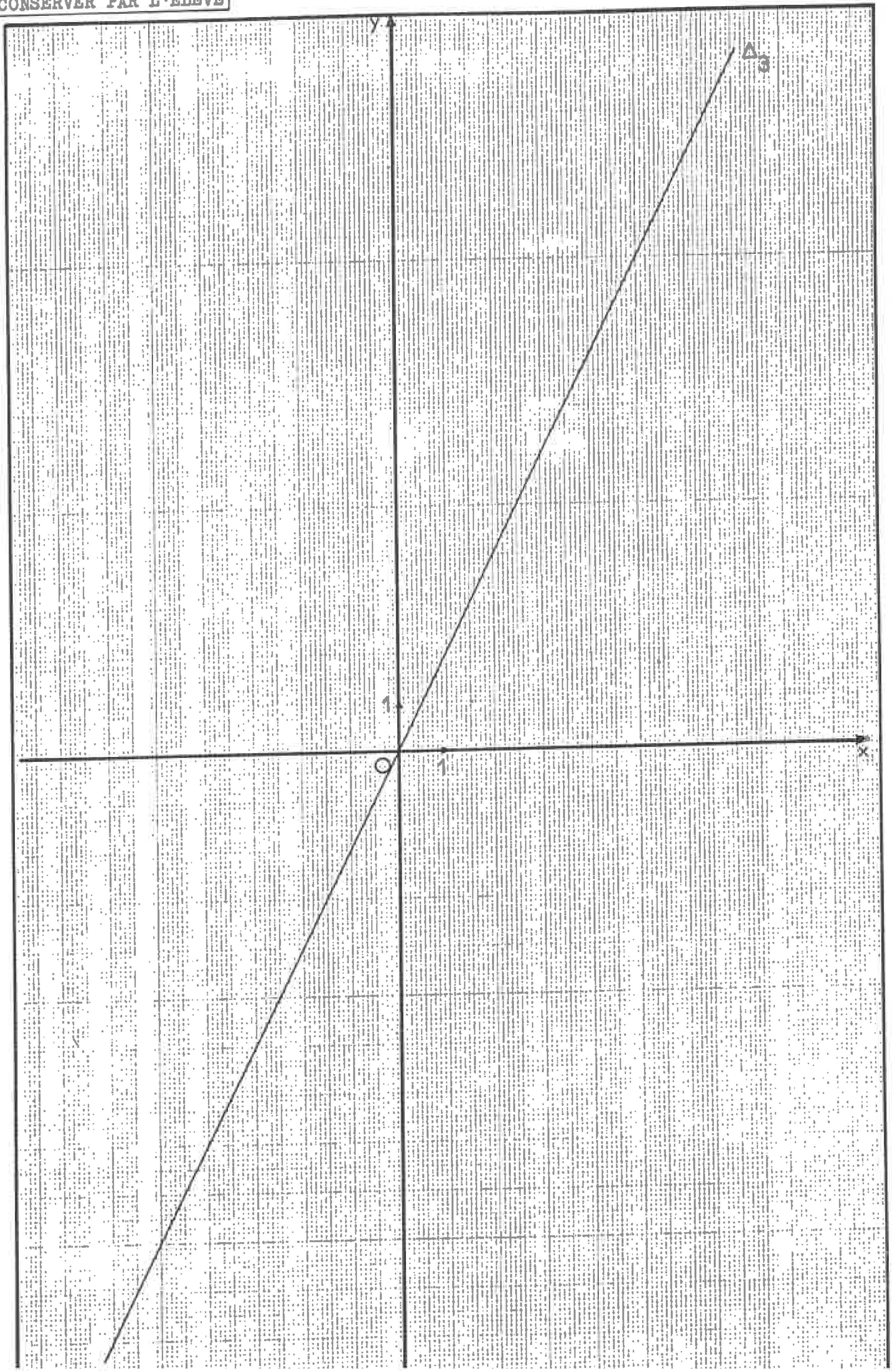
Donne l'expression de cette fonction f_3.

EXERCICE 4 : Représente sur le même graphique, par les droites Δ_4, Δ_5, et Δ_6 les applications linéaires suivantes :

$$f_4 : x \longrightarrow -1,5x$$

$$f_5 : x \longrightarrow -0,5x$$

$$f_6 : x \longrightarrow -2x$$


y
x
O
1
1
Δ_3

SIGNIFICATION DU COEFFICIENT DIRECTEUR

EXERCICE 5 : Trace les représentations graphiques Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4 des applications linéaires suivantes :

$$f_1 : x \longrightarrow 0{,}8x$$

$$f_2 : x \longrightarrow 3x$$

$$f_3 : x \longrightarrow -0{,}8x$$

$$f_4 : x \longrightarrow -3x$$

Tu feras cela sur ton cahier en prenant comme unités :

en abscisse : 1 carreau

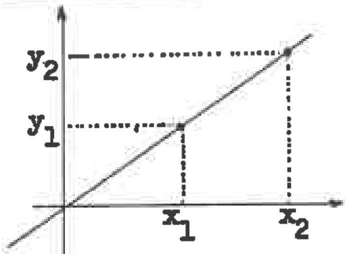
en ordonnée : 2 carreaux

Compare les droites Δ_1 et Δ_2 avec les droites Δ_3, Δ_4. Peux-tu en tirer une conclusion ?

SENS DE VARIATION DE L'APPLICATION LINEAIRE

a) Si k est positif, on constate que la droite "monte", c'est à dire que les ordonnées croissent lorsque les abscisses croissent. Dans ce cas, on dit que l'application est croissante.

Cette propriété se traduit algébriquement par la définition suivante :

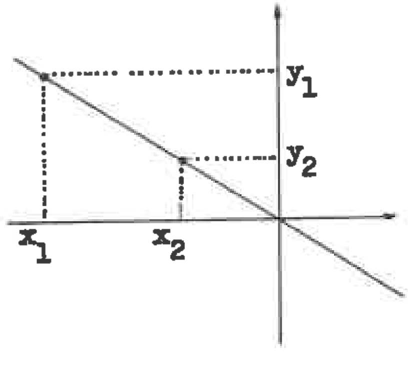


$$\boxed{\text{Si } x_1 < x_2 \text{ alors } y_1 < y_2}$$

→ Montre que si k est positif, l'application linéaire $f : x \longrightarrow kx$ est croissante, en utilisant la définition algébrique.

b) Si k est négatif, on constate que la droite "descend", c'est à dire que les ordonnées décroissent lorsque les abscisses croissent. Dans ce cas, on dit l'application linéaire est décroissante.

Cette propriété se traduit algébriquement par la définition suivante :



$$\boxed{\text{Si } x_1 < x_2 \text{ alors } y_1 > y_2}$$

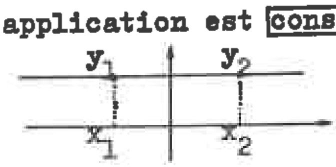
→ Montre que si k est négatif, l'application linéaire $f : x \longrightarrow kx$ est décroissante, en utilisant la définition algébrique.

c) Si k = 0, étudie ce cas particulier. Comment est représentée cette application linéaire ? Est-ce que la droite "monte" ou "descend" ?

Cette propriété se traduit algébriquement par la définition suivante :

$$\boxed{\text{Si } x_1 < x_2 \text{ alors } y_1 = y_2}$$

On dit que l'application est constante.

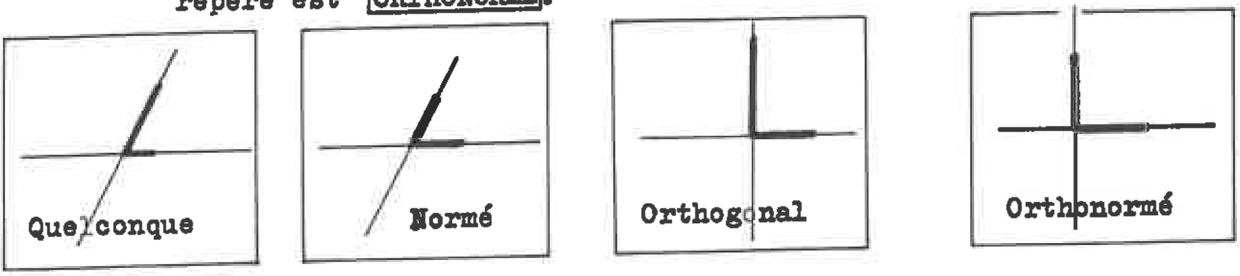


→ Montre cette propriété.

CAS PARTICULIER

Les axes des abscisses et des ordonnées ont la même unité. On dit que le repère est NORME.

Si de plus les axes de coordonnées sont perpendiculaires, on dit que le repère est ORTHONORME.



Dans le cas où le repère est orthonormé, le coefficient directeur est appelé PENTE.

EXERCICE 6 : Dans l'exercice 4, que peux-tu dire des droites Δ_3 et Δ_5 ? Calcule k_3k_5. Que constates-tu ?

En utilisant ce que tu connais en algèbre, trouve une relation exprimant k_3 en fonction de k_5 ; puis k_5 en fonction de k_3.

EXERCICE 7 : Même exercice que précédemment avec les droites Δ_2 et Δ_6.

EXERCICE 8 : En reprenant les données des exercices 1 et 4, calcule k_1k_4. Que constates-tu ? Les droites Δ_1 et Δ_4 ont-elles la même propriété que dans l'exercice 6. Peux-tu expliquer pourquoi ?

EXERCICE 8 : Même exercice que précédemment avec les droites Δ_2 et Δ_3 des exercices 2 et 3.

PROPRIETE

Si deux applications linéaires $f_1 : x \longrightarrow k_1x$ et $f_2 : x \longrightarrow k_2x$ vérifient $\boxed{k_1k_2 = -1}$ ou encore $\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$ ou encore $\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$, alors les droites qui les représentent dans un repère orthonormé sont perpendiculaires.

EXERCICE 9 : Représente graphiquement $f : x \longrightarrow \frac{1}{3}x$ dans un repère orthonormé par une droite Δ. Trace la droite Δ' perpendiculaire à Δ en O (origine du repère), en donnant l'expression de l'application linéaire associée à Δ'.

EXERCICE 10 : Même exercice avec l'application linéaire $f : x \longrightarrow -5x$

EXERCICE 11 : Même exercice avec l'application linéaire $f : x \longrightarrow 0{,}4x$

3 / CARACTERISATION D'UNE APPLICATION LINEAIRE

EXERCICE 12 : Dans un repère du plan, d'origine O, on donne les points A(2;3), B(-2;2) C(-3;-2) et D(5;1).

Trace les droites (OA), (OB), (OC) et (OD). Peux-tu alors donner les expressions de chacune des applications linéaires représentées par chacune de ces droites ?

RESULTAT : Une application linéaire est déterminée par la donnée d'un couple de valeurs "homologues" non nulles.

EXERCICE 13 : Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points A(3;2), B(-3;4,5) C(-1,5;-6) et D(4;-1).

Etablis les applications linéaires représentées par les droites (OA), (OB), (OC) et (OD).

Caractérise (en le montrant) les triangles (OAB) et (OCD).

EXERCICE 14 : Pour 5 litres de super, j'ai payé 23 f. Donne l'expression de l'application linéaire exprimant le prix P en fonction de la quantité Q d'essence.

Représente graphiquement cette situation en prenant pour unités :

en abscisse : 1 cm pour 2 litres

en ordonnée : 1 cm pour 10 f.

En utilisant le graphique, complète le tableau suivant :

Q(l)	8	13		
P(f)			13,80	55,20

Vérifie par le calcul.

EXERCICE 15 : Un magasin solde tous ses articles avec le même pourcentage de remise.

Un article valant 268 f est vendu 187,60 f.

Trouve le pourcentage de remise.

Donne l'expression de l'application linéaire exprimant la remise R en en fonction du prix avant remise P.

Représente graphiquement cette situation en prenant pour unités :

en abscisse : 1 cm pour 100 f

en ordonnée : 1 cm pour 100 f.

Complète le tableau suivant :

P(f)	564	1247		
R(f)			207,60	456

EXERCICE 16 : Un plan de maison traduit la longueur de la maison, 12 m, par une distance sur le plan de 48 cm.

Calcule l'échelle de ce plan.

Donne l'expression de l'application linéaire exprimant la longueur-dessin en fonction de la longueur-réelle dans la même unité.

Représente graphiquement cette situation en prenant pour unité :

en abscisse : 1 cm pour 1 m

en ordonnée : 1 cm pour 2 cm.

La largeur de cette maison est 9 m. Par quelle distance est-elle représentée sur le plan ?

La hauteur sur le plan est 28 cm. Quelle est la hauteur réelle de cette maison ?

4 / PROPRIETES DE L'APPLICATION LINEAIRE

Ce sont les propriétés des suites proportionnelles vues dans le dossier 19.

PROPRIETE : Soit l'application linéaire $f : x \longrightarrow y = kx$

Si $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ alors $y_1 + y_2 = f(x_1 + x_2)$.

Montre cette propriété. Quelle propriété utilises-tu ?

PROPRIETE : Si $y = f(x)$ alors pour tout nombre n on a $ny = f(nx)$.

Montre cette propriété.

TRADUCTION GRAPHIQUE : Représente graphiquement l'application linéaire

$f : x \longrightarrow 0,5x$

Place les points d'abscisses 2, 3, 5 et 8. Vérifie ensuite les deux propriétés énoncées ci-dessus.

APPLICATIONS : Ce sont celles déja vues dans le dossier 19.

A travers les exercices suivants, tu vas pouvoir vérifier si tu avais bien acquis le dossier 19. Sinon, révise !

a) Compléter un tableau de proportionnalité sans calculer le coefficient.

EXERCICE 17 :

S_1	1,5	-2,25	-0,75		-1,5	
S_2	-2			4		7

EXERCICE 18 :

S_1	-9	-27	45	-10,8	14,4				
S_2	13					-130	36,4	-1105	83,2

b) Partages proportionnels.

EXERCICE 19 : Un père de famille partage 20000 f proportionnellement à l'age de ses 3 enfants : 18, 15 et 7 ans.

Quelle somme reçoit chacun d'eux ?

EXERCICE 20 : Dans une entreprise, il y a 20 associés. 7 ont mis 9000 f, 5 ont mis 12000 f, 6 ont mis 15000 f et 2 ont mis 18000 f.

Ils se partagent un gain de 36354 proportionnellement à leurs mise.

c) <u>Diagrammes en bandes, diagrammes circulaires ou semi-circulaires</u>

EXERCICE 21 : Fais une enquête dans ta classe. Tu noteras pour chaque élève :

-1- l'année de naissance

-2- la commune de résidence

-3- le nombre de frères et soeurs.

Représente les résultats de -1- par un diagramme en bandes
-2- par un diagramme circulaire
-3- par un diagramme semi-circulaire.

CONTROLE 28 - 1

Voici un problème d'électricité :

Soit U la différence de potentiel, exprimée en volts, aux extrémités d'une résistance R, exprimée en ohms, parcourue par un courant dont l'intensité est I, exprimée en ampères.

A travers trois expériences, on essaie de vérifier la formule :

(a) $\boxed{U = RI}$

Pour cela, on va fixer, dans trois situations la valeur de la résistance R.

SITUATION 1

On fixe R = 5 ohms.

. Exprimer la formule (a) dans ce cas-là : U = ☐.I

.. Représente-t-elle une situation linéaire ? OUI NON

(Entoure la réponse exacte)

... Pourquoi ? ☐

.... En utilisant cette formule, complète ce qui suit :

I = 5 ampères U = ☐ volts U = 55 volts I = ☐ ampères

I = 35 ampères U = ☐ volts U = 85 volts I = ☐ ampères

I = 47 ampères U = ☐ volts U = 170 volts I = ☐ ampères

..... Complète le tableau suivant :

I (ampères)	0	1	2	3			
U (volts)					20	25	30

...... Trace le graphique correspondant. Sur la ligne obtenue, tu porteras la mention ① R = 5 ohms.

SITUATION 2

Pour la deuxième expérience, on a oublié de noter la valeur de R, mais on a enregistré les résultats dans le tableau suivant :

I (ampères)	0	1	2	3	4	5	6	11
U (volts)	0	15	30	45	60	75	90	165

. Est-ce une situation linéaire ? OUI NON

.. Pourquoi ? ☐

... Quel est le coefficient ? ☐

.... Représente graphiquement cette situation. Comme dans la situation précédent tu porteras sur ton dessin le mention ② R = ☐ ohms .

..... Retrouve la formule algébrique correspondante : ☐

SITUATION 3

Pour la troisième expérience, on a aussi oublié de noter la valeur de R, mais on a enregistré les résultats sur le graphique ③.

. Est-ce une situation linéaire ? OUI NON

.. Pourquoi ?

... Avec le graphique, complète le tableau suivant :

I (ampères)	0	1	2	3			
U (volts)					80	100	120

.... Quel est le coefficient de proportionnalité ?

..... Retrouve alors la formule algébrique correspondante :

...... Quelle est la résistance utilisée ? R = ohms

.... Précise sur le graphique ③ R =

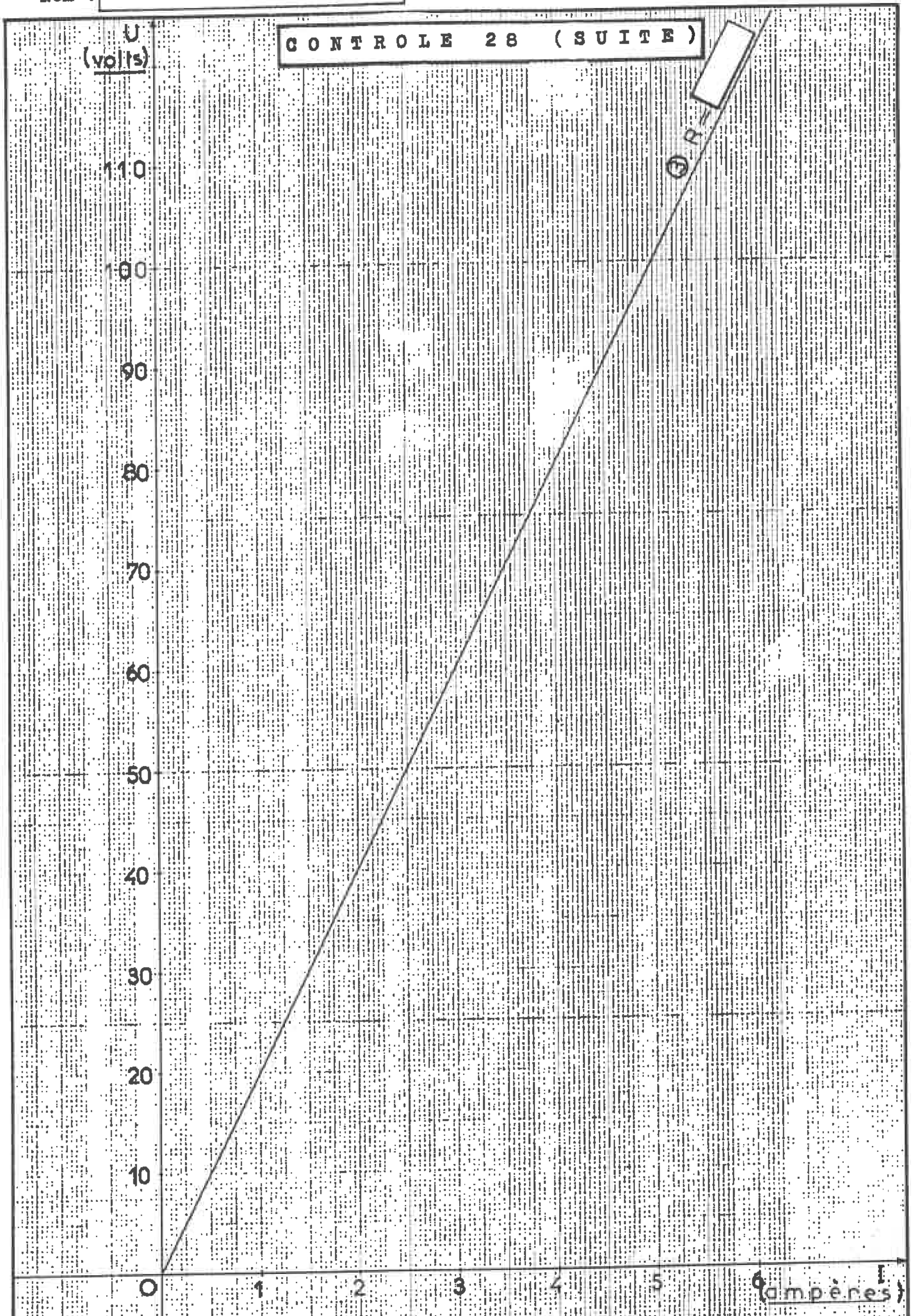
NOM :
PRENOM :
DATE :

NOTE : / 20

N'OUBLIE PAS DE RAPPELER EGALEMENT TON NOM SUR LE GRAPHIQUE DE LA PAGE 28-14.

