MATHEMATIQUES 4EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

IREM DE REIMS

4

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES

N°6

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES EN 4EME

AU COLLEGE ALBERT CAMUS

C'est avec quelque retard que nous vous proposons ce fascicule 6, qui avait pour objectif de terminer le programme de 4ème. En voici les motifs :

. Nous avons voulu exploiter avec les élèves tous ces dossiers que nous vous proposons. Or, comme nous l'avions déjà prévu (voir fascicule 5), nous n'avons pu terminer notre programme dans l'année scolaire, et avons utilisé le début de cette année (3ème) pour le faire.

. Pour cette raison, les dossiers 37 et 38, exploités en 3ème, présentent des difficultés qui vont au-delà du programme de 4ème. (En particulier dans 38, la composition (et la décomposition) d'isométries).

. Nous avons d'autre part déjà exploité les dossiers 39 et 40 (équations et Inéquations). Nous voulions les joindre à ce fascicule, mais nous préférons les reprendre en fonction des compléments que nous voulions faire pour la 3ème. Ils se trouveront donc dans le fascicule 7.

Pour certaines activités, nous avons utilisé le (bon !) travail d'autres IREM (Bordeaux, Poitiers, Nantes, Picardie, Montpellier). Nous espérons n'en avoir oublié aucun dans nos références ! Notre travail est évidemment de la même façon entièrement à la disposition des autres IREM.

Certains nous ont demandé comment nous utilisions concrètement nos dossiers. Il n'y a pas de règle générale, ceci dépendant du dossier et de l'enseignant , mais on peut définir quelques grandes lignes d'utilisation :

* Pour la plupart des dossiers, les élèves reçoivent les fiches au fur et à mesure de la progression (collective ou individuelle suivant le dossier). En particulier, lorsqu'il y a une activité, nous nous arrangeons pour que la solution, ou l'ébauche de solution, ou le questionnement permettant à l'élève d'avancer, ne soit pas sous ses yeux dans un premier temps.

* Certains dossiers sont donnés en bloc (ex : 36 "statistiques") et proposés aux élèves en autonomie complète, sur un temps assez long (pour 36 : 3 semaines), les élèves devant noter les points présentant difficultés. Une mise en commun et une correction rapide finissant ce travail. Les élèves gardent ces dossiers, et ont à leur disposition le corrigé.

* Quelques dossiers présentent une liste d'exercices relativement importante. Celà nous permet d'individualiser au maximum la progression, les élèves en difficultés travaillant davantage avec l'enseignant, les autres avançant à leur rythme, avec le corrigé à leur disposition.

* Pour les travaux géométriques, nous utilisons des calques corrigés qui sont à la disposition des élèves.

Les dossiers peuvent avoir des présentations sensiblement différentes, au niveau de la structuration, des activités, des exercices didactiques, ... Ceci tient à nos propres différences dans l'équipe. Notre méthode de travail est la suivante, lorsque nous avons défini le thème du dossier, et la partie correspondante du programme :

* chacun amène des activités, des exercices, des démarches.
* nous nous mettons d'accord sur la partie institutionnalisée : définitions, théorèmes, règles ...
* un ou deux membres de l'équipe se chargent de la mise en forme définitive, et la proposent à la critique des autres.
* un accord (ou un consensus !) s'établit alors.

Nous critiquons après utilisation ces dossiers : certains présentent des manques, d'autres des excès, d'autres des erreurs manifestes de démarche (ex : dans le 38, le fait d'avoir investi d'abord sur la composition de 2 symétries axiales a empêché les élèves de voir plus rapidement le véritable aspect de la rotation (un centre et un angle).

Nous n'avons malheureusement pas le temps actuellement de structurer ces différentes critiques de manière à vous les présenter, trop investis dans la création d'autres dossiers (3ème). Nous espérons pouvoir faire ce travail dès l'an prochain, avec le recul de l'expérimentation complète des nouveaux programmes. Nous vous proposons donc les dossiers tels que les ont reçus les élèves.

Pour cette année, notre attitude est un peu différente. Nos élèves nous quittant en fin d'année, nous ne pouvons nous permettre d'envisager d'utiliser le début de l'année prochaine pour terminer le programme ! Aussi nous ferons certaines choses (que nous vous communiquerons) et serons très stricts par rapport à notre progression. Le handicap du début d'année utilisé à terminer les dossiers de 4ème sera en partie comblé par le fait que nous avons une 5ème heure hebdomadaire en présence de nos élèves. Nous pensons pouvoir vous proposer les 8 premiers dossiers dès Février 89 (voire plus loin !)

Nous continuons à remercier ceux qui nous aident dans notre travail :

. L'équipe administrative du Collège, pour les moyens pédagogiques et matériels.

. Le Maire de La Chapelle Saint Luc, qui prend en charge la reproduction des documents pour les élèves.

. Monsieur ORTHEAU, notre IPR, pour l'intérêt qu'il porte à notre travail.

. L'IREM de REIMS qui a été au départ de notre réflexion, et nous a permis de la confronter avec d'autres équipes et son Directeur Monsieur TURCO.

. Madame Colette THIERUS(KORALEWSKI), qui a pris en charge les problèmes matériels de la publication et de la diffusion de ces documents.

Progression 4ème

Période (durée en semaines)	n° du dossier	Titre	Durée en semaines
1er trimestre			
(7)	21	Equations	1
	22	Echelles	1
	23	Aire - Volume - Dilatation	3
	24	Projection - Droite des milieux	2
Toussaint			
(6)	25	Relatifs : multiplication division distributivité	2
	26	Projection orthogonale - Cosinus - Hauteur	2
	27	Relatifs : addition soustraction ordre	2
2ème trimestre			
(4)	28	Application linéaire n°1	2
	29	Translation - Vecteurs - Parallélogrammes	2
	30	Indices	à la maison
Février			
(6)	31	Puissances	1
	32	Pythagore	2
	33	Puissances de 10	1
	35	Sphère	2
3ème trimestre			
(11)	34	Application linéaire n°2	2
	36	Statistiques	1,5
	37	Rotations - Polygones réguliers	3
	38	Problèmes de plus courte distance	1,5

FASCICULES IREM REIMS

Expérimentation des nouveaux programmes

MATHEMATIQUES EN ACTIVITES

N°	DOSSIERS	NIVEAU	DATE PARUTION
1	Tests avant formation + grille de capacité 1 - Nombres et écritures, opérations, problèmes 2 - Pavages et aires. Introduction à la géométrie plane et à la symétrie axiale 3 - Repérage sur une demi-droite, dans un quart de plan 4 - Représentation et organisation de données. Introduction des fractions 5 - Proportionnalité 6 - Parallélépipède rectangle et cube. Géométrie dans l'espace 6 bis - Calculatrice	6ème	Disponible
2	7 - Construire en géométrie plane 8 - Symétrie orthogonale (ou axiale ?) 9 - Problèmes et équations 10 - Angles et triangles 11 - Repérage sur une droite. Introduction des relatifs 12 - Repérage dans le plan	6ème 5ème	Disponible
3	13 - Addition dans les relatifs 14 - Fraction (simplification, addition, multiplication, division) Applications 14 bis - L'espace et l'art moderne 15 - Géométrie dans l'espace (prisme droit et cylindre de révolution) 16 - Soustraction dans les relatifs. Simplification d'écriture 17 - Constructions et transformations en géométrie plane Symétrie centrale	5ème	Disponible
4	18 - Distributivité. Calcul numérique et littéral 19 - Proportionnalité 20 - Pourcentages 21 - Equations 22 - Echelles 23 - Aires et volumes C1 - Contrôle de certains acquis de 5ème	5ème 4ème	Disponible

Nº	DOSSIERS	NIVEAU	DATE PARUTION
5	24 - Projection. Initiation à la démonstration 25 - Multiplication et division dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Distributivité. Factorisations simples 26 - Projection orthogonale. Cosinus 27 - Addition et soustraction dans les relatifs en écriture décimale et fractionnaire. Double distributivité. Identités remarquables 28 - Application linéaire (1) 29 - Translations, vecteurs et parallélogrammes 30 - Indices	4ème	Disponible
6	31 - Puissances entières d'un nombre relatif 32 - Le triangle rectangle 33 - Puissance de 10 34 - Application linéaire 2 35 - La sphère 36 - Statistiques en 4ème 37 - Les rotations 38 - Problèmes de plus courte distance	4ème	Disponible
7	39 - Equations du 1er degré à 1 inconnue 40 - Inéquations du 1er degré à 1 inconnue 41 - Théorème de Thalès. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur une figure plane 42 - Calcul algébrique : distributivité, double distributivité. Mise en facteurs. Produits remarquables 43 - Racines carrées 44 - Vecteur et translation. Composition et addition des vecteurs. Travail en repère 45 - Application affine 46 - Angle inscrit ; trigonométrie	3ème	Février 89

Commande à envoyer à :

IREM de REIMS
Moulin de la Housse
BP 347
51062 REIMS CEDEX

Préciser : n° des fascicules commandés,
le nombre de fascicule

(Prix des fascicules : 20 F)
(Frais : + 5 F / Fascicule)

Donner votre adresse "professionnelle"

MATHEMATIQUES 4EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 31

TITRE: PUISSANCES

4

PREREQUIS

CALCUL DANS LES RELATIFS

NOTION D'INVERSE

OBJECTIFS

- INTRODUCTION DE LA NOTION DE PUISSANCES
- ACQUISITION DU CALCUL SUR LES PUISSANCES

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

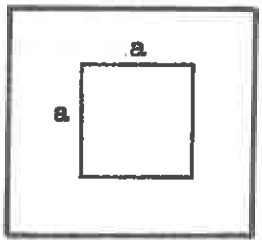
DOSSIER 31

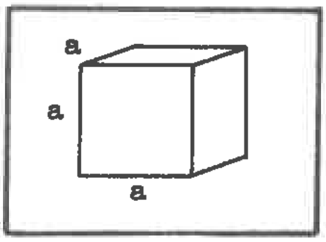
PUISSANCES

1 / PUISSANCES D'EXPOSANTS POSITIFS

A) ACTIVITE

On cherche l'aire du carré et le volume du cube ci-dessous pour différentes mesures du côté a. Complète le tableau.





Côté a	2	3	4	5	10	100	1,2	0,8	0,02
Aire du carré (a.a)									
Volume du cube (a.a.a)									

Tu sais déja que l'aire du carré a.a peut s'écrire a^2 et se lit "a au carré".
Tu sais aussi que l'aire du cube a.a.a peut s'écrire a^3 et se lit "a au cube".

On peut généraliser cette écriture ; on peut multiplier un nombre plusieurs fois par lui même. Pour simplifier l'écriture, on écrira par exemple :

$$7.7.7.7 = 7^4$$

Remarque : On adoptera dans tout le dossier l'écriture 7.7.7.7 pour remplacer l'écriture 7 x 7 x 7 x 7.

EXERCICE 1 : Complète les égalités suivantes :

$6.6.6.6.6 =$ $\qquad$ $3^5 =$

$4.4.4.4 =$ $\qquad$ $2,4^3 =$

$0,2 . 0,2 . 0,2 =$ $\qquad$ $10^5 =$

$b.b.b.b.b.b.b =$ $\qquad$ $x^4 =$

On peut aussi faire ces opérations avec des nombres négatifs.

EXERCICE 2 : Même travail que dans l'exercice 1 :

$(-2).(-2) =$ $\qquad$ $(-5)^4 =$

$(-7).(-7).(-7).(-7) (-7) =$ $\qquad$ $(-1,2)^5 =$

B) DEFINITION

Soit a un nombre relatif et $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$.

On décide de la notation suivante : $\underbrace{a.a.a....a}_{n\ \text{facteurs}} = a^n$

a^n se lit "a puissance n" ou "a exposant n".

Par convention, on pose :

$a^1 = a$ quel que soit a

$a^0 = 1$ quel que soit $a \neq 0$

C) CALCUL SUR LES PUISSANCES

a) Sans machine

Exemple : $4^5 = 4.4.4.4.4 = 16.16.4 = 1024$

EXERCICE 3 : Calcule sans machine :

5^3 ; 3^5 ; 4^2 ; 2^4 ; $0,6^3$; $4,8^1$; 15^0 ; 10^4 ; 10^1

b) Avec une calculatrice scientifique

On utilise la touche $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{y^x}$ suivant les modèles. Cette touche est accessible directement ou après la touche $\boxed{\text{INV}}$.

Exemple de séquence de calcul (valable pour fx 82B) :

5^6 : 5 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^y}$ 6 $\boxed{=}$ 15625

EXERCICE 4 : Calcule de même :

6^8 ; $1,5^{12}$; 31^5 ; $7,5^6$; $0,5^8$

Remarque : il existe généralement une touche x^2 qui te donne directement le carré d'un nombre.

D) SIGNE D'UNE PUISSANCE

Complète le tableau suivant qui donne x^n. Réfléchis bien au signe en pensant à la définition et au signe d'un produit.

n \ x	1	-1	5	-5	2	-2	0
2							
4							
6							
1							
3							
5							

Enonce une règle donnant le signe d'une puissance. Cette règle doit tenir compte du signe du nombre et de la parité de l'exposant.

REGLE : ....

Remarque : Tu dois remarquer et retenir qu'un carré est toujours positif.
Que peux-tu retenir pour le cube d'un nombre ?

EXERCICE 5 : Calcule avec ou sans machine :

$(-10)^3$; 10^5 ; $(-1)^7$; $(-0,8)^5$; $(-2)^4$; 3^5 ; $(-1,5)^5$; 23^3

EXERCICE 6 : Calcule :

a) $2^3 + 3^2$; $2^3.3^2$; $(-5)^2.50.5^3$; $10^3 - 10^2$

b) $(-3)^3 - 4^2$; $-3^4 - 2^2 + 5^3$; $9^2 - (-2)^3 + (-5)^2$

c) Tu peux compléter les règles de priorité en l'absence de parenthèses dans les calculs numériques par une règle supplémentaire concernant les puissances : $3.2^5 = 3.32 = 96$
Que doit-on calculer en premier ? Enonce la règle :

REGLE : ....

Application : Calcule :

$4^2.2.(-5)^3$; -3.4^2 ; $0,5.8^3.2$; $1,5^3.0,4.(-2)^4$

$((-3)^3.2) - (4.(-5)^2)$

d) $(-0,5)^4.4 - 3^3$; $2^3.(4 - 5^2)$; $(-4)^2.(3 + 5^3)$

$(-6)^3 - 4.2^3 + 5^0.3^2$; $3 - 4^2 + 5.2^4$; $(3 - 4)^2 + (5.2)^4$

$3 - (4^2 + 5).2^4$

2 / REGLES DE CALCUL SUR LES PUISSANCES

A) REGLE 1 : PRODUIT DE DEUX PUISSANCES D'UN MEME NOMBRE

$$a^3.a^2 = (a.a.a).(a.a) = a^5$$

Recommence avec : $a^4.a^3 = \ldots$ et $a^5.a^2 = \ldots$

Observe l'exposant du résultat. Enonce la première règle :

REGLE 1 : ....

Remarque : $a^4.a = (a.a.a.a).a = a.a.a.a.a = a^5$

En appliquant la règle précédente, que peux-tu justifier a posteriori ?

EXERCICE 7 : Simplifie les écritures suivantes :

$4^5.4^2$; $5^4.5$; $(-3)^4.(-3)^2$; $4^6.4^0$; $(-5)^2.(-5)^7$; $(-0,2)^2.(0,2)$

$10^2.10^4$

B) REGLE 2 : PUISSANCE D'UN PRODUIT

$$(ab)^3 = ab.ab.ab = a.a.a.b.b.b = a^3.b^3 = a^3b^3$$

Recommence avec : $(3.t)^4 = \dots$ et $(dx)^3 = \dots$

Observe le résultat. Enonce la deuxième règle :

REGLE 2 : ....

EXERCICE 8 : Utilise cette règle pour transformer les écritures suivantes :

$(4a)^3$; $(bt)^6$; $(4.b)^2$; $(0,5a)^4$; $(ztu)^5$; $(-3a)^5$; $(2cd)^4$

<u>Remarque</u> : Calcule $(2a)^2 = \dots$

Conclusion ne pas confondre : $(2a)^2$ et $2a^2$

Rappelle-toi des règles de priorité.

EXERCICE 9 : En utilisant les deux premières règles de calcul, simplifie :

a) $(3x)^3.(2x)^2$; $(ac)^3.(ab)^5$; $a^2b.(ab)^3.b^4$

b) $(-3a)^2.(2a)^4$; $(-2bc)^3.(ab)^2.(ac)^4$

C) REGLE 3 : PUISSANCE D'UNE PUISSANCE

$(a^2)^3$: Quel est le nombre qui est à la puissance 3 ?

$(a^2)^3 = a^2.a^2.a^2 = a^6$ (en utilisant la première règle)

Recommence avec : $(x^3)^4 = \dots$ et $(2^4)^5 = \dots$

Observe l'exposant et énonce la troisième règle :

REGLE 3 : ....

EXERCICE 10 : Utilise cette règle pour transformer :

$(2^4)^3$; $(3^2)^5$; $((-2)^3)^2$; $(x^5)^2$; $(a^4)^4$; $((-0,3)^3)^3$

D) REGLE 4 : PUISSANCE D'UN QUOTIENT

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Recommence avec : $\left(\frac{x}{5}\right)^4 = \dots$ et $\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \dots$

Observe le résultat. Enonce la règle obtenue :

RÈGLE 4 : ....

EXERCICE 11 : Utilise cette règle pour transformer :

$(\frac{3}{4})^2$; $(\frac{3}{x})^4$; $(-\frac{2}{5})^3$; $(\frac{-2}{-7})^4$; $(\frac{x}{2})^4$

EXERCICE 12 : Utilise une ou plusieurs des règles précédentes pour transformer les expressions suivantes :

$(\frac{2a}{3})^4$; $(\frac{a}{xy})^2$; $(\frac{-5a}{bc})^3$; $a^3.(\frac{ab}{c})^4$; $2a^2(ab)^2(\frac{-2}{3})^3$

$(3a^2)^3$; $(2x^2yz)^4$; $(\frac{4a}{3})^2ab(\frac{-5b}{c})^2$

3 / EXPOSANTS NEGATIFS

A) INTRODUCTION

Recopie, observe et complète le tableau suivant :

Exposant	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
Puissance	5^5	5^4					5^{-1}	5^{-2}		
nombre	3125	625					$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5^2}$		

:5 :5 ...

Pour 5^1 et pour 5^0, tu retrouves des nombres déja vus.

Explique pour l'exposant -2 l'écriture $\frac{1}{5^2}$.

B) DEFINITION

Tu as vu que $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; Complète alors l'égalité suivante : $5^{-n} = \ldots$

D'une manière plus générale, avec $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- Pourquoi $a \neq 0$?
- Pour $n = 0$, la définition est-elle valable ?

<u>Cas particulier</u> : Remplace dans la définition n par 1. Que trouves-tu ?

<u>Conclusion</u> : l'inverse de x peut s'écrire :

$\frac{1}{x} = \ldots$

C) CALCUL SUR LES PUISSANCES

Exemple : $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0{,}015625$; $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -0{,}008$

EXERCICE 13 : Calcule les puissances suivantes. Tu peux chercher les valeurs décimales, mais si elles ne sont pas exactes il vaut mieux laisser le résultat sous forme de fraction.

2^{-5} ; 8^{-1} ; $(-0{,}5)^{-4}$; $(-10)^{-1}$; 3^{-3} ; $(-6)^{-4}$; $(-5)^{-4}$

10^{-4} ; $(-10)^{-3}$

D) SIGNE DE a^n avec $n \in \mathbb{Z}$

Tu as vu en 1/ D) le signe de a^n quand $n \in \mathbb{N}$.
Complète le tableau suivant, puis observe et compare avec la règle vue dans le paragraphe 1/ D). Déduis-en alors une règle concernant le signe de a^n avec $n \in \mathbb{N}$:

Puissance	3^4	$(-3)^5$	3^{-4}	$(-3)^{-5}$	4^2	4^{-2}	$(-6)^{-3}$	$(-4)^4$	$(-4)^{-4}$	7^5	7^{-5}
Signe du résultat	+	-									

REGLE : Le signe de a^n avec $n \in \mathbb{Z}$ est ...

EXERCICE 14 : Indique si les nombres suiavnts sont positifs ou négatifs :

$(-3{,}4)^{-4}$; $(-1)^{-1}$; $(-8)^{-3}$; 4^{-5} ; $(-8)^{-2}$; $(-0{,}5)^{-3}$

E) REGLES SUR LES CALCULS DES PUISSANCES

Tu as vu en 2/ quatre règles. Que vont-elles devenir si l'exposant est négatif ?

Exemples : $4^{-3}.4^{-5} = \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{1}{4^8} = 4^{-8} = 4^{-3-5}$

$$a^{-2}.a^{-7} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^9} = a^{-9} = a^{-2-7}$$

Compare avec la règle 1 vue au 2/. Tu dois observer que la règle est la même. On montre (tu peux essayer de le faire en t'inspirant de l'exemple précédent !) que les 4 règles restent valables.

REGLE 1 : $a^m.a^n = a^{m+n}$

REGLE 2 : $(ab)^n = a^n b^n$

REGLE 3 : $(a^m)^n = a^{mn}$

REGLE 4 : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

On va maintenant établir une cinquième et dernière règle de calcul.

$$\frac{6^5}{6^3} = \frac{6.6.6.6.6}{6.6.6} = 6^2 = 6^{5-3} \qquad \frac{3^4}{3^6} = \frac{3.3.3.3}{3.3.3.3.3.3} = 3^{-2} = 3^{4-6}$$

Fais de même pour :

$$\frac{a^4}{a^2} \;;\; \frac{a^7}{a^4} \;;\; \frac{x^5}{x^4} \;;\; \frac{y^4}{y^5}$$

Enonce alors la cinquième règle :

REGLE 5 : ...

Elle est valable pour des exposants entiers quelconques.

Essaie de la montrer avec le calcul suivant : $\frac{5^{-3}}{5^{-6}}$

Remarque : Et si m = n ? As-tu pensé à ce cas-là ? Calcule $\frac{5^3}{5^3}$. Que peut-on essayer de justifier ainsi ?

F) EXERCICES

EXERCICE 15 : Simplifier les écritures suivantes :

a) $3^{-4}.3^{-7}.3^{-2}$; $4^{-5}.4^{-2}.4^{-4}$; $(-3)^{-2}.(-3)^{-5}$; $(-5)^6.(-5)^{-3}.(-5)^{-3}$

b) $a^4a^{-6}a^{-3}$; $x^{-4}x^{-1}x^6$

c) $(3a)^{-2}$; $(4x)^{-3}$; $(2a)^4(ab)^{-2}$

d) $(\frac{3a}{5})^4$; $(\frac{x}{2})^{-5}$; $(\frac{xy}{3})^{-2}$

e) $\frac{3^5}{3^2}$; $\frac{(-5)^6}{(-5)^2}$; $\frac{a^5}{a^7}$; $\frac{x^{-3}}{x^6}$; $\frac{a^{-2}}{a^{-6}}$

f) $\frac{a^{-5}}{a^5}$; $\frac{b^4}{b^{-4}}$; $\frac{c^{-6}}{c^{-6}}$; $(ab)^{-3}a^2$; $a^{-3}(ab^2)^2$

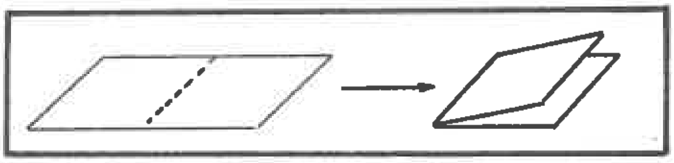
g) $(2a^2)^{-2}a^3$; $3a^3(\frac{ab}{3})^{-3}(2a)^3$

4 / QUELQUES APPLICATIONS

EXERCICE 16 : On rencontre très souvent les puissances de 2. Calcule :

exposant	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
puissance	1	2	4	8									

Un patissier fait une pâte feuilletée. Combien de fois doit-il plier la plaque de pâte pour obtenir un millefeuilles ?



$\boxed{\text{EXERCICE 17}}$: On suppose qu'un nénuphar double de surface tous les jours. Le premier jour, il occupe 50 cm^2.

a) Quelle surface occupe-t-il au bout de 2 jours ; de 3 jours ; de 10 jours ?

b) Combien de jours faudra-t-il pour recouvrir toute une mare de 100 m^2 ?

$\boxed{\text{EXERCICE 18}}$: J'ai un travail à exécuter. Le premier jour, j'en fais la moitié. La fatigue aidant, chaque jour suivant je fais la moitié de ce qui reste à faire.

a) Que reste-t-il à faire au bout de 2 jours ?

b) Que reste-t-il à faire au bout de 3 jours ?

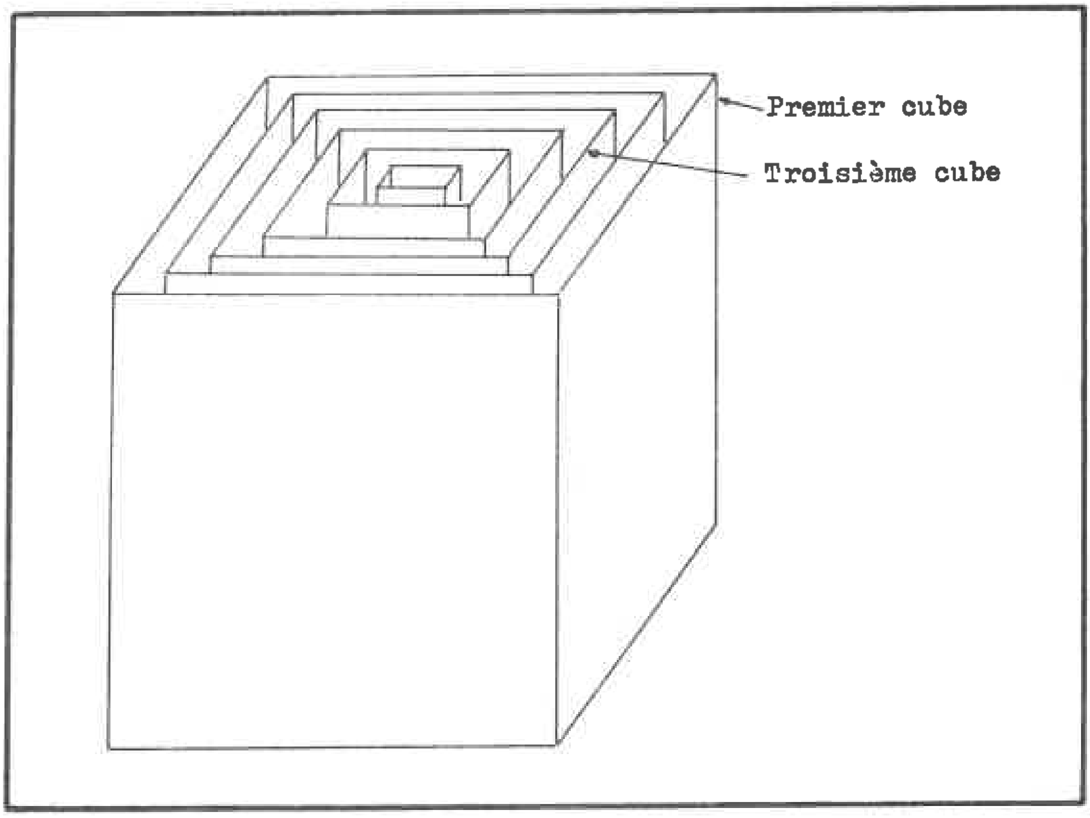
Présente le résultat en utilisant des puissances de 2 et des fractions.

$\boxed{\text{EXERCICE 19}}$: Voici 6 cubes gigognes. (vus de dessus).
L'arête d'un cube est égale au $\frac{2}{3}$ de l'arête du cube qui le précède.
Le troisième a une arête de 1 dm.

a) Pour le quatrième, le cinquième et le sixième cube exprime la longueur de leur arête en utilisant des puissances de $\frac{2}{3}$.

b) Pour les mêmes cubes, exprime leur volume en utilisant des puissances de $\frac{2}{3}$

c) Reprends les questions a et b pour le premier et le deuxième cube.



5 / DES EXERCICES

EXERCICE 20 : Détermine les puissances d'exposant 1, 2, 3 et 4 de :

$\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{3}$ $\quad \frac{3}{10}$ $\quad \frac{-3}{4}$ $\quad -0{,}2$ $\quad \frac{-7}{-10}$ $\quad \frac{2}{5}$ $\quad \frac{-7}{8}$ $\quad \frac{4}{3}$ $\quad \frac{-5}{6}$ $\quad \frac{1}{5}$

EXERCICE 21 : Détermine le signe de :

$(-\frac{11}{25})^3 \qquad (\frac{1}{2})^3 \qquad (-\frac{2}{3})^{24} \qquad (-\frac{9}{10})^{51} \qquad (-\frac{21}{13})^{12} \qquad (\frac{17}{2})^5 \qquad (-\frac{17}{9})^{21}$

EXERCICE 22 : On donne $a = 2x^2$; $b = (2x)^2$; $c = -2x^2$; $d = (-2x)^2$.

Calcule a, b, c et d pour x -1 ; 2 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$

Compare a, b, c et d.