NOM :

CONTROLE 28 (SUITE)



Tu viens de construire un abaque.

CONTROLE 28 - 2

EXERCICE 1 : On considère les applications linéaires suivantes :

$f_1 : x \longrightarrow 3x \quad f_2 : x \longrightarrow -2x \quad f_3 : x \longrightarrow \frac{1}{2}x \quad f_4 : x \longrightarrow -\frac{1}{3}x$

a) Précise celles qui sont croissantes.

b) Précise celles qui sont décroissantes.

c) Représente ces 4 applications dans un repère orthonormé en prenant un carreau pour unité.

EXERCICE 2 : a) Dans un repère orthonormé, place les points

$A(1 ; \frac{5}{2})$; $B(-5 ; 2)$; $C(-2 ; -5)$; $D(\frac{5}{2} ; -1)$

b) Trouve les expressions algébriques des applications linéaires associées au droites (OA) ; (OB) ; (OC) ; (OD).

c) Que constates-tu ?

d) Quelle est la nature du triangle (OAB) ? Montre-le.

EXERCICE 3 : Tu as vu, dans le dossier 26, le cosinus d'un angle.

a) En t'aidant de ta calculatrice, complète le tableau suivant (tu arrondiras tes résultats à 0,01 près par défaut)

angles (°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
cosinus										

b) Représente ce tableau dans un repère orthogonal en prenant pour unités :

en abscisses : 1 cm pour 10°

en ordonnées : 1 cm pour 0,1

c) Est-ce que la fonction $x \longrightarrow \cos(x)$ est linéaire ? Justifie ta réponse.

d) Donne un exemple montrant que les phrases :

$$\cos(x + y) = \cos(x) + \cos(y)$$

et $\cos(ax) = a.\cos(x)$

peuvent être fausses.

EXERCICE 4 : Un père de famille veut partager une somme de 1225,50 francs entre ses 5 enfants proportionnellement à leur moyenne trimestrielle en mathématiques.

Loïc (17) ; Armelle (15) ; David (10) ; Etienne (8) ; Sandra (7)

Donne leurs parts respectives à chacun de ces enfants.

EXERCICE 5 : Un sondage auprès des 150 élèves de quatrième du Collège A. Camus, portant sur la question suivante : "Quel est ton chanteur préféré ?", a donné les résultats suivants :

Madonna : 46

J. J. Goldmann : 35

J. Maass : 25

M. Jackson : 20

J. Halliday : 24

Construis le diagramme circulaire qui visualise ce sondage.

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°29

TITRE : TRANSLATIONS · VECTEURS · PARALLELOGRAMME · APPLICATIONS

PREREQUIS

- FIGURES USUELLES DE 5ème
- SYMETRIES

OBJECTIFS

- CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UN POINT, D'UNE DEMI-DROITE, D'UN CERCLE PAR UNE TRANSLATION
- LIER VECTEURS, PARALLELISME ET MILIEU
- UTILISER LES SYMETRIES ET LES TRANSLATIONS COMME OUTIL DE VALIDATION

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY
ROBERT CHAPOT
BERNARD CHARLAIX
DOMINIQUE ANTOINE
JEAN CLAUDE DUPERRET
GERALD GENTHON
GERARD PAPA

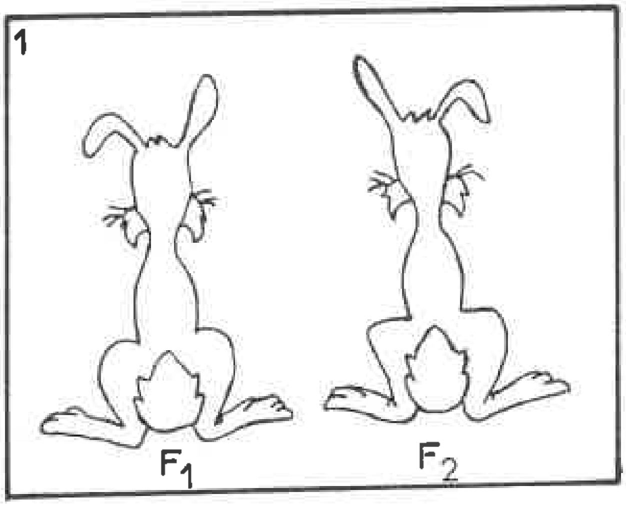
COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

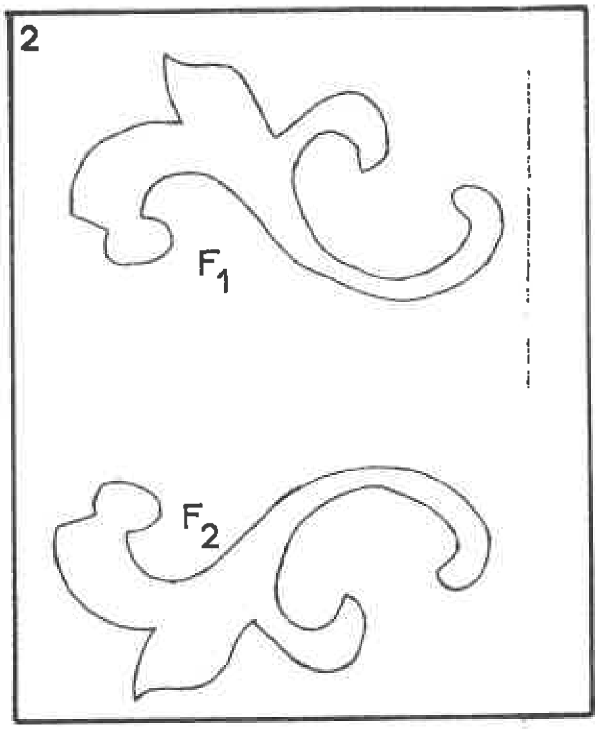
DOSSIER N°29

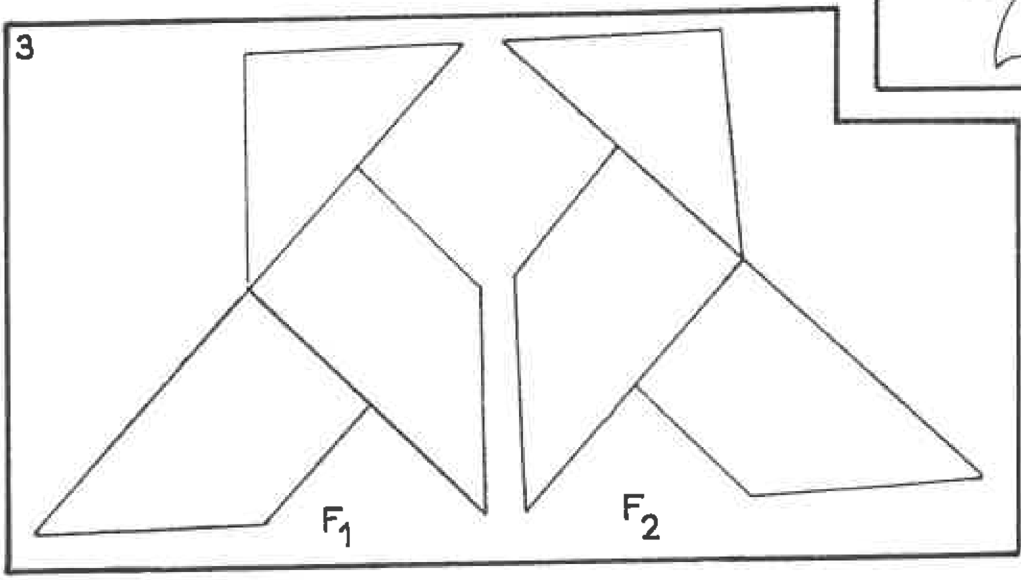
TRANSLATIONS
VECTEURS
PARALLELOGRAMME
APPLICATIONS

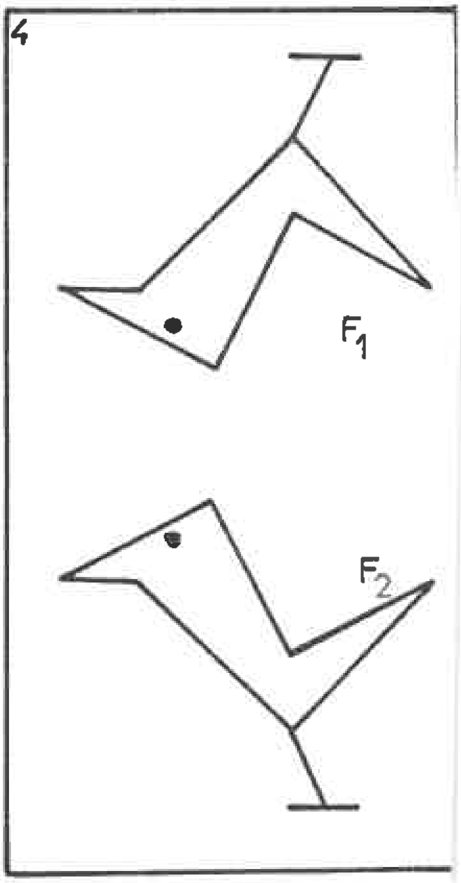
1 / TRANSLATIONS ET VECTEURS

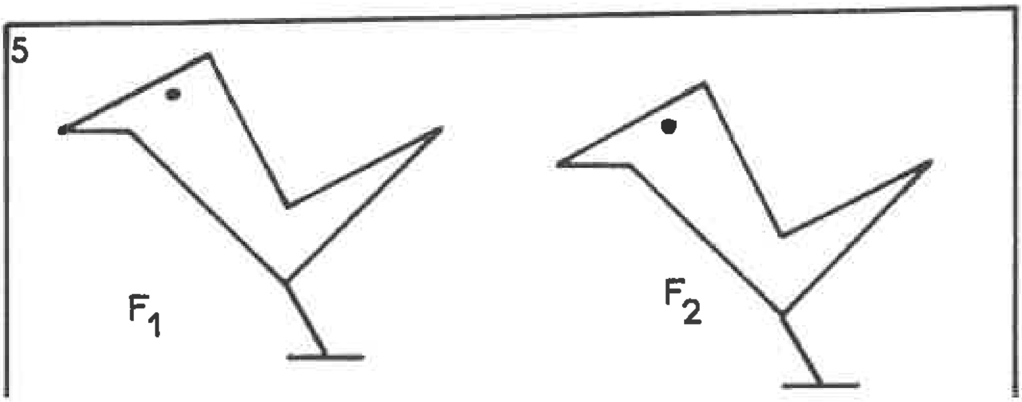
A) DES TRANSFORMATIONS ...

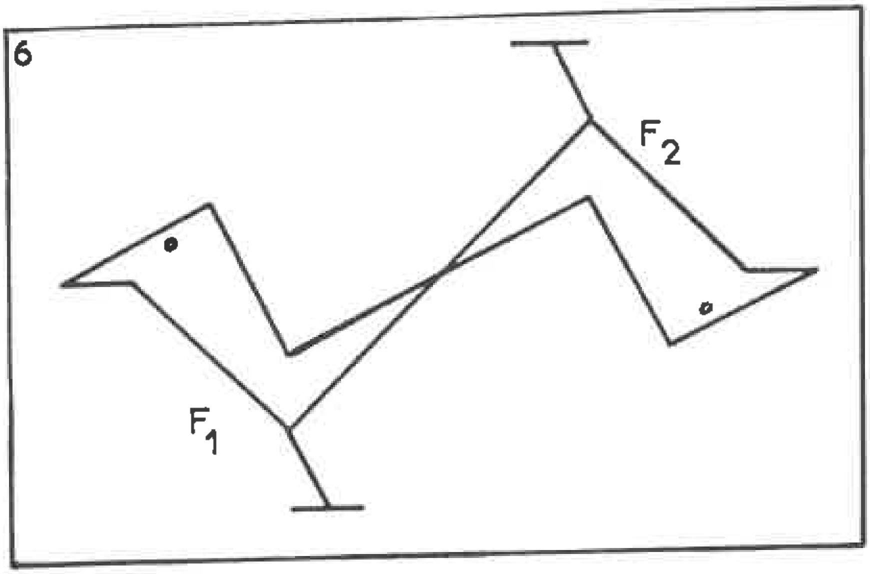


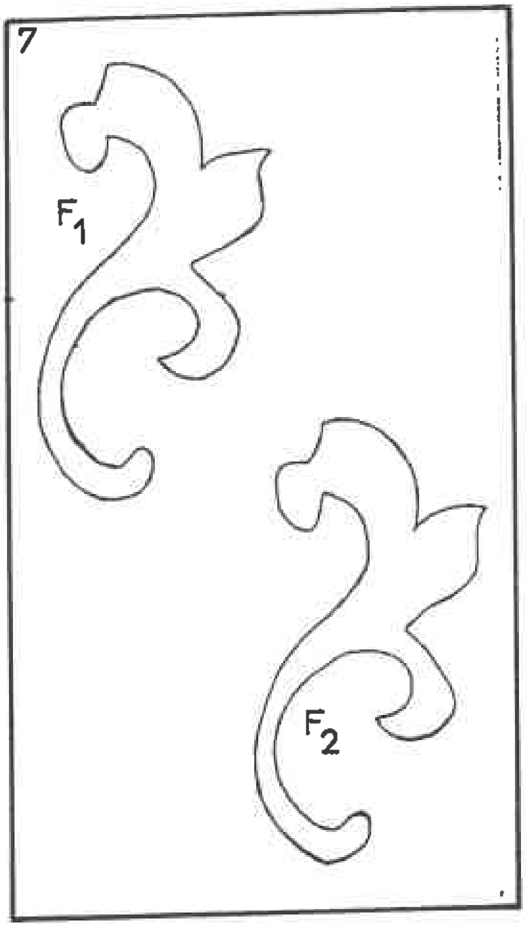


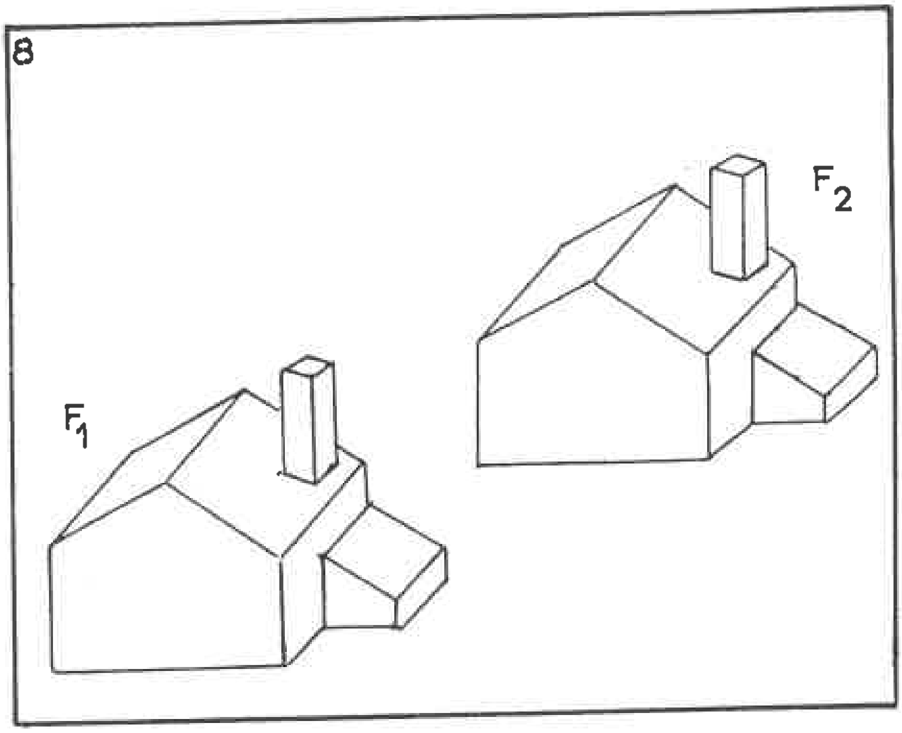


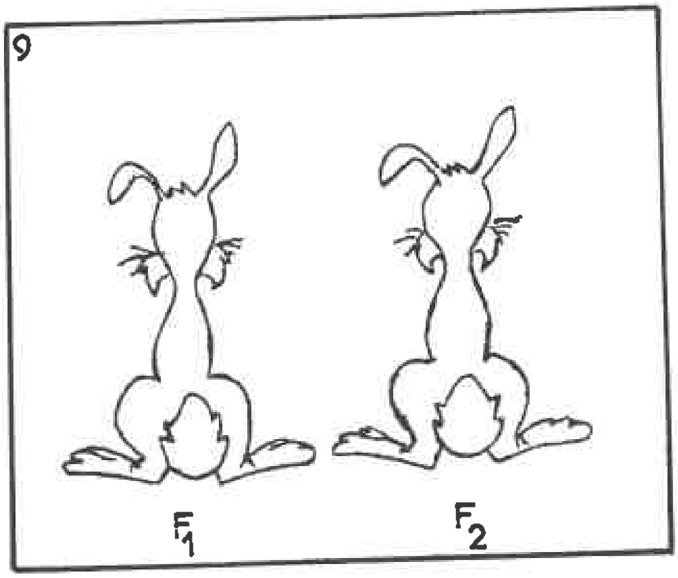





6
F2
F1


7
F1
F2


8
F2
F1


9
F1
F2

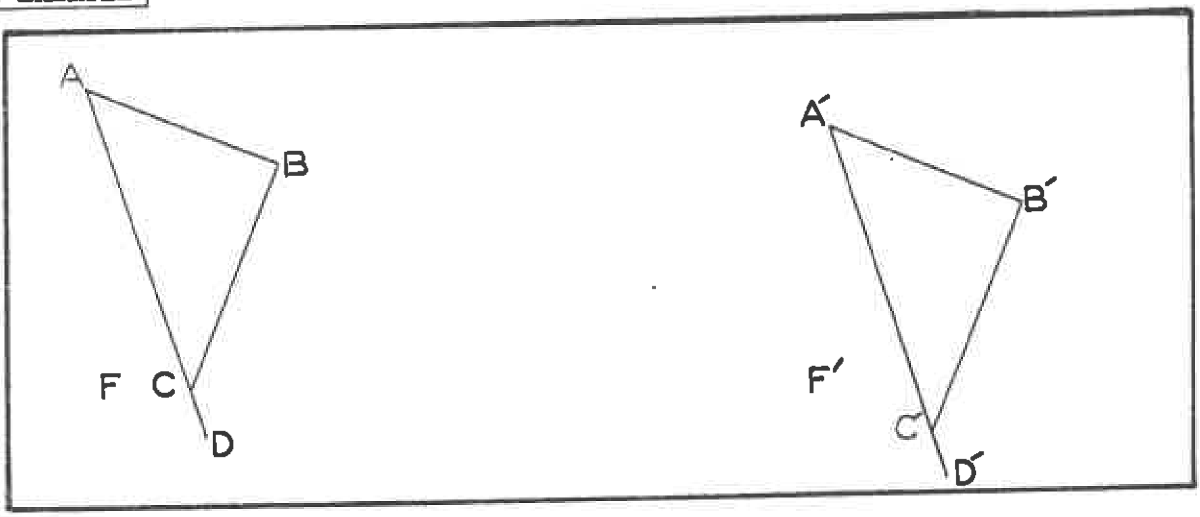
On veut classer les figures ci-dessus suivant le type de transformation qui permet de passer de la figure F_1 à la figure F_2.

Recopie et complète le tableau suivant :

Symétrie Axiale	Symétrie Centrale	Autre
1		

Dans ce chapitre, nous étudierons la transformation correspondant à la troisième colonne du tableau.

B) UN EXEMPLE



Reproduis sur du papier calque la figure F.

Quel mouvement suffit-il de faire subir au papier calque pour amener F sur F' ?

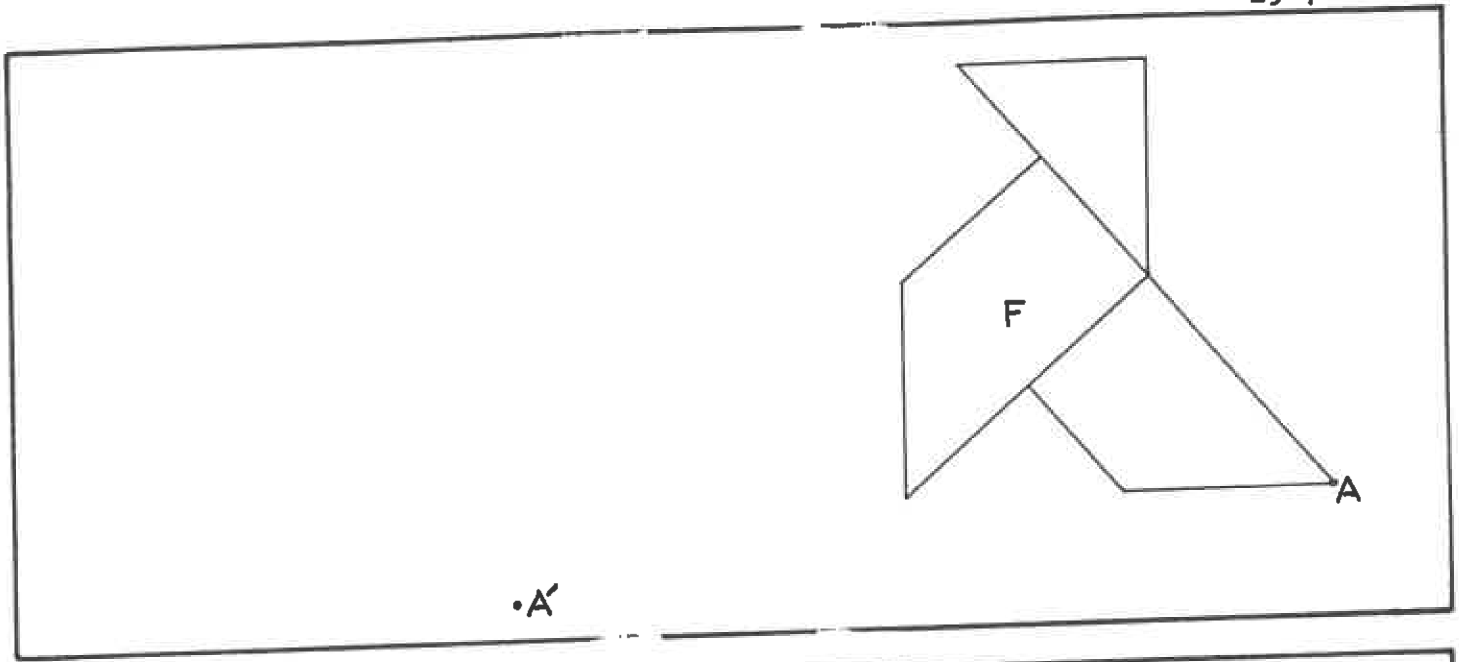
C) VOCABULAIRE ET NOTATION

On dit que l'on passe de F à F' par la TRANSLATION DE VECTEUR $\overrightarrow{AA'}$. On la note : $t_{\overrightarrow{AA'}}$.

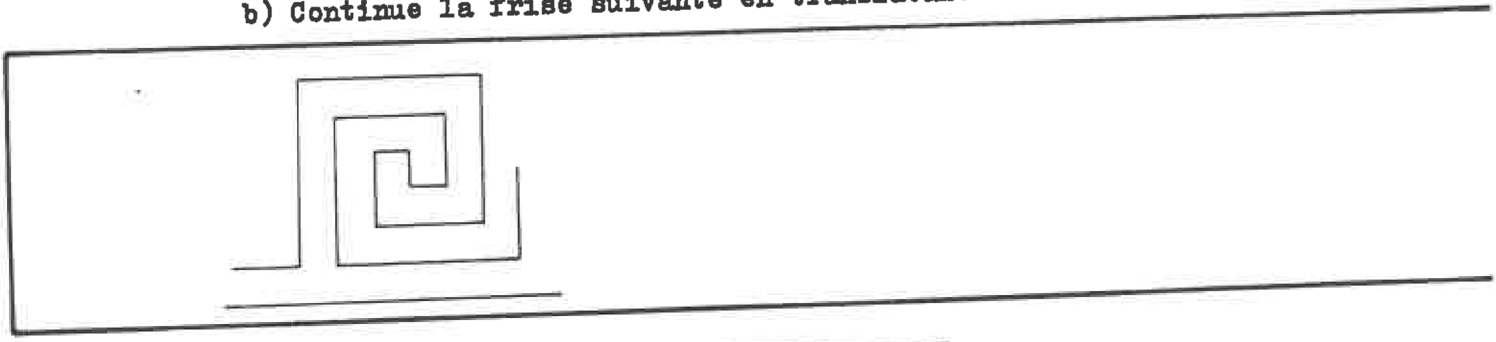
D) A VOUS DE TRANSLATER

a) Dans les 2 cas suivants, on se donne une figure F, un point A de F et un point A'.

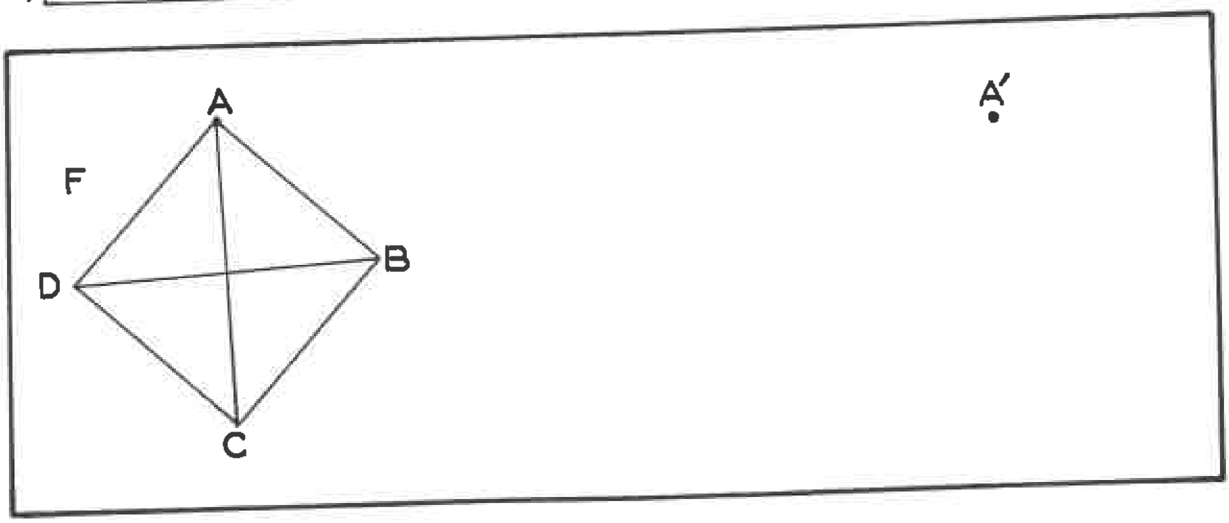
Construis l'image F' de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, c'est celle qui amène A sur A'



b) Continue la frise suivante en translatant le motif donné :



E) VECTEURS EGAUX : UNE PREMIERE CARACTERISATION



Construis l'image F' de F par $t_{\overrightarrow{AA'}}$, puis place les points B', C', D' et I', images respectives de B, C, D et I.

Quelle est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$? de vecteur $\overrightarrow{CC'}$? ...

Les translations $t_{\overrightarrow{AA'}}$, $t_{\overrightarrow{BB'}}$ ... sont les mêmes. On dira que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ ... sont égaux.

DEFINITION : L'égalité $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ signifie que l'on passe de A à A' et de B à B' par la même translation.

F) VECTEURS EGAUX : DEUXIEME CARACTERISATION

Nous allons donner une deuxième caractérisation des vecteurs égaux, c'est à dire une deuxième façon de reconnaitre des vecteurs égaux.

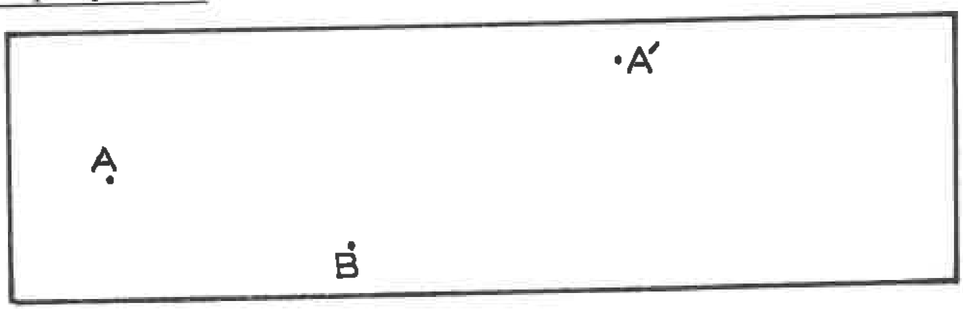
Sur la figure précédente, compare :

- Les directions des droites (AA') et (BB').
- Le sens des demi-droites [AA') et [BB').
- Les longueurs des segments [AA'] et [BB'] .

Concluons :

PROPRIETE : **SI** $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, **ALORS** :
- Les droites (AA') et (BB') sont ....
- Les demi-droites [AA') et [BB') sont ......
- Les segments [AA'] et [BB'] ont ....

Réciproquement :



Sur la figure ci-dessus, trace le point B' tel que l'on ait les 3 propriétés précédentes.

En utilisant du papier calque, trouve l'image de B par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$.

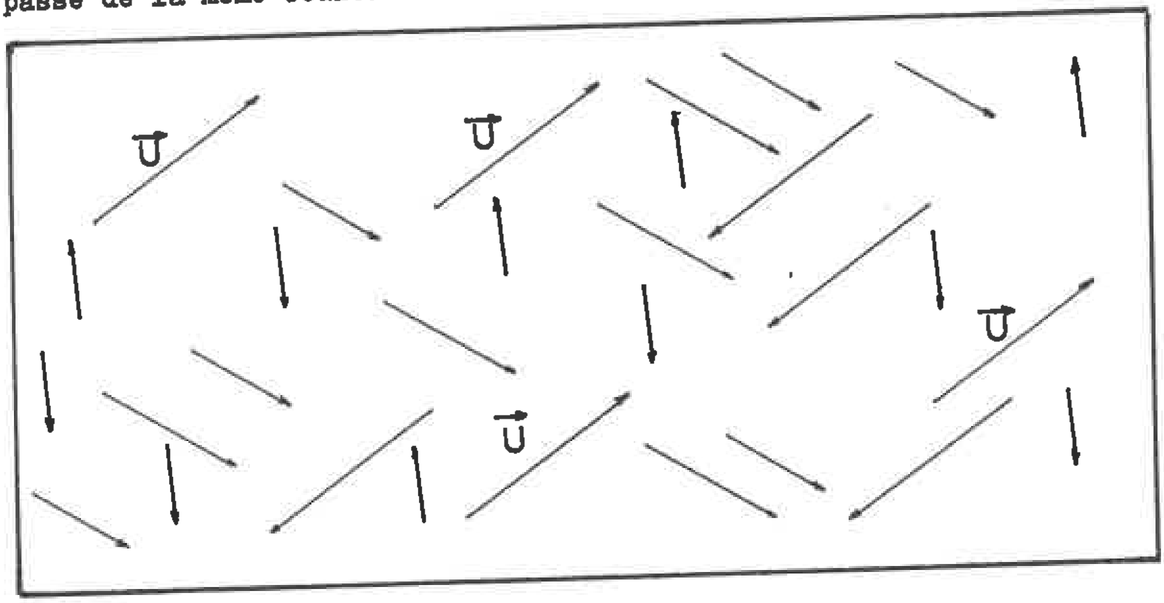
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$?

Ecris toi-même la réciproque de la propriété précédente :

PROPRIETE : SI - ....
- ....
- ....
ALORS : ....

EXERCICE 1 : La bataille d'Azincourt (qu'on a perdue contre les Anglais !)

a) Repasse de la même couleur les vecteurs égaux.

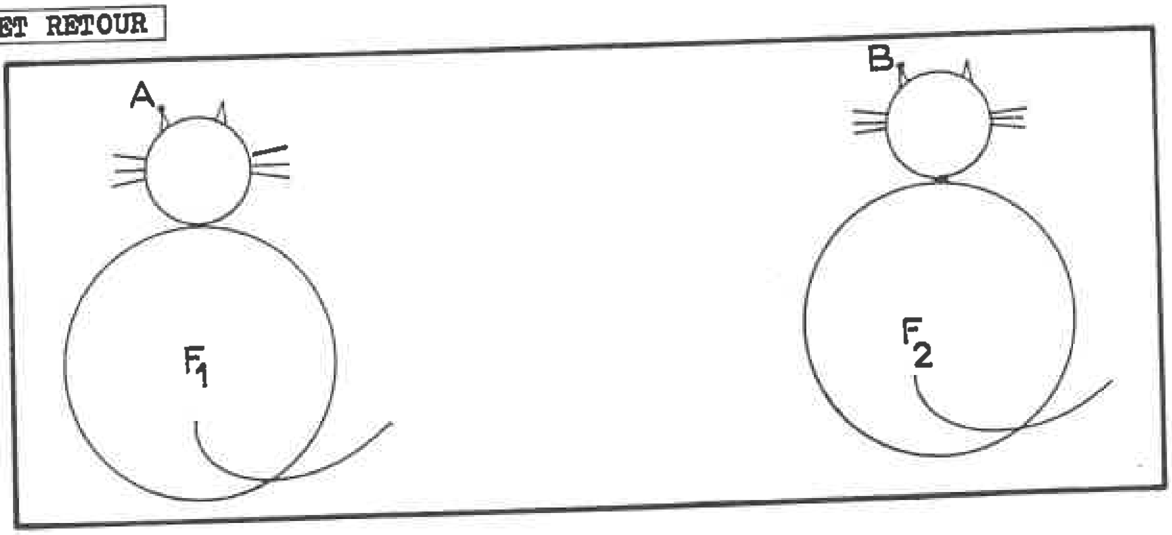


b) Combien de vecteurs différents sont représentés ci-dessus ?

c) Donne un nom à chacun d'eux, comme on l'a fait pour le vecteur U.

d) Trace 4 représentants d'un même vecteur, différent des précédents.

G) ALLER ET RETOUR



a) Quelle translation permet de passer de F_1 à F_2 ?

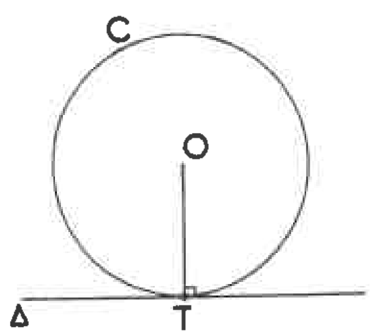
b) Quelle translation permet de passer de F_2 à F_1 ?

VOCABULAIRE ET NOTATION : La translaton $t_{\overrightarrow{BA}}$ est appelée la translation réciproque de $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et est noté $-\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

H) PROPRIETES DES TRANSLATIONS



a) Reproduis la figure précédente sur ton cahier.

b) On veut construire l'image de cette figure par la translation $t_{\overrightarrow{TT'}}$:

- Quelle est l'image du cercle C de centre O et de rayon 2,8 cm ?
- Quelle est l'image de la droite Δ ?
- Quelle est l'image du segment $[OT]$?

c) Construis l'image de la figure par $t_{\overrightarrow{TT'}}$.

PROPRIETES : - L'image d'une droite par une translation est ....
- L'image d'un segment par une translation est ....
- L'image d'un cercle par une translation est ....
- L'image d'un angle par une translation est ....

d) Invente d'autres propriétés du même type.

2 / VECTEURS ET PARALLELOGRAMMES

A) RAPPEL

a) Problème : Soient A et B deux points donnés. Quel est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité AM = MB ?

Fais une figure.

b) Remarque : Explique pourquoi on peut écrire indifféremment AM ou MA.

c) Réfléchissons :

- Si I est le milieu du segment [EF], alors quelle égalité a-t-on ?
- Réciproquement, si un point I vérifie l'égalité EI = IF, I est il le milieu de [EF] ?

d) En résumé :

- Pour M, l'égalité AM = MB ne caractérise pas le milieu de [AB] . - Pour M, l'égalité AM = MB caractérise tout point de la médiatrice de [AB] .

B) UNE APPLICATION DES VECTEURS

a) Problème : Soient A et B deux points donnés. Quel est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$?

Passons en revue les renseignements donnés sur M par l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$:

- Que peux-tu dire des droites (AM) et (MB) ?
- Qu'en conclus-tu pour les points A, B et M ? (Rappelle la propriété que tu utilises.)
- Le point M peut-il être à l'extérieur du segment [AB] ? Pourquoi ?
- Que peux-tu dire des longueurs AM et MB ?
- Donne maintenant la solution du problème.

b) Remarque : Peut-on écrire indifféremment $\overrightarrow{AM}$ ou $\overrightarrow{MA}$? Explique pourquoi.

c) Réfléchissons :

- Si I est le milieu du segment [EF] , alors quelle égalité vectorielle peux-tu écrire ?
- Réciproquement, si I est un point qui vérifie l'égalité $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$, que peux-tu en déduire alors pour I ?

d) En résumé :

A et B étant deux points donnés, pour M, l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ caractérise le milieu du segment [AB] .

C) CARACTERISATION DU PARALLELOGRAMME

a) Rappel

EXERCICE 2 : i- Soient D, E et N trois points non alignés.

Construire à l'aide du compas un point T tel que DT = EN et NT = ED.

Y-a-t-il plusieurs solutions ? Que dire du quadrilatère DENT ?

ii- M, O et N sont trois points non alignés.

Construire au compas un point T tel que MONT soit un parallèlogramme.

EXERCICE 3 : i- C, L et E sont trois points non alignés.

Construire à l'aide d'une règle graduée un point F tel que les segments [CE] et [LF] aient même milieu.

Y-a-t-il plusieurs solutions ?

Que dire du quadrilatère CLEF ?

ii- R, U et S sont trois points non alignés.

Construire à l'aide d'une règle graduée un point E tel que RUSE soit un parallèlogramme.

EXERCICE 4 : M, A et I sont trois points non alignés.

Construire à l'aide du compas et d'une équerre un point S tel que (MS) // (A

et MS = AI.

Y-a-t-il plusieurs solutions ? MAIS est-il toujours un parallèlogramme ?

EXERCICE 5 : Soient A, B et C trois points non alignés.

Trouve tous les points qui forment un parallèlogramme avec A, B et C. (A, B C ne sont pas forcément dans cet ordre.)

Nomme les parallèlogrammes obtenus.

EXERCICE 6 : Quelles ont les propriétés qui permettent de déduire que le quadrilatère MUET est un parallèlogramme ? :

1 - (MU) // (ET)

2 - (MU) // (ET) et (MT) // (EU)

3 - (MU) // (ET) et MU = ET

4 - (MU) // (ET) , MU = ET et U et E sont d'un même côté par rapport à (MT).

5 - [ME] et [UT] se coupent en leur milieu.

6 - MU = ET et MT = EU

7 - MU = ET , MT = EU et M et T sont du même côté par rapport à (EU)

b) Application des vecteurs

i - Problème : Soit I, R et E trois points non alignés.

Construire M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{RI}$.

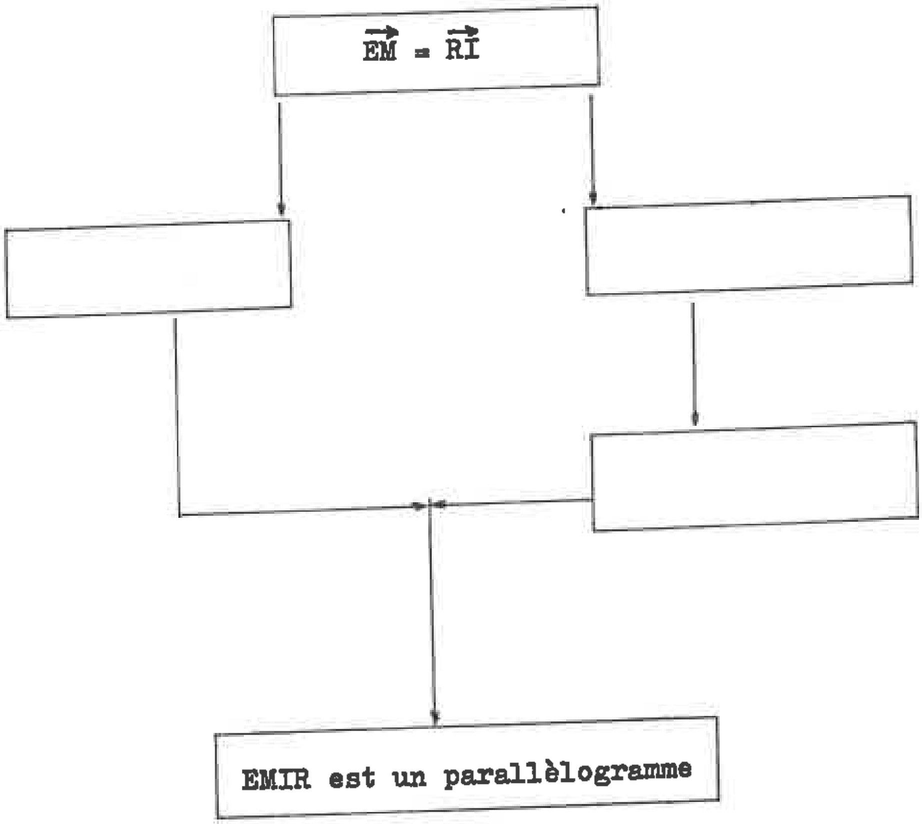
Y-a-t-il plusieurs solutions ? Que dire du quadrilatère ii - Démontrons le théorème :

SI $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{RI}$ ALORS EMIR est un parallèlogramme.