EXERCICE 23 : Calcule :

$(\frac{2}{3} \cdot \frac{-5}{7})^2$; $(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5})^3$; $(-\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{18})^3$; $(\frac{5}{3} \cdot \frac{-1}{2})^4$; $(\frac{9}{11} \cdot \frac{6}{4})^2$

$(-\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3})^3$; $(\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} \cdot 4)^2$; $((-0{,}3).4.\frac{-4}{5})^3$; $(-\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{36}{10})^4$

EXERCICE 24 : Calcule :

$\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}\right)^3$; $\left(\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}}\right)^2$; $\left(\frac{3}{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(\frac{\frac{2}{7}}{-\frac{2}{7}}\right)^5$

EXERCICE 25 : Calcule :

$(-\frac{2}{5})(-\frac{2}{5})^3$; $(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^3$; $(\frac{3}{4})(\frac{3}{4})^2$; $(-\frac{2}{3})(-\frac{2}{3})^3$

$(\frac{7}{2})^2(-\frac{7}{2})^3$; $(\frac{3}{-7})^2(\frac{-3}{-7})^3$; $(\frac{-5}{4})^2(\frac{5}{-4})^7$; $(\frac{3}{11})^5(-\frac{-3}{11})^4$

EXERCICE 26 : Calcule :

$10^3.10^2$; $10^0.\ 10^4$; 10.10^5 ; $10^2.10^4$

EXERCICE 27 : Calcule :

$((+4)^5)^7$; $((-6)^2)^4$; $((-3)^2)^3$; $((-5)^3)^3$; $((\frac{2}{7})^7)^0$

$((-\frac{1}{2})^3)^3$; $(-10^3)^2$; $-(10^3)^2$; $(10^3)^2$

EXERCICE 28 : Calcule :

$(-4)^2(-3)^2(+7)$; $(\frac{2}{3})^3(-\frac{3}{4})^2(-\frac{3}{5})$; $(-4)^3(\frac{3}{2})^2(-5)$

EXERCICE 29 : Calcule :

$$\frac{(-7)^5}{(-7)^2} \quad ; \quad \frac{(-5)^4}{(-5)^1} \quad ; \quad \frac{(-3)^8}{(-3)^6} \quad ; \quad \frac{(-2)^{12}}{(-2)^9} \quad ; \quad \frac{-10^3}{10^2} \quad ; \quad \frac{(-10)^{12}}{-10^9}$$

EXERCICE 30 : Calcule et réduis :

$$(ab)^3 \quad ; \quad (a^2b)^3 \quad ; \quad (ab^3)^2 \quad ; \quad (2a^2b^3)^3 \quad ; \quad (-3ab^2)^4$$

$$((a^2b^3)^2)^5 \quad ; \quad (3a^3)(ab^2)^4 \quad ; \quad (5a^2b)^2(-ab^3)^3$$

EXERCICE 31 : Calcule et réduis :

$$\left(\frac{2a^2}{b^3}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad ; \quad \left(\frac{a^2}{b}\right)^3 \quad ; \quad \left(\frac{a}{b^3}\right)^2 \quad ; \quad \left(-\frac{a}{b^2}\right)^3 \quad ; \quad (3a^2)\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$$

EXERCICE 32 : Reprendre l'exercice 20 avec les exposants -1, -2, -3 et -4.

EXERCICE 33 : Détermine l'inverse de :

$$7^2 \quad ; \quad (-5)^3 \quad ; \quad \left(\frac{-2}{7}\right)^{-4} \quad ; \quad \left(\frac{9}{10}\right)^{-5} \quad ; \quad \left(\frac{3}{-5}\right)^{-3}$$

$$10^{-5} \quad ; \quad 10^2 \quad ; \quad 10^{-7} \quad ; \quad (-10)^{-5}$$

EXERCICE 34 : Ecris sous la forme a^n avec a relatif et n relatif :

$$\frac{1}{7} \quad ; \quad -\frac{1}{5^4} \quad ; \quad \frac{1}{(-4)^2} \quad ; \quad \frac{-1}{6} \quad ; \quad \frac{1}{(-2)^{-1}} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

EXERCICE 35 : Compare :

$$(4^{-2})^3 \text{ et } \frac{1}{4^6} \qquad ; \qquad (2^3)^{-2} \text{ et } \frac{2}{2^7}$$

EXERCICE 36 : Calcule et simplifie :

$$(-5)^2(-5)^{-3} \quad ; \quad (-3)^5(-3)^{-2} \quad ; \quad 2^4.2^{-6} \quad ; \quad (-7)^{-2}(-7)^{-1}$$

$$(-6)^{-2}(-6)^3 \quad ; \quad 4^{-3}.4^2 \quad ; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \quad ; \quad \left(-\frac{2}{7}\right)^3\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4}$$

EXERCICE 37 : Calcule et simplifie :

$$10^5.10^{-2}.10^3 \quad ; \quad 10^{-1}.10^2.10^{-1} \quad ; \quad (-4)^{-2}(-2)^3(-8)^{-1}$$

$$((-7)^2)^{-3} \quad ; \quad ((-6)^{-3})^2 \quad ; \quad ((-6)^2)^{-3} \quad ; \quad (10^2)^{-3} \quad ; \quad ((-10)^{-3})^{-3}$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^3 \quad ; \quad \left(\left(-\frac{7}{10}\right)^2\right)^{-1} \quad ; \quad \left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^{-2}$$

CONTROLE N° 31

Dans tout ce controle on mettra chaque résultat sous la forme $a^n b^m c^p \ldots$ où a, b, c, n, m ... sont des nombres relatifs.
Le résultat pourra être éventuellement précédé d'un signe.

EXERCICE 1 : Effectue :

$$(-\frac{4}{5})^3 \quad ; \quad (\frac{7}{5})^2 \quad ; \quad (-\frac{3}{2})^4 \quad ; \quad (\frac{2}{3})^5 \quad ; \quad -(\frac{5}{2})^2 \quad ; \quad -(\frac{5}{3})^3 \quad ; \quad -(-\frac{1}{3})^5$$

EXERCICE 2 : Quel est le signe de chacun des nombres suivants :

$$(-\frac{134}{256})^{7859} \quad ; \quad (-\frac{839}{7654})^{-2732} \quad ; \quad (-\frac{-783}{-871})^{-285}$$

EXERCICE 3 : Effectue les calculs suivants :

$$(\frac{3}{4} \cdot \frac{-5}{7})^2 \qquad ; \qquad (\frac{5}{-2} \cdot \frac{1}{7})^{-3}$$

EXERCICE 4 : Simplifie l'expression suivante :

$$(-3)^{-2}.5^9.7^3.(-11)^4.(-17)^9(-3)^4.7^{-5}.5^{-7}.11^5.(17)^2$$

EXERCICE 5 : Effectue :

$$(3^{-2})^4 \quad ; \quad (-5^3)^2 \quad ; \quad ((-6)^5)^2 \quad ; \quad (4^{-3})^7 \quad ; \quad (-5^{-2})^{-11} \quad ; \quad ((-6)^{-5})^{-3}$$

EXERCICE 6 : Effectue :

$$(-\frac{3}{2})^4.5^2.(\frac{4}{-7})^{-3}$$

EXERCICE 7 : Une balle élastique, lâchée sans vitesse initiale, rebondit sur le sol aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur initiale qui est de 12 mètres.

a) A quelle hauteur monte-t-elle après le troisième rebond ?

b) Combien faudra-t-il de rebonds pour que la balle ne monte plus qu'à une hauteur de 20 cm.

EXERCICE 8 : Je place un capital de 50000 francs. L'intérêt servi est de 4,5 % par an. Les intérêts sont composés, c'est à dire qu'ils s'ajoutent en fin d'année au capital pour former un nouveau capital qui lui-même rapportera des intérêts l'année suivante. Et ainsi de suite.

a) Quel sera le capital au bout d'un an ? de 2 ans ? de 3 ans ? de n ans ?

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 32

TITRE : THEOREME DE PYTHAGORE

4

PREREQUIS

MACHINE A CALCULER

PROJECTION ORTHOGONALE

RAPPORT DE PROJECTION

COSINUS

OBJECTIFS

- CALCULER DES RACINES CARREES
- REUTILISER LE COSINUS
- APPLIQUER PYTHAGORE A LA RESOLUTION DE TRIANGLES RECTANGLES (DANS LES FIGURES PLANES ET LES VOLUMES)

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY — JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT — GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX — GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER 32

THEOREME DE PYTHAGORE

1/ ACTIVITES PRELIMINAIRES

A) Activité 1
<u>Cercle circonscrit à un triangle rectangle</u>

Rappelez la définition de la médiatrice d'un segment.
Tracez un triangle ABC rectangle en $\hat{A}$.
Soit B' et C' les milieux respectifs de [AC] et [AB].
Tracez les médiatrices de [AB] et [AC].
Quel est le projeté de B' dans la projection sur (BC) parallèlement à (AB) ?
Quel est le projeté de C' dans la projection sur (BC) parallèlement à (AC) ?
En déduire la position du centre du cercle <u>circonscrit</u> à un triangle rectangle.

PROPRIETE
<u>Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l' hypoténuse.</u>

INVERSEMENT
On admettra que:
<u>Si l'un des côtes d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit il est rectangle .</u>

Ceci fournit une façon commode de tracer un triangle rectangle.

B) Activité 2
Tracez un cercle de rayon 10 Cm. Soit [BC] un diamètre.
Placez un point A_1 sur le cercle (différent de B et C)

Mesurez BA_1 et calculez $BA_1{}^2$

Mesurez CA_1 et calculez $CA_1{}^2$

Calculez $BA_1{}^2 + CA_1{}^2$

Calculez BC^2

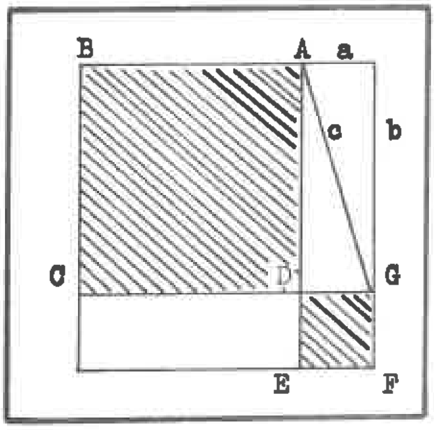
Reprenez ces calculs pour 4 autres points A_2 , ..., A_5 . Conclusion??

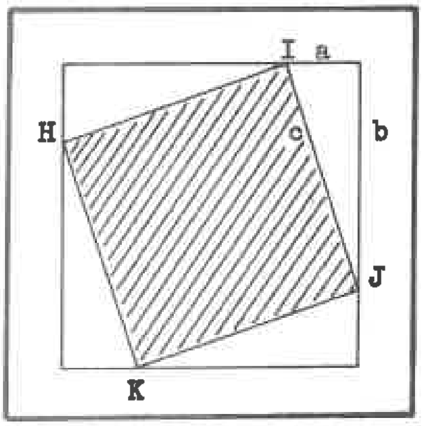
C) conclusion

Nous venons de <u>vérifier</u> que dans un triangle rectangle la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse. C'est le <u>**théorème de PYTHAGORE**</u>

2/ THEOREME DE PYTHAGORE: démonstration

Considérons un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b, et l' hypoténuse c.
Soient les figures suivantes:





-<u>Démontrez</u> que le quadrilatère HIJK est un carré.
-<u>Démontrez</u> en utilisant des considérations <u>géométriques</u> simples que la partie hachurée de la figure 1 a même aire que la partie hachurée de la figure 2.

Soit de manière plus précise:

-Exprimez les aires des carrés ABCD ,DEFG ,HIJK.
-A quelle relation arrivons nous donc ?

Nous arrivons à :

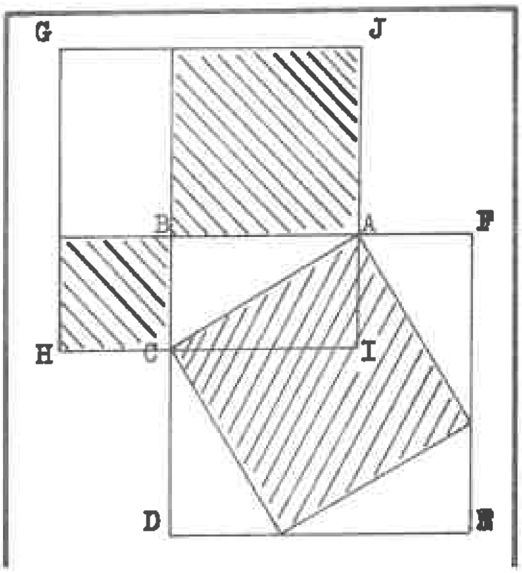
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Reprenons l'énoncé du théorème de PYTHAGORE :

<u>DANS UN TRIANGLE RECTANGLE LA SOMME DES CARRES DES COTES DE L'ANGLE DROIT EST EGALE AU CARRE DE L'HYPOTENUSE.</u>

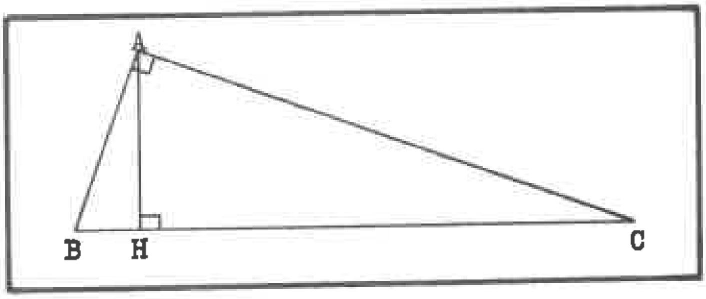
Exercice

En utilisant les carrés BDEF et GHIJ ,démontrez que la somme des aires des deux petits carrés hachurés est égale à l' aire du grand carré hachuré.



3/ THEOREME DE PYTHAGORE: autre démonstration.

<u>Remarque:</u>
Cette démonstration utilise les notions développées dans le dossier 26:
Projection orthogonale et cosinus d'un angle aigu.



Pour le triangle rectangle ABH, écrivez le rapport qui exprime Cos $\hat{B}$.
Pour le triangle rectangle ABC, écrivez le rapport qui exprime Cos $\hat{B}$.
<u>En déduire:</u>

$$BA^2 = BH \times BC$$

Pour le triangle rectangle ACH, écrivez le rapport qui exprime Cos $\hat{C}$.
Pour le triangle rectangle ACB, écrivez le rapport qui exprime Cos $\hat{C}$.
<u>En déduire:</u>

$$CA^2 = CH \times CB$$

Calculez maintenant la somme $BA^2 + CA^2$
(Vous devez arriver après quelques (?) efforts à BC^2)

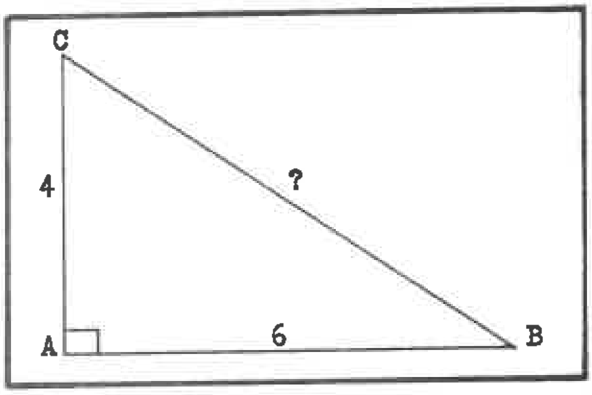
Nous arrivons donc pour la troisième fois à la relation de PYTHAGORE :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

4/ EXERCICES :

A) Calcul de l' hypoténuse d'un triangle rectangle.

<u>Exercice traité</u>
Soit le triangle rectangle :



Pour calculer l' hypoténuse BC il faut :

Ecrire la relation de PYTHAGORE : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Remplacer ce que l'on connait : $BC^2 = 6^2 + 4^2$

Calculer : $BC^2 = 52$

Et trouver (calculatrice) : $BC = \sqrt{52}$

Soit : $BC = 7.211102$

A vous

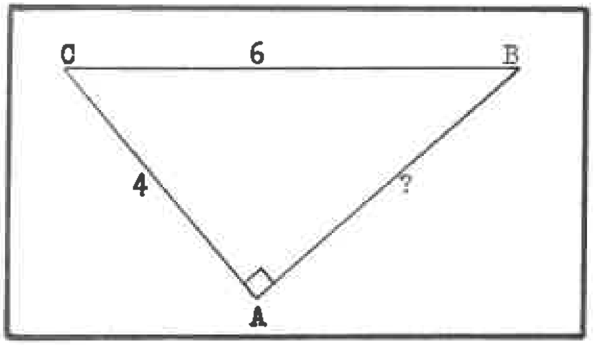
-Calculez l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit :

- 5 et 12
- 3 et 4
- 2,7 et 5,2
- 34 et 23
- 7,8 et 10,4

B) Calcul d'un côté de l' angle droit

Exercice traité

Soit le triangle rectangle:



Pour calculer AB il faut:

Ecrire la relation de PYTHAGORE : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Remplacer ce que l'on connait : $AB^2 + 4^2 = 6^2$

Calculer (équation simple) : $AB^2 = 20$
Soit : $AB = 4{,}472135$

A vous

Calculez le côté inconnu dans les cas suivants:

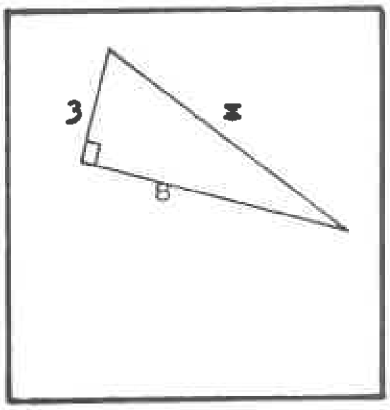
côté AB	côté AC	hypoténuse BC
12		25
	34	52
3		5
	14,8	18,5

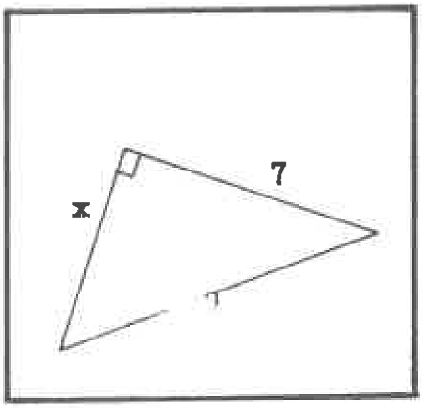
Exercice

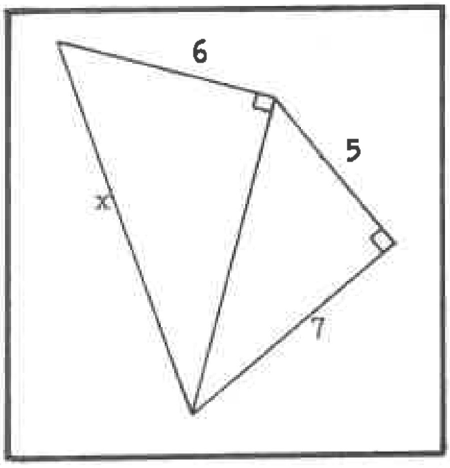
Soit un triangle ABC rectangle en $\hat{A}$. Soit h le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne AB = 12 et AC = 9 . Calculez BC , BH (avec Cos $\hat{B}$), CH , AH.

Exercice

Calculez X dans chacun des cas suivants:

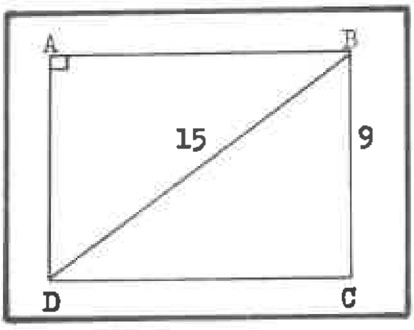






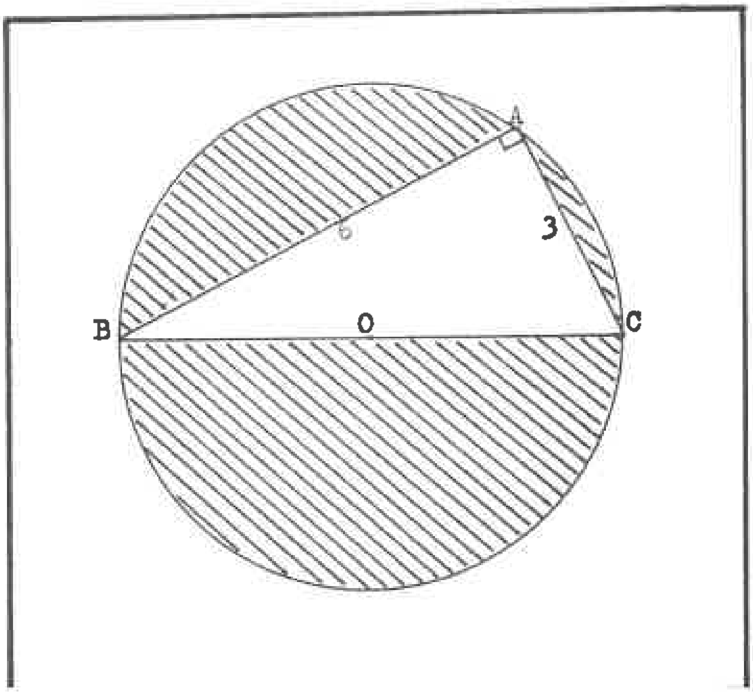
Exercice

Quel est l'aire du rectangle ABCD ?



Exercice

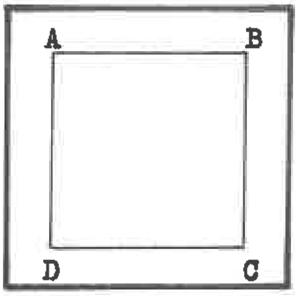
Quelle est l'aire de la partie hachurée ?



c) Applications du théorème de Pythagore

i -Mesure d des diagonales du carré.

Tracez un carré de côté 1 unité.



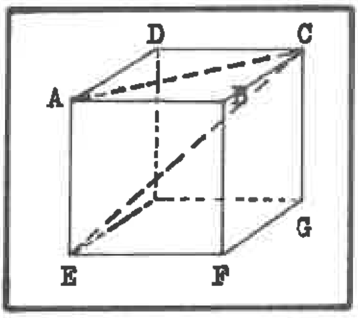
Appliquez la relation de Pythagore au triangle rectangle ABC.

On doit trouver AC = d $=\sqrt{2}$

Recommencer avec un carré de côté c. On doit trouver AC = d = $c\sqrt{2}$

ii -Mesure d des diagonales d'un cube.

Tracez un cube d' arête 1 unité.



Quelle est la mesure AC ? (cas précédent)

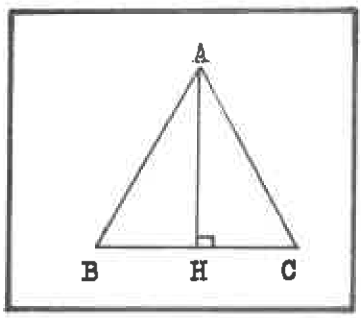
Quelle est la nature du triangle ACE ? Appliquez la relation de Pythagore à ce triangle.

On doit trouver CE = d $=\sqrt{3}$

Recommencez avec un cube d'arête a . On doit trouver CE = $a\sqrt{3}$

iii -Mesure d'une hauteur d'un triangle équilatéral

Tracez un triangle équilatéral ABC de côté 1 unité.



Quelle est la nature du triangle ABH ?

Quelle est la mesure BH ?

Appliquez la relation de Pythagore au triangle ABH.

Quelle est la mesure AH ? ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Recommencez avec un triangle équilatéral de côté c.

5/ RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE

Exemple : Soit le tableau suivant.

a	b	c
8	6	10
4	5	6
4	7,5	8,5
1	2	3
1,4	4,8	5

Tracez les triangles ayant pour côtés a,b,c.

Quels sont les triangles rectangles?

Remarque : On utilise la calculatrice pour avoir une valeur approchée (ou exacte) des racines carrées.

ENONCE DE LA RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE

Si dans un triangle la somme des carrés de deux des côtés est égale au carré du troisième côté alors il est rectangle.

Exercice On dit que 3,4,5 constituent l'équerre des maçons.Pourquoi?

Problème

Comment trouver des nombres entiers a,b,c vérifiant la relation de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$?

A l' époque d'Euclide, 3 siècles avant J.C, les mathématiciens ont trouver des solutions en employant les formules suivantes:

$a = m^2 - n^2$ $b = 2\ mn$ $c = m^2 + n^2$

m et n sont des nombres entiers tels que m > n.

1/ Complétez le tableau suivant:

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	1			
3	2			
4	1			
4	2			
4	3			
5	1			
Et ainsi de suite				

2/ Calculez a^2 , b^2 , c^2 en fonction de m et n ,et montrez que la relation de Pythagore est bien vérifiée.

6/ DES EXERCICES

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm. Quelle est la mesure de ses hauteurs à 0,1 près par défaut ?

EXERCICE 2

ABCD est un carré de côté 5 cm. Quelle est la mesure des diagonales à 0,01 près par excès ?

EXERCICE 3

Les diagonales d'un carré mesurent 10 cm. Quelle est la mesure d'un côté ?

EXERCICE 4

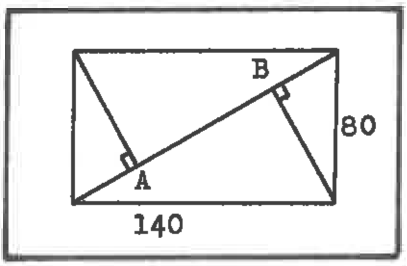
Les arêtes d'un cube mesurent 5 cm. Quelle est la mesure de ses diagonales ? Donnez un encadrement de largeur 0,01 cm de cette mesure .

EXERCICE 5

Les diagonales d'un cube mesurent 10 cm. Quelle est la mesure de ses arêtes à 0,1 près ?

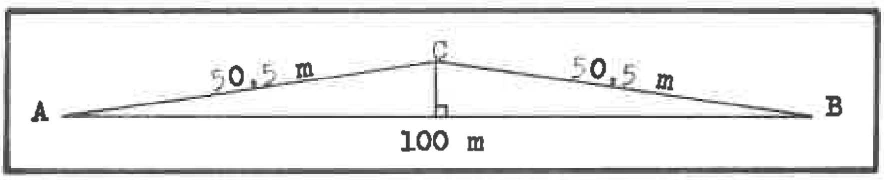
EXERCICE 6

Quelle est la mesure du segment [AB] sur la figure suivante ?



EXERCICE 7

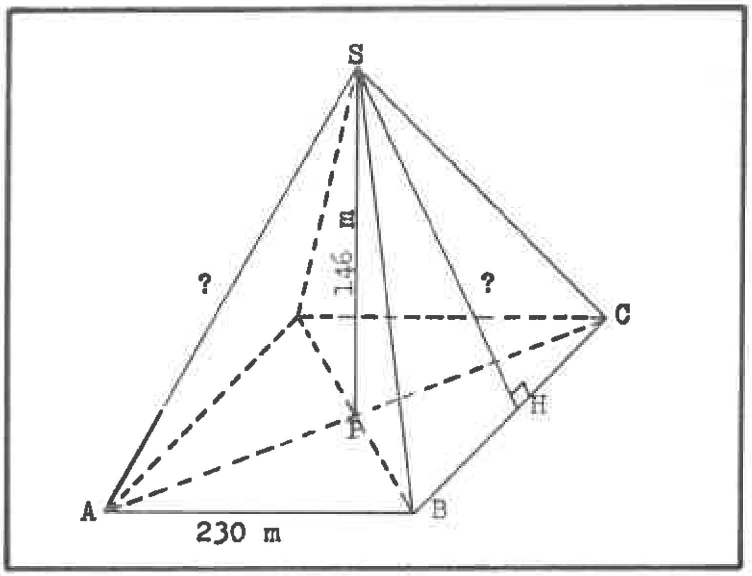
Une corde a 100 m de long. On l'allonge d'un mètre et on la tend en son milieu comme l' indique la figure :



- A quelle hauteur se trouve le point C ?
- Donnez une approximation de l' angle a à 0,1 degré près.

EXERCICE 8

La base de la pyramide de CHEOPS est un carré de côté 230 m. Sa hauteur mesure 146 m et ses faces latérales sont des triangles isocèles.



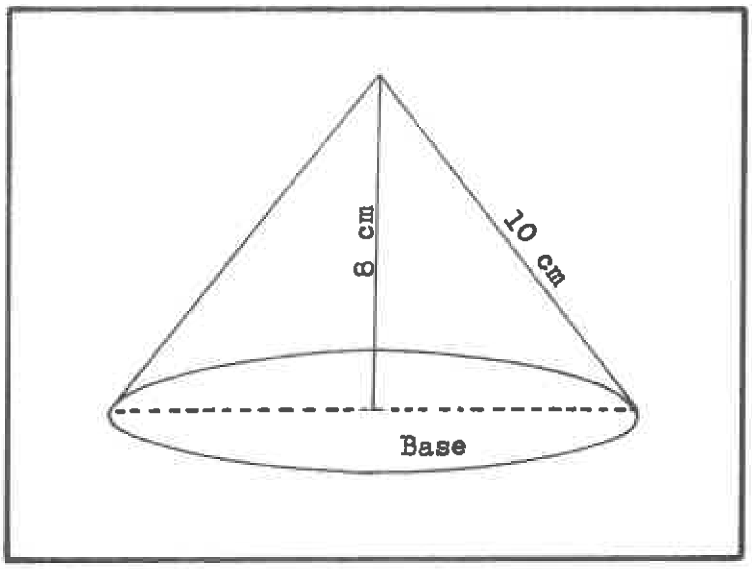
-Calculez la distance parcourue par quelqu'un qui monte au sommet en suivant la hauteur d'une face .
-Calculez la distance parcourue par quelqu'un qui monte au sommet en suivant une arête .

EXERCICE 9

On rappelle que le volume d'un cône de révolution est donné par:

$$V = (B \times h) / 3$$

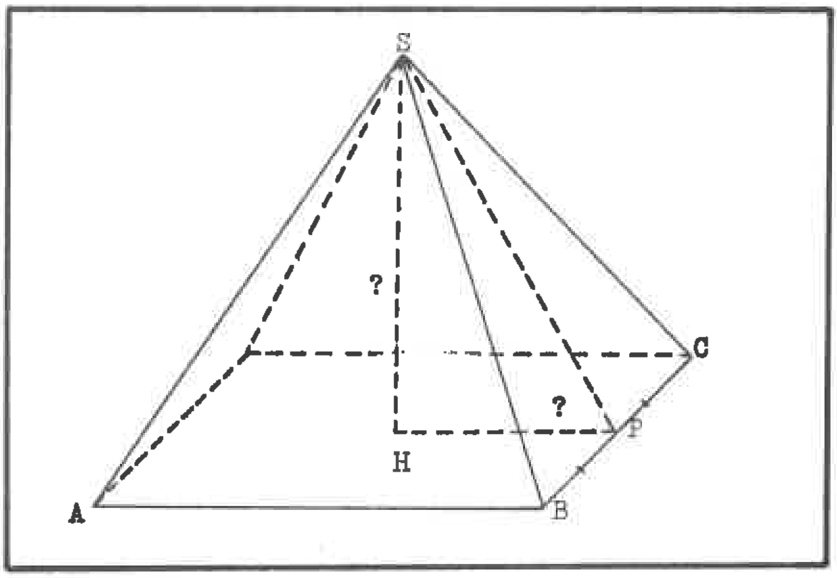
B désigne l' aire de la base , et h la hauteur.



Calculez le volume de ce cône de révolution sachant que la hauteur mesure 8 cm et un segment générateur mesure 10 cm .

EXERCICE 10

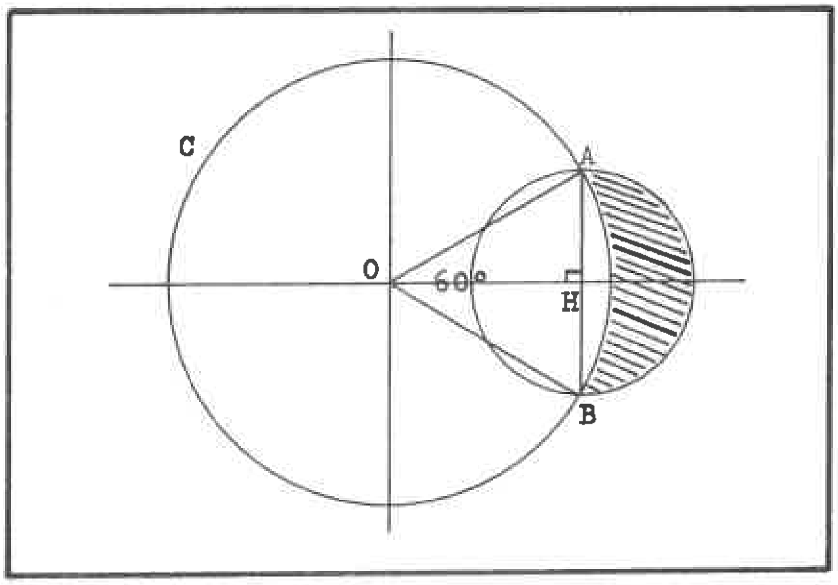
Pyramide et cosinus...
Voici une pyramide à base carrée dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux de 100 m de côté .



- P étant le milieu de [BC] , calculez PS puis HP. En déduire le cosinus de l' angle $\widehat{HPS}$,puis l'angle $\widehat{HPS}$.
- Quelle est la hauteur de la pyramide ?

EXERCICE 11

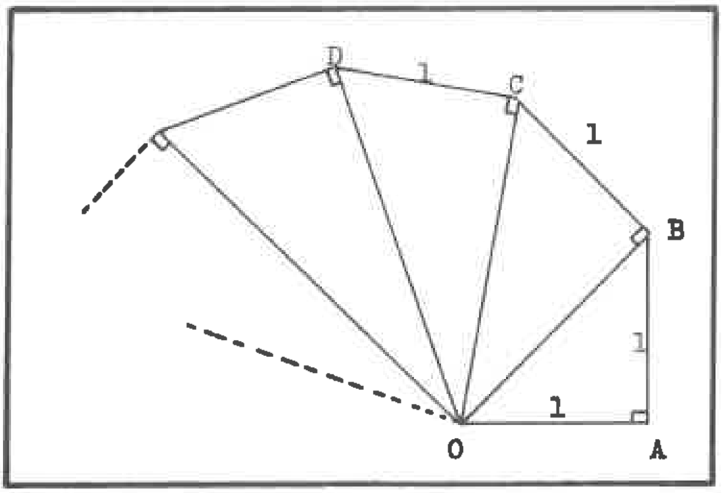
C est un cercle de rayon 6 cm.



-Quelle est la nature du triangle OAB ?
-Quelle est la nature du triangle OHB ?
-Quelle est la mesure du rayon du cercle C' ?
-Quelle est la mesure de OH ?
-Quelle est l'aire du triangle OAB ?
-Quelle est l'aire du secteur circulaire OAB ?
-En déduire l'aire de la partie hachurée ?

EXERCICE FINAL

Voici le début d'une spirale.



-Quel est son mode de construction ?

-Quelle est la mesure __exacte__ des segments [OA] , [OB] , [OC] , [OD] ?

-Mesurez les segments précédents à l'aide d'une règle graduée (attention à l'unité)

-En déduire une valeur approchée des mesures exactes précédentes.

-Continuez la spirale pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{10}$.

__REMARQUE__

Ce procédé, bien qu'intéressant, est inutilisable pour de grands nombres. (Si on veut par exemple déterminer $\sqrt{74}$.)

Pour ce faire, il faut être astucieux, et remarquer que 74 est la somme de deux nombres carrés:

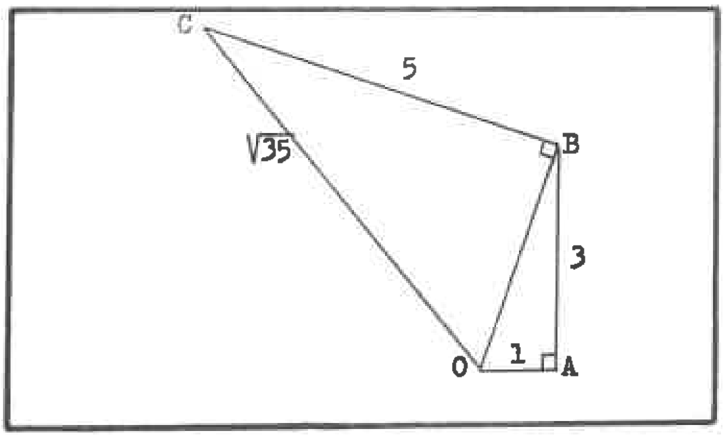
$$74 = 25 + 49$$

(25 est le carré de 5 et 49 est le carré de 7)

Il suffit donc de tracer un triangle rectangle dont les côtés de l' angle droit mesurent 5 et 7 .La mesure de son hypoténuse fournit une valeur approchée de $\sqrt{74}$ .Faites le!

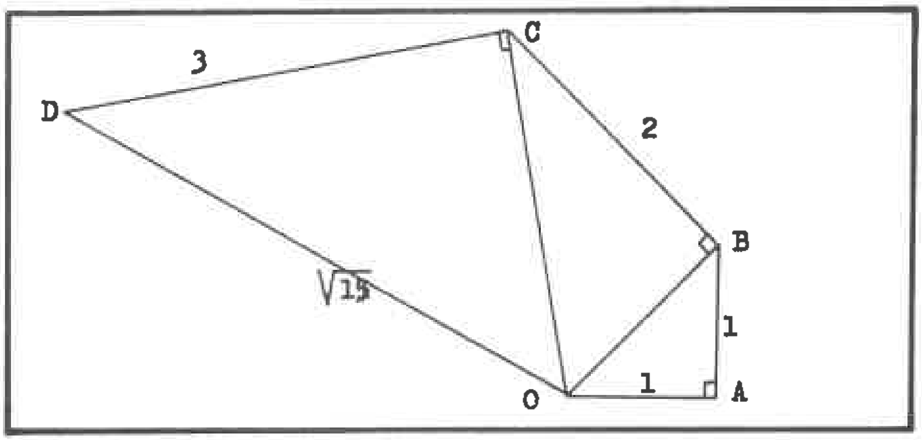
Plus astucieux encore si l' on veut déterminer $\sqrt{35}$ .Il faut remarquer que 35 est la somme de 3 nombres carrés:

$$35 = 1 + 9 + 25$$



Faites de même pour $\sqrt{3}$,$\sqrt{50}$.

Et enfin, déterminons $\sqrt{15}$ .On remarque 15 = 1 + 1 + 4 + 9



Faites de même pour $\sqrt{39}$.

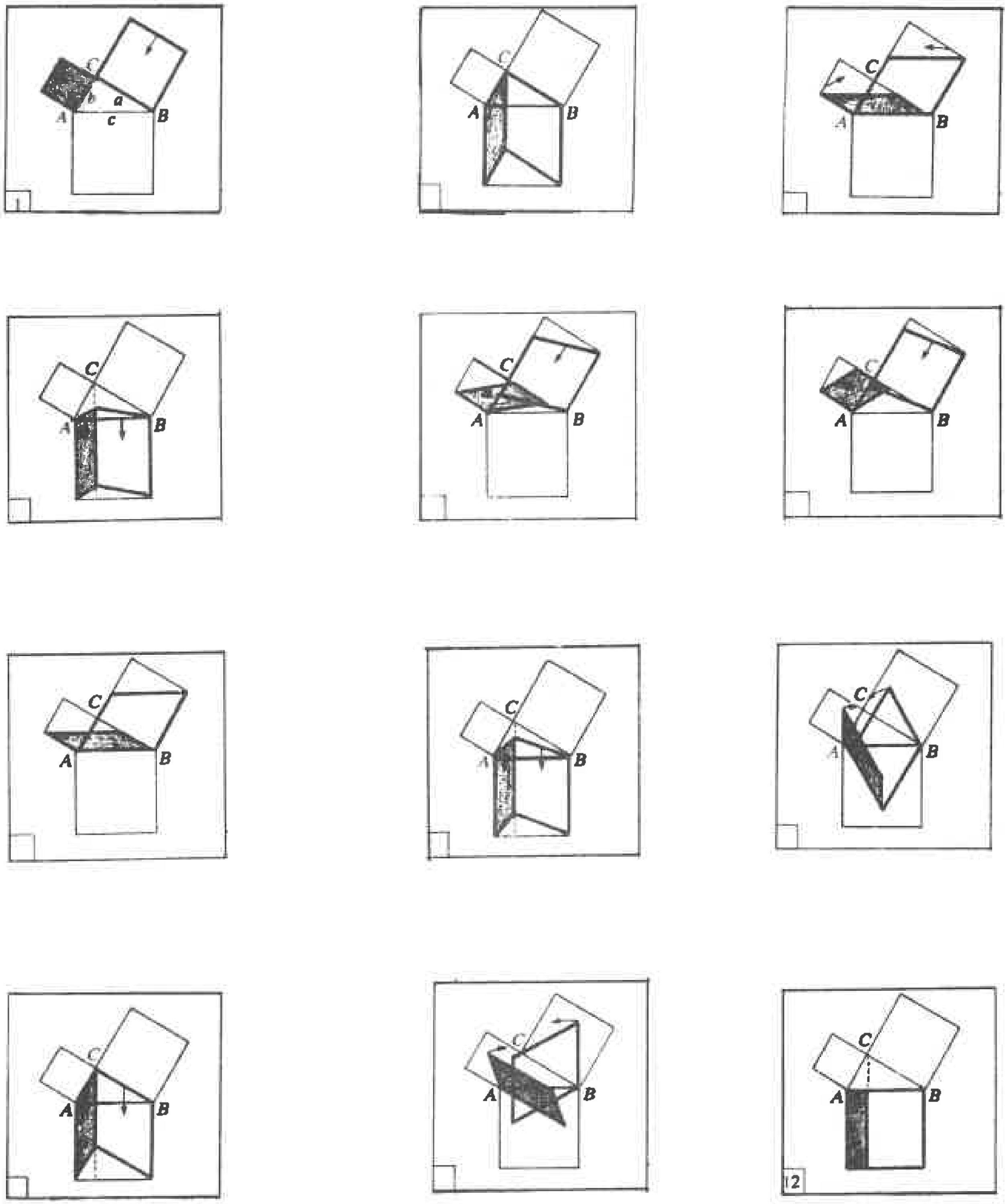
<u>Remarque finale</u>

<u>Question:</u> Est-ce que la décomposition des nombres entiers en une somme de nombres carrés, peut avoir 5 termes ? 6 termes ?...

<u>Réponse</u>: Les mathématiciens ont répondu que <u>non</u> .
Autrement dit :<u>Un nombre entier est égal à la somme de 4 nombres carrés au plus.</u>(OUF!!!)

<u>Exemple</u>: 147 = 1 + 1 + 1 + 144
Faites en quelques-uns.

Reconstitue la bande dessinée illustrant le résultat de Pythagore.



D'après SUCH-BOREL

DOSSIER 32

CONTROLE

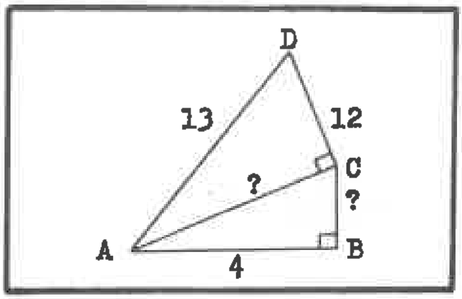
Exercice 1

ABC est un triangle. Vous préciserez dans chacun des cas s'il est rectangle ,ainsi que l'angle droit.

AB	BC	CA
3	5	4
2	2	2
4	9	10
3	3	$\sqrt{18}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$

Exercice 2

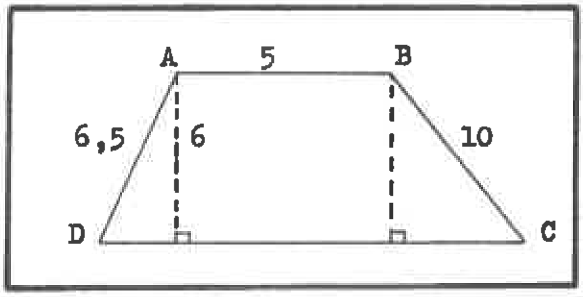
Calculez les dimensions manquantes.



Exercice 3

Calculez l'aire du trapèze ABCD. On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

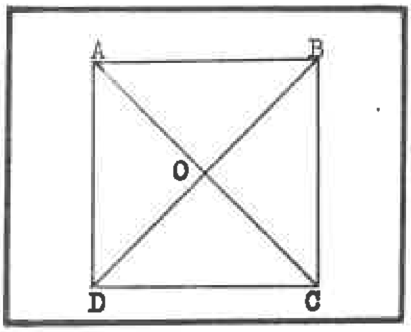
$$\frac{(\text{Base} + \text{base}) \times \text{hauteur}}{2}$$



Exercice 4

Soit le carré ABCD. Ses diagonales mesurent 10 cm et se coupent en O. On rappelle de plus que l'aire d'un losange est égale au demi-produit des diagonales.

1/Un carré est un losange. Pourquoi?
2/Calculez l'aire du carré ABCD.
3/En déduire la mesure du côté.
4/Utilisez directement le théorème de Pythagore pour calculer ce côté à l'aide du triangle AOB.



Exercice 5

En prenant le cm pour unité, utilisez une contruction géométrique pour donner une approximation de $\sqrt{22}$.

On rappelle que 22 = 1 + 1 + 4 + 16
Vérifiez votre résultat à l'aide de la calculatrice.

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 33

TITRE: PUISSANCES DE DIX

4

PREREQUIS

DOSSIER 31

OBJECTIFS

- CALCUL SUR LES PUISSANCES DE DIX
- NOTATION SCIENTIFIQUE
- UTILISATION DE LA CALCULATRICE SCIENTIFIQUE

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY, JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT, GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX, GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 33

PUISSANCES DE DIX
ECRITURE DES DECIMAUX

1 / RAPPEL

Tu as vu, dans le dossier 31, la définition d'une puissance d'un entier relatif (l'exposant étant positif ou négatif), des calculs sur les puissances et des règles sur les puissances.

Définition : $n \in \mathbb{N}$, $a^n = ...$

$n \in \mathbb{N}$, $a^{-n} = ...$

Règles : 1- $a^m.a^n = ...$

2- $(ab)^n = ...$

3- $(a^n)^m = ...$

4- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = ...$

5- $\frac{a^m}{a^n} = ...$

Ces règles et définition, vues pour des relatifs quelconques, sont évidemment valables pour les puissances de dix.

EXERCICE 1 : Calcule 10^2 ; 10^3 ; 10^4 ; 10^5 ; 10^6 ; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} ; 10^{-5} ; 10^{-6}

Rappelle ce que vaut 10^1 et 10^0.

Observe l'écriture décimale de ces nombres et énonce une règle :

REGLE : ....

EXERCICE 2 : Ecris en utilisant des puissances de 10 les nombres suivants :

a) cent mille ; un milliard ; un million ; un centième ; un dix millième ; un millionième ; dix millions ; mille ; un dix millionième.

b) 10000 ; 0,001 ; 100 000 000 ; 0,1 ; 0,00001 ; 100

EXERCICE 3 : Utilise les règles vues précédemment pour présenter le résultat sous forme d'une puissances de 10 :

a) $10^3.10^4$; $10.10^5.10^2$; $\frac{10^5}{10^2}$; $\frac{10^3}{10^4}$; $\frac{10^6}{10^6}$; $\frac{10^9}{10^3}.10^2$

b) $10^{-5}.10^3.10^{-2}$; $\frac{10^{-3}}{10^5}$; $\frac{10^{-6}}{10^{-8}}$; $\frac{10^{-7}}{10^{-4}}$; $(10.10^4)^3$; $(10^5)^2$

EXERCICE 4 : Même exercice que ci-dessus, mais avec :

a) $(10^{-2})^3.10^{-3}.10^5$; $(10^{-5}.10^3.10^{-1})^2$; $(10^{-5}.10^7)^{-3}$; $\frac{10^4}{10^{-6}}$ 10^{-7}

b) $\frac{10.10^{-4}}{10^{-5}}$; $\frac{10^{-6}}{10^{-4}}$ 10^2 ; $(10^{-2}.10^{-5})^4$

2 / APPLICATION A L'ECRITURE DES DECIMAUX

A) INTRODUCTION

Tu n'as pas oublié que notre numération est décimale (on dit encore "base 10"). Pour écrire les nombres, on utilise donc des puissances de 10. Ainsi ...

$700 = 7.100 = 7.10^2$ $\qquad$ $45\,000 = 45.1000 = 45.10^3$

$0{,}07 = 7.0{,}01 = 7.10^{-2}$ $\qquad$ $0{,}0059 = 59.0{,}0001 = 59.10^{-4}$

EXERCICE 5 : Fais de même pour :

1200 ; 140 ; 220 000 ; 0,9 ; 0,000512 ; 3,577 ; 351,42 ; 512,4

EXERCICE 6 : Maintenant fais le travail "à l'envers". Ecris sous forme de nombres entiers ou décimaux les nombres suivants :

4.10^3 ; 51.10^{-2} ; 38.10^4 ; 103.10^2 ; 458.10^{-2} ; 151.10^7 ; 3257.10^{-1} ; 87.10^{-6}

EXERCICE 7 : Même exercice avec les nombres suivants :

a) 15.10^{12} ; 732.10^{10} ; 45.10^{15}

b) 53.10^{-7} ; 7.10^{-10} ; 41.10^{-8}

- Dans cet exercice 7a), essaie de <u>lire</u> les nombres que tu viens d'écrire. C'est très, très difficile !
- Compare l'écriture utilisant les puissances de 10 et le nombre écrit sous forme entière ou décimale.
- Après tout cela, tu dois comprendre l'intérêt d'une telle écriture pour certains nombres très grands ou très petits (en valeur absolue).
- Ces nombres se rencontrent dans une foule de domaines scientifiques : électronique, chimie, physique, astronomie...)
- Un autre intérêt, et non des moindres, réside dans le fait que ta calculatrice scientifique utilise cette écriture.

  Utilise ta machine pour calculer $0{,}25 \cdot 0{,}002$

  Qu'affiche-t-elle ? Fais de même avec $0{,}003^2$.

B) LA NOTATION SCIENTIFIQUE

Ecris sous forme de nombre entier ou décimal :

$1250.10 = \ldots$

$125.10^2 = \ldots$

$12,5.10^2 = \ldots$

$1,25.10^4 = \ldots$

$0,125.10^5 = \ldots$

Tu as dû constater que toutes ces écritures représentent le même nombre, soit 12 500.
Peux-tu trouver encore d'autres écritures ? $0,0125.10^6$ est-il encore une autre écriture de 12 500 ? Quelle conclusion peux-tu en trirer ?

Fais de même pour $0,045.10^{-1}$

$0,45.10^{-2}$

$4,5.10^{-3}$

45.10^{-4}

Tu as dû trouver toujours le même nombre. Cherche d'autres écritures.

Conclusion : Tout nombre peut s'écrire de plusieurs façons en utilisant les puissances de 10.

Parmi toutes ces façons, on se sert (à part l'écriture décimale du nombre) presque exclusivement d'une seule écriture appelée ECRITURE SCIENTIFIQUE NORMALISEE. C'est celle que te donne ta calculatrice, de manière quasiment automatique, dès que tu manies de très grands ou de très petits nombres.

ECRITURE SCIENTIFIQUE NORMALISEE

$a.10^n$ avec • a nombre décimal (donc éventuellement entier)
avec UN SEUL CHIFFRE ($\neq 0$) avant la virgule.

• $n \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 8 : Dans la série de nombres ci-dessous, si tu effectues le calcul avec ta machine, tu obtiendras le résultat sous forme scientifique. Fais ces calculs, puis présente les résultats sous forme de nombres entiers ou décimaux :

$0,04^2$; $0,15^4$; 35^{-4} ; $12\ 800 . 25\ 000$; 8^{-3} ; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{128}$

$\boxed{\text{EXERCICE 9}}$: Donne l'écriture décimale ou entière des nombres suivants mis sous forme scientifique normalisée :

a) $1,4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{4}$	$1,517 \cdot 10^{2}$	$4,5 \cdot 10$
b) $7 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{8}$	$7,832 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{2}$
c) $5,3 \cdot 10^{-4}$	$8,172 \cdot 10^{-3}$	$9,453 \cdot 10^{5}$	$4 \cdot 10^{-6}$
d) $6 \cdot 10^{5}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{4}$	$1,345 \cdot 10^{2}$

$\boxed{\text{EXERCICE 10}}$: Donne l'écriture scientifique normalisée des nombres suivants :

a) 457	0,0027	745000	3,4
b) 0,00007	900	100,7	12 730 000
c) 4,480	0,572	127	0,0832
d) 7,391	257,2	11,3	718 409,7

3 / UTILISATION DE LA CALCULATRICE

A) DECOUVERTE DES PUISSANCES DE DIX

Il y a deux méthodes possibles : $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{10^x}$

a) Utilisation de $\boxed{x^y}$

Ce que je cherche	Ce que je tape	Affichage	Remarque
10^0	10 $\boxed{x^y}$ 0 =	1	x = 10 et y = 0
10^1	10 $\boxed{x^y}$ 1 =	10	
10^2			
⋮	⋮	⋮	
10^7	10 $\boxed{x^y}$ 7 =	10000000	
10^8			
⋮	⋮	⋮	
10^{99}	10 $\boxed{x^y}$ 99 =	$1.^{\ 99}$	
10^{100}	10 $\boxed{x^y}$ 100 =	E	

$\boxed{\text{Conclusion}}$: $10^n = 1\underbrace{0.....0}_{n\text{ zéros}}$, $(n > 0)$

b) Utilisation de $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$

Ce que je cherche	Ce que je tape	Affichage	Remarque
10^0	0 $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$	1	
10^5	5 $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$	100000	
10^7	7 $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$	10000000	
10^8	8 $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$	$1.\ ^{8}$	
⋮			
10^{99}	99 $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$	$1.\ ^{99}$	
10^{100}	100 $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$	E	

Remarque : La succession des touches $\boxed{INV}$ $\boxed{10^x}$ sera désormais notée $\boxed{10^x}$.

B) DECOUVERTE DES PUISSANCES NEGATIVES DE DIX

On utilise les deux méthodes précédentes.

Ce que je cherche	Ce que je tape	Affichage
10^{-1}	10 $\boxed{x^y}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	0.1
10^{-2}	10 $\boxed{x^y}$ 2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	0.01
10^{-3}	10 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	$1.\ ^{03}$
10^{-8}	10 $\boxed{x^y}$ 8 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	$1.\ ^{08}$

ou alors

Ce que je cherche	Ce que je tape	Affichage
10^{-1}	1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{10^x}$	0.1
10^{-2}	2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{10^x}$	0.01
10^{-3}	3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{10^x}$	$1.\ ^{-03}$
10^{-99}	99 $\boxed{+/-}$ $\boxed{10^x}$	$1.\ ^{-99}$
10^{-100}	100 $\boxed{+/-}$ $\boxed{10^x}$	E

Conclusion : $10^{-n} = \underbrace{0.0\ldots\ldots.0}_{n \text{ zéros}}1$ $(n \geqslant 1)$

C) **AFFICHAGE D'UN NOMBRE SOUS LA FORME $a.10^p$ avec $a \in D$ et $p \in \mathbb{Z}$**

Problème : Comment afficher 128 000 000 alors qu'on ne dispose que de 8 chiffres à l'affichage ?

Méthode : Il suffit de remarquer que 128 000 000 = 128 x 1 000 000 = $128 . 10^6$
On utilise alors la touche [EXP].

Ce que je cherche	Ce que je tape	Affichage
$128 . 10^6$	128 [EXP] 6	128. 06
$1,8 . 10^7$	12,8 [EXP] 7	12,8 07
$1,28 . 10^8$	1,28 [EXP] 8	1,28 08 (Notation scientifique)

EXERCICE 11 : a) Que se passe-t-il si, après avoir affiché $128 . 10^6$, on appuie sur [=] ?

b) Combien y-a-t-il d'affichages possibles pour 128 000 000 ?

c) Que se passe-t-il si l'on veut afficher 128 387 815 ?

D) **AFFICHER UN NOMBRE EN NOTATION SCIENTIFIQUE $a.10^p$ avec $1 \leqslant a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$**

On utilise la touche [EXP] .

Nombre donné	Ce que je tape	Affichage	Signification
6 235	6 235 [EXP] [=]	6,235 03	$6,235 \times 10^3$
0,022	0,022 [EXP] [=]	....	....
-125,34			
-0,09			
35×10^{-8}			

4 / QUELQUES EXERCICES

EXERCICE 12 : Le rayon du noyau d'un atome est un cent millième de nanomètre. Le rayon de l'atome est un dixième de nanomètre.

Combien de fois le diamètre de l'atome est-il plus grand que le diamètre du noyau ?

Un nanomètre = 10^{-9}m.

EXERCICE 13 : Dans un mm^3 de cuivre il y a $8,9 \cdot 10^{19}$ atomes. Combien y-en-a-t-il dans une plaque de 4mm x 3mm et de $3 \cdot 10^{-1}$mm d'épaisseur ?

EXERCICE 14 : Même exercice avec un fil de cuivre de $2 \cdot 10^{-1}$mm de diamètre et de 10cm de long.

EXERCICE 15 : Même exercice avec une sphère de rayon $4,7 \cdot 10^{2}$mm.

EXERCICE 16 : La charge électrique d'un électron est $-1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb. Combien faut-il d'électrons pour avoir une charge de -1 coulomb ?

EXERCICE 17 : Un globule rouge de sang humain est un cylindre de diamètre $7 \cdot 10^{-3}$ mm et de hauteur 3 µm. Notre corps contient 5 litres de sang.

En plaçant les globules rouges "boutàbout" on formerait une chaine de 175.10^{6}m.

a) Combien y-a-t-il de globules rouges dans le sang ?

b) Quelle hauteur cela représenterait-il si on empilait tous ces globules ?

EXERCICE 18 : Le grossissement d'un appareil optique est le nombre par lequel il faut multiplier les dimensions de l'objet pour obtenir celles de l'image.

G = 5 pour une loupe.

G = 10^{3} pour un microscope optique.

G = $7 \cdot 10^{6}$ pour un microscope electronique.