- Quelle est l'hypothèse de ce théorème ?
- Quelle est sa conclusion ?
- Démontre ce théorème en mettant les étiquettes suivantes dans un ordre logique :

1 - Dans une translation, l'image d'une droite est une droite parallèle ; donc (ER) // (MI).
2 - Si $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{RI}$ alors (EM) // (RI).
3 - Si (EM) // (RI) et si (ER) // (MI) alors EMIR est un parallèlogramme.
4 - Si EM = RI alors l'image d'une droite (ER) dans la translation de vecteur RI est la droite (MI).

- Avec ce que tu viens de faire, complète l'organigramme suivant :



iii - Conclusion

Complète les théorèmes suivants :

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors le quadrilatère .... est un parallèlogramme.
- Si ABCD est un parallèlogramme alors $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ et $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$
- Si AB = CD alors $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$

D) EXERCICES

EXERCICE 7 : Quelles sont les égalités qui permettent de déduire que X est le milieu du segment [UP] :

a) UX = XP b) $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{XP}$ c) $\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{PX}$ d) $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{PX}$

e) UX = XP et X $\in$ (UP)

EXERCICE 8 : MAUD est un parallèlogramme et MANU aussi. Montre que U est le milieu de [DN].

EXERCICE 9 : Parmi les égalités suivantes, quelles sont celles qui permettent de déduire que PLOC est un parallèlogramme :

a) $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OC}$ c) $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{CO}$

d) $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{CO}$ e) $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{LC}$ f) $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{CO}$

EXERCICE 10 : Démontre que si CAME et CISE sont deux parallèlogrammes alors MAIS est aussi un parallèlogramme.

EXERCICE 11 : Soient BIG un triangle et R, A et T les milieux respectifs de [BI], [IG] et [BG].

Démontre, en te servant des étiquettes de la page 29-12 que $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{AI}$.

EXERCICE 12 : MIRO est un parallèlogramme. L est le symétrique de M par rapport à I.
P est le symétrique de R par rapport à O.
Démontre que PQLI est un parallèlogramme. Pour cela tu utiliseras les étiquettes de la page 29-12.

EXERCICE 13 : ABCD est un parallèlogramme. B' est le symétrique de B par rapport à C.
B" est le symétrique de B' par rapport à D.
Tu vas démontrer que A est le milieu de [BB"].

a) Montre d'abord que ADB'C est un parallèlogramme en te servant des étiquettes de la page 29-12.

b) Démontre de même que ACDB" est un parallèlogramme.

c) Montre enfin que A est le milieu de [BB"]. Si tu n'y arrives pas, revois l'exercice 8.

EXERCICE 14 : ABCD est un parallèlogramme. M est un point quelconque. M' est le symétrique de M par rapport à C. M" est le symétrique de M' par rapport à D. N est le symétrique de M" par rapport à A.
Démontre que B est le milieu de [MN].
Pour cela, tu pourras te servir de l'exercice 13 et démontrer que
$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{B'M'} = \overrightarrow{M''B''} = \overrightarrow{BN}$.

Etiquettes pour l'exercice 11 :

1 - Si TAIR est un parallèlogramme alors $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{AI}$

2 - A milieu de [GI] et T milieu de [GB] donc (AT) // (BI)

3 - Si (RT) // (IG) et (AT // (BI) alors TAIR est un parallèlogramme

4 - R milieu de [BI] et T milieu de [BG] donc (RT) // (IG)

Etiquettes pour l'exercice 12 :

1 - Si O est le milieu de [PR] alors $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR}$

2 - Si $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{IL}$ alors POLI est un parallèlogramme (mais pas POIL)

3 - $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR}$; $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{MI}$; $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IL}$; donc $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{IL}$

4 - MIRO est un parallèlogramme. Donc $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{OR}$

5 - Si I est le milieu de [ML] alors $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IL}$

6 - P est le symétrique de R par rapport à O. Donc O est le milieu de [PR] .

7 - L est le symétrique de M par rapport à I. Donc I est le milieu de [ML] .

Etiquettes pour l'exercice 13-a

1 - $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB'}$ donc ADBC est un parallèlogramme

2 - ABCD est un parallèlogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

3 - B' est le symétrique de B par rapport à C donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$

4 - $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB'}$

A CONSERVER PAR L'ELEVE

3 / TRANSLATIONS ET SYMETRIES

ACTIVITE 1 : COCOTTES ET FRISES

(d'après "Rosaces, frises et pavages", chez CEDIC)

A) Tu vas découvrir dans cette activité les 7 types de frises existants.

Pour les construire, tu vas devoir utiliser les différentes transformations du plan que tu connais déja : symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation.

Pour chaque type de frise, tu devras suivre les consignes de construction proposées.

Pour t'aider, ces premières frises te sont proposées sur du papier pointé. Si tu es vraiment fort, n'hésite pas à continuer au-dela du paier pointé, en utilisant règle, équerre et compas.

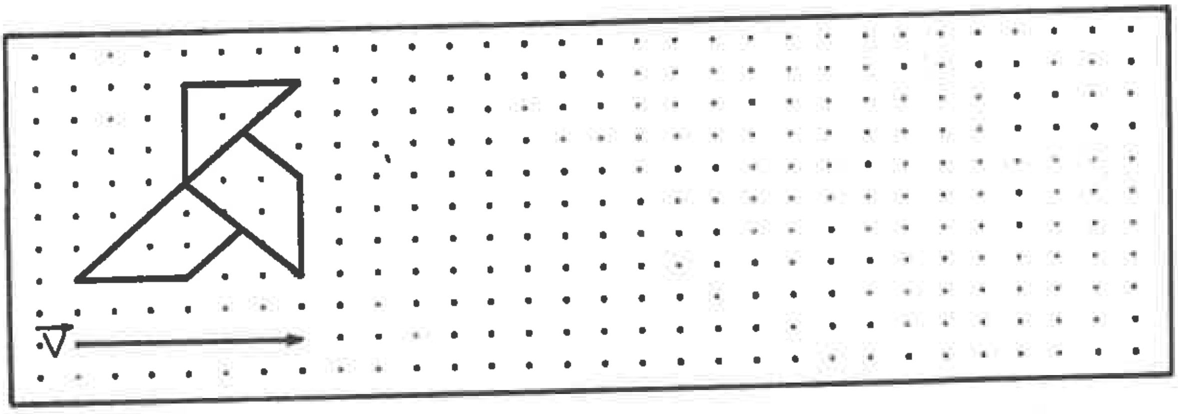
Si tu n'arrives pas à démarrer ta frise, un début de solution t'est proposé en B), page 29 - ; mais n'utilise cette aide qu'après avoir bien réfléchi.

TYPE 1 : TRANSLATIONS

Soit t la translation de vecteur $\vec{V}$. Construis l'image de la cocotte par la translation t.

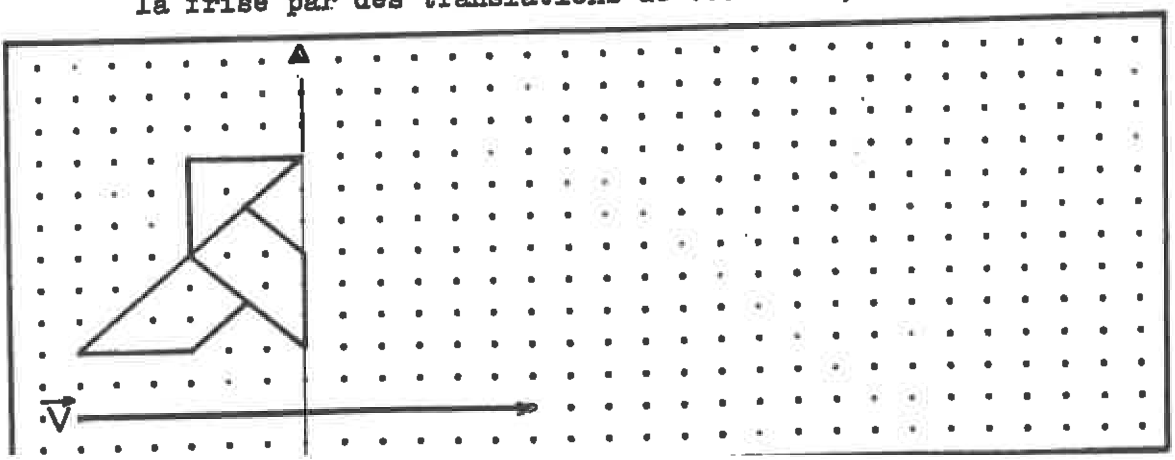
Recommence avec la nouvelle cocotte.

On obtient ainsi la frise la plus simple avec le motif proposé.



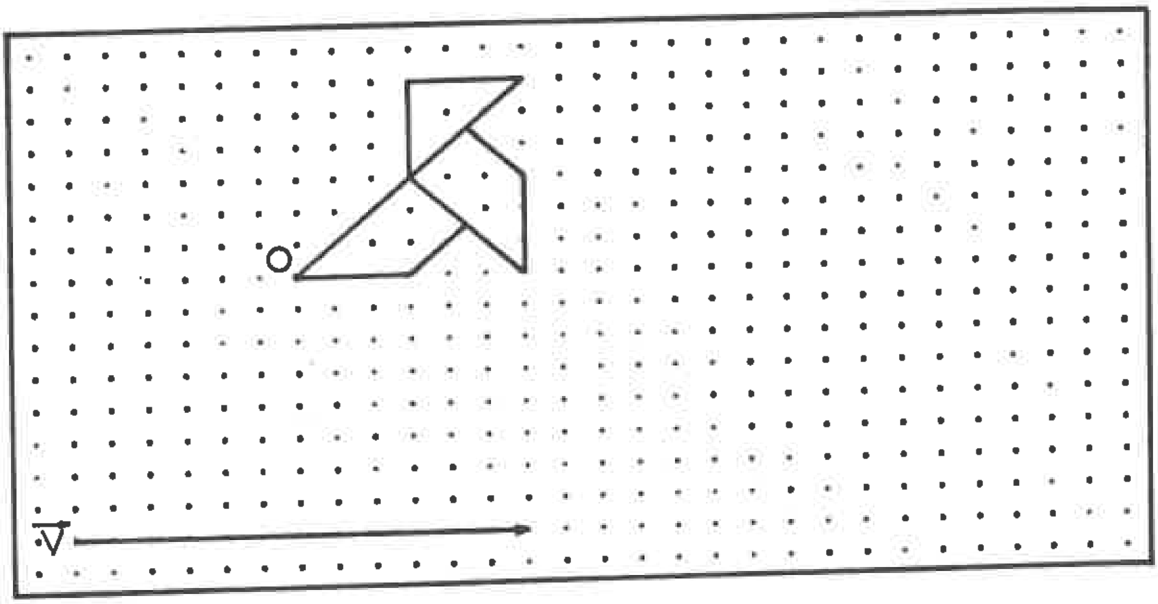
TYPE 2 : SYMETRIE ORTHOGONALE. TRANSLATIONS

Construis l'image de la cocotte dans la symétrie d'axe Δ. Complète la frise par des translations de vecteur $\vec{V}$, comme dans le TYPE 1.



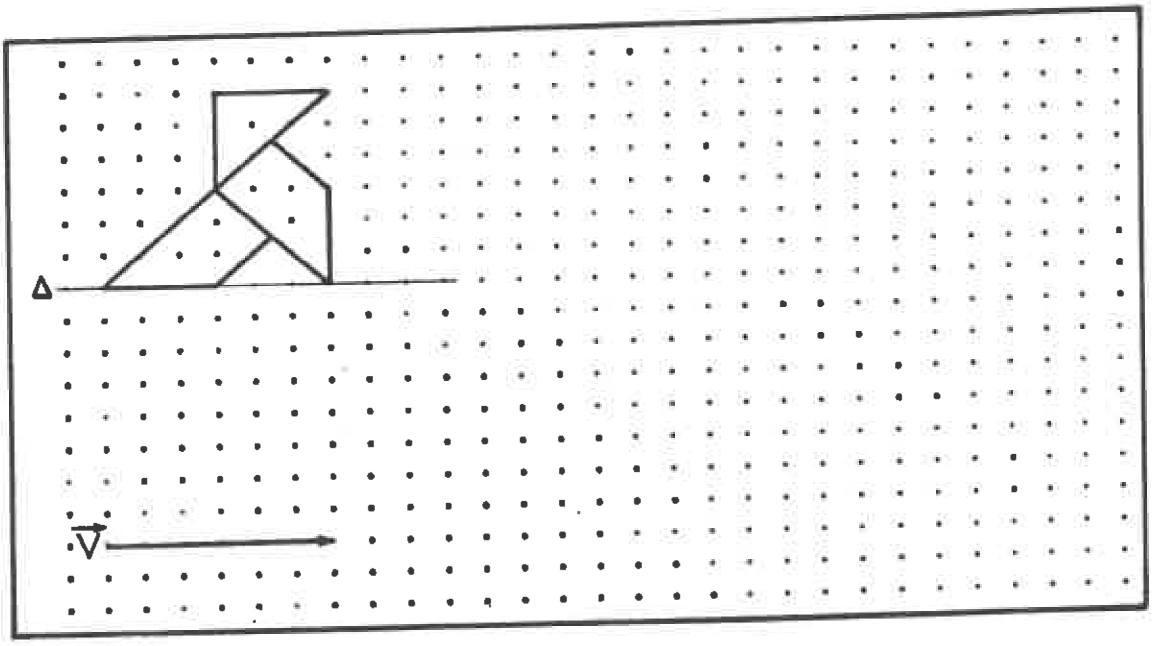
TYPE 3 : SYMETRIE CENTRALE. TRANSLATIONS

Construis l'image de la cocotte dans la symétrie de centre O. Complète la frise par des translations de vecteur $\vec{V}$, comme dans le TYPE 1.



TYPE 4 : SYMETRIE ORTHOGONALE. TRANSLATIONS

Construis l'image de la cocotte dans la symétrie d'axe Δ. Complète la frise par des translations de vecteur $\vec{V}$, comme dans le TYPE 1.

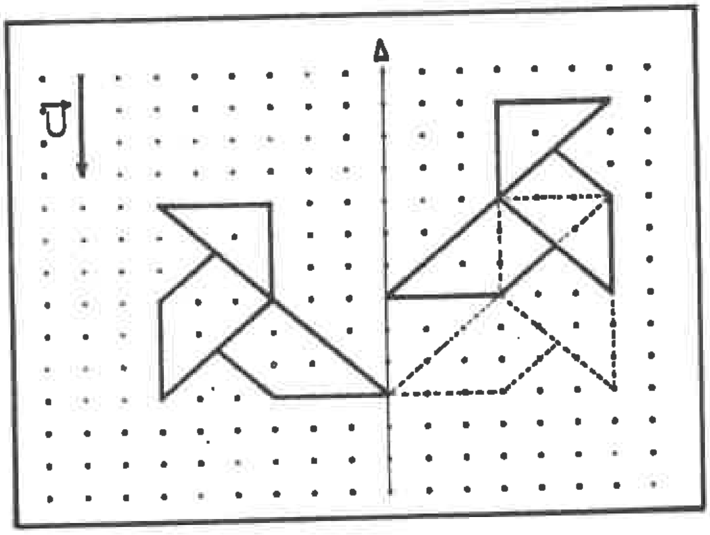


$\boxed{\text{TYPE 5}}$: "SYMETRIE-TRANSLATION". TRANSLATIONS

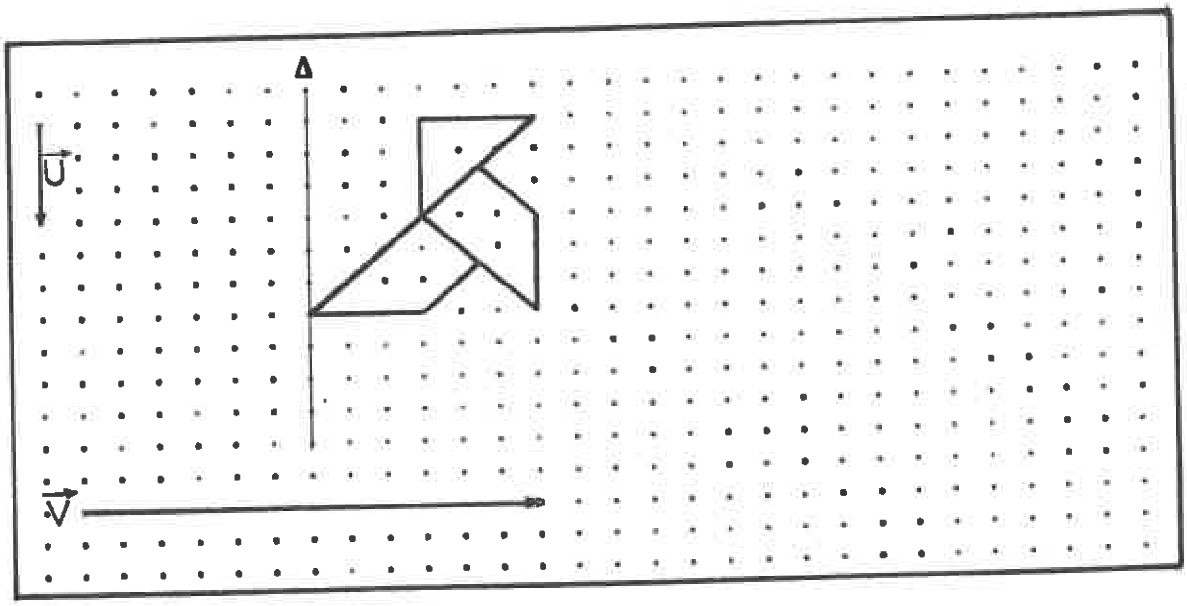
Qu'est-ce qu'une symétrie-translation ? Regarde le dessin ci-dessous :

J'ai construit en pointillé l'image de la cocotte dans la translation de vecteur $\vec{U}$. J'ai construit le symétrique de cette cocotte par la symétrie d'axe Δ.

J'efface ensuite l'image intermédiaire (celle qui est en pointillé). J'ai ainsi fait une symétrie-translation d'axe Δ et de vecteur $\vec{U}$.

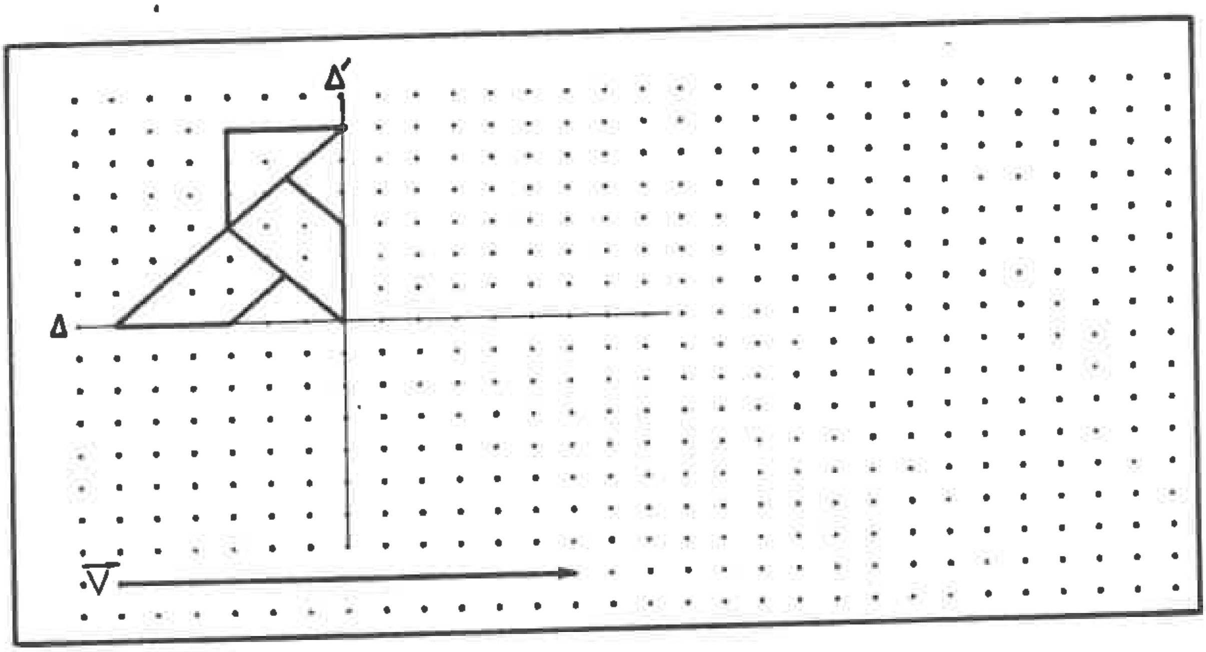


Construis l'image de la cocotte dans la symétrie-translation d'axe Δ et de vecteur $\vec{U}$. Complète la frise par des translations de vecteur $\vec{V}$, comme dans le TYPE 1.



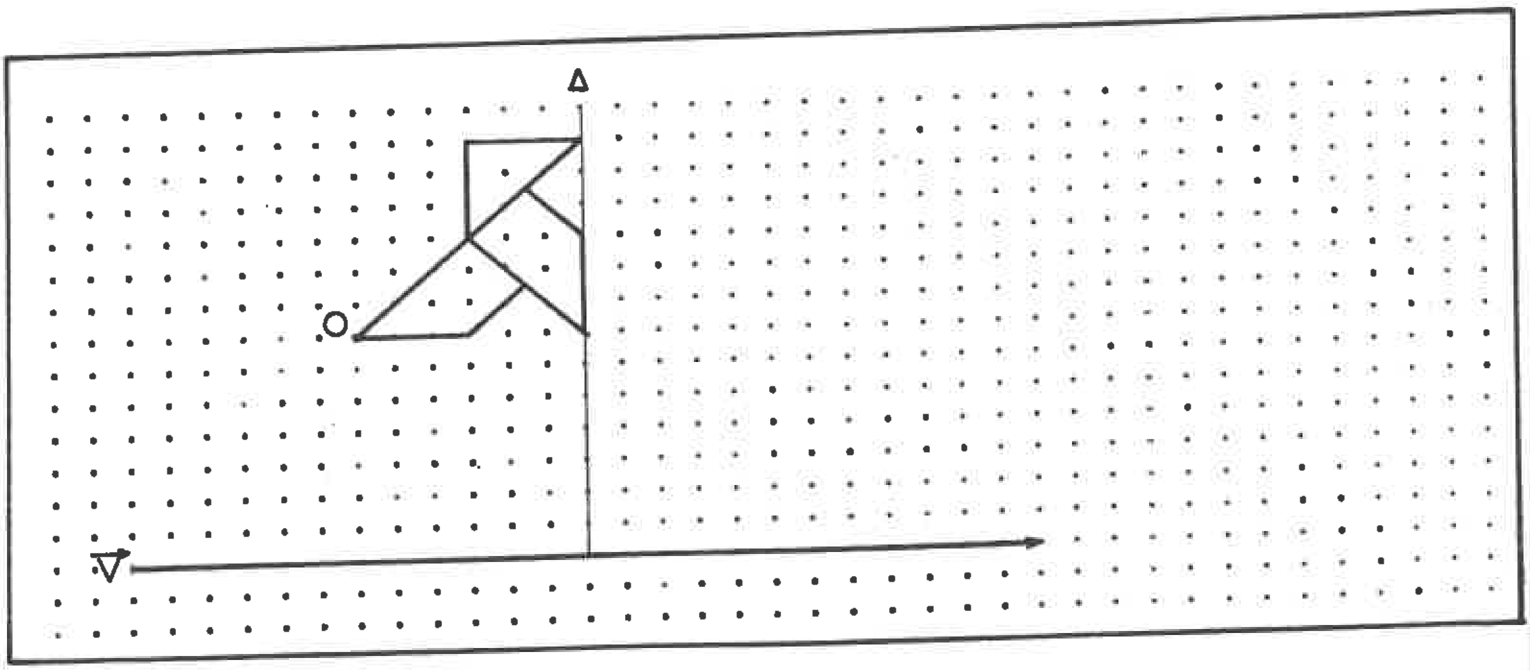
TYPE 6 : SYMETRIE ORTHOGONALE ; SYMETRIE ORTHOGONALE. TRANSLATIONS

Construis l'image de la cocotte dans la symétrie d'axe Δ.
Construis l'image des 2 cocottes obtenues dans la symétrie d'axe Δ'.
Complète la frise par des translations de vecteur $\vec{V}$, comme dans le TYPE 1.

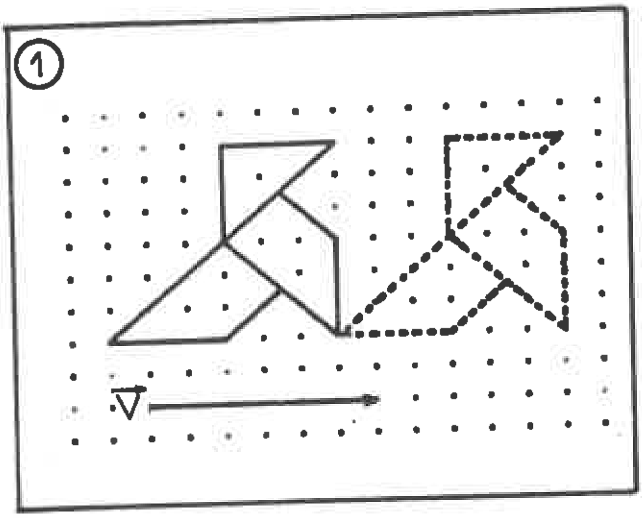


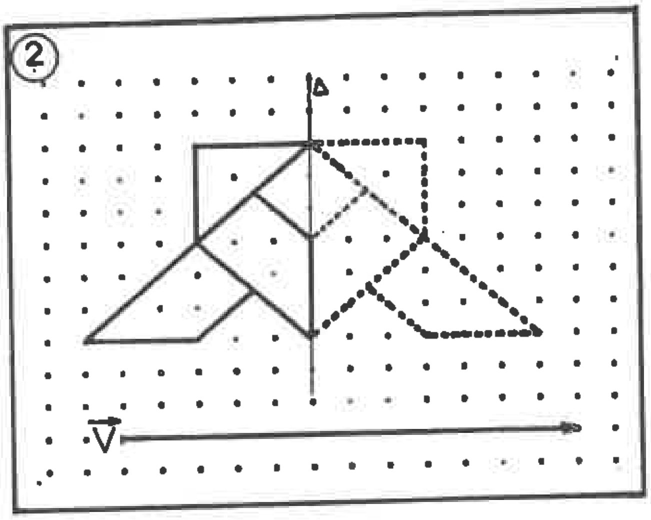
TYPE 7 : SYMETRIE CENTRALE ; SYMETRIE ORTHOGONALE. TRANSLATIONS

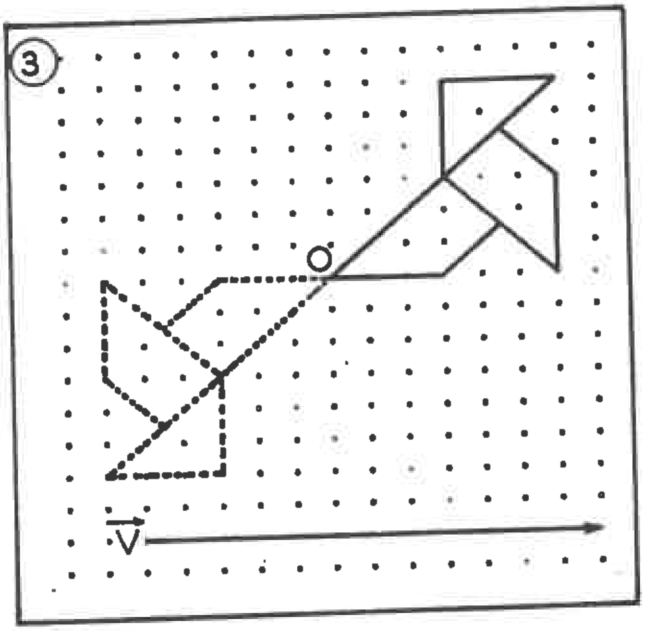
Construis l'image de la cocotte dans la symétrie de centre O.
Construis l'image des deux cocottes obtenues dans la symétrie d'axe Δ. Complète la frise par des translations de vecteur $\vec{U}$, comme dans le TYPE 1. Attention : pour cette frise, tu seras obligé de déborder du papier pointé pour le deuxième motif.

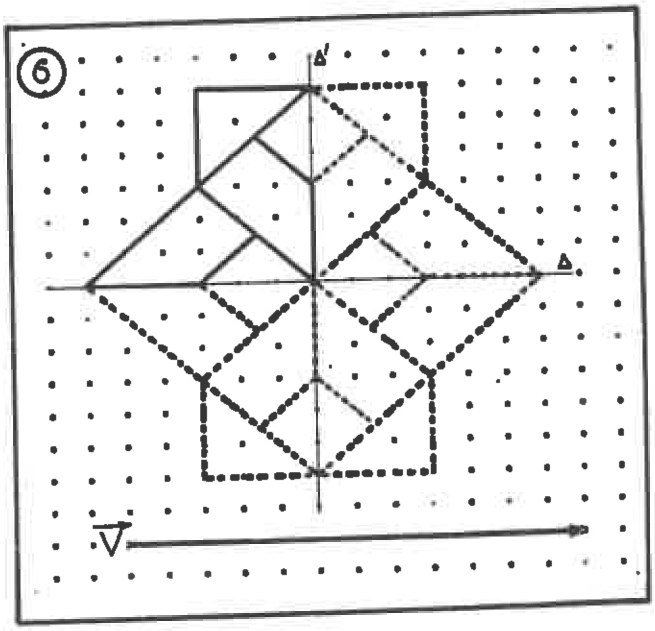


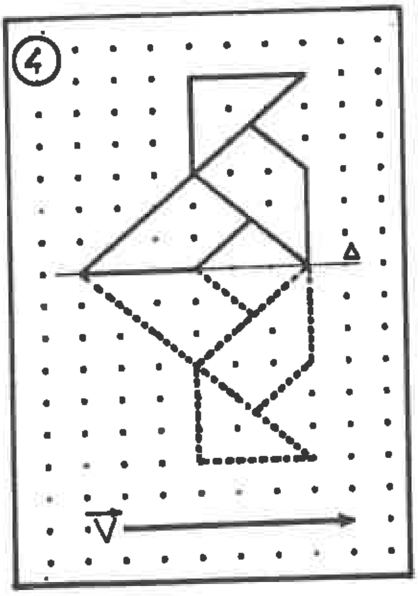
B) Début des solutions (indiqué en pontillé)

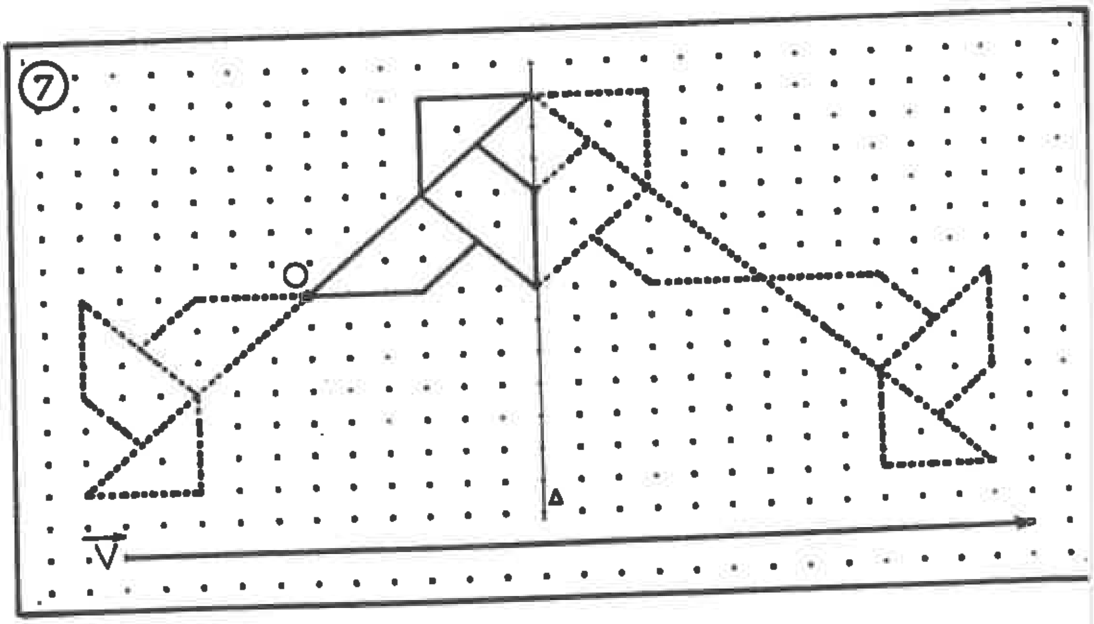






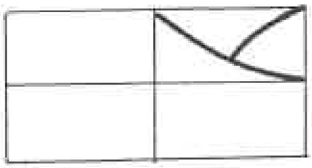




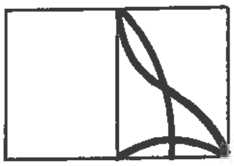


C) Fais de belles frises !

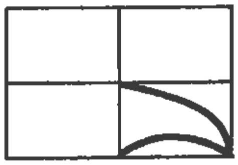
TYPE 6



TYPE 4



TYPE 3

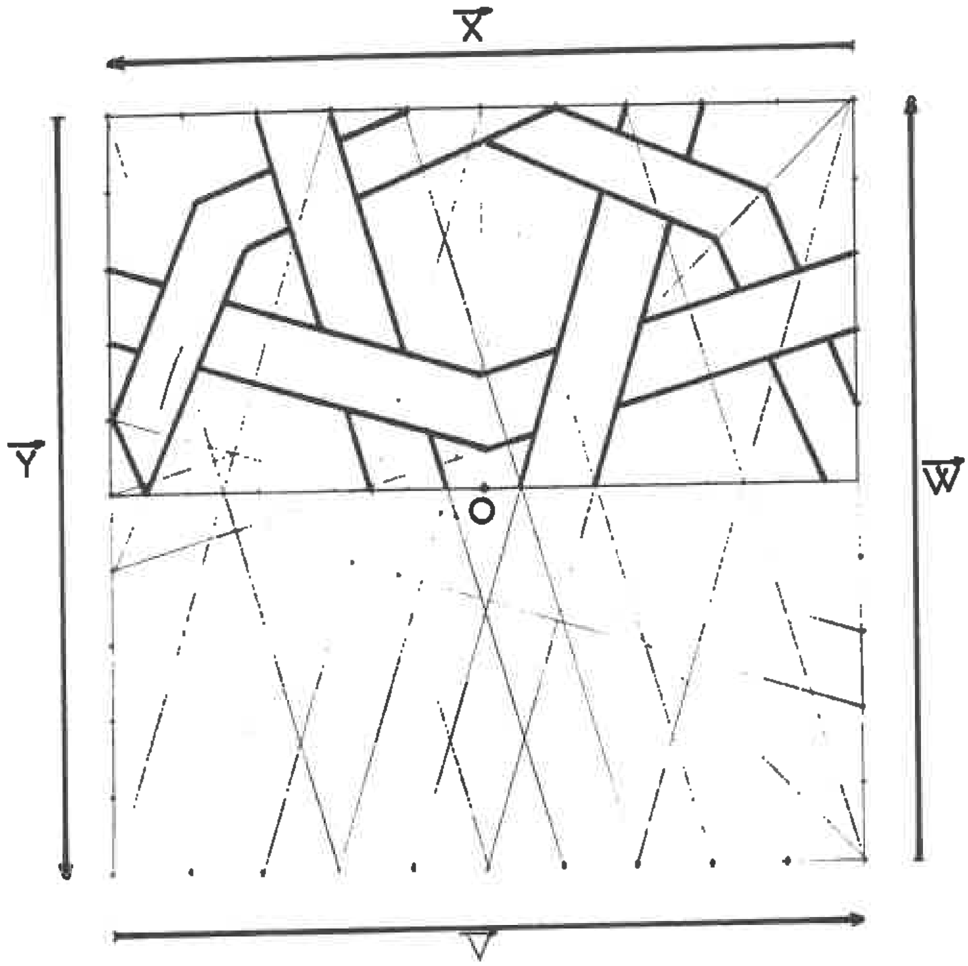


TYPE 2

TYPE 1

FRISES ET PAVAGES

(D'après "Le Maroc et l'artisanat traditionnel dans l'architecture" A. PACCARD)



Le dessin ci-dessus représente un élément de décoration dans l'art marocain et musulman en général.

Pour avoir le motif complet, procède d'abord à une symétrie de centre O. Ensuite choisis un vecteur de translation et effectue les translations successives. Cela revient à procéder à une transformation de type 3.

Tu peux paver une surface aussi grande que tu veux en appliquant au motif obtenu après la symétrie centrale, des translations dans toutes les directions indiquées par les vecteurs.

Il ne reste plus, ensuite, qu'à colorier !

ACTIVITE 2 : OU SONT PASSES LES POINTS

A) PROBLEME DE CONSTRUCTION ET SYMETRIE CENTRALE

Propriété à utiliser : Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite est une ....

a) Avant-problème

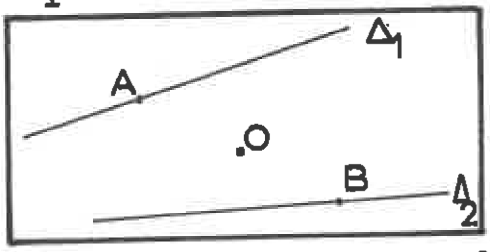
On sait que : $A \in \Delta_1$; $B \in \Delta_2$; O est le milieu de [AB] .

Construire le symétrique de la droite Δ_1 dans la symétrie de centre O.

Par quel point passe cette droite ?

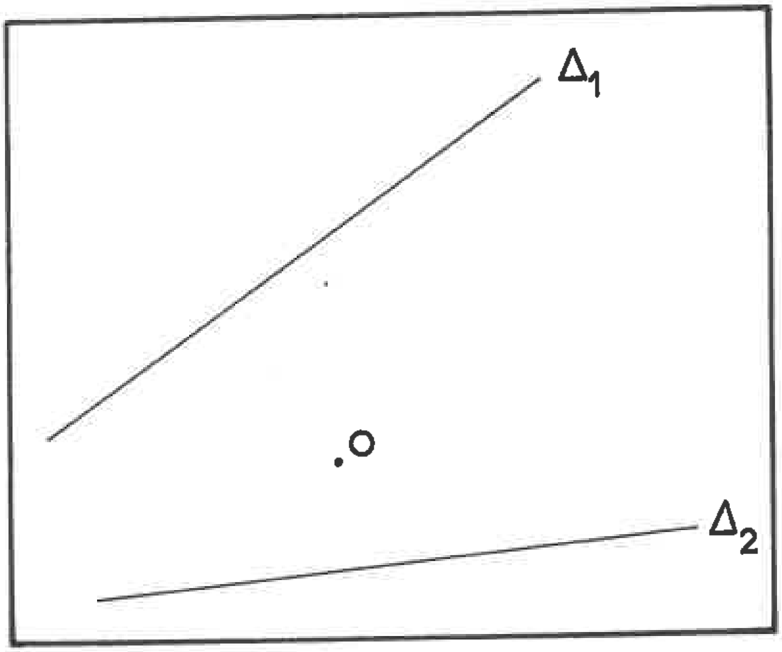
Pouvait-on le prévoir ?

Comment est alors caractérisé B ?



b) Le problème

Construire un segment [AB] connaissant son milieu O, sachant que le point A appartient à une droite donnée Δ_1 et que le point B appartient à une droite Δ_2.



c) Méthodologie de résolution

Utiliser ce qui a été fait dans l'avant-problème

d) Cas particulier

Examiner le cas où $\Delta_1 // \Delta_2$. Combien de solutions y-a-t-il, suivant la position de O ?

B) OU TOURNE L'ORTHOCENTRE (SYMETRIE CENTRALE)

Propriétés à utiliser :

- Si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre un côté de ce triangle, ce triangle est .... et ce côté est ....
- Dans une symétrie centrale, l'image d'un cercle est ....