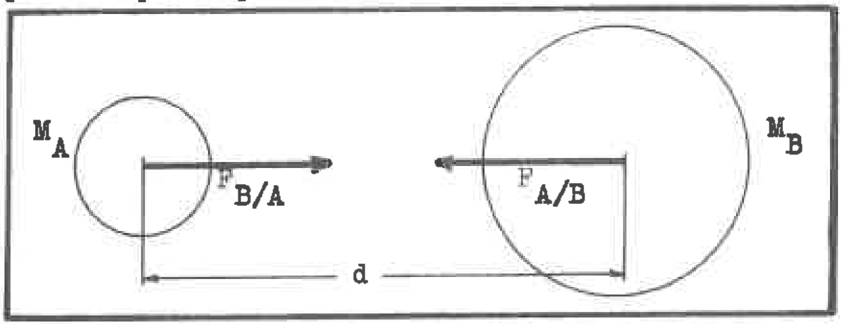
a) Calculer l'image d'un cheveu vu à travers ces 3 instruments sachant que son diamètre est $2 \cdot 10^{-2}$ mm.

b) Calculer le diamètre d'un atome de fer vu à travers ces 3 instruments. Le diamètre d'un atome de fer est $24 \cdot 10^{-2}$ nm. (1 nm = 10^{-9} m)

c) Calculer la distance qui sépare les images de 2 atomes de cuivre vus à travers ces 3 instruments sachant que cette distance est $36 \cdot 10^{-2}$ mm.

EXERCICE 19 : Deux masses quelconques A et B placées dans l'univers s'attirent.

D'après le principe de l'action et de la réaction, ces 2 forces sont opposées.



Ces deux forces dépendent des masses M_A et M_B et de la distance d.

$$\boxed{F_{A/B} = F_{B/A} = K.\ \frac{M_A \cdot M_B}{d^2}}$$

$F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ sont en Newton, M_A et M_B sont en kg, d est en m, $K = 6{,}67.10^{-11}$.

a) Quelle est la force d'attraction entre la Terre et la Lune sachant que

$$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{27} \text{ g}$$

$$M_L = 7{,}35 \cdot 10^{23} \text{ hg}$$

$$d_{TL} = 3{,}84 \cdot 10^{11} \text{ mm}$$

b) Calculer la force d'attraction entre la Terre et une masse de 1 kg placée à la surface de la Terre, sachant que $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg et que $R_T = 6370$ km.

EXERCICE 20 : Voici les diamètres des planètes qui constituent le système solaire, ainsi que celui du Soleil. Sont aussi données les distances de ces planètes au Soleil.

Corps	Diamètres	Distances (en U.A.)
Mercure	$4{,}9 \cdot 10^3$ km	0,4
Vénus	$12{,}1 \cdot 10^9$ mm	0,7
Terre	$128 \cdot 10^4$ dam	1
Mars	6800 km	1,5
Jupiter	$1{,}37 \cdot 10^5$ km	5,2
Saturne	$115 \cdot 10^6$ m	9,5
Uranus	50100 km	19,2
Neptune	$4940 \cdot 10^1$ km	30,1
Pluton	3000 km	39,4
Soleil	$1384 \cdot 10^{12}$ µm	

a) Ecris chacun des diamètres en notation scientifique normalisée.

b) En réduisant la Terre à une bille de 1 cm de rayon, quelles seraient alors, en cm, les diamètres des billes représentant chaque astre ?

Donne une représentation graphique de cette situation en te servant de cercles tangents intérieurement en un même point.

c) Une unité astronomique (U.A.) est la distance moyenne de la Terre au Soleil, soit $150 \cdot 10^9$ mètres.

Evalue chaque distance en km, en mettant tes résultats en écriture scientifique normalisée.

d) En plaçant Mars à 1 mètre du Soleil, à quelle distance devra-t-on placer les autres planètes ?

e) En prenant l'échelle du d) et en l'appliquant aux diamètres, détermine alors le diamètre des billes représentant chaque planètes.

f) En prenant l'échelle du b) et en l'appliquant aux distances, détermine alors à quelle distance on devra placer chaque planètes.

CONTROLE N° 33

EXERCICE 1 : Ecris sous forme de puissances de 10 :

1 milliard ; 100^2 ; 1 000 000 ; 100^8 ; $10\,000^4$; 10 000 000 000 000

0,01 ; 0,10 ; 0,0001 ; 100 millionièmes ; 100 milliardièmes ; 100 dixièmes

EXERCICE 2 : Mets sous forme décimale :

10^7 ; 10^{10} ; $-3,4.10^{-5}$; $7,291.10^5$; 10^{-6} ; 10^{-7}

EXERCICE 3 : Calcule :

$10^{-5}.10^7.10^4$; $10^{-12}.10^{-10}.10^{22}$; $\dfrac{10^7.10^{-9}}{10^{-5}.10^{14}}$; $\dfrac{10^{-4}.10^{-5}}{10^7.10^9}$

EXERCICE 4 : Calcule le nombre suivant :

$7.10^{10} + 3.10^9 + 5.10^7 + 2.10^6 + 1.10^5 + 3.10^3 + 7.10^2 + 2 + 4.10^{-1} + 3.10^{-3}$

EXERCICE 5 : Donne l'écriture scientifique normalisée de :

3781.10^{-4} ; $0,369.10^5$; 478,31

EXERCICE 6 : En utilisant les puissances de 10, convertis en m^3 :

100 km^3 ; 1 mm^3 ; 10 cm^3 ; 0,1 dm^3

Voici un exemple de méthode :

1 km = 10^3 m ; 1 m = 10^3 mm ; 1 km = 10^6 mm

351 km = 351.10^6 mm = $3,51.10^8$ mm

EXERCICE 7 : **ASTRONOMIE** :

Une unité astronomique (1 UA) est la distance moyenne Terre-Soleil. Elle vaut 150 000 000 km.

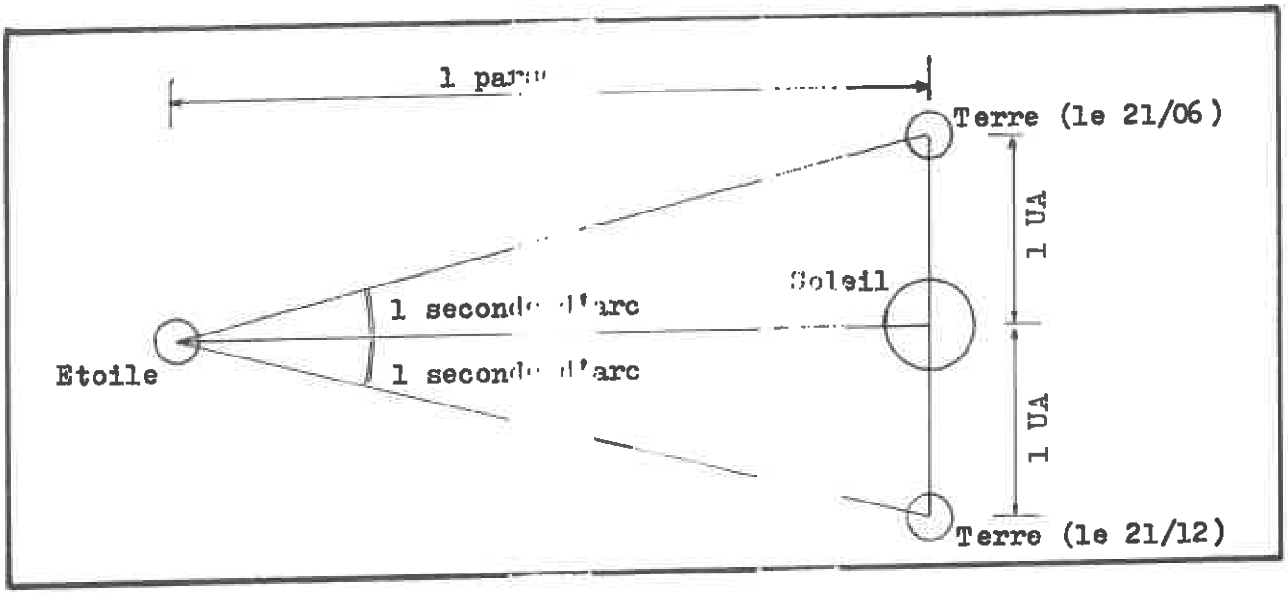
a) Ecris ce nombre en rotation scientifique.

La vitesse de la lumière est 300 000 km/s.

b) Ecris ce nombre en notation scientifique.

c) Calcule alors ce que représente, en km, une année de lumière (a.l) qui est la distance parcourue par la lumière en un an (1 an = 365 jours).

En astronomie, les distances sont tellement grandes qu'on utilise une autre unité qui est le Parsec (pc). C'est la distance à laquelle il faut se placer pour voir l'unité astronomique sous un angle d'une seconde.
(1 degré = 60 minutes d'arc ; 1 minute d'arc = 60 secondes d'arc)



On montrera plus tard qu'un parsec = 206265 UA. (Voir remarque ci-dessous)

d) Exprime 1 parsec en km, puis en années de lumière.

Voici maintenant la distance qui nous sépare de l'étoile la plus proche qui est alpha Centauri : 4,3 al.

e) Combien cela fait-il de km ?

Un escargot de Bourgogne (E), un bédouin du désert (B), un faux Ben Johnson ou un vrai Carl Lewis (L), un concorde (C), une fusée (F) et un vaisseau du futur (V) qui reste à concevoir font le voyage vers alpha Centauri.

Voici leurs vitesses

E	B	L	C	F	V
50 m/s	10 km/h	36 km/h	2200 km/h	28000 km/h	300000 km/s

f) Détermine, pour chacun de ces voyageurs ou appareil, le temps qu'il lui faudra pour rallier l'étoile . Tu donneras le résultat en années.

<u>Remarque</u> : Voir une unité astronomique sous un angle de une seconde d'arc revient à voir un millimètre placé à 206,265 mètres.
Dans ces conditions comment voulez-vous répérer un système planétaire autour d'une étoile située à des distances encore plus grandes que 4,3 al ?

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 34

TITRE: APPLICATIONS LINEAIRES

4

PREREQUIS

DOSSIER 28 : APPLICATIONS LINEAIRES ET PROPORTIONNALITE

OBJECTIFS

- APPROFONDISSEMENT DE LA NOTION D'APPLICATION LINEAIRE
- MOUVEMENT UNIFORME
- CONTRE EXEMPLE

REALISE PAR :

PIERRE BISSEY
ROBERT CHAPOT
BERNARD CHARLAIX
DOMINIQUE ANTOINE
JEAN CLAUDE DUPERRET
GERALD GENTHON
GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 34

APPLICATIONS LINEAIRES

SITUATION 1

Lorsqu'un conducteur électrique de résistance R est parcouru par un courant électrique d'intensité I, la puissance électrique P du conducteur est donnée par la relation :

$$\boxed{P = RI^2}$$

P en watt (W)
R en ohm (Ω)
I en ampère (A)

Voici trois expériences faites sur ce phénomène :

EXPERIENCE 1

On donne $R = 5\Omega$ on a donc $P = 5I^2$

a) Cette formule représente-t-elle une situation linéaire ?

En utilisant cette formule, complète :

I = 2 A P =.. W P = 5 W I =.. A
I = 3 A P =.. W P = 80 W I =.. A
I = 8 A P =.. W P = 320 W I =.. A

b) Complète le tableau suivant :

I (A)	0	1	2	3	4	5	6	7
P (W)								

Que peut-on dire de ces deux suites ?

c) Trace le graphique correspondant (sur la feuille de l'expérience 3).

Que constates-tu ?

EXPERIENCE 2

Les résultats de la deuxième expérience ont été notés dans le tableau suivant:

I (A)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P (W)	0	20	80	180	320	500	720	980	1280

a) Que peut-on dire de ces deux suites ? Est-ce une situation linéaire ?

b) Trace le graphique correspondant (sur la feuille de l'expérience 3).

Que constates-tu ?

c) Complète le tableau suivant :

I^2	0	1	4						
P	0	20	80	180	320	500	720	980	1280

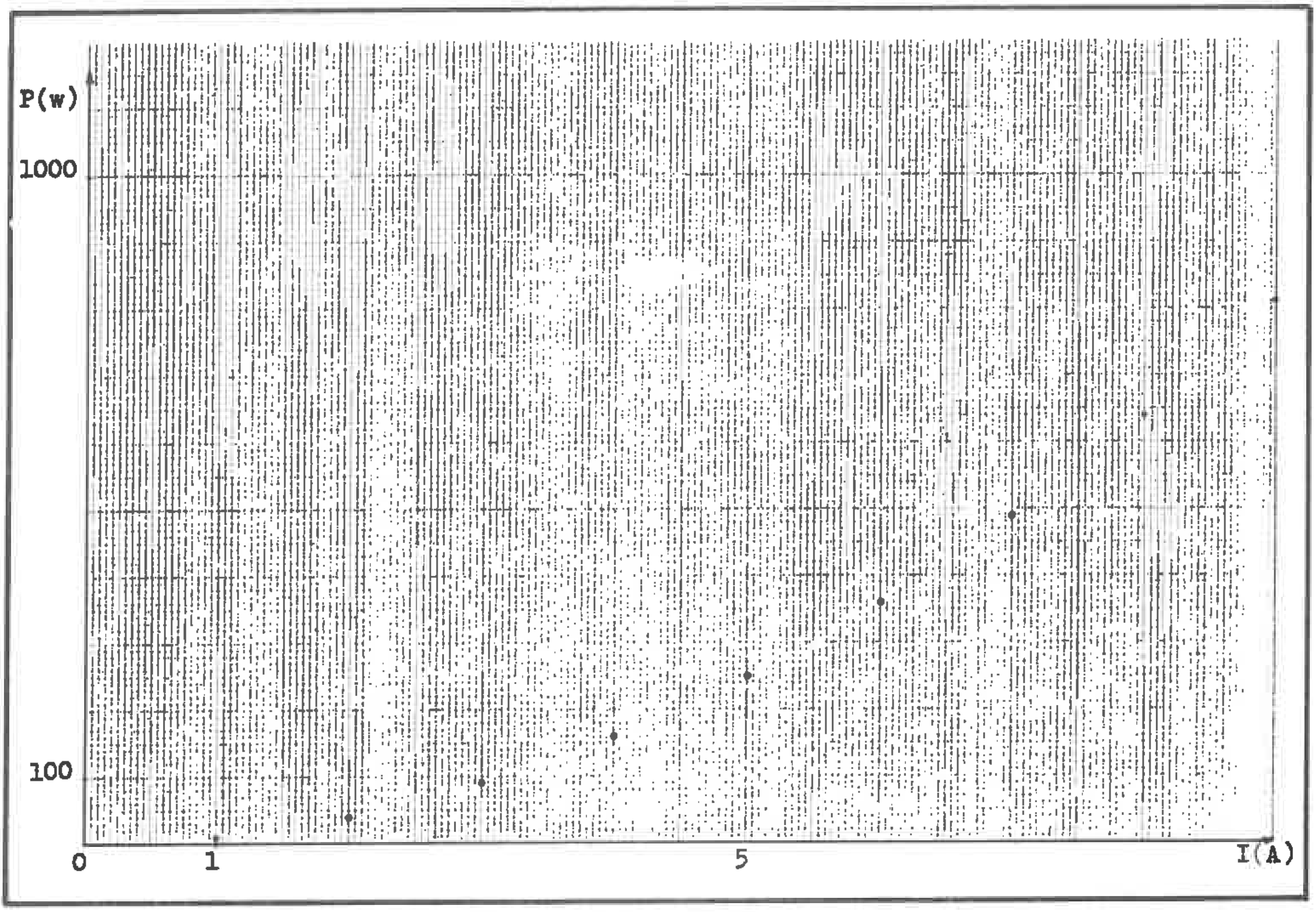
Que peut-on dire de ces deux suites ?

Peux-tu en déduire la résistance employée ?

Retrouve alors la formule : $P = ..I^2$

EXPERIENCE 3

Les résultats de l'expérience 3 ont été notés dans le graphique :



P en fonction de I

a) Ce graphique représente-t-il une situation linéaire ?

b) Complète le tableau suivant :

I (A)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (W)										

Retrouve la formule : $P = ..I^2$

2/ SITUATION 2

Un capital de 20 000 francs doit être partagé entre plusieurs personnes.

Complète le tableau suivant, exprimant les parts P de chaque personne

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (F)									

a) Que peut-on dire de ces deux suites ?

b) Représente graphiquement ce tableau. Que constates-tu?

c) Calcule nP pour n égal à : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 .

Que se passe-t-il pour n égal à : 3 ; 6 ; 7 ; 9 ? Pourquoi ?

d) Exprime P en fonction de n. Conclus.

SITUATION 3

En France, on exprime les températures en degré Celsius (°C).
Dans les pays anglo-saxons, on emploie le degré Fahrenheit (°F).
On notera x la température exprimée en degré Celsius et y la température exprimée en degré Fahrenheit.
Pour certaines températures, on a noté la correspondance suivante :

x (°C)	-20	-10	0	12	35	50	80	100
y (°F)	-4	14	32	53,6	95	122	176	212

a) Que peut-on dire de ces deux suites ?

Est-ce une situation linéaire ?

Représente graphiquement ce tableau. Que constates-tu ?

Pour quelle valeur de x a-t-on x = y ?

b) Calcule:

$$\frac{53{,}6 - 32}{12 - 0} \; ; \; \frac{122 - 95}{50 - 35} \; ; \; \frac{176 - 53{,}6}{80 - 12}$$

Que constates-tu ?

En regardant comment sont constitués ces rapports, écris en d'autres et calcule les. Que constates-tu ?

c) Sachant que ce résultat est toujours vrai, complète l'égalité suivante:

$$\frac{y - 32}{x - 0} = \ldots$$ et déduis en une formule donnant y en fonction de x. Conclus.

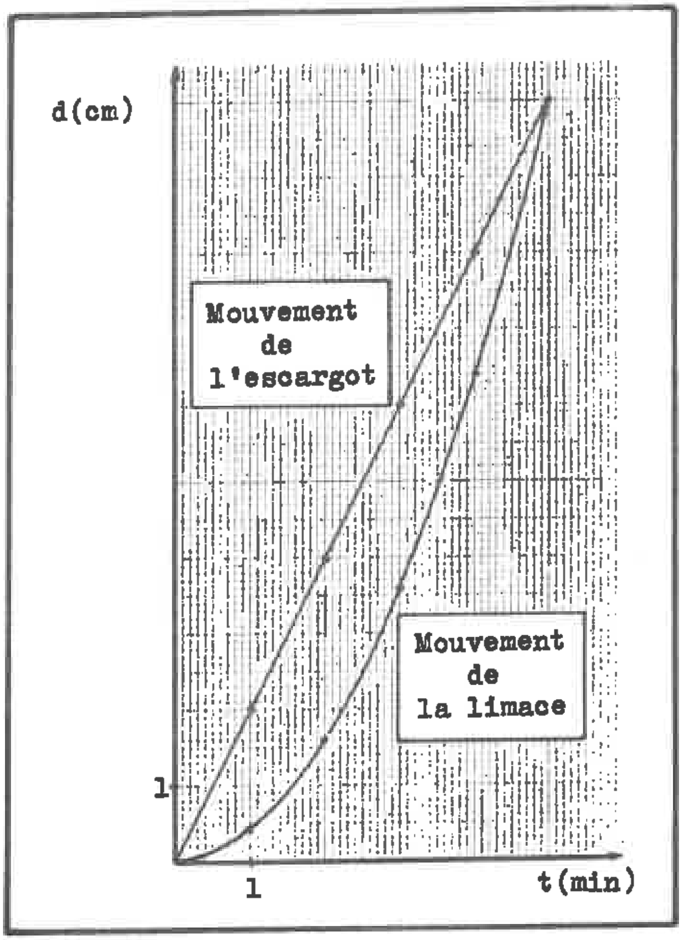
En utilisant cette formule, complète :

x = -30 °C	y = ...°F	y = -13 °F	x = ...°C
x = 22 °C	y = ...°F	y = 46,4°F	x = ...°C
x = 58 °C	y = ...°F	y = 167 °F	x = ...°C
x = 84 °C	y = ...°F	y =253,4°F	x = ...°C

Retrouve par la formule pour quelle valeur de x, on a : x = y .

SITUATION 4 — LE MOUVEMENT UNIFORME

Un escargot et une limace décident un jour, de faire une course de 10 cm. Un crapaud savant, témoin de la scène, a fait le graphique suivant:



1) Recopie et complète le tableau:

Temps t (min)	0	1	2	3	4	5
Distance (cm) parcourue par l'escargot						
Distance (cm) parcourue par la limace						

2) Réponds aux questions suivantes:

-Y a-t-il eu un vainqueur?

-Parmi les trois suites de nombres du tableau, lesquelles sont proportion nelles?

-Quel est dans ce cas, le coefficient de proportionnalité ?

-Peux-tu exprimer simplement la distance parcourue par l'escargot en fonction du temps? Et pour la limace?

3) Recopie et complète le tableau:

Temps en min	de 0 à 1	de 1 à 2	de 2 à 3	de 3 à 4	de 4 à 5
Distance (cm) parcourue par l'escargot					
Distance (cm) parcourue par la limace					

4) Réponds aux questions suivantes:

-Qui est parti le plus lentement?

-Qui est arrivé le plus vite?

-Quelle est la distance parcourue par l'escargot par minute? Et par la limace?

-Compare le coefficient de proportionnalité trouvé au §2 avec la distance parcourue par minute par l'escargot?

-Comment appelle-t-on ce coefficient de proportionnalité?

-Quelle unité physique correspond à ce coefficient?

DEFINITION ET PROPRIETE

1) Recopie la définition et la propriété

Définition: Un mouvement est uniforme si la distance parcourue pendant une unité de temps ne change pas au cours du mouvement, quelle que soit l'unité de temps utilisée.

Propriété: Dans un mouvement uniforme, la distance parcourue est une fonction linéaire du temps.
Le coefficient de proportionnalité est la vitesse du mouvement.

2) Situation

Depuis quelques jours,monsieur Miro voit passer devant sa fenêtre un OVNI à réaction qui bizarrement effectue toujours le même mouvement en exactement quatre secondes.
Il décide d'étudier le mouvement de cet étrange corps céleste et mesure la distance parcourue par celui-ci de seconde en seconde.
Voici ses résultats:

t (s)	0	1	2	3	4
d (m)	0	3	6	9	12

Il en conclut que le mouvement de l'OVNI est uniforme. Pourquoi? Quelle est dans ce cas, la vitesse du mouvement?

Peu satisfait par cette conclusion, il mesure la distance parcourue par l'engin de dixième en dixième de seconde.
Voici ses résultats pour t allant de 2 à 3 secondes:

t (1/10 s)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d (m)	6,0	6,7	7,2	7,7	8,0	8,3	8,5	8,7	8,8	8,9	9,0

Le mouvement est-il uniforme? Explique en utilisant la définition.
Représente graphiquement ce que tu connais du mouvement.
La vitesse trouvée précédemment est la vitesse moyenne du mouvement.

/ EXERCICES

Exercice 1: Quelle est la distance parcourue en 15 min par un mobile en mouvement uniforme de vitesse égale à 90 km/h?
Même question avec une vitesse de 25m/s et une durée de 2 min?

Exercice 2: Combien de temps faut-il pour parcourir 1350 m à une vitesse constante de 5,4 km/h?
Même question avec une vitesse de 750 m/s et une distance de 3km.

Exercice 3: Quelle est la vitesse d'un mouvement uniforme, dans lequel on parcourt 120 km en 2h 30min?
Même question avec une distance de 30m parcourue en 12 s.

Exercice 4: La vitesse d'un mouvement uniforme est égale à 5 (unité non précisée).
Exprime la distance parcourue d en fonction de la durée t du mouvement.
Exprime réciproquement la durée t du mouvement en fonction de la distance parcourue d.
Quelle relation y a-t-il entre les coefficients de ces deux foncions linéaires?

Exercice 5: Dans un mouvement uniforme, la distance parcourue en 14 unités de temps est égale à 84 unités de longueur.
Mêmes questions que dans l'exercice 4.

Exercice 6: La vitesse moyenne d'un mouvement est de 45 m/s.
Le premier kilomètre a été parcouru en 25secondes.
Ce mouvement peut-il être uniforme?

Exercice 7: Pour quatre mouvements différents, on a fait les relevés suivants:

Mouvement 1

t (s)	0	2	4	6	8
d (m)	0	15	30	45	60

Mouvement 2

t (s)	0	1	2	3	4	5
d (m)	0	0,6	1,2	1,9	2,1	2,4

Mouvement 3

t (h)	0	2	4	6
d (km)	0	74	148	222

Mouvement 4

t (h)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
d (km)	0	20,5	41	61,5	82

Pour chacun des quatre mouvements, dis si le mouvement peut être un mouvement uniforme.
Si oui, en admettant que le mouvement est réellement uniforme, exprime d en fonction de t puis réciproquement t en fonction de d.

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 35

TITRE: LA SPHERE

PREREQUIS

PYTHAGORE

OBJECTIFS

- A PARTIR DE LA GEOGRAPHIE "VOIR" LA SPHERE
- SECTION PAR UN PLAN
- AIRE ET VOLUME
- UTILISER PYTHAGORE

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

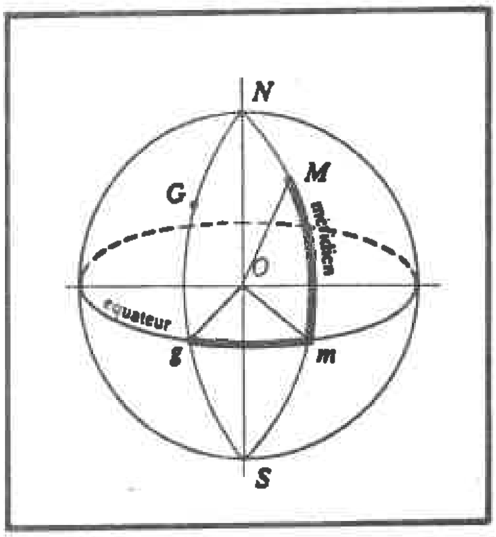
DOSSIER N°35

LA SPHERE

I / LA SPHERE TERRESTRE

La Terre est presque une boule. Sa surface est presque une sphère. Nous savons qu'elle tourne autour d'un axe "pôle Nord - pôle Sud" : NS.

Sur le globe terrestre ci-dessous, on a tracé des grands cercles qui ont pour diamètre l'axe NS. Ces cercles sont appelés **MERIDIENS**.



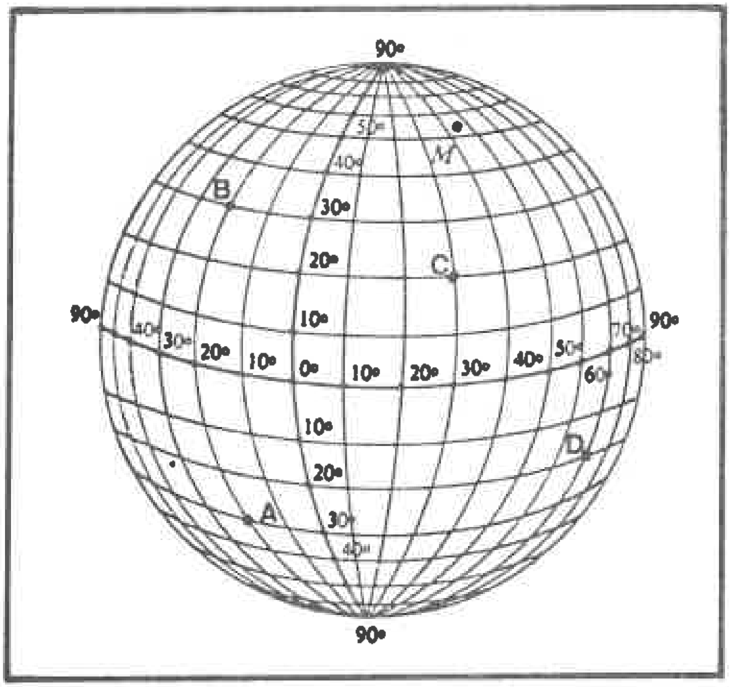
On choisit un **méridien origine** : celui de Greenwich en Angleterre (G sur la figure).

Considérons le point M de la sphère terrestre.

- Longitude de M : c'est la mesure de l'arc $\widehat{gm}$, avec l'indication Est ou Ouest.
- Latitude de M : C'est la mesure de l'arc $\widehat{mM}$, avec l'indication Nord ou Sud.

La situation suivante va te permettre de te familiariser avec ces 2 notions.

.../...



a) Repère les points A, B, C et D par leur longitude et leur latitude.

A(;)
B(;)
C(;)
D(;)

b) Pcur le point M, on sait que gm = 45° et que mM = 54°. En déduire sa longitude et sa latitude.

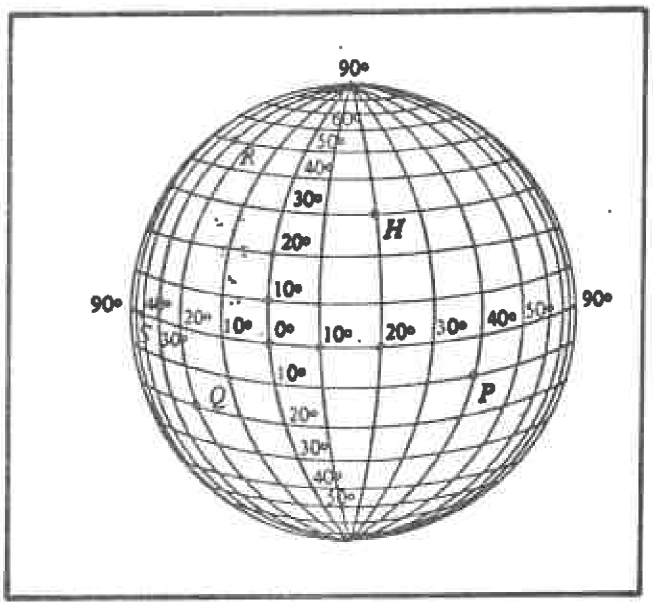
Longitude :

Latitude :

c) Complète les tableaux ci-dessous en te servant de la figure qui leur est adjointe :

Point	*T*	*U*	*V*	*X*
Longitude	30° Ouest	20° Est	0°	50° Est
Latitude	20° Sud	30° Sud	40° Nord	0°

Point	*H*	*P*	*Q*	*R*
Longitude				
Latitude				



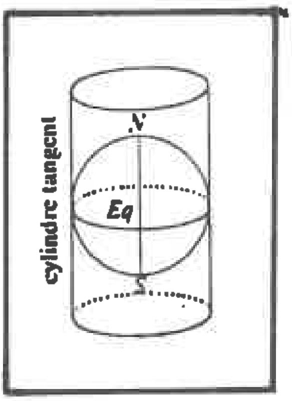
2 / REPRESENTATION DE LA TERRE SUR UN PLAN

La représentation de la sphère terrestre sur un plan a toujours été une préoccupation majeure des géographes. Et ceci, de tous les temps. La demande était forte de la part des navigateurs qui souhaitaient des représentations planes, plus faciles à emporter dans les bagages que des représentations tridimensionnelles.