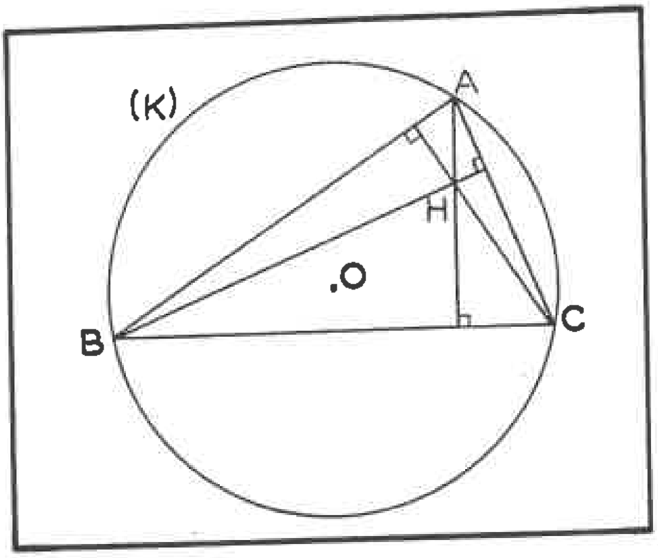
a) Avant-problème

i - (ABC) est un triangle, (K) est son cercle circonscrit et H est son orthocentre.
Construis le point A', symétrique de A par rapport à O.
Que peux-tu dire de [AA'] pour le cercle (K) ?

ii - Montre que BHCA' est un parallèlogramme.

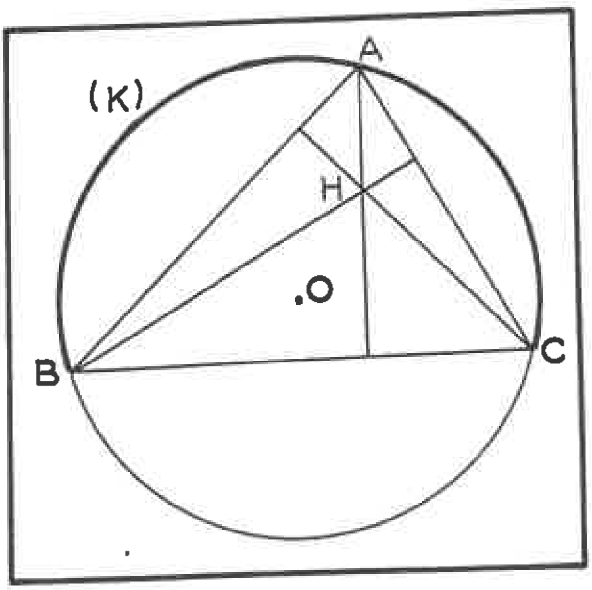
iii - Soit M le milieu de [BC] ; Quel est le symétrique de A' par rapport à H ?

iiii - A' ∈ (K), que peux-tu en conclure pour H ? Trace la figure ainsi obtenue à laquelle appartient H.



b) Le problème

On garde les données de l'avant problème. On fixe B et C, et on fait tourner le point A sur l'arc de cercle $\widehat{BC}$ tracé en épais.
Où se déplace H ?
Trace la figure que H décrit lorsque A se déplace de B à C sur l'arc $\widehat{BC}$.

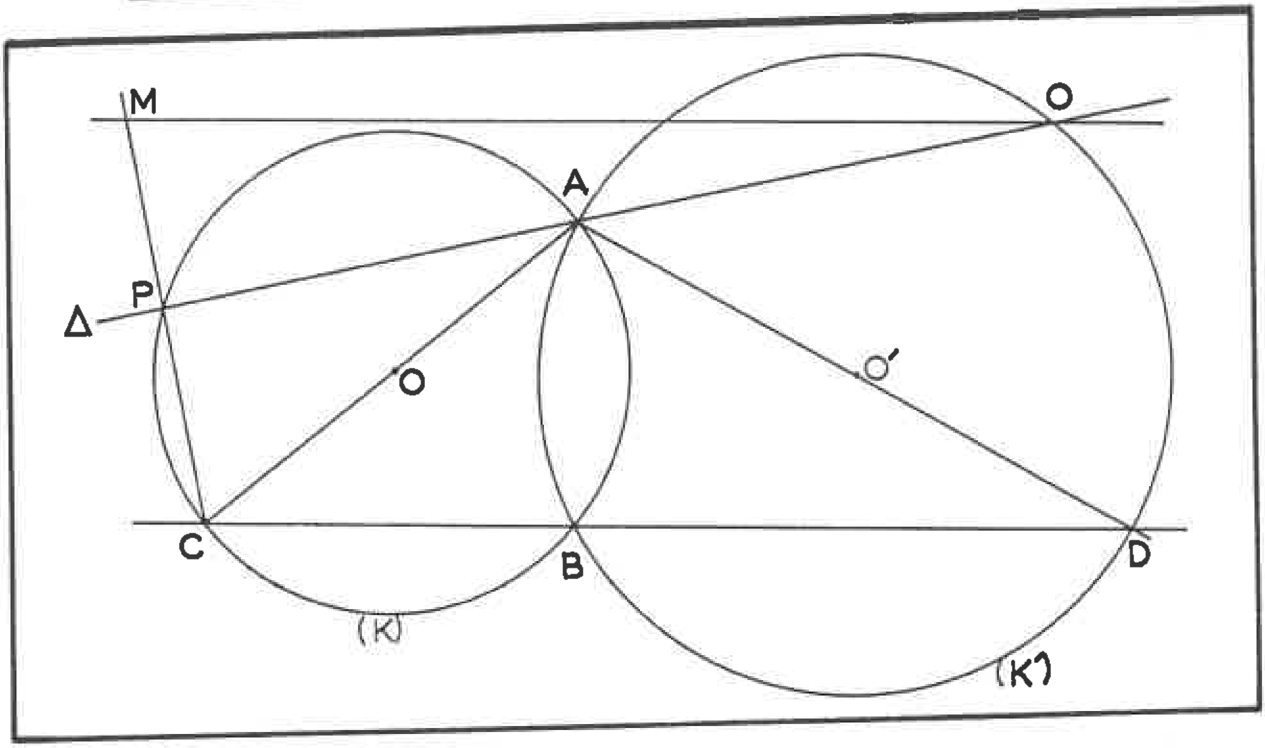


C) SECANTE VARIABLE ET TRANSLATION

Propriétés à utiliser :

- Si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre un côté de ce triangle alors ce triangle est .... et ce côté est ....
- Dans une translation, l'image d'un cercle est ....

a) Avant-problème



Deux cercles (K) et (K') se coupent en A et B. Soient C et D les points diamétralement opposés à A sur ces deux cercles.

Une droite Δ passant par A coupe en P le cercle (K) et en Q le cercle (K'). La droite (CP) coupe en M la parallèle à (CD) menée par Q.

i - Que peux-tu dire du quadrilatère CDQM ?

ii - Trouve une transformation permettant de passer de Q à M.

b) Le problème

On fait tourner la droite Δ autour de A.

Où se déplace Q ?

Que devient alors le point M ?

Trace la figure que décrit M lorsque Δ tourne autour de A.

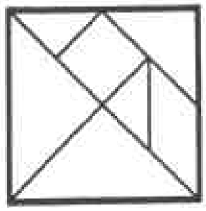
ACTIVITE 3 : PUZZLES, AIRES ET TRANSFORMATIONS

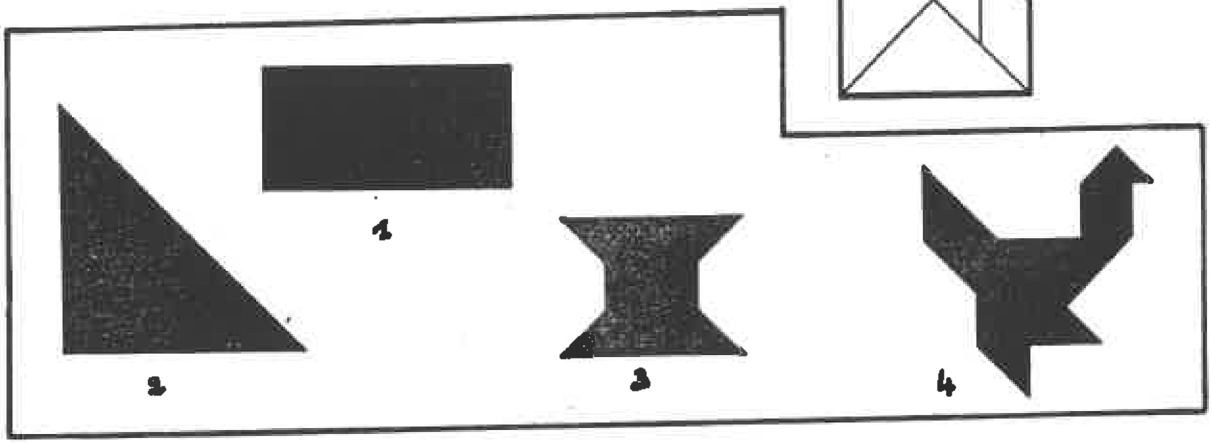
A) PUZZLES ET AIRES

Pour comparer les aires de différentes surfaces, les chinois utilisaient volontiers le principe du rapiécage : si on dispose autrement les morceaux découpés d'une figure géométrique, sans chevauchement, alors on obtient une autre figure ayant la même aire que la première.

Le principe est illustré par le jeu chinois du "TANGRAM". Avec les 7 morceaux d'un carré, il s'agit de réaliser des centaines de figures différentes.

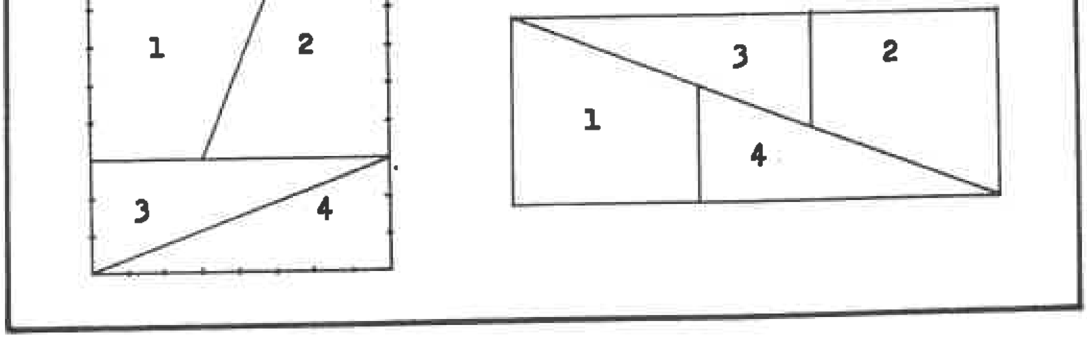
EXERCICE 13 : Reproduis le carré ci-contre, en prenant 5 cm comme côté.
Essaie alors de retrouver les différentes figures ci-dessous :





Quelle est l'aire de chacune de ces figures ?

ATTENTION : Représente ce carré sur une feuille de papier millimétré. Fais la construction de manière précise. Découpe suivant les traits. Reconstitue le rectangle. Compare les aires. Que constates-tu ?



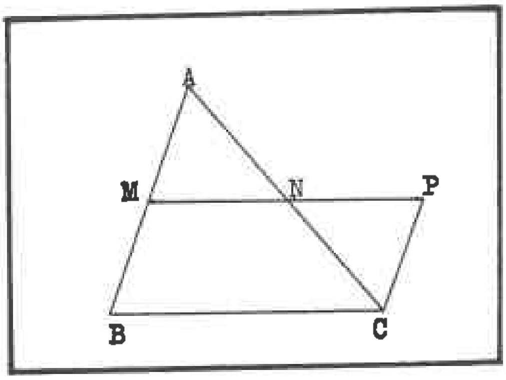
Conclusion : Il faut se méfier de ce que l'on croit voir !

B) DU TRIANGLE AU PARALLELOGRAMME

Nous voulons découper un triangle de manière à obtenir un parallèlogramme en recomposant les pièces.

a) Essaie par différentes méthodes.

b) Voici une solution "démontrable"

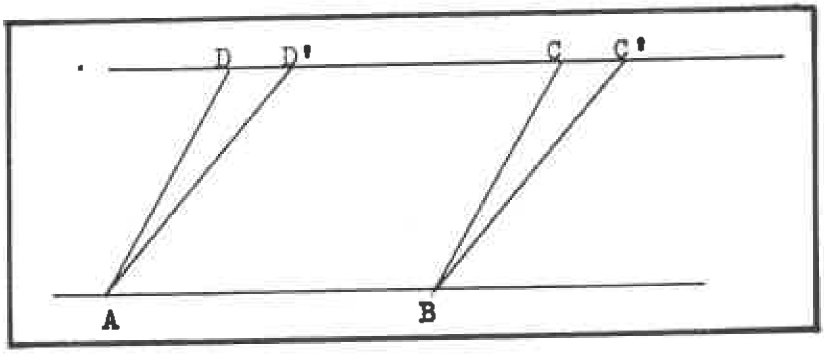


Soit M le milieu de [AB] .
Soit N le milieu de [AC] .
Utilise une symétrie centrale de centre N pour établir le résultat.

C) DU PARALLELOGRAMME AU PARALLELOGRAMME

a) Premier cas

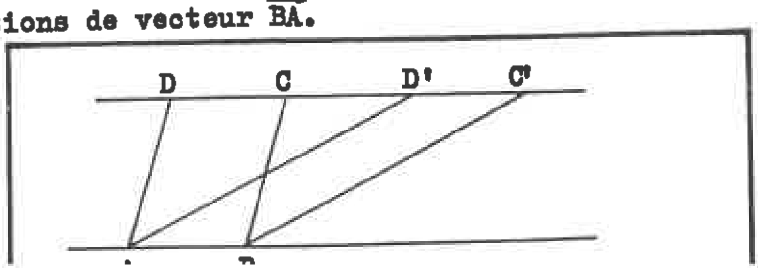
Soit (ABCD) et (A'B'C'D') deux parallèlogrammes tels que A = A' et B = B' et que C, D, C' et D' soient alignés.
On suppose en outre que D'∈ [CD] .



Montre que le découpage proposé peut être validé par une translation. Effectue alors le découpage pour vérifier concrètement.

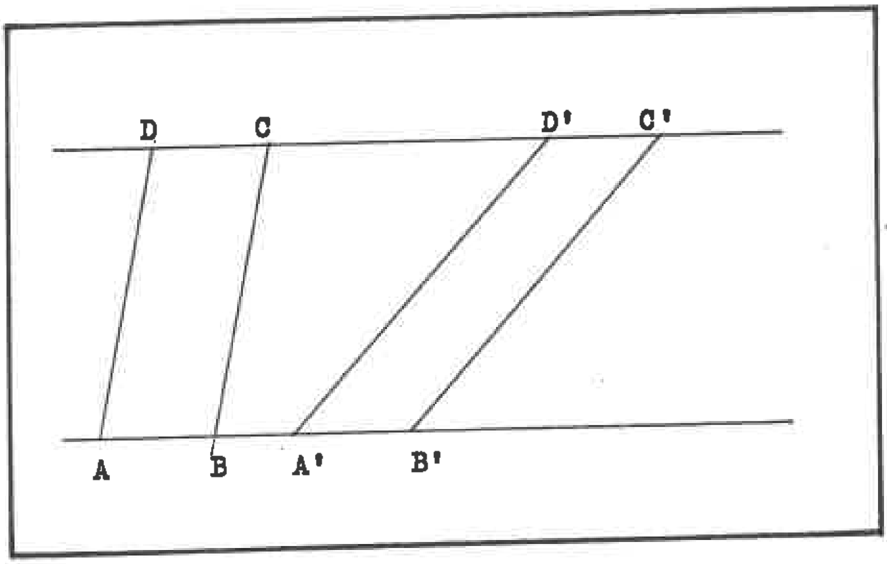
b) Deuxième cas

Mêmes données que dans le premier cas, mais D'∉ [CD] .
Vérifie qu'on peut se ramener au cas précédent par des translations de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



c) Cas général

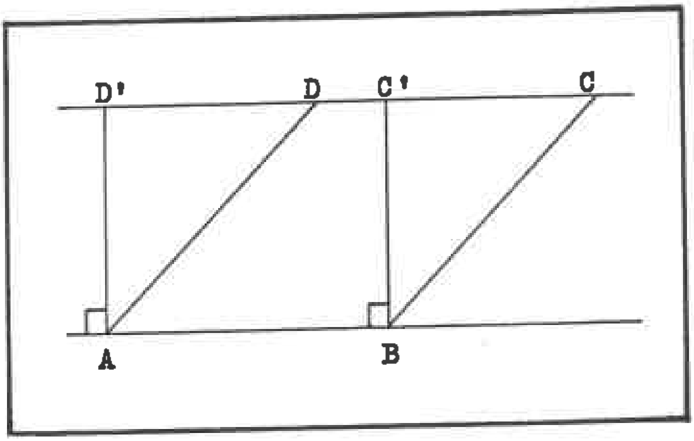
On sait que AB = A'B'. Montre que l'on peut se ramener au cas précédent par une translation.



Question : - Quelles étaient les deux caractéristiques communes des parallèlogrammes précédents ?
- Pouvait-on en déduire que ces parallèlogramme avaient même aire ?

D) DU PARALLELOGRAMME AU RECTANGLE

En utilisant la partie C), montre qu'on peut découper (ABCD) pour obtenir un rectangle (A'B'C'D').



Généralisation : Montre qu'on peut toujours obtenir un rectangle à partir d'un parallèlogramme par découpage.

E) DU TRIANGLE AU RECTANGLE

En utilisant B), C) et D), montre qu'on peut toujours obtenir un rectangle en découpant convenablement un triangle.

Réalise effectivement un rectangle à partir d'un triangle.

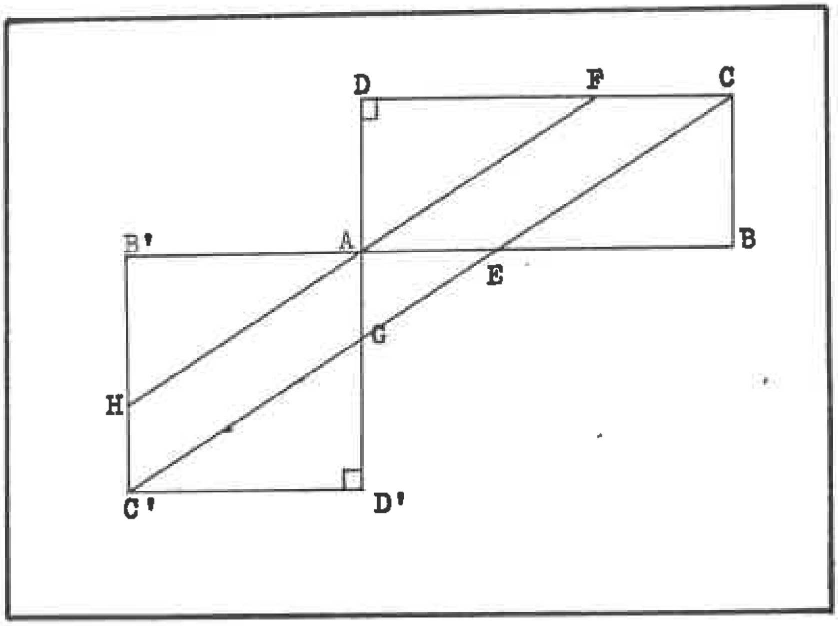
Remarque : Il te faudra deux séries de découpages.

F) DU RECTANGLE AU CARRE

Pour démontrer cette partie, il te faudra attendre d'être en 3ème. Vérifie cependant qu'on obtient une solution au problème.

On part du rectangle (ABCD) avec AB = a et AD = b.
On construit le carré (AB'C'D') tel que $AB' = \sqrt{\frac{b}{a}} \times AB$

Pour montrer que ce carré peut s'obtenir à partir de (ABCD) par découpage, on trace (CC'), et la droite parallèle à (CC') passant par A.
En utilisant les notations de la figure, précise les différentes pièces superposables et les transformations permettant de passer des unes aux autres.



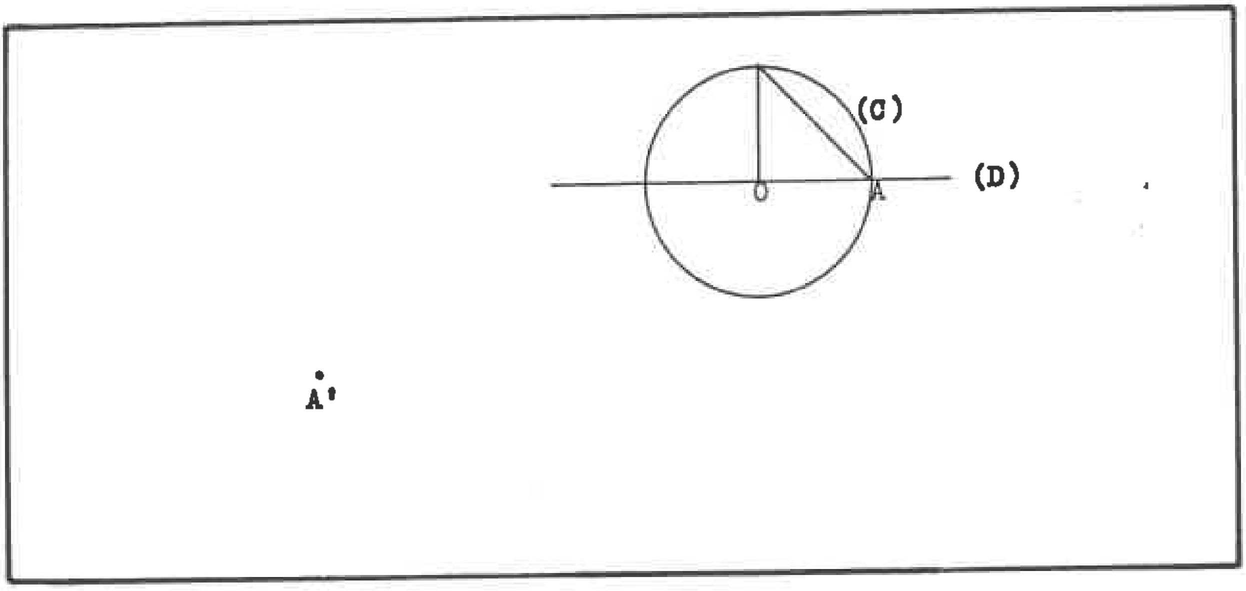
G) DU TRIANGLE AU CARRE

Quelle est ta conclusion ? Si tu as du courage, essaie de réaliser le découpage d'un triangle permettant d'obtenir un carré.

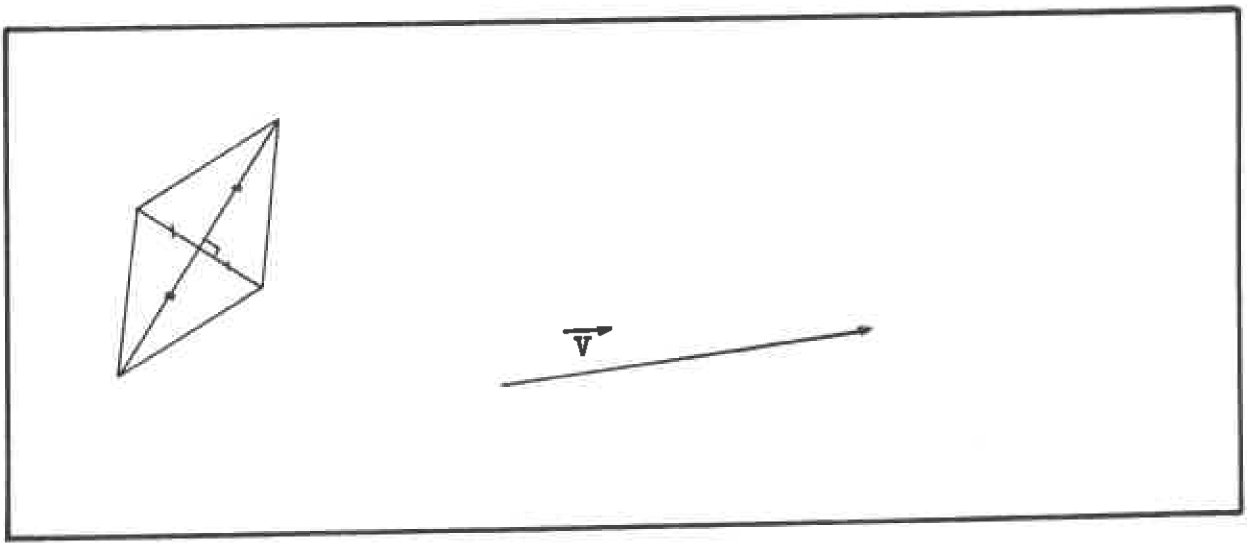
DOSSIER N°29

CONTROLE 1

EXERCICE 1 : Construire l'image de la figure ci-dessous par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, puis par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.



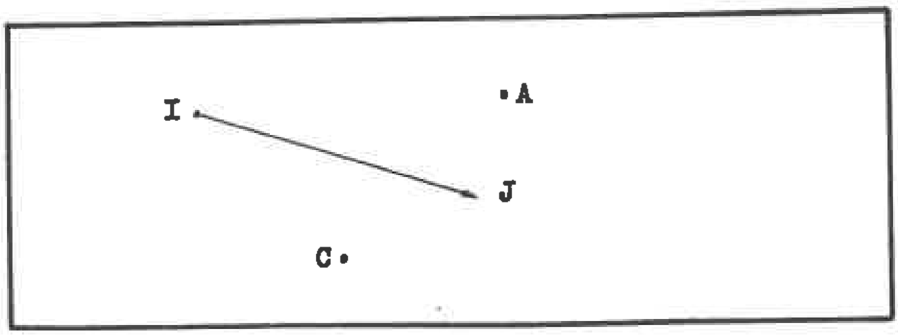
EXERCICE 2 : Construire l'image de la figure ci-dessous par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$.



EXERCICE 3 : a) Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

b) Construire le point C tel que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IJ}$.

c) Combien de parallèlogrammes peut-on tracer en utilisant les points A, B, C, D, I et J ?

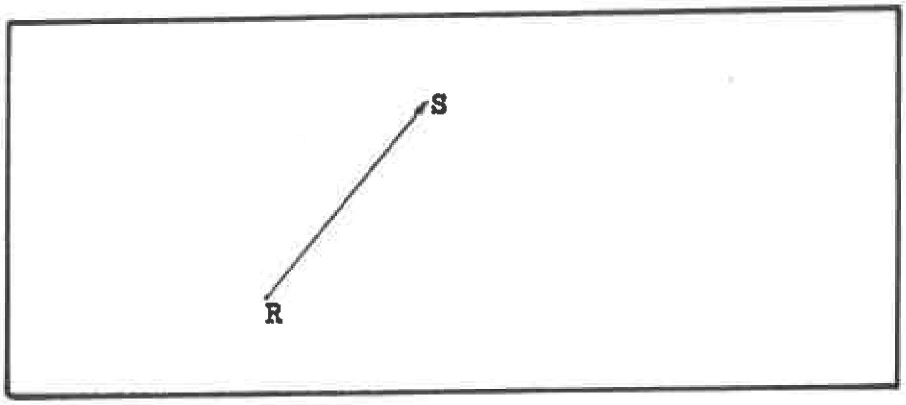


EXERCICE 4 : a) Construire un segment [TU] tel que $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$ aient même direction, même sens, mais pas même "longueur".

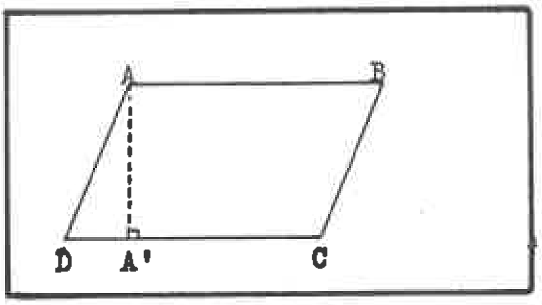
b) Construire un segment [VW] tel que $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{VW}$ aient même direction et même "longueur", mais pas même sens.

c) Construire un segment [XY] tel que $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{XY}$ aient même direction, même sens et même "longueur".

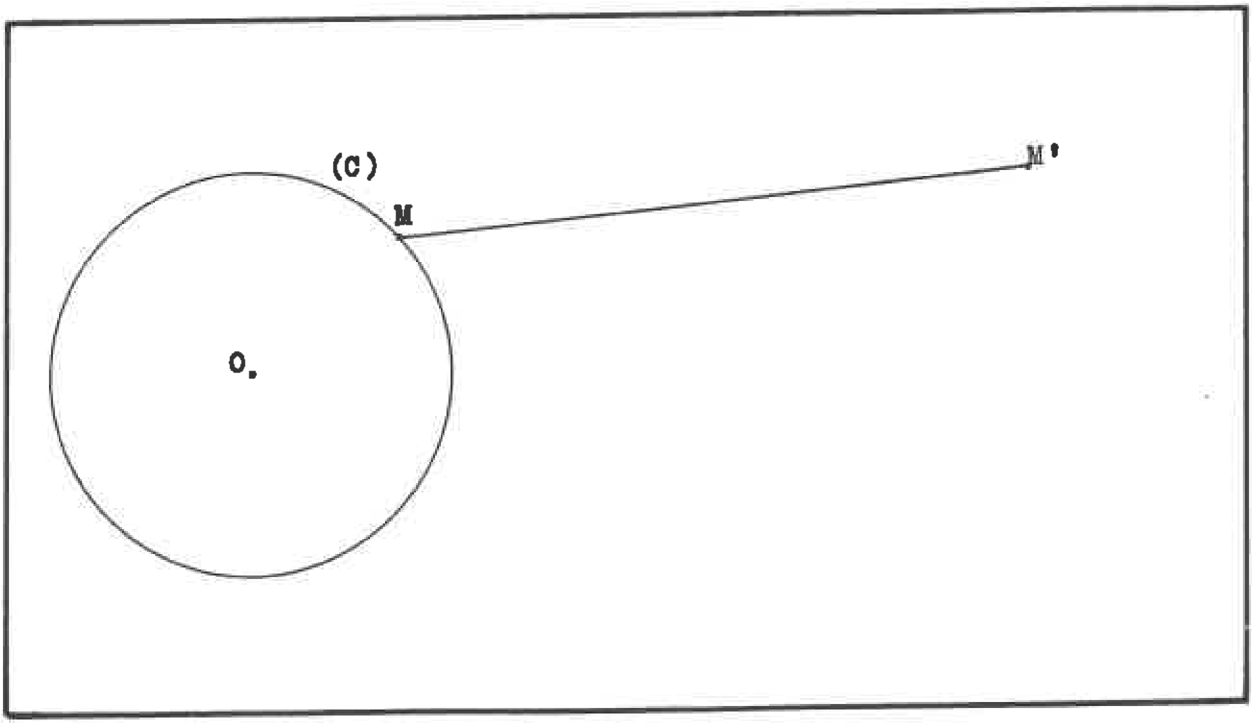
d) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{XY}$?



EXERCICE 5 : Démontrer en utilisant une translation que l'aire du parallèlogramme ABCD est égale à l'aire d'un rectangle de longueur AB et de largeur AA'.



EXERCICE 6 : Quelle figure parcourt le point M' lorsque le point M' parcourt le cercle (C), sachant que (MM') reste parallèle à la droite   et que MM' est constante ?



MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1987

DOSSIER N°30

TITRE: INDICES

PREREQUIS

PROPORTIONNALITE

OBJECTIFS

- INITIATION A LA LECTURE DE TABLEAUX ET GRAPHIQUES DONNANT LES VARIATIONS D'UN INDICE

  (EXEMPLE : INDICE DES PRIX 1987 SUR LA BASE 100 en 1980)

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 30

INDICES

INDICES

Cie DES AGENTS DE CHANGE *Indices quotidiens* *Base 100 le 31-12-1981*	le 2.2.88	1987-1988 + HAUT	1987-1988 + BAS
Général	254,7	469,4	251,3
Industrielles	246,5	436,6	242,9
1. PRODUIT DE BASE	177,6	309,1	172,1
Pétrole, carburants	162,2	289,6	155,4
Minerais, métaux	143,4	233,2	112,2
Premières transformations des métaux ferreux	472,0	765,5	430,1
Produits chimiques	169,5	299,4	166,7
Pâtes, papiers, cartons	665,2	1.216,3	579,4
2. CONSTRUCTION	271,6	509,5	264,5
Matériaux de construction	420,4	719,8	410,9
Bâtiment (construction)	167,3	403,9	161,5
Génie civil	173,6	394,2	166,5
3. BIENS D'EQUIPEMENT	183,9	383,8	176,7
Construction mécanique	83,2	233,9	83,2
Construction électrique et électronique	259,6	559	249,5
Matériel de transport	174,9	361,1	159,6
Aéronautique, espace	139,3	276,9	132,2
4. BIENS DE CONSOMMATION DURABLES	326,5	712,9	322,7
Automobile et équipement	350,1	777,9	342,6
Equipement ménager	231,5	526,7	231,3
Autres	503,1	1.023,3	497,3
5. BIENS DE CONSOMMATION NON DURABLES	340,9	585,2	340,8
Pharmacie	232,0	503,1	231,9
Textile, habillement	723,1	1.212,2	723,1
Imprimerie, édition	412,4	799,8	409,2
Autres	341,5	584,8	332,0
6. BIENS DE CONSOMMATION ALIMENTAIRES	330,3	467,1	318,5
Boissons	366,4	541,2	329,3
Produits alimentaires autres que les boissons	285,1	420,3	277,5
7. SERVICES	244,5	432,9	241,6
Transports	402,5	929,6	395,8
Distribution	208,0	411,9	206,8
Publicité	352,9	549,7	306,2
Hôtels, loisirs	210,6	415,2	202,7
Distribution d'eau et d'air	434,3	727,3	425,2
Logement	302,9	439,9	302,9
8. SOCIETES FINANCIERES	308,0	638,5	302,4
Assurances	433,9	1.252,5	432,5
Crédit	356,6	730,4	344,9
Sicomi	229,7	296,2	202,8
Sociétés de portefeuille	311,9	697,2	305,2
AGEFI *Indices quotidiens* *Base 100 le 31-12-1981*			
Général .... (mensuel)	236,47	393,29	229,24
Valeurs françaises. //	255,40	441,54	245,56
Général .... (comptant)	335,47	621,34	333,23
Valeurs françaises. //	442,51	743,37	440,88
Rentes .... //	126,03	127,35	118,39
INSEE *Indices hebdomadaires* *Base 100 : fin 1949*			
Valeurs françaises à revenu variable	2.136,4 (1)	3.828	2.136,4
Valeurs étrangères	3.311,8 (1)	4.965,9	3.311,9

(1) Le 29-1-1988.

recherche ?

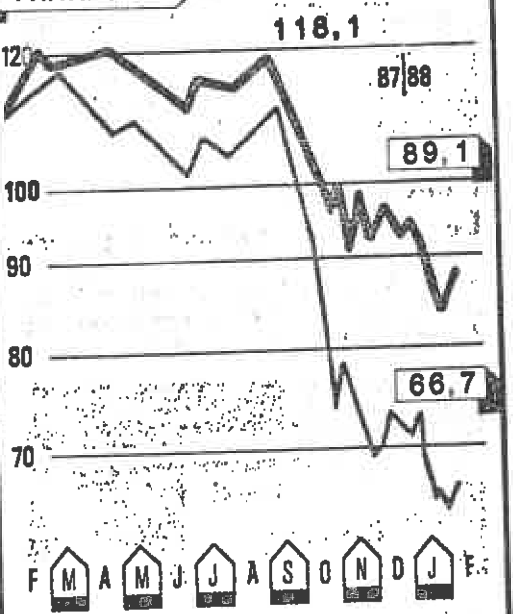
A court terme du moins, c'est l'indice CAC 250 qui enraye la
baisse, les reculs ayant été spectaculaires. après il est vrai une
hausse quasi-interrompue de 5 ans, il est normal que les reprises
soient de même nature.

La nervosité des opérateurs après les chocs subis depuis 5
mois, les volumes traités, n'oublions pas que l'on échangeait 2 mil-
liards par jour de titres dont les cours ont baissé de moitié, c'est
énorme, sont des éléments qui vont accentuer la volatilité des mar-
chés

Indice Insee des prix (France entière) (6) [04-35]	168,8
Smic (horaire) en francs	27,84
Plafond Sécurité sociale (mensuel) en francs (7)	9.840

(5) Source Crédit Lyonnais.
(6) Décembre 1987, base 100 : 1980.
(7) 2e semestre 1987.

PRIVATISÉES *



*Indice Vie Française. Base 100 : fin décembre 1986.
Indice CAC : même base.

TOKYO, 28 janvier

La reprise continue

La reprise observée la semaine dernière au Kabuto-Cho s'est poursuivie lundi. La séance matinale s'était déjà achevée sur un score très satisfaisant (+ 165,75 points). En fin de journée, le marché améliorait encore son avance, et l'indice Nikkei s'établissait à 23 318,40, en hausse de 193,07 points.

La bonne tenue du dollar a renforcé l'optimisme des opérateurs, qui tablent toujours sur le prochain retour à Tokyo d'importantes liquidités en provenance de l'étranger.

La déclaration du gouverneur de la Banque centrale du Japon, M. Satoshi Sumita, qui exclut pour l'instant toute baisse de la devise américaine, a contribué à maintenir une bonne atmosphère à la corbeille nippone.

Les courants d'échanges n'ont cependant pas été très importants, témoignant, s'il en faut, d'une certaine prudence. Au plus, 500 millions de titres ont changé de mains. L'intérêt s'est concentré sur les valeurs liées au marché intérieur.

LES INDICES MONDIAUX

	en monnaie locale	en francs	Ecart en % en une semaine: en monnaie locale	Ecart en % en une semaine: en francs	Ecart en % depuis le 31-12-1[illegible]: en monnaie locale	Ecart en % depuis le 31-12-1[illegible]: en francs
Australie	244,0	159,2	- 2,6	- 2,4	- 5,9	- 1,1
Belgique	286,2	415,9	1,3	0,7	10,0	18,1
Canada	336,9	292,6	- 0,6	0,3	- 3,9	4,3
Allemagne	148,6	330,7	- 1,2	- 1,1	- 5,1	- 6,3
Hong Kong	1.620,9	1.182,3	- 4,7	- 4,7	- 1,4	4,3
Italie	354,8	182,8	- 2,3	- 2,4	- 6,0	- 8,1
Japon	1.128,9	3.250,5	0,3	0,4	10,4	11,1
Pays-Bas	224,1	439,3	1,7	1,8	3,8	3,7
Singapour	499,2	777,3	- 2,6	- 2,2	5,5	18,[illegible]
Espagne	223,9	140,8	- 2,0	- 1,7	6,9	7,[illegible]
Suède	783,1	685,6	0,2	0,2	12,3	14,[illegible]
Suisse	143,0	457,7	1,6	1,0	1,6	0,[illegible]
Royaume-Uni	536,7	404,6	0,2	0,7	4,1	4,[illegible]
Etats-Unis	237,1	242,9	2,3	2,8	3,4	9,[illegible]

Source : Morgan Stanley Capital International Perspective, Genève. Chiffres au 2-02-1988.

On entend souvent parler dans la vie courante d'indices. Le plus connu est l'indice des prix. Mais il y en a beaucoup d'autres, concernant les salaires, les valeurs boursières, les productions, le commerce extérieur, l'emploi ...

ENQUETE 1 : Essaie de relever dans les 15 jours qui viennent le maximum d'indices que tu verras ou entendras dans les journaux, à la radio ou à la télévision.

Le calcul de ces différents indices est souvent effectué par l'INSEE.

ENQUETE 2 : Renseigne-toi sur ce que veux dire "INSEE", et comment fonctionne cet organisme.

Les indices permettent de traduire en nombres les notions abstraites de production, pouvoir d'achat, masse salariale, niveau de vie ...

Dans ce dossier, nous allons voir quel est le mécanisme de calcul de ces indices.

1/ INDICE SIMPLE (C'est un indice qui s'applique à un seul produit)

A) SITUATION 1 : Le prix de vente du litre de super était :

Année	1970	1975	1977	1982	1984
Prix (F)	1,10	1,82	2,30	4,46	4,97

a) On choisit une année de référence, appelée année de base ou époque 0.
Choisissons ici 1970 pour époque 0.

b) Les différentes années représentent alors d'autres époques. Fixons :

Epoque	1	2	3	4
Année	1975	1977	1982	1984

c) On fixe alors l'indice en prenant pour base 100 le prix à l'époque 0.
Soit pour l'époque 0 : $I_0 = 100$.

d) Les différents indices correspondants aux autres époques sont alors donnés par :

1975 : Epoque 1 $\quad I_1 = \frac{P_1}{P_0} \times 100 \quad I_1 = 165$

1977 : Epoque 2 $\quad I_2 = \frac{P_2}{P_0} \times 100 \quad I_2 = 209$

EXERCICE 1 : Calcule les indices I_3 et I_4 correspondants aux époques 3 et 4.