A) PROJECTION DE MERCATOR

Le principe en est simple. On enroule, autour de notre sphère, une feuille de papier de manière à obtenir un cylindre tangent à la sphère le long de l'équateur.

On projette alors chacun des points de la sphère sur le cylindre parallèlement au plan de l'équateur. En développant notre cylindre, on obtient la projection de Mercator.



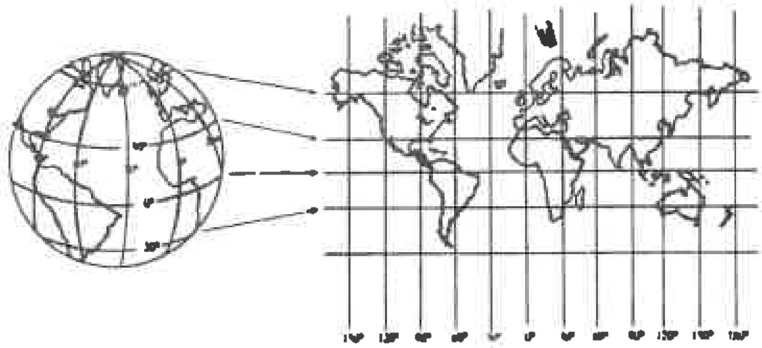


Figure 18.1.8.2. Projection de Mercator.

Que deviennent les méridiens et les parallèles dans une telle projection ?

Que peut-on dire de cette représentation au voisinage de l'équateur ?

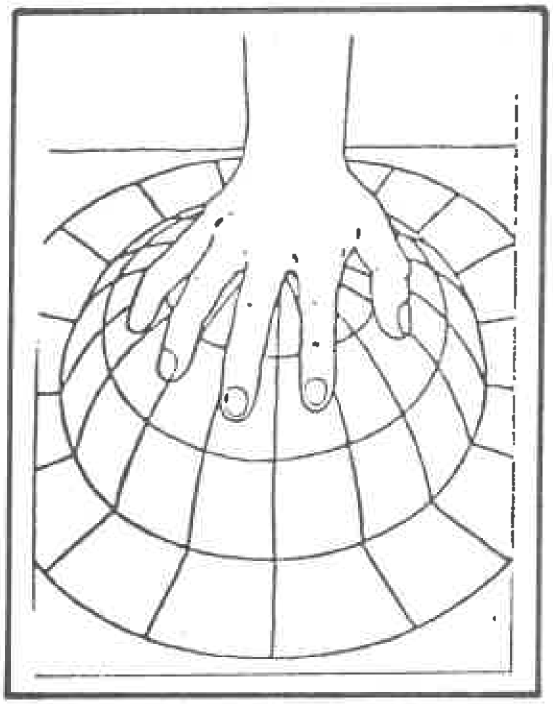
Que peut-on en dire vers les pôles ?

Comment représenter le trajet d'un avion qui suit un cap constant, sur cette projection?

B) PROJECTION STEREOGRAPHIQUE

Avez-vous déja essayé d'aplatir une peau d'orange (après l'avoir pressée !) ?

Qu'avez-vous constaté ?



On veut représenter l'hémisphère sud de notre terre en utilisant la projection suivante :

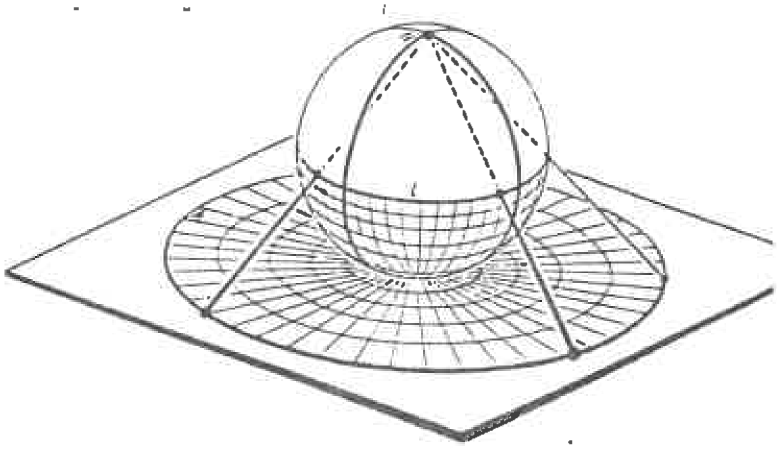
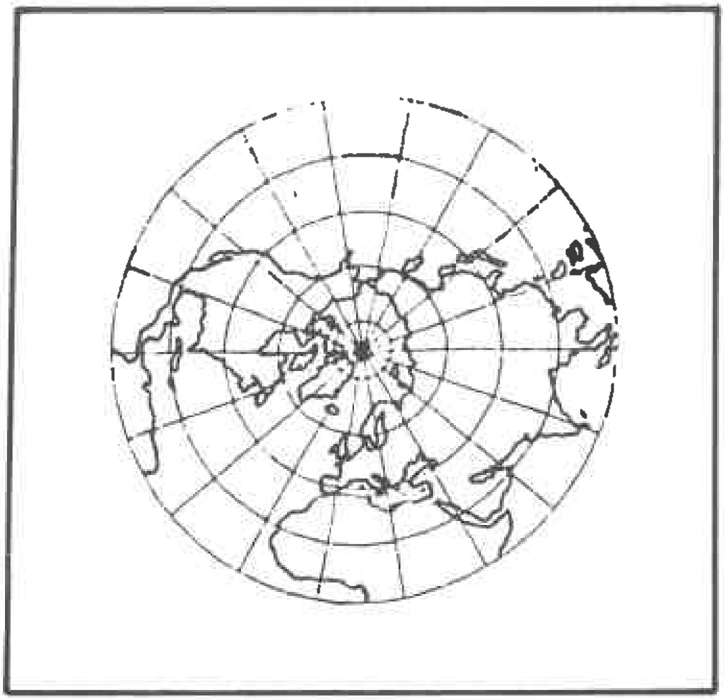


Figure 18.1.8.6.
Hilbert, Cohn-Vossen, Geometry and the imagination, Chelsea.

Que deviennent les méridiens et les parallèles dans une telle projection ?

Que peut-on dire de cette représentation au voisinage de l'équateur ?

La figure ci-dessous représente la projection stéréographique de l'hémisphère nord.



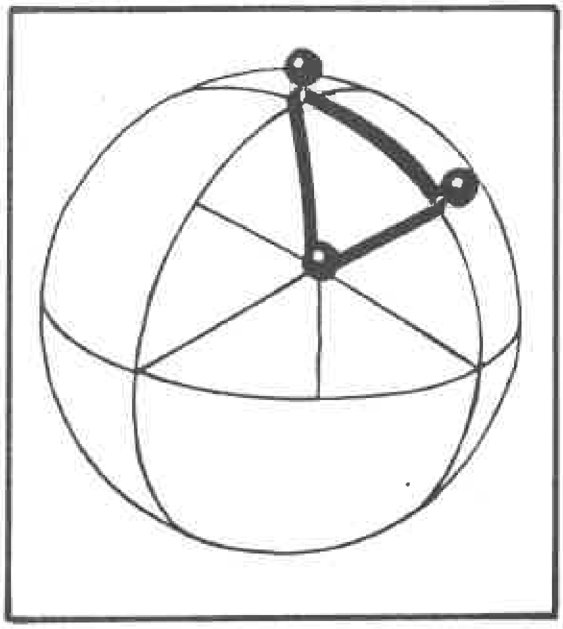
En t'aidant d'un atlas, essaie de représenter la projection stéréographique de l'hémisphère sud, ci-dessous. Ce n'est pas aussi facile que tu le penses !

Que peut-on dire de cette représentation au voisinage du pôle sud ?

Comment représenter le trajet d'un avion qui suit un cap constant, sur cette projection ?

C) POUR FINIR : UN PROBLEME !

Un pilote vole pendant 100 km vers le sud, puis 100 km vers l'est, puis 100 km vers le nord et constate qu'il est revenu exactement à l'endroit d'où il est parti.



Question : D'où est-il parti ?

Première réponse : Il est parti du pôle nord !

Il a donc parcouru un "triangle".

Combien a-t-il fait d' "angles droits" ?

Voila donc un triangle avec trois angles droits ! Mais ne nous attardons pas sur cette notion trop complexe pour vous !

Seconde réponse : Cherche plus au sud !

Troisième réponse : Cherche encore plus au sud !

3 / AIRE ET VOLUME DE LA SPHERE

A) AIRE

Tu n'as pas, en 4 ème, les connaissances nécessaires pour déterminer la formule donnant l'aire de la sphère. Aussi, allons-nous te la donner "brutalement"

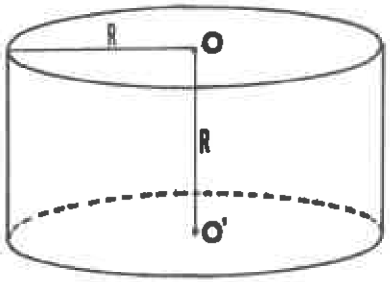
Sphère de rayon R	Aire = $4\pi R^2$

Quatre fois l'aire d'un grand cercle. Avoue que c'est remarquable !

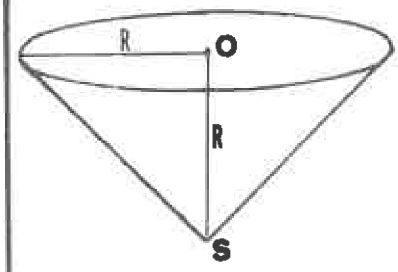
Passons maintenant au volume...

B) VOLUME

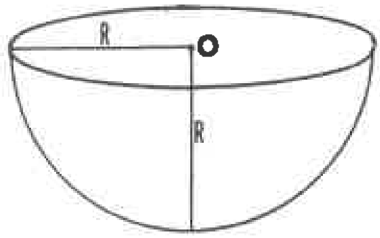
Tu disposes des 3 solides suivants :



Cylindre de rayon R
de hauteur R



Cône de rayon R
de hauteur R



Demi-sphère de rayon R

Tu disposes également d'un récipient d'eau. Essaie de découvrir le rapport qui existe entre les volumes de ces différents solides.

Il faut ... cônes pour remplir le cylindre.

Il faut ... cônes pour remplir la demi-sphère.

Peux-tu en déduire le volume de la demi-sphère et donc celui de la sphère ?

Volume de la sphère de rayon R =

Par la même occasion tu viens de découvrir le volume du cône de rayon R et de hauteur R :

Volume du cône de rayon R et de hauteur R =

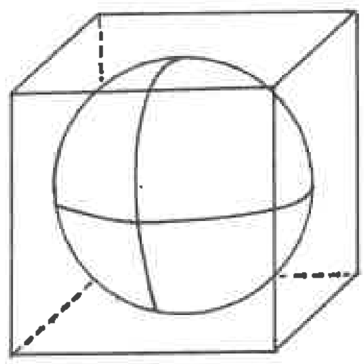
C) SPHERES CACHEES - SPHERES COUPEES - TOUT PEUT S'FAIRE - QUELQUES ACTIVITES

a) Que reste-t-il du cube quand il a perdu sa boule ?

Une sphère entre "exactement dans une boite cubique, c'est à dire que chacune des faces du cube est tangente à la sphère.

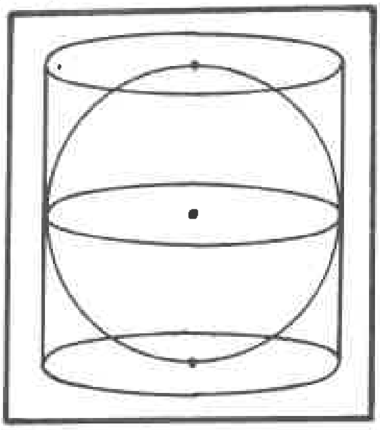
Sachant que la sphère a pour rayon 5 cm, calcule le volume non occupé par la sphère dans la boite.

Généralise ton résultat en prenant une sphère de rayon R.



b) <u>Que reste-t-il du cylindre quand il a perdu sa boule ?</u>

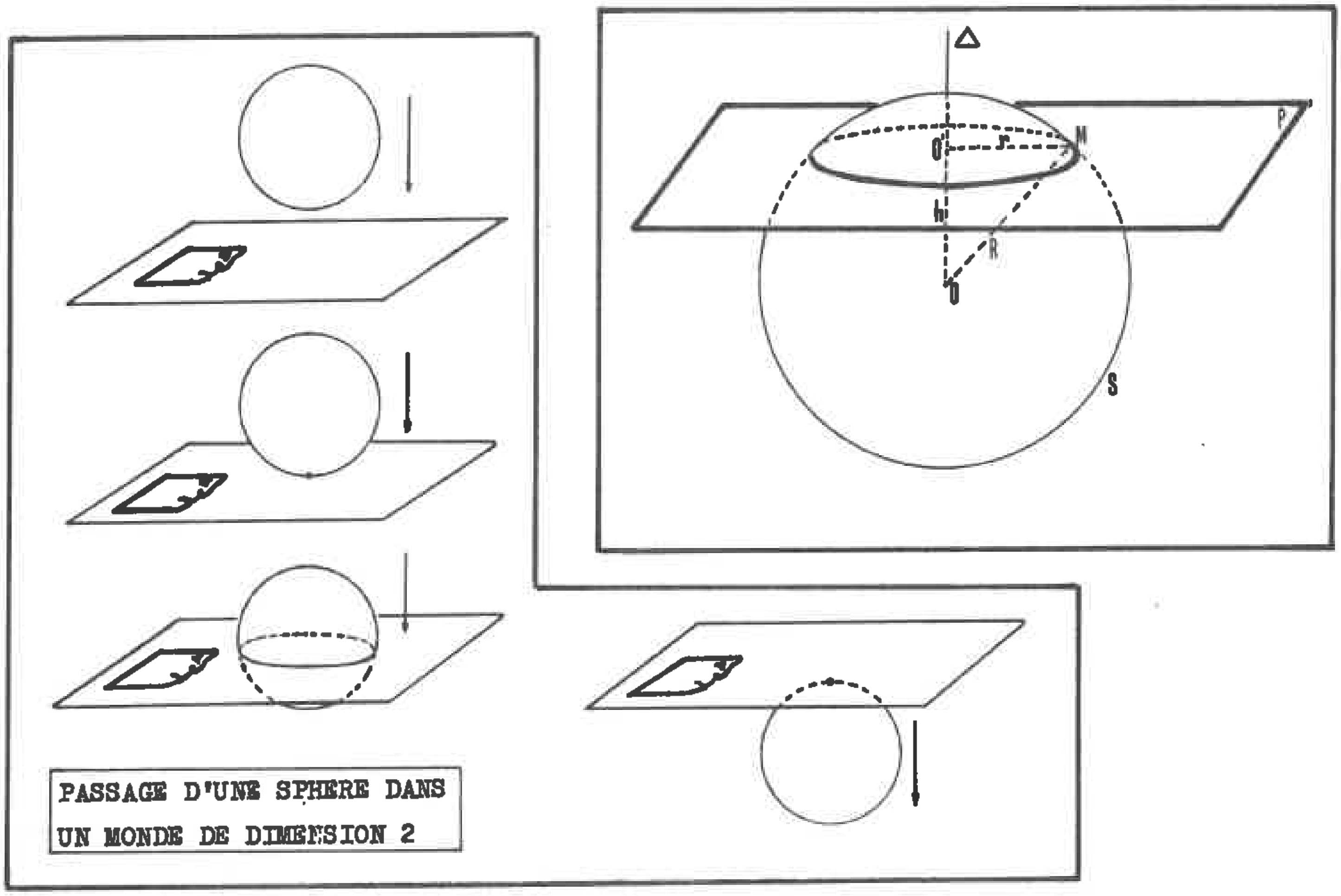
Une sphère entre "exactement" dans une boite cylindrique, c'est à dire que la sphère a même rayon que le cylindre, et est tangente aux deux bases de ce cylindre.



Sachant que la sphère a pour rayon 8 cm, calcule le volume non occupé par la sphère dans la boite.

Généralise ton résultat en prenant une sphère de rayon R.

c) <u>Sphère et plan (d'après Math-Art)</u>



PASSAGE D'UNE SPHERE DANS UN MONDE DE DIMENSION 2

Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le centre O de la sphère. On pose h = OO'.

Soit M un point appartenant au plan et à la sphère.

Que peut-on dire du triangle OO'M ?

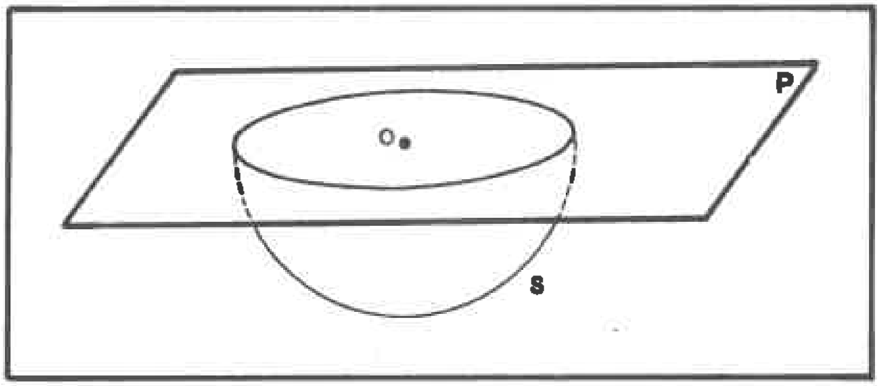
Calculer la distance O'M, en utilisant le théorème de Pythagore, en fonction de h et R.

Généralise à tous les points M appartenant au plan et à la sphère.

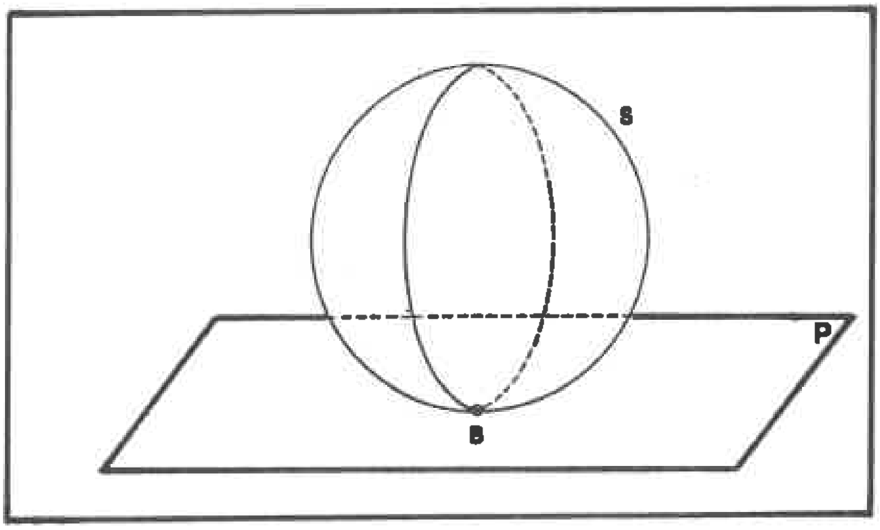
Conclusion ?

Cas particulier :

- Un grand cercle



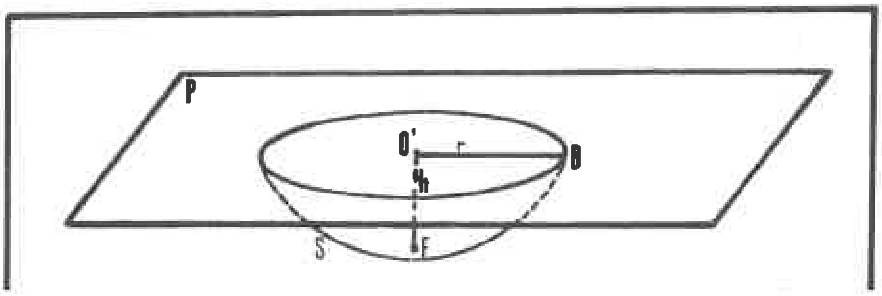
- Plan tangent à la sphère



d) Manque de bol !

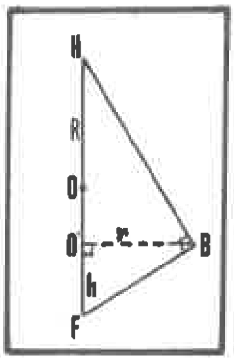
J'ai un bol dont je sais qu'il est un morceau de sphère. Je connais le rayon r de ce bol et sa hauteur h.

Puis-je retrouver le rayon R de la sphère dont le bol est un morceau ?



Voici une stratégie de résolution :

- Montre que le problème posé se ramène à un problème de triangle rectangle.



Encore faut-il remarquer l'existence du triangle rectangle FBH !

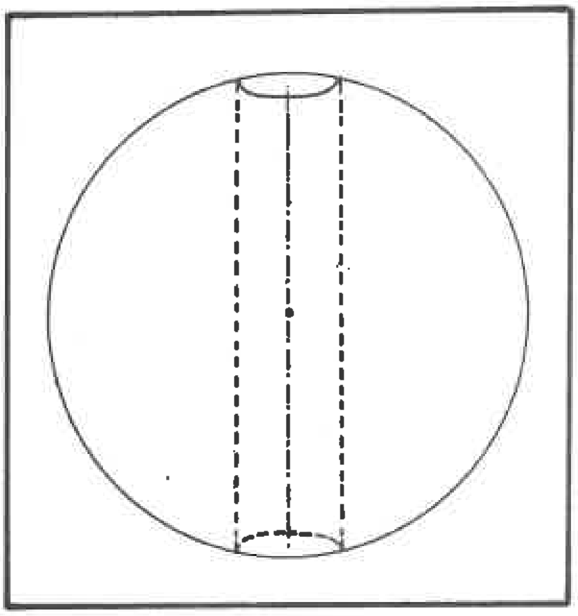
- On donne h = 5 cm et r = 10 cm.
  En utilisant le théorème de Pythagore et le cosinus de l'angle BFH, calcule le rayon de cette sphère.

- Généralise ton résultat, en exprimant R en fonction de r et h.

e) Un beau trou dans une belle pomme !

Imaginons une pomme parfaitement sphérique ! Je la perce en son milieu avec un cylindre. J'obtiens une "frite" cylindrique, dont je coupe les deux extrémités sphériques.

Quel est le volume de ma frite ?



Précisons le problème :
Je connais le rayon R de la pomme.
Je connais le rayon r du cylindre.
Je peux donc en déduire la hauteur du cylindre et donc son volume, si je néglige les deux calottes sphériques.

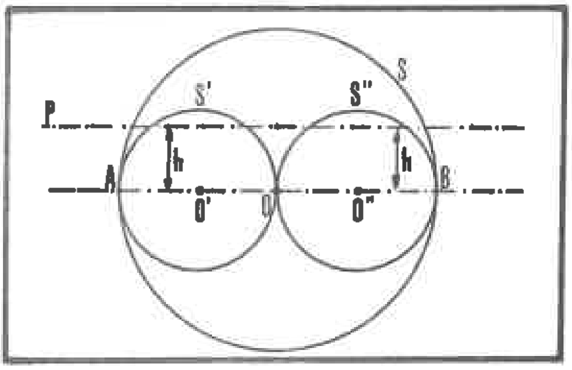
Calcule ce volume si R = 4 cm et r = 1 cm.
Généralise en exprimant le volume V de ma frite en fonction de R et r.

Prolongement du problème :

J'ai des cylindres de différents rayons, et une belle pomme sphérique de rayon 5 cm.
Calcule les volumes des frites obtenues avec des cylindres de rayon 0,5 cm ; 1 cm ; 1,5 cm ; 2 cm ; 2,5 cm ; 3 cm ; 3,5 cm ; 4 cm ; 4,5 cm ; 5 cm.
Range tes résultats dans un tableau, puis fais une représentation graphique des variations du volume de la frite en fonction du rayon du cylindre. Le volume de la frite est-il proportionnel au rayon du cylindre ?

f) Que de sphères !

Deux sphères S' et S" de rayon 2 cm sont à l'"intérieur" d'une sphère S de rayon 4 cm.

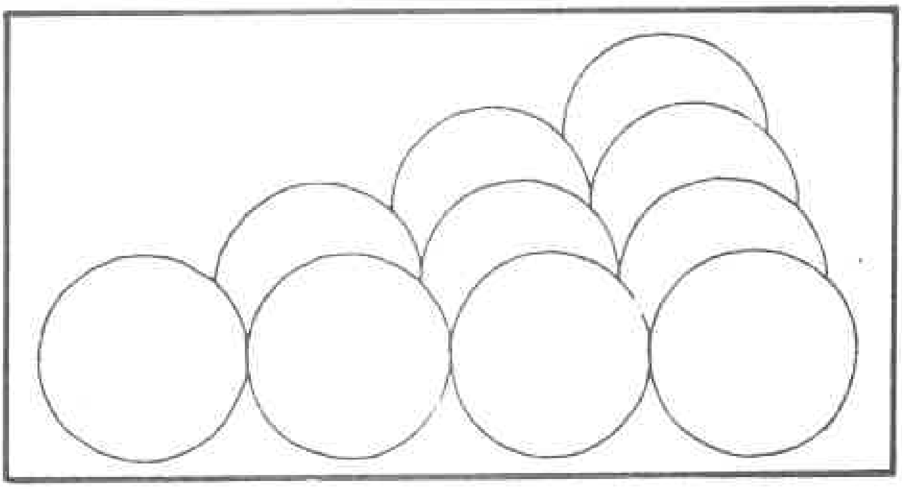


Un plan P coupe ces sphères à une distance h = 1 cm d'un plan passant par les centres des deux sphères.
Représente les 3 cercles obtenus dans le plan P. Généralise en faisant varier h.

4 / DES ACTIVITES AUTOUR DES BOULES DE BILLARD

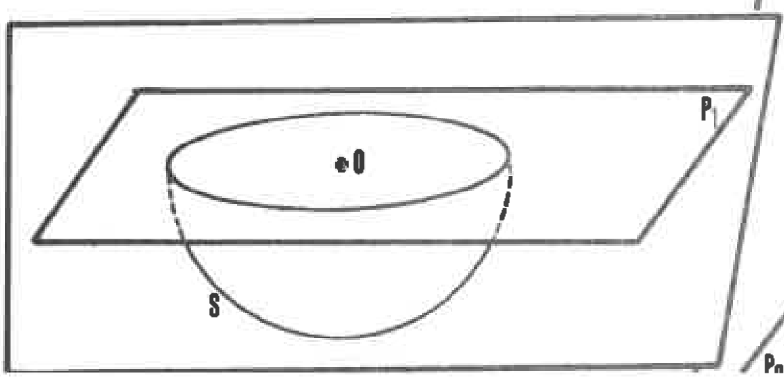
A) LE BILLARD AMERICAIN

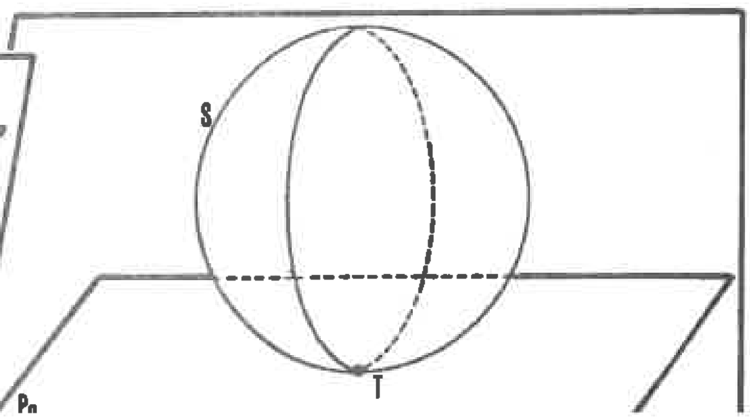
Tu as peut-être déja joué au billard américain. Dans ce cas-là, tu sais qu'il faut, au départ, ranger 15 boules dans un cadre ayant la forme d'un triangle équilatéral.



Problème : Peut-on toujours ranger des boules dans un cadre ayant la forme d'un triangle équilatéral, de façon que toutes les boules contiguës soient tangentes entre elles, et que les côtés du triangle soient tangents aux boules extérieures ?

Stratégie de résolution : Le problème est en fait un problème de géométrie plane.





Il faut raisonner dans le plan P_1, passant par le centre de la sphère, et non dans le plan P_2 sur lequel repose la sphère.