REMARQUE : ON ARRONDIT, POUR SIMPLIFIER, LES INDICES A L'UNITE LA PLUS PROCHE. CECI EST VALABLE POUR TOUT CE DOSSIER, SAUF AVIS CONTRAIRE.

e) On peut alors résumer cela dans un tableau

EXERCICE 2 : Reproduis et complète le tableau suivant :

Année	Epoque	Prix (F)	Indice
1970	0	1,10	100
1975	1	1,82	165
1977	2	2,30	
1982	3	4,46	
1984	4	4,97	

f) Signification de l'indice

i) L'indice $I_1 = 165$ indique que l'essence a augmenté de 65 % de 1970 à 1975.

ii) L'indice $I_2 = 209$ indique que l'essence a augmenté de 109 % de 1970 à 1977.

On peut donc directement en conclure que le prix de l'essence a doublé de 1970 à 1977.

Si on avait trouvé $I_1 = 96$ %, ceci aurait indiqué que le prix avait baissé de 4 % entre l'époque 0 et l'époque 1 (c'était rare à l'époque).

g) Utilisation de l'indice

i) Il permet de déterminer directement le pourcentage d'augmentation (ou de diminution) entre 2 époques où l'on connait l'indice :

Exemple : 1975 (1) $I_1 = 165$

1977 (2) $I_2 = 209$ $\qquad \frac{I_1}{I_2} \times 100 = 127$

L'essence a donc augmenté de 27 % entre 1975 et 1977

EXERCICE 3 : En utilisant l'indice, calcule le pourcentage d'augmentation entre :
1975 et 1982 ; 1977 et 1982 ; 1982 et 1984.

ii) Il permet de calculer le prix d'un produit à une époque donnée si on connait l'indice correspondant.

Exemple : En 1956 (époque 5), on avait $I_5 = 69$

$$\text{Prix en 1956} = P_5 = \frac{I_5 \times 1{,}10}{100} = 0{,}76 \text{ F}$$

EXERCICE 4 : Quel était le prix de l'essence en 1968 ($I_6 = 88$) ? Et en 1983 ($I_7 = 432$) ?

ENQUETE 3 : Quel est le prix du super actuellement ? Calcule l'indice correspondant en prenant toujours 1970 comme année de référence. Compare avec 1984. Quelle est ta conclusion ?

B) SITUATION 2 : Le prix d'un article, aux différentes époques considérées, était :

Epoque	0	1	2	3	4
Prix (F)	32	32,50	39,20	45,60	53

En prenant pour base 100 le prix à l'époque 0, complète le tableau suivant :

Epoque	0	1	2	3	4
Indice	100				

Détermine le pourcentage d'augmentation en utilisant les indices entre les époques 0 et 3 ; 1 et 2 ; 2 et 4.

Sachant que 1988 est l'époque 5 et que l'indice à cette époque est 186, quel est le prix de cet article aujourd'hui en 1988 ?

2/ INDICE SIMPLE ET GRAPHIQUE

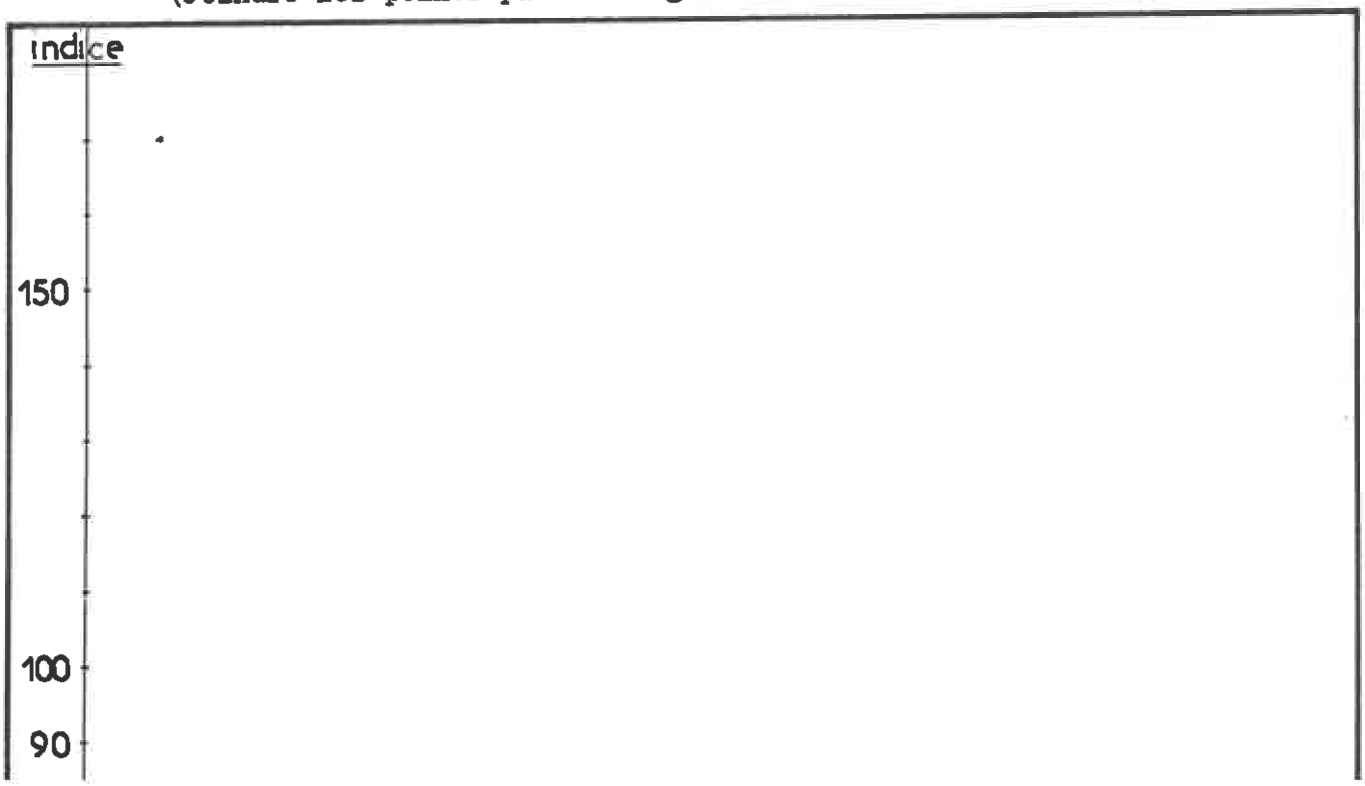
A) SITUATION 3 : Le prix de vente d'un article électroménager a suivi l'évolution suivante :

1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
2500	2400	2700	3000	3250	3100	3500	3800	4200	4300

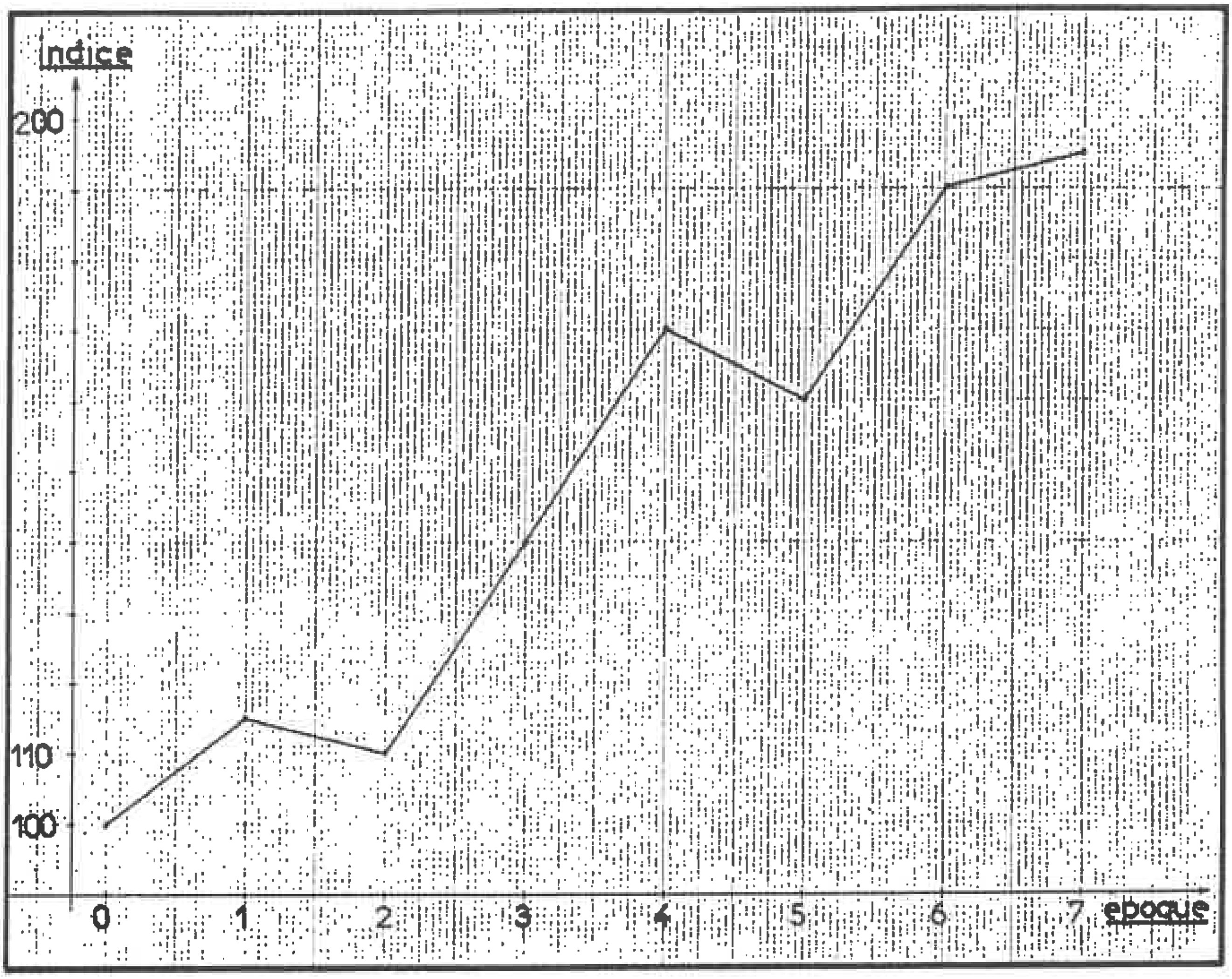
En prenant pour année de base 1978 et pour base 100 le prix à cette époque, soit 2500 f, complète le tableau suivant :

1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
100									

Représente alors graphiquement ce tableau sur le graphique ci-dessous :
(Joindre les points par des segments)



B) SITUATION 4 : Pour un autre article, on a relevé les indices ci-dessous :



a) Complète le tableau suivant :

Epoque	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice								

b) Sachant que le prix de cet article était à l'époque 0 : 375 F, retrouve les prix aux différentes époques :

Epoque	0	1	2	3	4	5	6	7
Prix	375							

3/ CHANGEMENT D'ANNEE DE REFERENCE

SITUATION 5 : Pour un article donné, on a relevé l'indice à différentes époques, en prenant pour année de base 1975 :

Années	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Indices	89	96	100	112	125	135

a) Sachant que cet article valait 540 F en 1975, complète le tableau suivant :

Années	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Prix			540			

b) On change d'année de base. On prend 1973. Complète le tableau suivant :

Années	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Indices	100					

4/ INDICE SYNTHETIQUE (PONDERE)

C'est un indice qui s'applique à plusieurs produits, en tenant compte des quantités correspondantes à chaque produit.

A) SITUATION 6 : Voici le repas-type d'une famille de 4 personnes :
500 g de beefsteak ; 1 litre de vin à 11° ; 2 baguettes ;
250 g de fromage.
On a relevé les prix de ces articles en 1977 et 1982 dans le tableau suivant :

Produit	Beefsteak (kg)	Baguette (1)	Vin 11° (1)	Fromage (kg)
1977 (F)	44	1,10	3,05	16,00
1982 (F)	58	2,10	5,50	28,00
Consommation	0,500	2	1	0,250
Pondération	0,5	2	1	0,25

EXERCICE 5 : En prenant pour année de référence 1977, complète le tableau suivant, donnant les indices de chacun des produits en 1982 :

Produit	Beefsteak	Baguette	Vin	Fromage
I_0	100	100	100	100
I_1				

Mais on voit que ces différents indices ne nous permettent pas d'établir de combien a augmenté le repas de cette famille. Cette augmentation tient évidemment compte des quantités (pondérations) de chacun des articles composant le repas.

On fait donc le calcul suivant :

Prix d'un repas en 1977 :

$(44 \times 0,5) + (1,10 \times 2) + (3,05 \times 1) + (16 \times 0,25) = 31,25$ $\quad P_0 = 31,25$ F

Prix d'un repas en 1982 :

$(58 \times 0,5) + (2,10 \times 2) + (5,50 \times 1) + (28 \times 0,25) = 45,70$ $\quad P_1 = 45,70$ F

En prenant pour base 100 le prix à l'époque 1977, on obtient l'indice en 1982 :

$$I_1 = \frac{45,70}{31,25} \times 100 \qquad I_1 = 146$$

Le repas a donc augmenté de 46 %.

On a ainsi obtenu un **indice synthétique** (plusieurs produits), chacun des produits étant pondéré suivant la consommation.

ENQUETE 4 : Combien un repas vaut-il en 1988 ?
Quel est donc l'indice pondéré en 1988 ?
Est-ce un repas-type ?

B) **SITUATION 7** :

a) Calcule les indices des prix pour l'année 1978, concernant les produits suivants (base 100 en 1977) :

	Viande	Pain	Lait	Sucre
1977	17,50	1,30	1,80	3,00
1978	19,00	1,50	2,00	3,20

Viande : I_1 =　　　　　Lait : I_1 =

Pain : I_1 =　　　　　Sucre : I_1 =

b) Calcule l'indice synthétique des prix en tenant compte des coefficients de pondération suivants :

Viande : 2　　Pain : 10　　Lait : 5　　Sucre : 1,5

c) Trouve les prix de ces articles en 1988, et calcule les différents indices comme en b).

CONTROLE 30

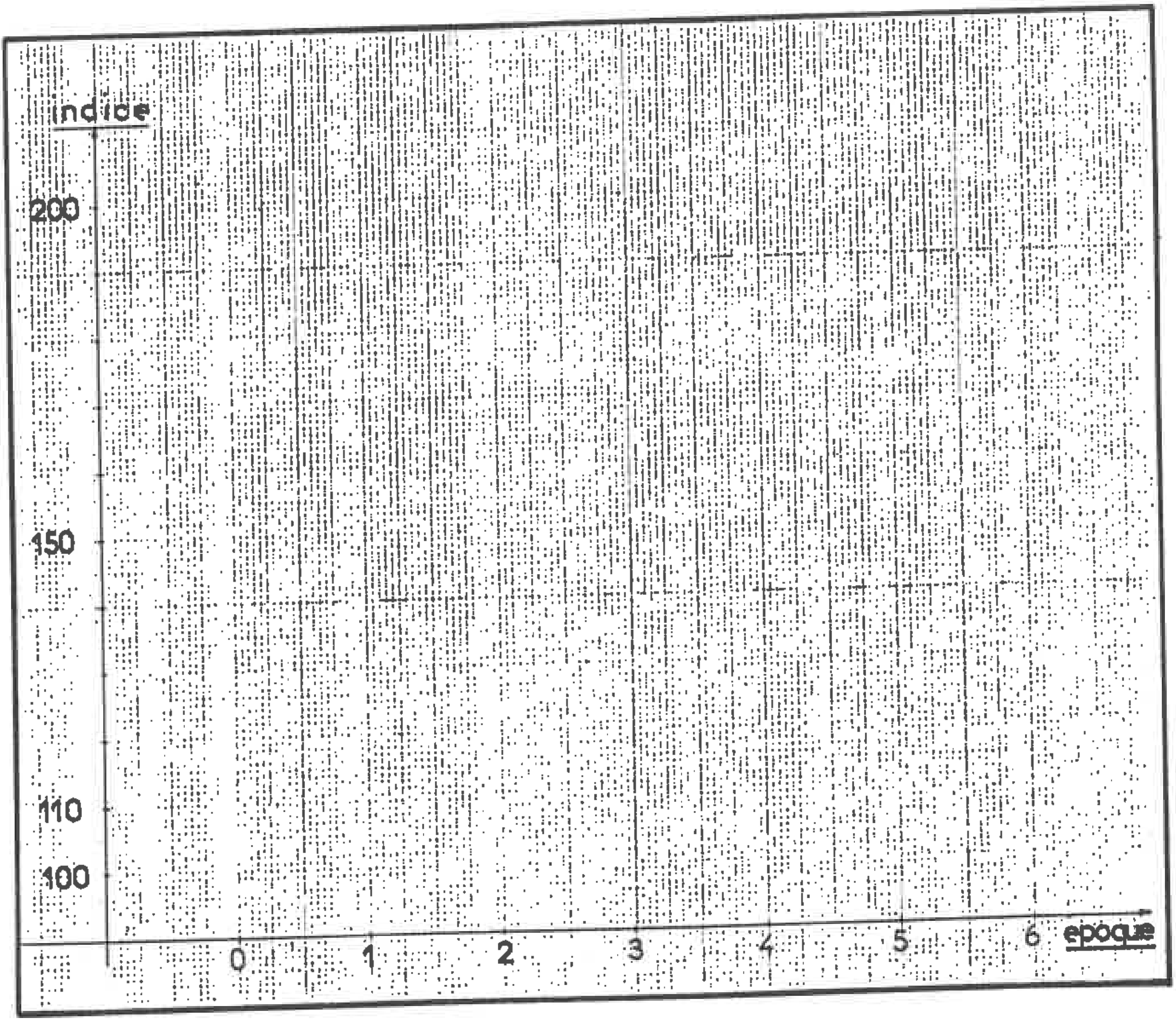
EXERCICE 1 : Pour un article donné, on a relevé le prix à différents époques :

Epoque	0	1	2	3	4	5	6
Prix (F)	450	520	580	600	680	760	850

En prenant pour base 100 le prix à l'époque 0, complète le tableau suivant :

Epoque	0	1	2	3	4	5	6
Indice	100						

Représente graphiquement ce tableau :



.../...

EXERCICE 2 : Pour un article donné, on a relevé l'indice à différentes époques, en prenant pour année de base 1985 :

Année	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Indices	77	85	100	110	135	148

a) Sachant que cet article valait 630 F en 1985, complète le tableau suivant

Années	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Prix (F)			630			

b) On change d'année de base ; on prend 1983. Complète le tableau suivant :

Année	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Indice	100					

EXERCICE 3 : (D'après CAP) Détermine l'indice synthétique de 1981, base 100 en 1975, de l'ensemble des trois produits suivants consommés par une famille, en tenant compte des coefficients de pondération :

Produits	Prix		Pondération
	en 1975	en 1981	
Pain (kg)	2,00	3,20	5
Vin (l)	3,50	5,00	8
Fromage (kg)	15,00	25,00	4

EXERCICE 4 : Dans le tableau ci-dessous, il y a 4 produits A, B, C et D dont les prix ont été relevés à 4 époques 0, 1, 2 et 3, la consommation de chacun de ces produits étant traduite sous forme de pondération.

Produits	Epoques				Pondération
	0	1	2	3	
A	7,50	9	12	13,50	5
B	10,80	14	16,20	20,40	3
C	25	32	37,50	43	2
D	12,40	18,60	23,50	28	6

En prenant l'époque 0 comme base, calcule les indices synthétiques I_1, I_2 et I_3 aux époques 1, 2 et 3.

En utilisant ces indices, trouve l'augmentation (en %) :

- entre les époques 0 et 2
- entre les époques 1 et 3
- entre les époques 2 et 3

Fiche dublirem

TITRE : MATHEMATIQUES EN ACTIVITES N° 5

AUTEUR : EQUIPE Enseignants IREM-CLG Albert Camus (Aube)

NIVEAU : 4ème - Année scolaire 1987 -

DATE : MAI 1988

MOTS-CLÉ : spécialité MATHEMATIQUES

autres EXPERIMENTATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES

RESUME : Ce travail en commun de 2 ans a permis de souder notre équipe. Le fascicule n° 5 comprend 6 dossiers de 4ème et fait suite au fascicule n° 4 : 5ème-4ème. Il y a en tout 5 fascicules de la 6ème à la 4ème pour l'année scolaire 1987. Contenu du fascicule n°5

dossier n° 24 : Projection. Initiation à la démonstration

25 : Multiplication et division dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Distributivité. Factorisations simples.

26 : Projection orthogonale. Cosinus.

27 : Addition et soustraction dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Double distributivité. Identités remarquables.

28 : Application linéaire (1).

29 : Translations, vecteurs et parallélogrammes.

30 : Indices.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	130	30,00 F	Re23