Résolution : a) On prend une boule, de rayon 2 cm. Trace le triangle équilatéral circonscrit à cette sphère dans le plan P_1 (cf. fig. 2).

b) Est-ce possible avec 2 boules ?

c) Prends 3 boules et trace le triangle équilatéral circonscrit à ces 3 sphères tangentes dans le plan P_1 (cf. fig. 2).

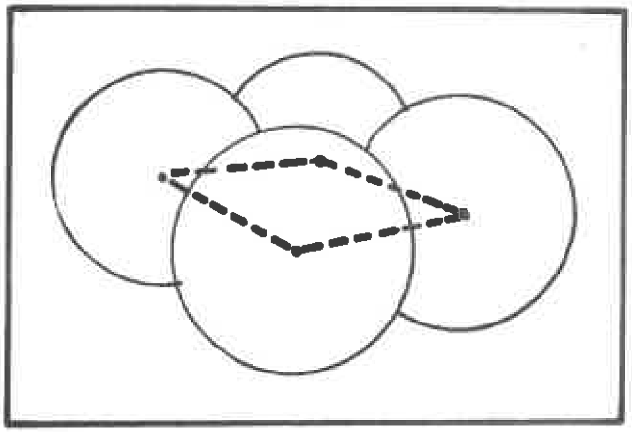
d) Quelles sont les solutions suivantes ?

Généralisation : a) La figure 1 proposée est-elle une solution ?

b) Compare la suite des solutions obtenues avec la somme des entiers naturels à l'ordre correspondant. Peux-tu justifier ce résultat ?

Extension du problème : Peux-tu trouver le côté du triangle en fonction du nombre de boules ?

B) EMPILONS DES BOULES



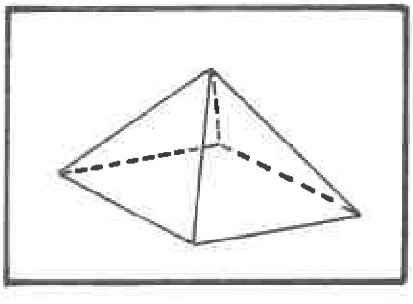
Je pose 4 boules de même rayon sur un plan. Ces boules sont tangentes entre elles comme l'indique la figure ci-contre.

Je pose une 5 ème boule de même rayon sur ces 4 boules, de façon à ce qu'elle soit tangente à ces 4 boules. Est-ce possible ?

Problème : Quelle est, en fonction du rayon R des boules, la hauteur de la pyramide de boules ainsi réalisée ?

Stratégie de résolution :

Le problème revient à calculer la hauteur de la pyramide formée par les 5 centres des boules.



La propriété à utiliser pour résoudre ce problème est le théorème de Pythagore.

Résolution : . Calcule la hauteur de cet empilement si les boules ont pour rayon 5 cm.

. Généralise en calculant la hauteur en fonction du rayon R.

Une variante du problème : Je pose 3 boules de même rayon sur un plan, tangentes entre elles.

Je pose une 4 ème boule de même rayon sur ces trois boules.

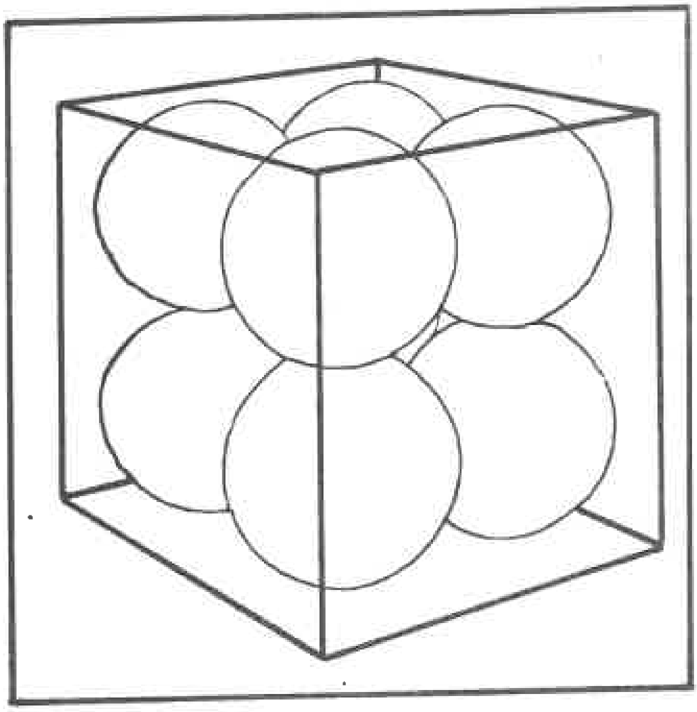
Quelle est la hauteur de l'empilement ?

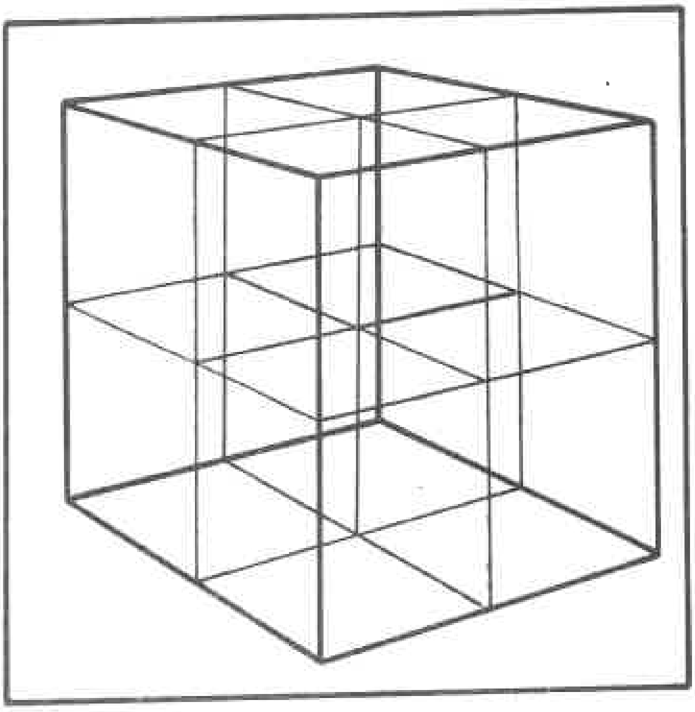
Attention : Les dessins précédents ne sont ni des représentations en perspective cavalière, ni des représentations en perspectives d'observation.

C) RANGEONS DES BOULES

Je range 8 boules de même rayon dans un cube

Ceci revient à remplir les 8 cubes ci-dessous avec une boule chacun.

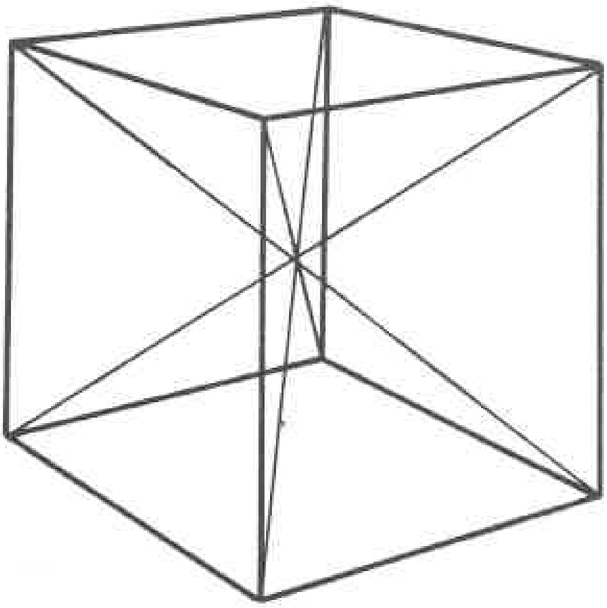


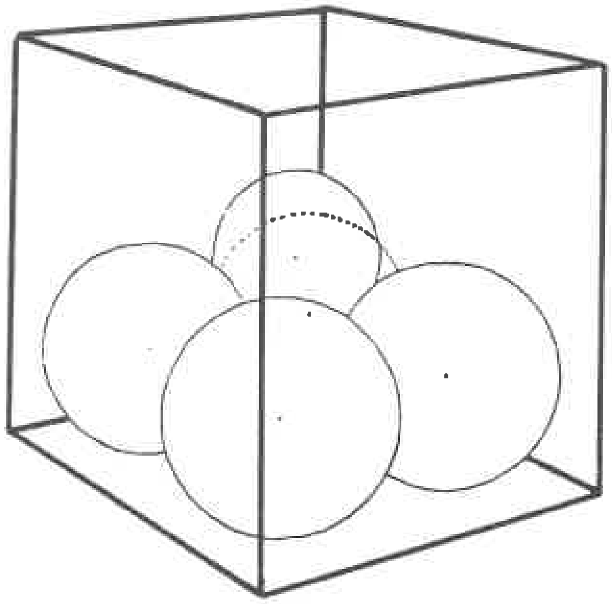


Question : Quelle est la longueur de l'arète du cube ?

Un dernier problème se pose alors. Tu le trouveras sur la page suivante.

Problème : Quelle est la boule "maximum" que l'on puisse ranger à "l'intérieur des 8 boules", boule qui sera tangente aux 8 boules ?





Voici la solution

Stratégie de résolution : a) Montre que le centre de la boule cherchée est le point d'intersection des diagonales du cube.

b) Raisonne alors dans le cube dont les 8 sommets sont les centres des 8 boules.

Résolution : a) Calcule le rayon de la boule cherchée si les boules ont pour rayon 2 cm.

b) Généralise en calculant le rayon de cette boule en fonction du rayon R des autres boules.

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 36

TITRE: STATISTIQUES

4

PREREQUIS

OBJECTIFS

- EXPLOITATION DE DONNEES STATISTIQUES

- FREQUENCES - EFFECTIFS CUMULES - FREQUENCES CUMULEES - HISTOGRAMMES

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N°36

STASTISTIQUE

I. FREQUENCE

Exemple Une enquête stastistique a été effectuée en décembre 1987 sur 800 élèves d'un collège de Troyes.
On a étudié les caractères suivants:
1. nationalité
2. nombre de frères et sœurs
3. revenu mensuel des parents.

On présente les données sous forme de tableaux faisant apparaître:
.. les différentes valeurs du caractère étudié
.. le nombre d'éléments ou d'individus de chacune de ces valeurs: ce nombre est appelé effectif.

On distingue deux sortes de caractères:
.. les caractères qualitatifs: la nationalité, par exemple.

Nationalité	Effectif
Français	620
Espagnol	70
Portugais	30
Algérien	60
Marocain	20
Total	800

.. les caractères quantitatifs:
-le caractère peut prendre un petit nombre de valeurs: le nombre de frères et sœurs, par exemple.

Nombre frères et sœurs	Effectif
0	150
1	240
2	210
3	90
4	50
5	40
6	20
Total	800

-le caractère peut prendre une infinité de valeurs que l'on répartit en classes (ou intervalles): le revenu mensuel, par exemple.

Classe des revenus	Effectif
[4000 ; 6000[	120
[6000 ; 8000[	200
[8000 ; 10000[	180
[10000 ; 12000[	120
[12000 ; 14000[	100
[14000 ; 16000[	60
[16000 ; 18000[	20
Total	800

Définition Pour un caractère donné, la fréquence (relative) d'une valeur ou d'une classe est le rapport de l'effectif de cette valeur sur l'effectif total.

Exemple: Pour le caractère 'nationalité', calculons la fréquence de la valeur 'Français':

$$\frac{\text{Effectif de 'Français'}}{\text{Effectif total}} = \frac{620}{800} = 0,775$$

La fréquence cherchée est donc 0,775.

Remarque: La fréquence est un nombre compris entre 0 et 1.
Pourquoi?
La fréquence en % est: 77,5% car $\frac{77,5}{100} = 0,775$

II. EFFECTIFS CUMULES

Reprenons l'exemple de la page 36-1.
Un des objectifs de l'enquête était de répondre aux deux questions:

1. -Combien d'élèves ont moins de 3 frères et sœurs?
2. -Combien d'élèves ont plus de 2 frères et sœurs?

On ne peut répondre à ces questions en lisant les tableaux précédents.

Pour cette raison, on calcule des **effectifs cumulés**.

On utilise deux sortes d'effectifs cumulés:

- les effectifs cumulés **croissants** servent à répondre aux questions de même type que la question 1 précédente.
- les effectifs cumulés **décroissants** servent à répondre aux questions de même type que la question 2.

En observant le tableau suivant, explique le calcul des deux types d'effectifs cumulés.

Nombre de frères et sœurs	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
0	150	150	800
1	240	390	650
2	210	600	410
3	90	690	200
4	50	740	110
5	40	780	60
6	20	800	20

En lisant ce tableau, on peut répondre directement aux questions de l'enquête.

Question 1: Moins de 3 frères et sœurs?
C'est ceux qui en ont 0, 1 ou 2.
On lit donc la réponse dans les effectifs cumulés croissants pour la valeur 2: c'est 600.

Question 2: Plus de 2 frères et sœurs?
C'est ceux qui en ont 3, 4, 5 ou 6.
On lit donc la réponse dans les effectifs cumulés décroissants pour la valeur 3: c'est 200.

Exercice Réponds aux questions suivantes:

1. -Combien d'élèves ont plus de 4 frères et sœurs?
2. -Combien d'élèves ont moins de 2 frères et sœurs?
3. -Combien d'élèves ont entre 2 et 4 frères et sœurs?

ACTIVITE 1

A partir des données de l'enquête page 36-1, complète les tableaux suivants:

Nationalité	Effectif	Fréquence	Fréquence %

Nombre frères et sœurs	Effectif	Fréquence	Fréquence %

Classe de revenus	Effectif	Fréquence	Fréquence %

Dans cette enquête, on étudiait aussi la taille des élèves. Complète le tableau correspondant:

Classe des tailles (cm)	Effectif	Fréquence	Fréquence %
[130 ; 140[	80		
[140 ; 150[			16 %
[150 ; 160[			40 %
[160 ; 170[			
[170 ; 180[		0,125	
Total			

ACTIVITE 2

À partir des données de l'enquête des pages 36-1 et 3, complète les tableaux suivants:

Classe des revenus	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[4 000; 6 000[			
[6 000; 8 000[			
[8 000; 10 000[			
[10 000; 12 000[			
[12 000; 14 000[			
[14 000; 16 000[			
[16 000; 18 000[			

Combien de parents ont gagné moins de 8 000 F ?
moins de 14 000F ?
plus de 10 000 F (10 000 compris)?
plus de 14 000 F (14 000 compris)?

Classe des tailles	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[130; 140[			
[140; 150[			
[150; 160[			
[160; 170[			
[170; 180[			

Combien d'élèves mesurent moins de 150 cm ?
moins de 170 cm ?
plus de 140 cm (140 compris) ?
plus de 160 cm (160 compris) ?

ACTIVITE 3

On a relevé les tailles des élèves d'une classe de troisième, on a obtenu les résultats suivants:

162	164	160	164	163	158	156	164	167	160
175	163	159	162	168	172	157	162	169	155
152	161	167	158	160	162	154	152	177	178

Complète le tableau suivant:

Tailles en cm	Effectif	Fréquence	Fréquence %	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[150; 155[					
[155; 160[					
[160; 165[					
[165; 170[					
[170; 175[					
[175; 180[					

Combien d'élèves mesurent moins de 1 mètre 60 ?
plus de 1 mètre 65 ?

III. HISTOGRAMME ET POLYGONE DES EFFECTIFS

Les séries statistiques dont le caractère est qualitatif et celles dont le caractère quantitatif prend des valeurs isolées peuvent se représenter par des diagrammes en bâtons, ou en bandes, ou par des diagrammes circulaires et demi-circulaires. (Activité 4)

Les séries statistiques dont le caractère quantitatif prend des valeurs réparties en classes peuvent se représenter de deux manières:

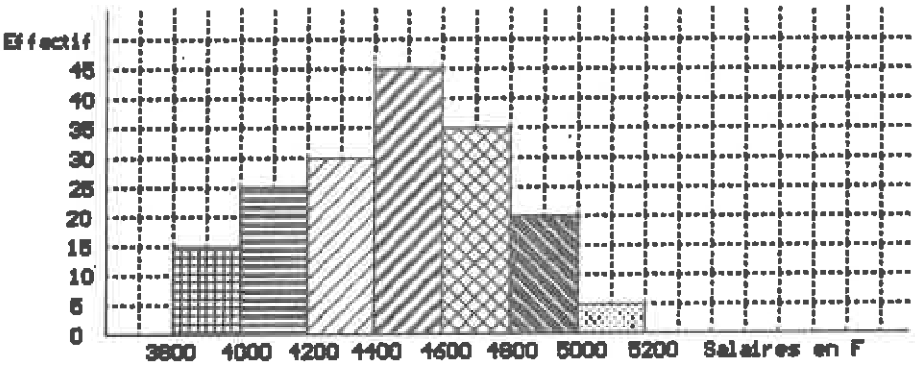
1° par un histogramme (graphique en barres)
2° par un polygone des effectifs (ligne brisée).

1° Histogramme des effectifs

Voici le tableau des salaires mensuels des ouvriers d'une entreprise:

Salaire	[3800;4000[	[4000;4200[	[4200;4400[	[4400;4600[	[4600;4800[	[4800;5000[	[5000;5200[
Effectif	15	25	30	45	35	20	5

Cette situation est représentée par l'histogramme suivant:



Comment a-t-on tracé les barres de l'histogramme ?

2° Polygone des effectifs

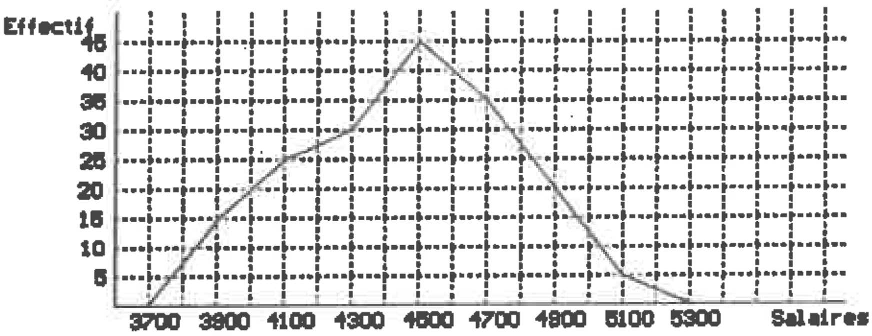
Le centre d'une classe est la moyenne des valeurs extrêmes de la classe

Exemple: Le centre de la classe [3800;4000[est:

$$\frac{3800 + 4000}{2} = 3900$$

Calcule de même le centre des autres classes.

On peut représenter la situation précédente par un polygone des effectifs, de la manière suivante:



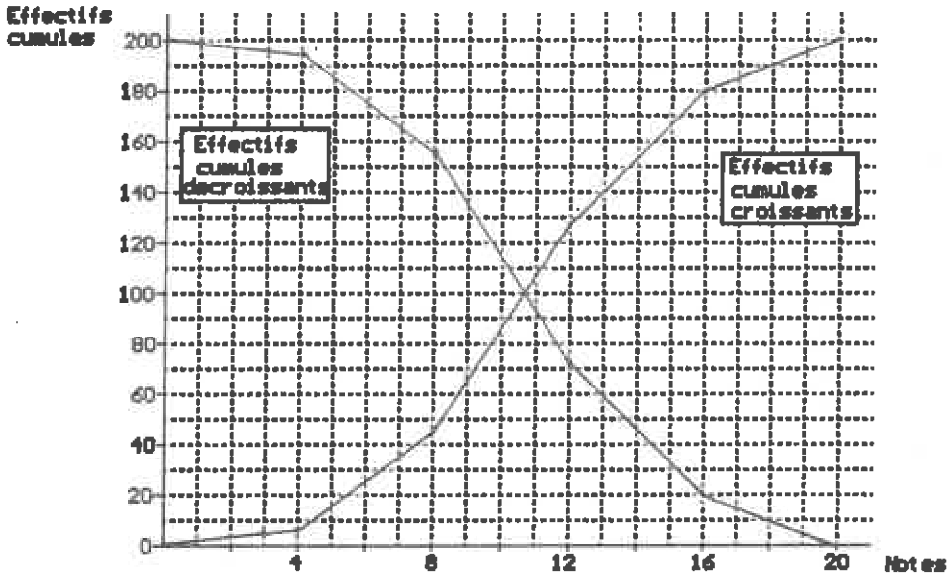
Comment trace-t-on chacun des points et en particuliers les extremites de la ligne brisee?

IV. POLYGONE DES EFFECTIFS CUMULES

On donne la série statistique des notes obtenues par les 200 candidats à un examen dans le tableau suivant:

Classe de notes	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[0; 4[	6	6	200
[4; 8[	38	44	194
[8;12[	84	128	156
[12;16[	52	180	72
[16;20[	20	200	20

On représente la série des effectifs cumulés croissants et celle des effectifs cumulés décroissants par deux lignes polygonales comme ci-dessous:



Comment obtient-on les coordonnées des points de chacun des sommets des deux lignes polygonales ?
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des polygones ?

ACTIVITE 4

On a effectué un recensement auprès de 60 familles de La Chapelle-Saint-Luc pour connaître le nombre d'enfants à la charge de chacune.
Voici les données recueillies:

1 1 6 5 4 1 6 0 2 0 3 4 3 1 2 7 6 8 2 5
1 0 0 1 6 7 5 1 2 2 7 5 2 0 2 1 4 6 1 4
6 2 5 0 1 3 0 5 2 7 6 8 2 0 3 1 2 4 0 5

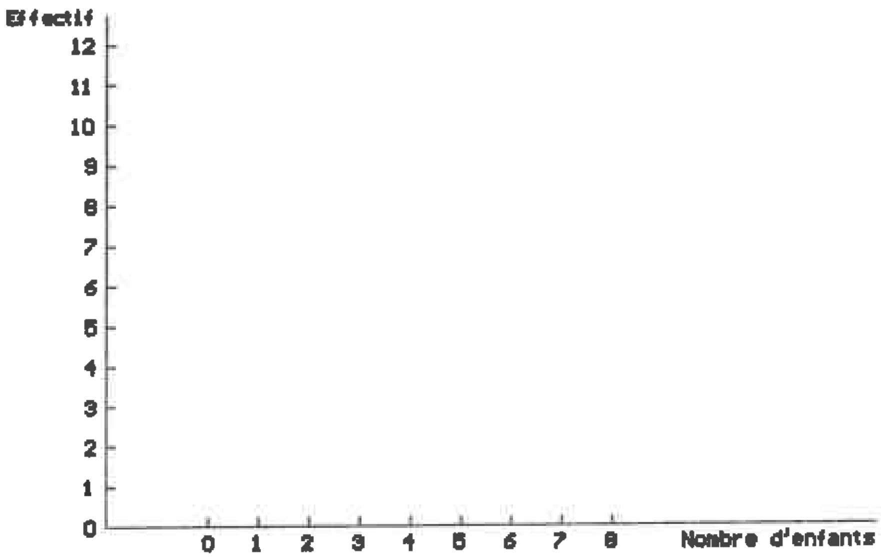
Complète le tableau suivant:

Nombre d'enfants	Effectif	Fréquence	Fréquence%	Effectif cumulé	
				croissant	décroissant
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
Total					

Combien de familles ont moins de 2 enfants ?
moins de 5 enfants ?
plus de 2 enfants ?
plus de 4 enfants ?

Représentation de cette série statistique:

1° **par un diagramme en bâtons**



2° **par un diagramme en bandes**

ACTIVITE 5

Pour une étude de marché, on a fait une enquête auprès de 50 familles pour savoir combien elles possédaient d'appareils électroménagers.
Voici les résultats:

9	5	4	4	5	2	1	5	6	6	6	4	5	4	3	4	3	6
7	6	4	7	4	4	2	5	9	7	4	7	8	8	3	7	2	10
6	3	5	5	8	6	4	2	7	10	5	5	6	8				

Complète le tableau ci-dessous:

Nombre d'appareils	Effectif	Fréquence	Fréquence %	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
Total					

Combien de familles ont moins de 3 appareils ?
moins de 6 appareils ?
plus de 4 appareils ?
plus de 7 appareils ?

ACTIVITE 6

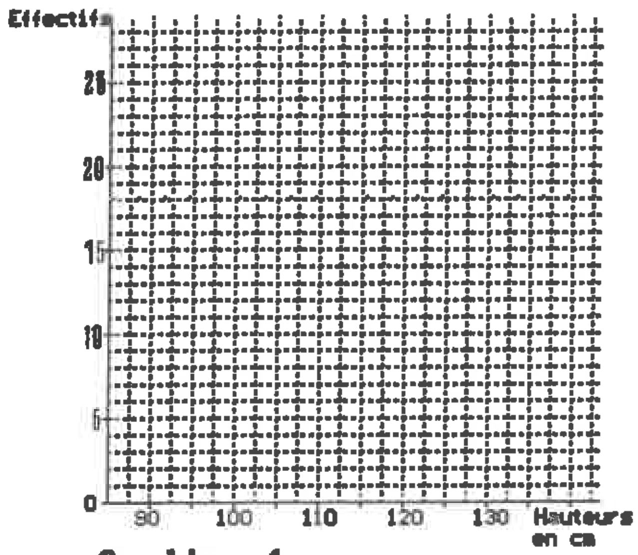
Au cours d'une séance d'athlétisme, on a relevé les résultats à une épreuve de saut en hauteur.
1°-Complète le tableau suivant:

Classe de hauteurs	Centre de classe	Effectif	Fréquence	Fréquence %	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[90; 95[		2				
[95;100[		8				
[100;105[		12				
[105;110[		25				
[110;115[		14				
[115;120[		10				
[120;125[		9				
Total						

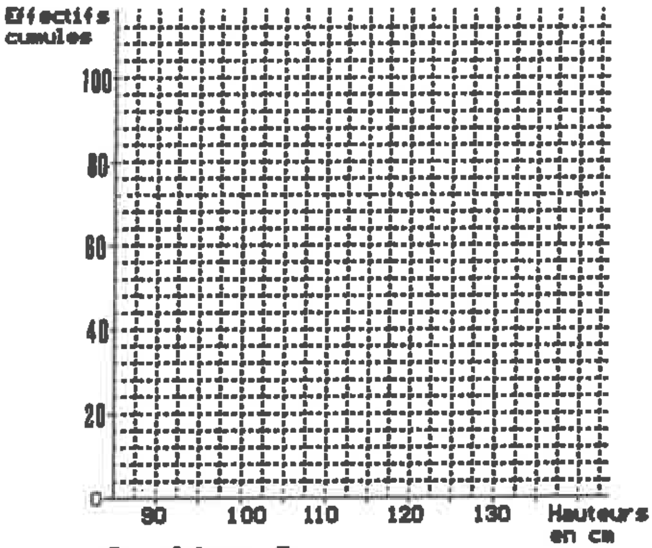
2°-Trace l'histogramme et le polygone des effectifs sur le graphique 1 page 36-9.

3°-Trace les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants sur le graphique 2 page 36-9.

4°-Relève les coordonnées du point d'intersection des polygones des effectifs cumulés.



Graphique 1



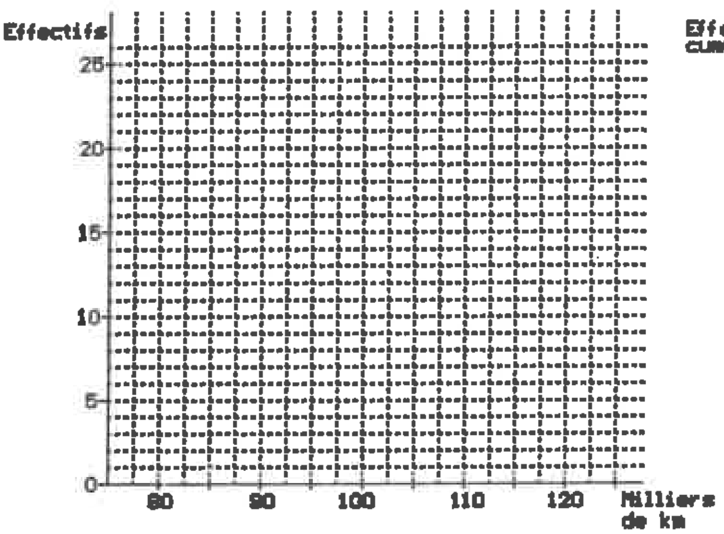
Graphique 2

ACTIVITE 7

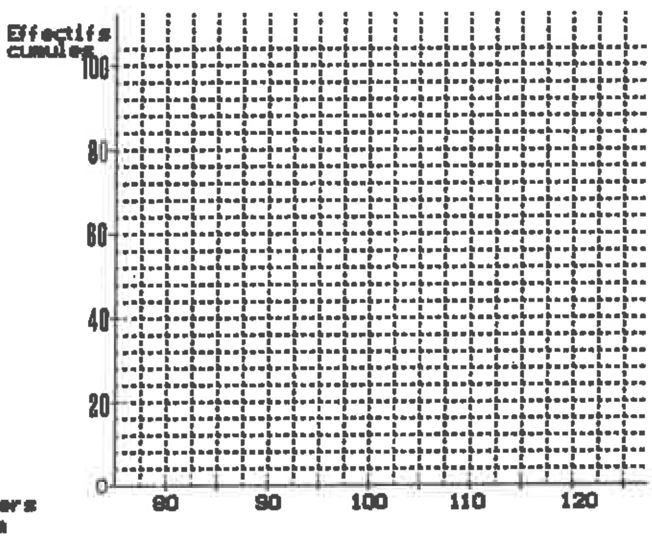
Pour 100 taxis mis au rebut, on a relevé les distances parcourues:

Distance en milliers de km	Centre de la classe	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[80; 85[		5		
[85; 90[		9		
[90; 95[		14		
[95;100[		18		
[100;105[		25		
[105;110[		16		
[110;115[		7		
[115;120[		6		

1°-Complète le tableau.
2°-Trace l'histogramme et le polygone des effectifs sur le graphique 3.
3°-Trace les polygones des effectifs cumulés sur le graphique 4.



Graphique 1

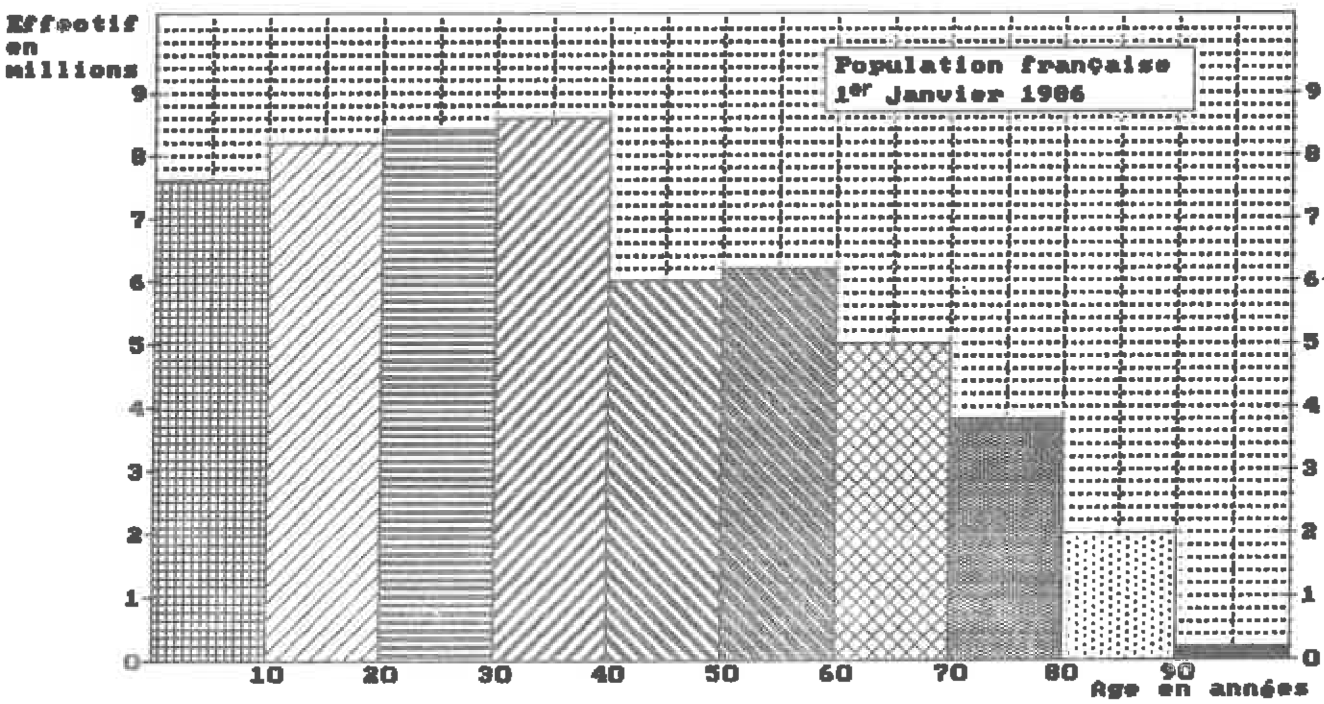


Graphique 2

ACTIVITE 8

En utilisant l'histogramme donnant la répartition de la population française en classes d'âges, complète le tableau suivant:

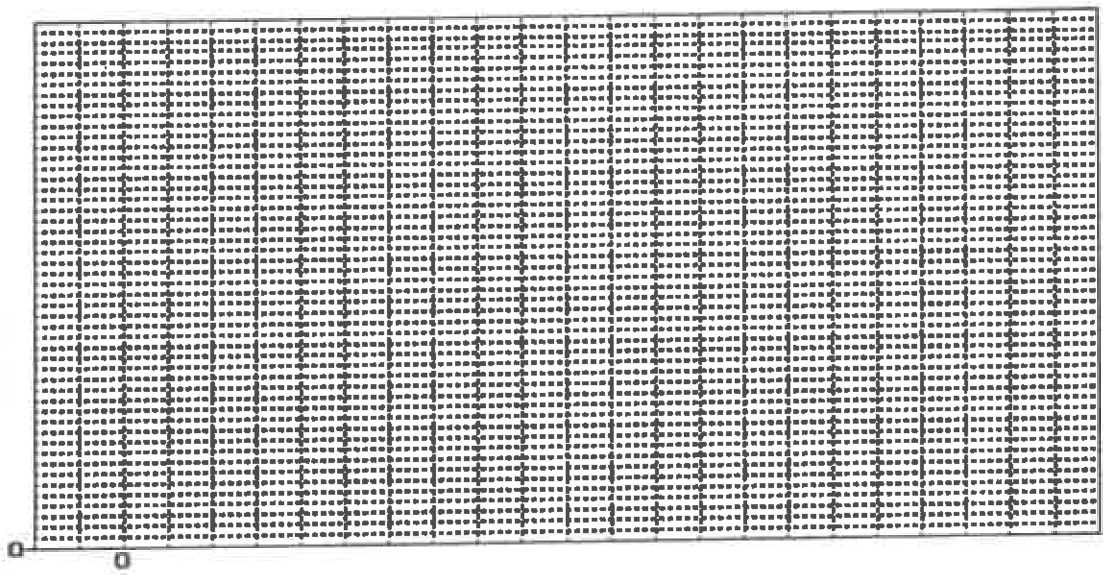
Classe d'âges	Effectif en millions	Fréquence %	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant



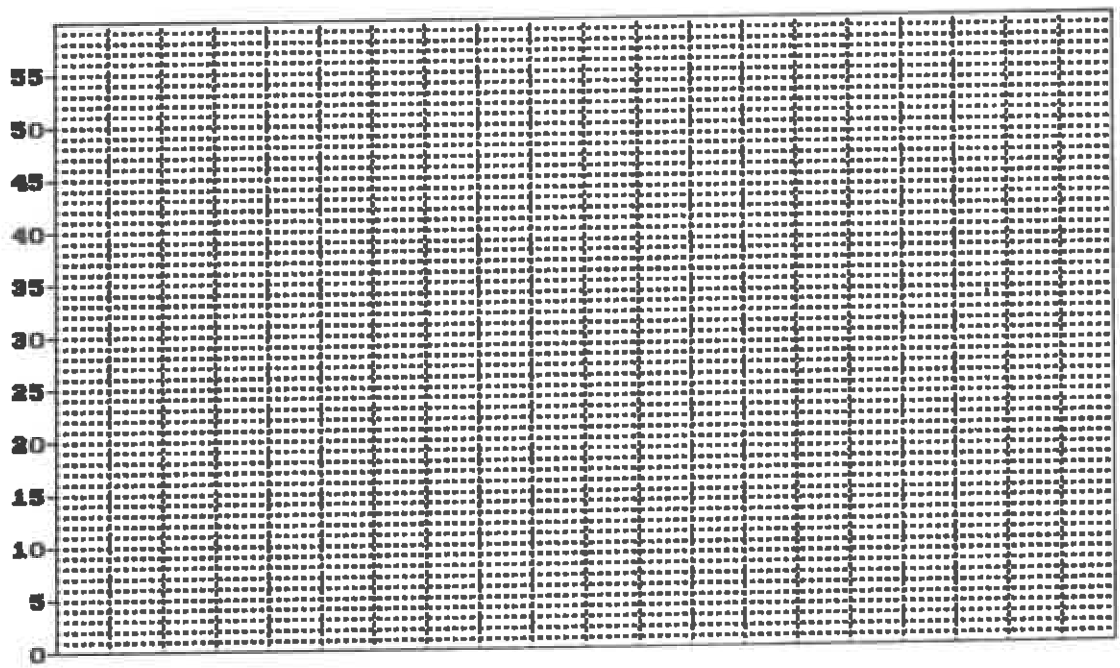
Trace le polygone des effectifs et les polygones des effectifs cumulés sur les graphiques de la page 11.

Combien de français ont moins de 30 ans ?
.... plus de 40 ans ?

Quel renseignement est donné par le point d'intersection des polygones des effectifs cumulés ?



POLYGONE DES EFFECTIFS



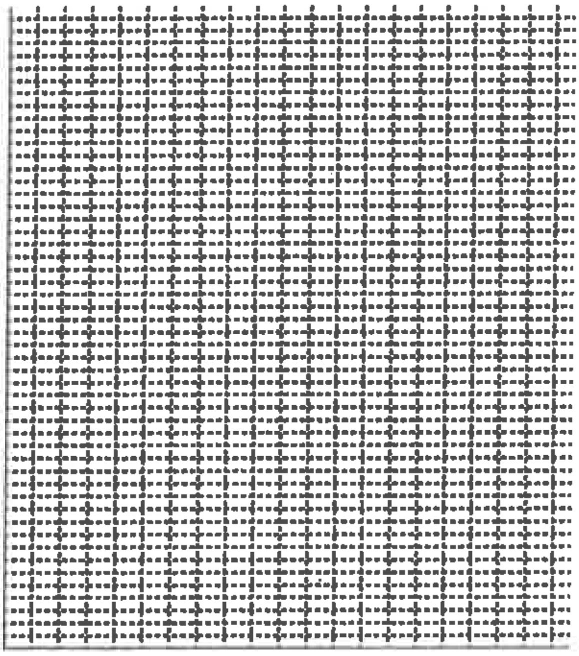
POLYGONES DES EFFECTIFS CUMULES

DOSSIER 36
CONTROLE

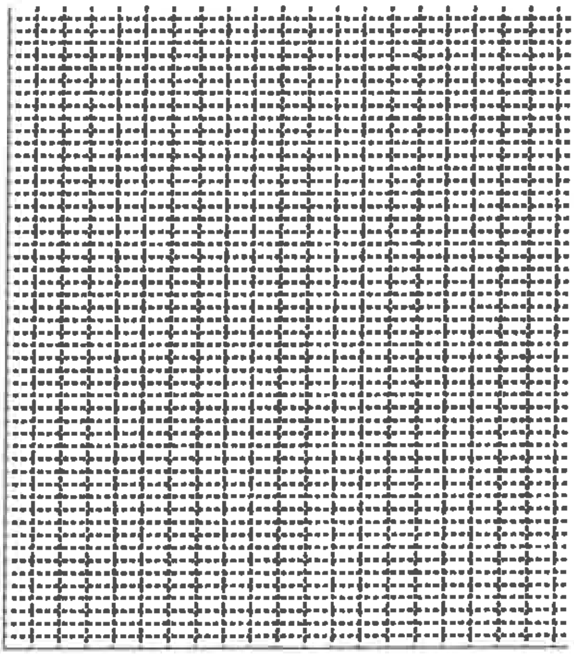
La répartition des notes de 200 candidats à un examen est donnée par le tableau suivant:

Classe de notes	Effectif	Fréquence	Fréquence %	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[0; 2[	2				
[2; 4[	6				
[4; 6[	8				
[6; 8[	28				
[8;10[	38				
[10;12[	46				
[12;14[	42				
[14;16[	16				
[16;18[	10				
[18;20[	4				

1°-Complète le tableau.
2°-Trace l'histogramme et le polygone des effectifs sur le graphique 1
3°-Trace les polygones des effectifs cumulés sur le graphique 2.



graphique 1



graphique 2

4°-Réponds aux questions suivantes:

a-Combien de candidats ont obtenu une note inférieure à 10 ?

b-.................................... supérieure ou égale à 12 ?

c-Quelle est d'après le graphique 2, la note du centième candidat ?

MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 37

TITRE: ROTATIONS

4

PREREQUIS

UTILISATION DU RAPPORTEUR

SYMETRIE AXIALE

SYMETRIE CENTRALE

OBJECTIFS

- INTRODUIRE UNE NOUVELLE TRANSFORMATION
- LA RECONNAITRE
- L'ETUDIER
- L'UTILISER
- DEMONTRER
- CONSERVATIONS DES PROPRIETES
- DEMONTRER LE THEOREME DE PYTHAGORE

REALISE PAR : DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 37

ROTATIONS

MODE D'EMPLOI

PREREQUIS : Utilisation du rapporteur - Symétrie axiale

OBJECTIFS : Introduire une nouvelle transformation, la reconnaître, l'étudier, l'utiliser. Démontrer.

CAPACITES EXIGIBLES : Construire l'image par une rotation donnée : d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle. Construire un hexagone régulier connaissant son centre et un de ses sommets.

DUREE : 8 ou 5 heures + controle (0,5 heure).

0/ ACTIVITES PREPARATOIRES

(1h) ACTIVITE 0 - page 1 : A faire à la maison.

Distribuer la feuille de 16 illustrations avec comme seule consigne : " Tu peux faire tout ce que tu veux sur cette feuille. Ecris ce que tu vois. "

(Document extrait de la revue TRAITS Editions J. Naudet)

Séquence en classe. (On peut n'y passer que 10 minutes). Par groupes de 2 (10 minutes), puis par groupes de 4 (15 minutes), les élèves échangent ce qu'ils ont fait et écrit à la maison. Puis pendant 30 minutes chaque groupe de 4 rédige ce sur quoi ils se sont mis d'accord.

Lors de la synthèse, choisir des verbes pouvant qualifier les transformations. Par exemple :

- Glisser (translation)
- Retourner, plier (symétrie axiale)

Pivoter (rotation)

1/ DECOUVRIR LA ROTATION

(1h) ACTIVITE 1 - page 2 et calque page 3 :

Suggérer d'utiliser le calque et la pointe du compas pour faire pivoter les illustrations.

T = Translation - S = Symétrie axiale - R = Rotation

1	:	T	6	:	T - R 180	11	:	T - S - R 120
2	:	T	7	:	T - S - R 180	12	:	T - S - R 180 - R 120
3	:	T - S	8	:	T - S - R 180	13	:	T - R 90 - R 180
4	:	T - S	9	:	T - S - R 180	14	:	T - S - R 90 - R 180
5	:	T - R 180	10	:	T - R 120	15	:	T - S - R 90 - R 180
						16	:	T - R 60 - R 120 - R 180

On pourra voir en 2, 4 et 6 la "symétrie glissée" SG = T o S.

2/ ETUDIER LA ROTATION

ACTIVITE 2 - pages 4 et 5 : S'assurer que les élèves perçoivent bien l'action de rotation en utilisant le calque et la pointe de compas.
On pourra remarquer que les cnetres de rotation se trouvent parfois sur les axes de symétrie.
Etude des polygones réguliers.

- page 5 : Un poème de Robert Desnos.

(1h) ACTIVITE 3 - page 6 et 7 : Astronomie. Cette partie peut être étudiée en Physique.

(1h) ACTIVITE 4 - page 8 : Définition de la rotation comme composée de deux symétries d'axes sécants.
Examiner le cas particuliers de deux axes perpendiculaires et le cas de deux axes parallèles.
Rotation : centre, angle.

ACTIVITE 5 - page 9 : Utiliser cette définition.

EXERCICE 1 - page 10 : Angle de rotation 2 .
Faire recopier le dessin.

PROPRIETE DE CONSERVATION - page 10 : Faire recopier phrases et dessins.

3/ ROTATION ET SENS

Ce paragraphe n'est à faire que si on tient à aborder le sens de rotation. (1h).

ACTIVITE 6 - page 11 : Rotation et sens. Faire recopier les dessins.

EXERCICE 2 - page 11 : Tracer des angles.

EXERCICE 3 - page 12 : Exercice d'application.

MISE AU POINT - page 12 : Deux nouvelles définitions.

4/ CONSTRUIRE PAR ROTATION L'IMAGE D'UNE FIGURE (1h)

ACTIVITE 7 - page 13 : La balançoire. Faire recopier les dessins.

EXERCICE 4 page 13 : Tracé d'une cocotte.

ACTIVITE 8 - pages 14 et 15 : Utiliser des propriétés de la rotation pour construire.

5/ RECONNAITRE LA ROTATION (1h)

ACTIVITE 9 - pages 16 et 17

6/ UTILISER LES PROPRIETES DE LA ROTATION (2h)

EXERCICES 5, 6 et 7 -pages 18 et 19

PROBLEME 1 - page 19 : Démontrer une propriété d'une figure.

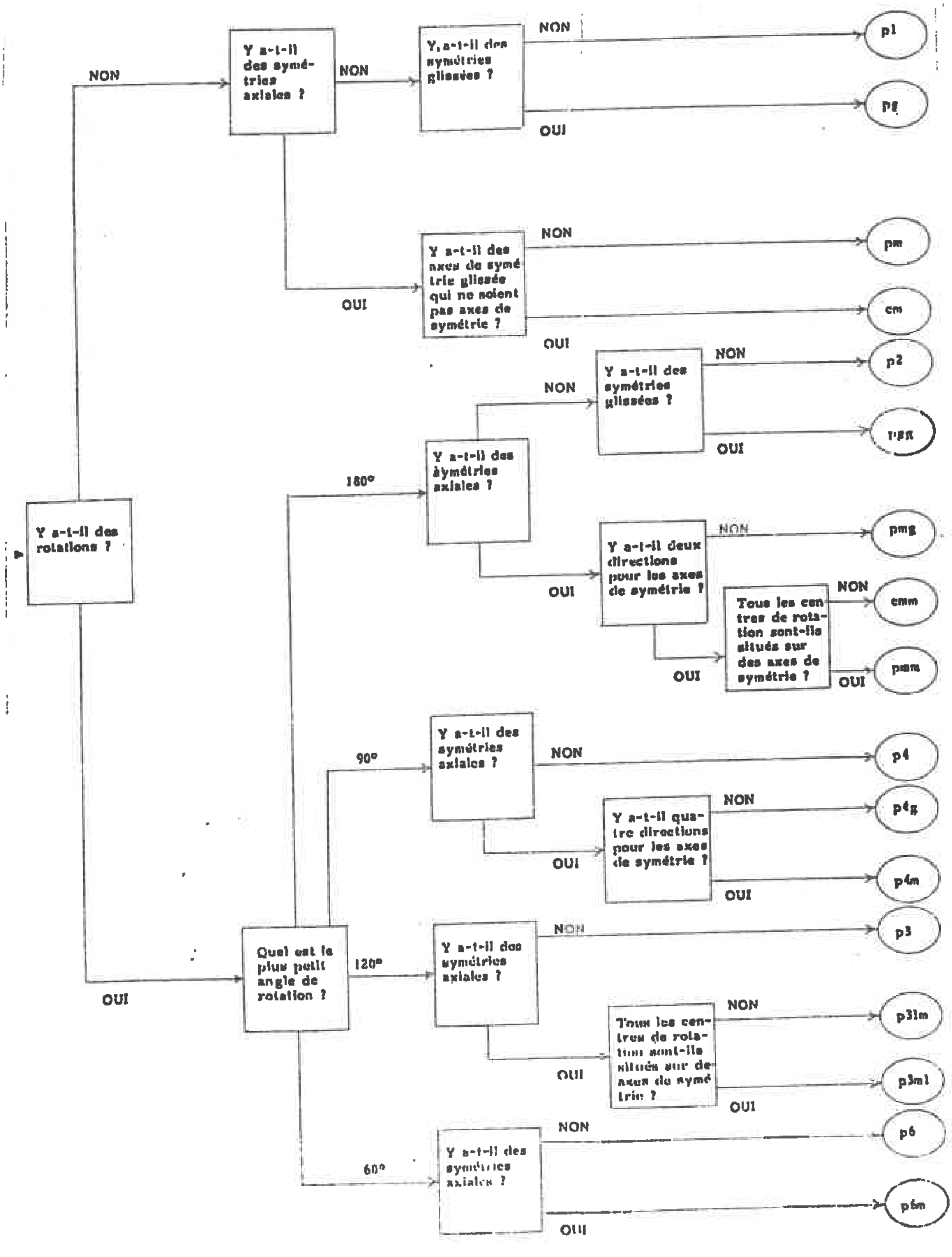
PROBLEME 2 - page 19 : Problème de construction.

PROBLEMES 3 et 4 - pages 20 et 21 : La rotation et Pythagore. Démontrer.

ALGORITHME DE D. CROWE POUR LA DÉTERMINATION DES 17 GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES DU PLAN

LES PAVAGES RÉGULIERS PÉRIODIQUES DU PLAN

Extrait de PLOT n° 42 APMEP Orléans-Tours BP 6759, 45067 Orléans Cédex 2

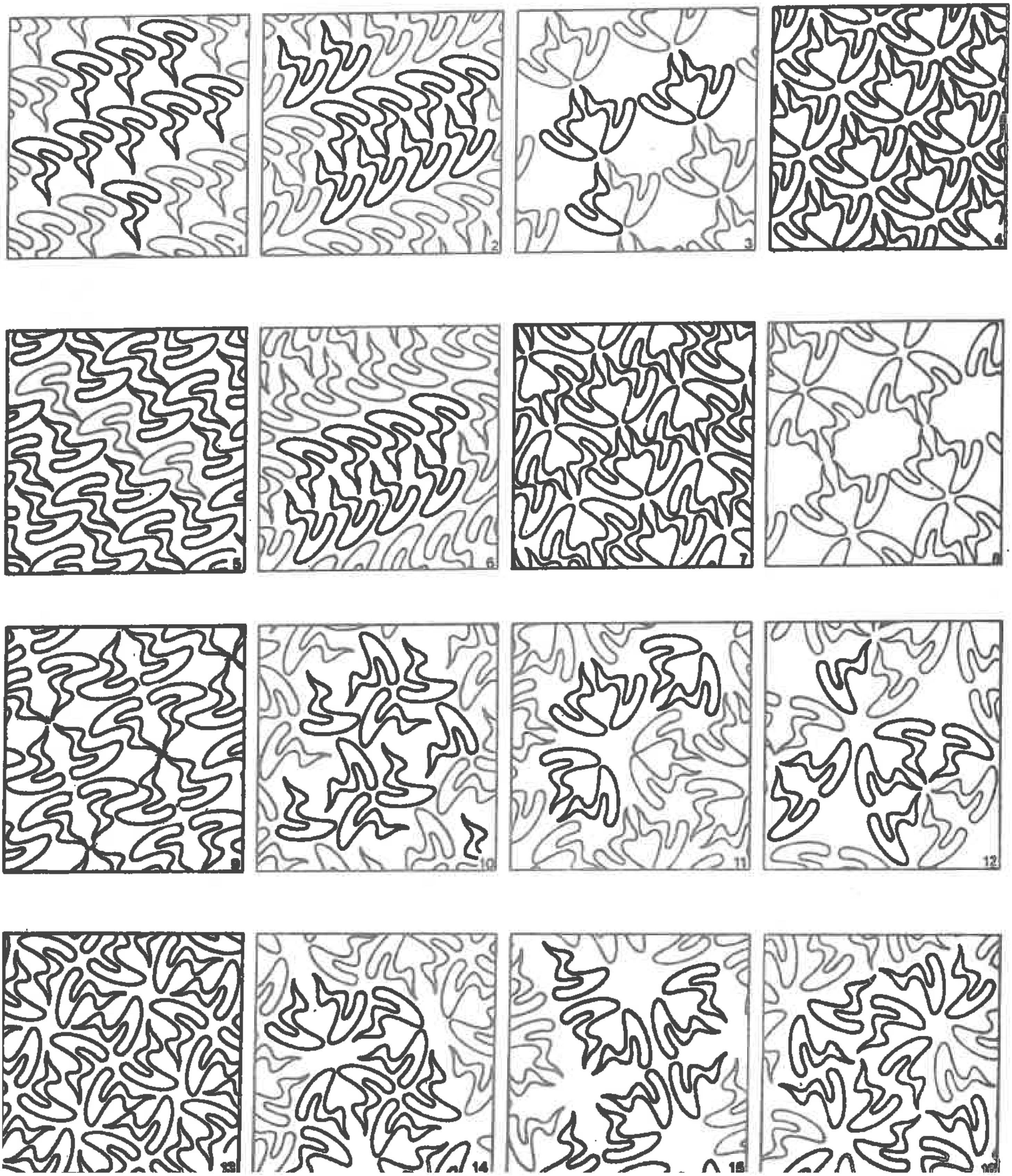


DOSSIER N° 37

ROTATIONS

ACTIVITES PREPRATOIRES

ACTIVITE 0



1/ DECOUVRIR LA ROTATION

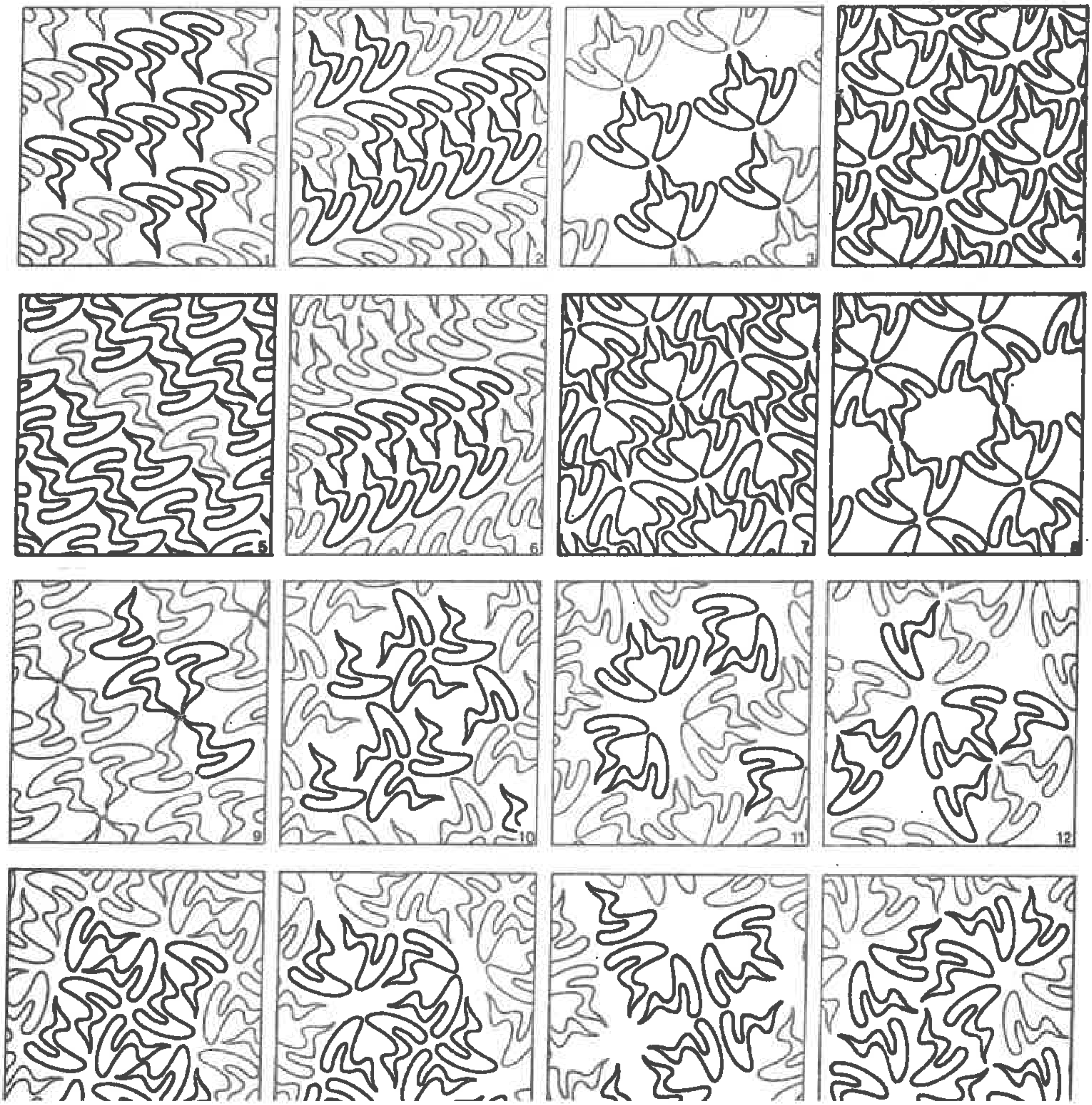
ACTIVITE 1

Ces 16 illustrations ont été obtenues par la répétition d'un motif.

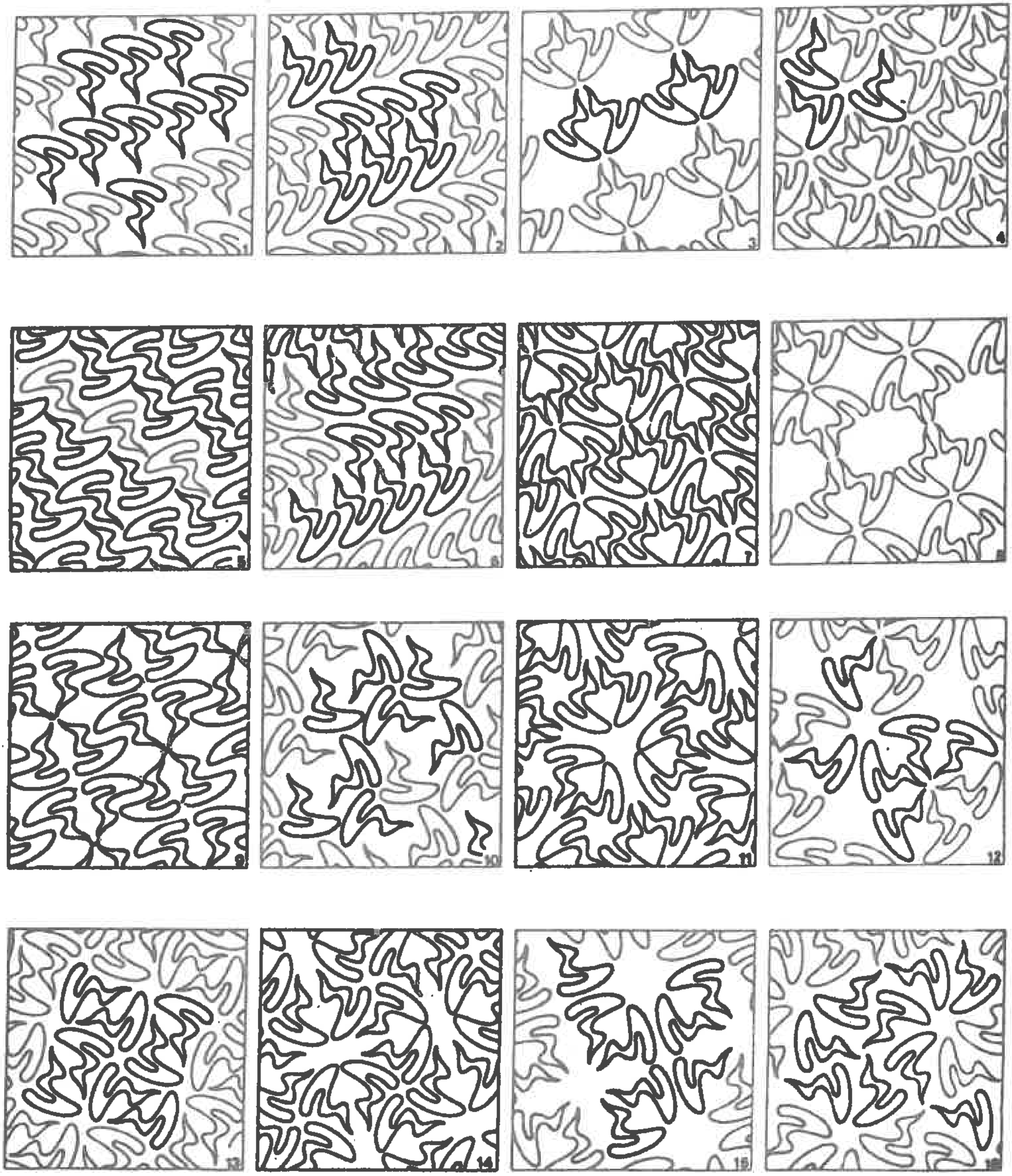
Tu vas chercher les déplacements qui conservent chaque illustration. Pour cela, tu utiliseras le calque que tu déplaceras de façon à couvrir à nouveau le motif original.

Trouve les transformations les plus simples qui permettent de superposer chaque illustration avec son double (qui permettent de transformer l'illustration en elle-même).

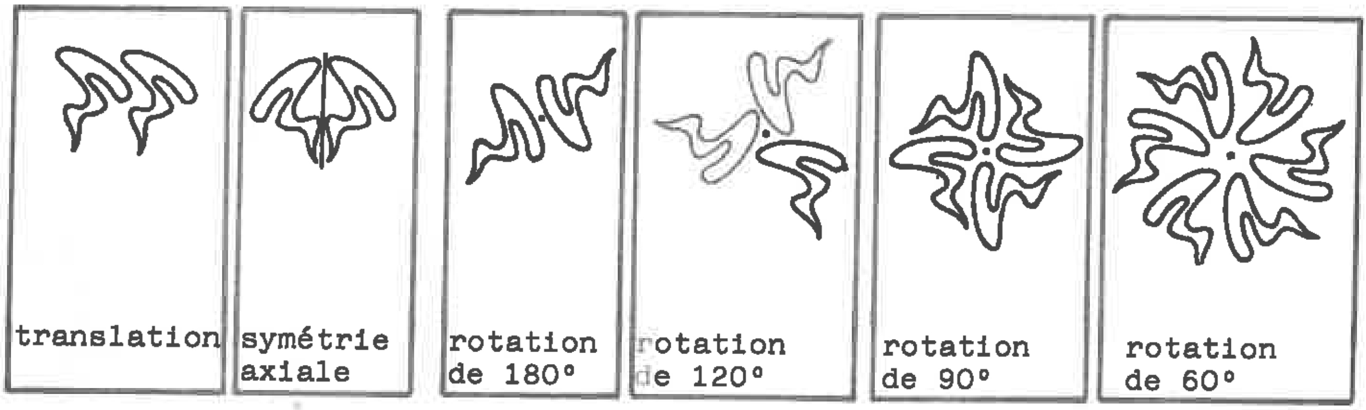
Ensuite, classe ces transformations en catégories.



CALQUE



Voici les trois tranformations élémentaires qui permettent de transformer une illustration en elle-même.



Pour chacune des 16 illustrations, précise alors une combinaison de ces transformations élémentaires qui laisse le dessin invariant.

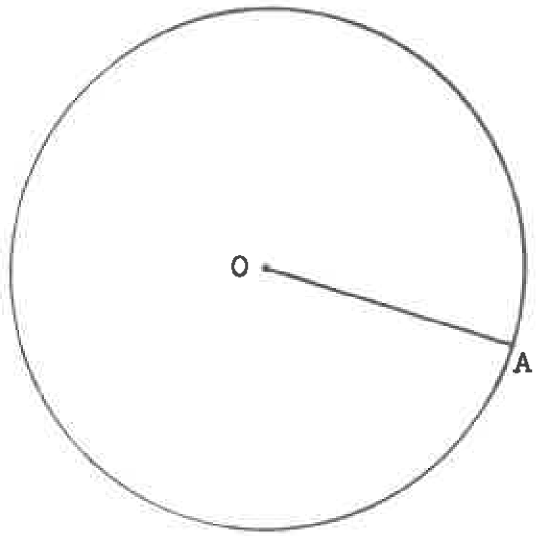
Existe-t-il d'autres illustrations avec ce motif ?

/ **ETUDIER LA ROTATION**

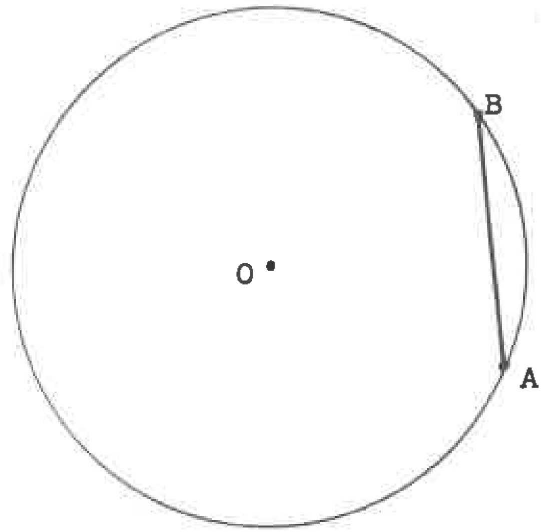
ACTIVITE 2

Pour chacune de ces illustrations, marque les centres de rotation.
Joins certains de ces points de façon à tracer des polygones réguliers.

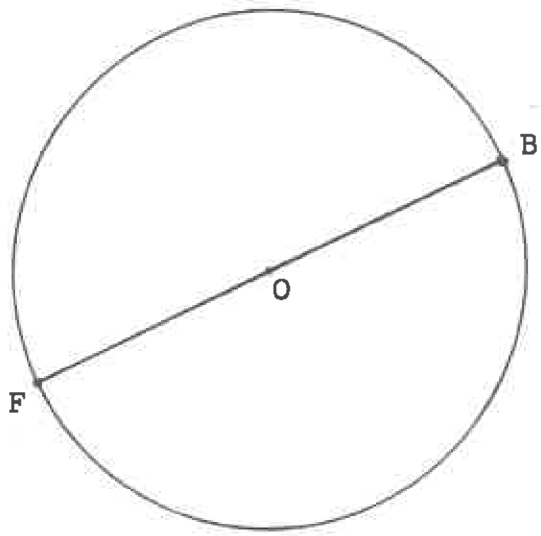
Dessine :



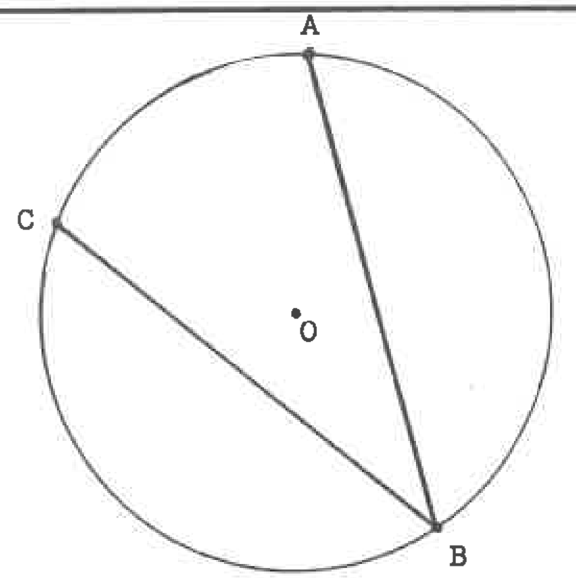
un pentagone régulier ABCDE
de centre O ;



l'hexagone régulier
ABCDEF de centre O ;



l'octogone régulier ABCDEFGH.



Termine ce pentagone régulier
ABCDE de centre O.

Un poème de Robert Desnos

LE ROND ET L'ETOILE

Pour faire une étoile à cinq branches
Ou à six ou davantage
Il faut d'abord faire un rond

Pour faire une étoile à cinq branches...
Un rond !
On n'a pas pris tant de précaution
Pour faire un arbre à beaucoup de branches
Arbres qui cachez les étoiles !
Arbres !
Vous êtes pleins de nids et d'oiseaux chanteurs
Couverts de branches et de feuilles
Et vous montez jusqu'aux étoiles !

ACTIVITE 3

ASTRONOMIE

Sur la page 37-7, on te propose une photo du ciel prise en pose longue.
Le but de cette activité est de déterminer la durée de la pose.

Tu remarqueras que le cliché qu'on te propose est en fait le négatif de la photo. C'est ainsi que travaillent tous les astronomes dans les grands laboratoires. En effet, la précision du négatif est bien meilleure que le tirage sur papier. Ici la précision n'est pas excellente car on a utilisé une photo tirée du livre de Pierre Bourge et Jean Lacroux "A l'affut des étoiles", édité chez Dunod.

L'axe de rotation de la Terre est l'axe des pôles. En combien de temps la Terre fait-elle un tour sur elle-même ? C'est la rotation de la Terre qui est mise en évidence sur la photo.

La trace laissée par chaque étoile est donc un arc de cercle.
Que représente le centre de cet arc de cercle ?

Pour déterminer le temps de pose voici comment tu vas procéder :

1 - Choisis deux ou trois étoiles assez éloignées du "centre" des cercles.

2 - Repère pour chacune le début de la trace et sa fin.

3 - Construis la médiatrice des cordes déterminées par chaque trace.
Si tu travailles correctement, ces médiatrices doivent être concourantes.

4 - Détermine alors l'angle dont a tourné la Terre.

5 - Déduis-en alors le temps de pose.

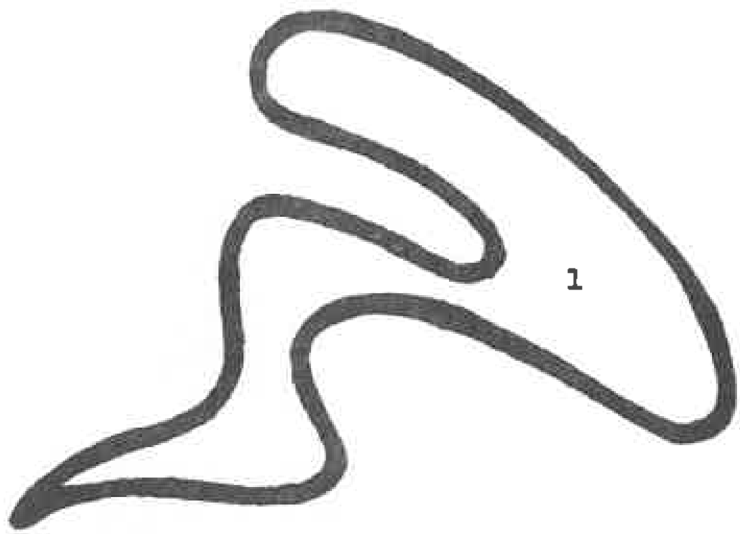
Remarque : Comment se nomme l'étoile dont la trace est la plus marquée (A) ?
Pourtant dans le ciel ce n'est pas une étoile très lumineuse. Peux-tu expliquer ce phénomène.

Question : Dans quel sens tourne les étoiles dans le ciel ?

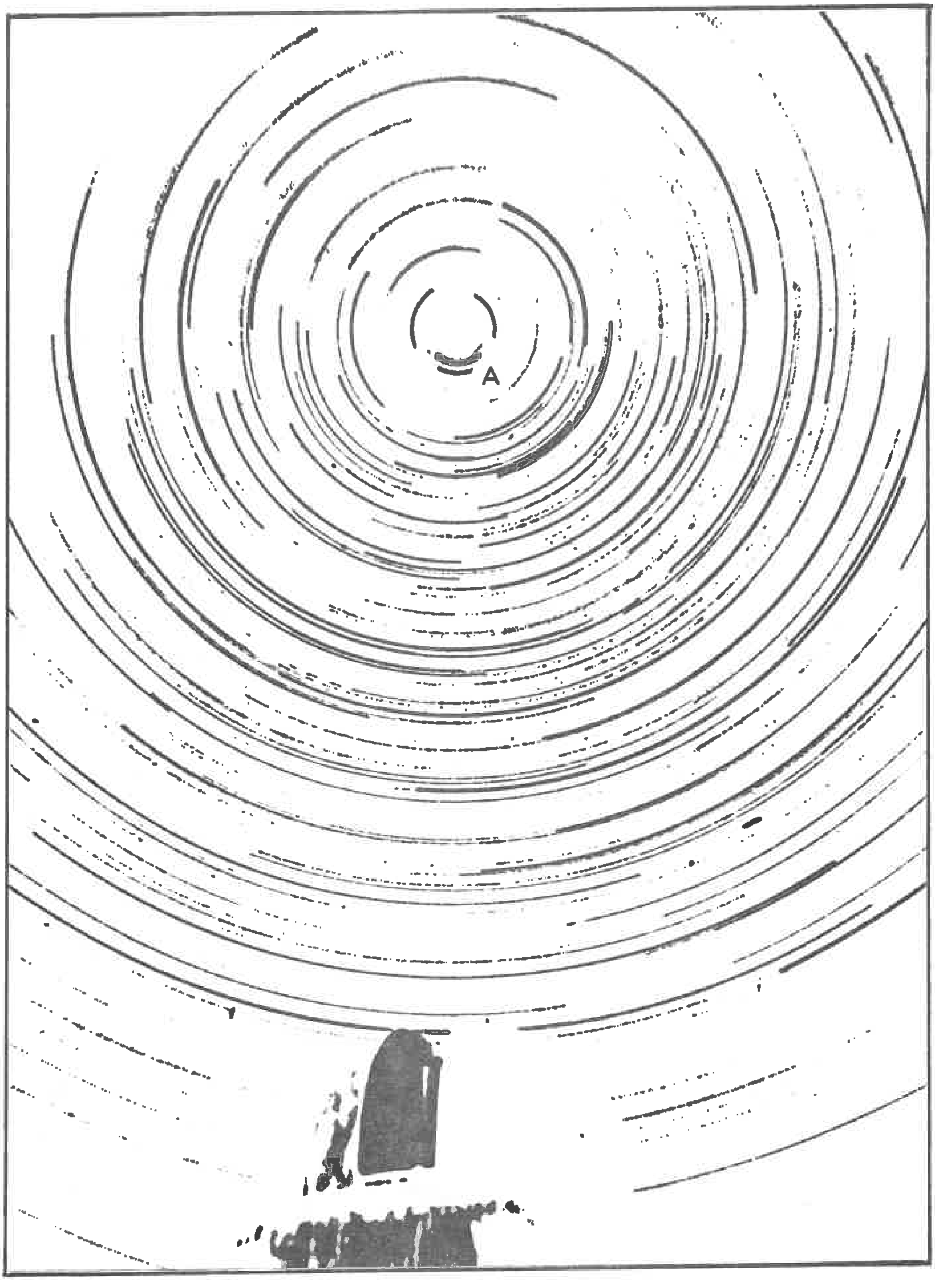
Critique : Trouves-tu toujours exactement le même angle de rotation ? peux-tu donner une explication à ce phénomène ?

Activité 4

Plie cette feuille.
Avec la pointe du compas pique quelques points du motif pour marquer son image à la suite de ce premier pliage.
Trace cette image.
Plie une seconde fois la feuille et procède de la même façon avec l'image que tu viens de tracer.
Que remarques-tu ?
Comment amener le motif (1) sur le motif (3) sans passer par la motif (2) ?

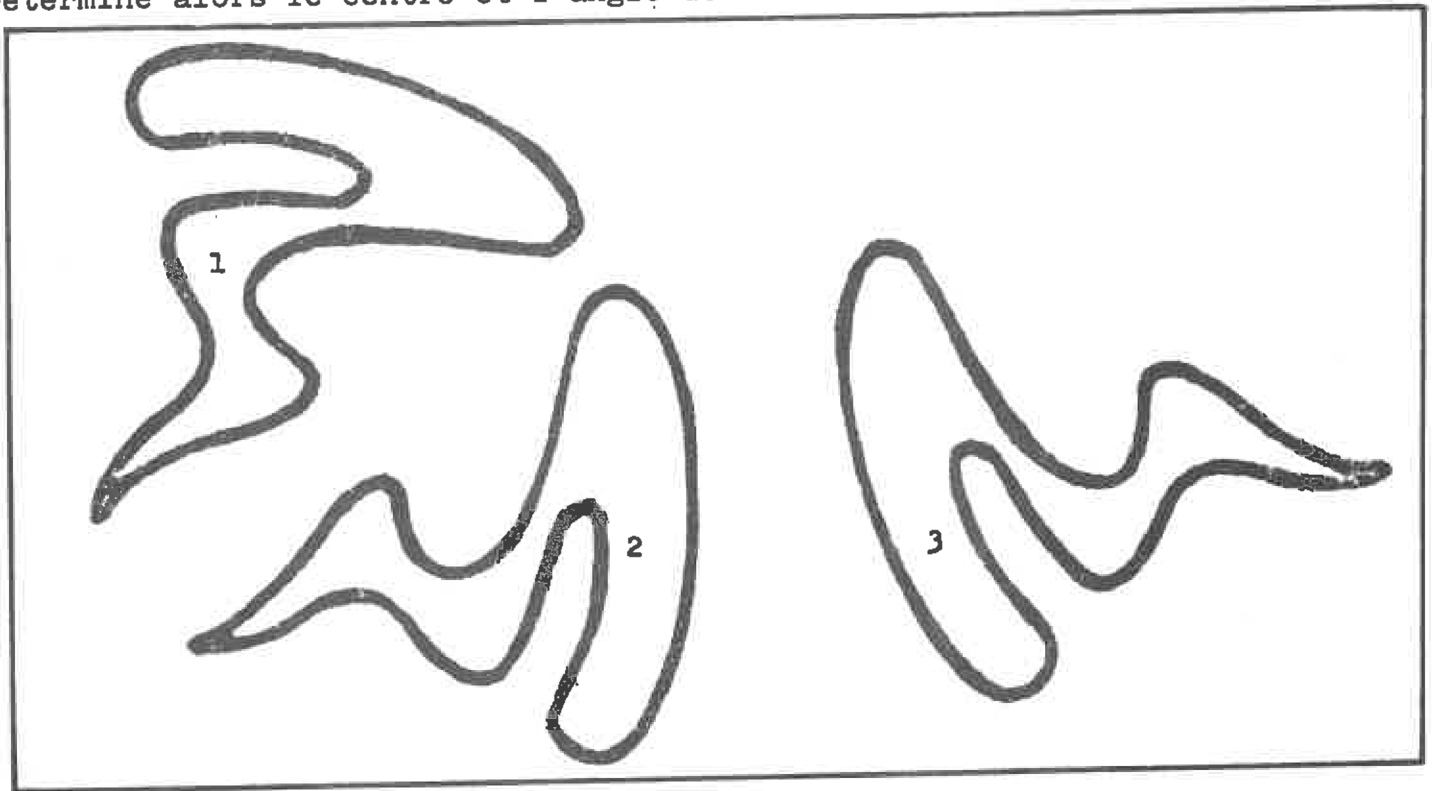


1

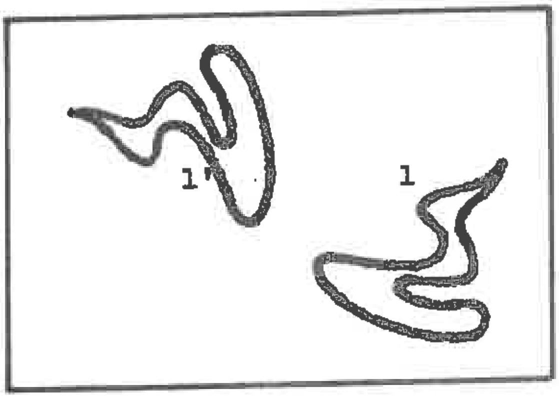

A

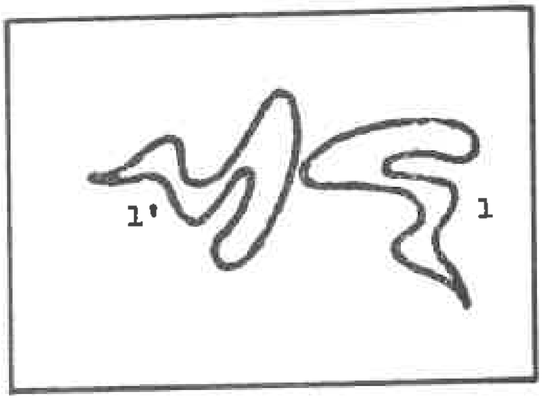
Activité 5

a) Le motif (1) a pour image le motif (2) par une symétrie orthogonale.
Puis (2) a pour image (3) par une autre symétrie orthogonale.
Dessine ces deux axes de symétrie.
Détermine alors le centre et l'angle de rotation.

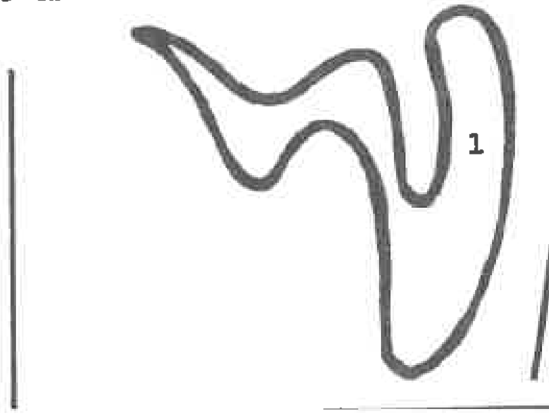


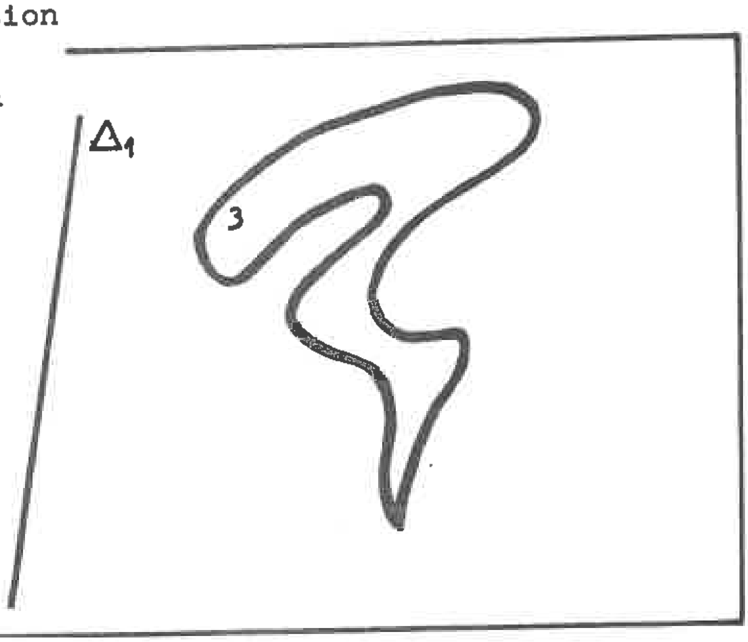
b) Dans ces deux cas, détermine le centre et l'angle de rotation :



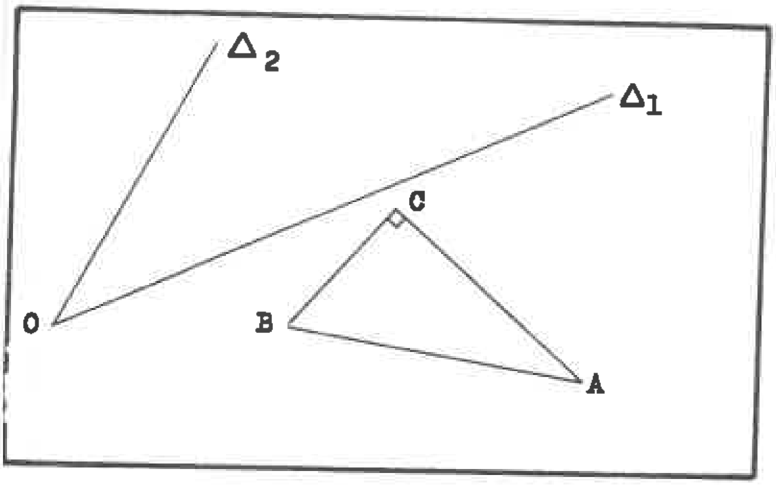


c) On passe de (1) à (3) par une rotation dont on cherche centre et angle.
Dessine le transformé de (1) par la symétrie d'axe Δ_1.
Dessine alors le second axe de symétrie axiale.



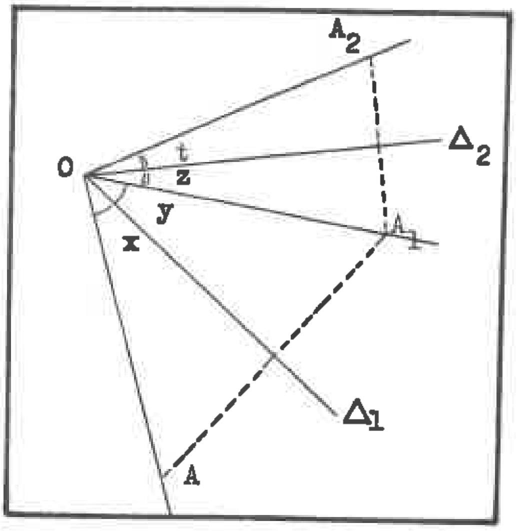


Exercice 1



Reproduis par transparence cette figure.
Construis l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par la symétrie d'axe Δ_1, puis l'image $A_2B_2C_2$ de $A_1B_1C_1$ par la symétrie d'axe Δ_2.
Décalque ABC.
Que remarques-tu (longueurs, angles, angle de rotation) ?

Refais cette construction avec seulement le point A.
Que remarques-tu à propos des angles x, y, z et t ?



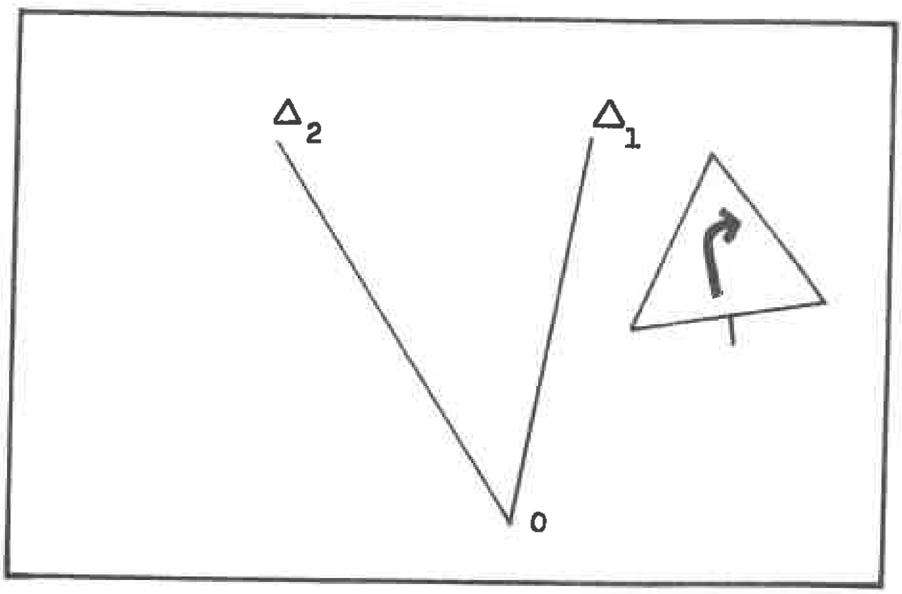
Propriétés des rotations

Recopie puis complète les phrases suivantes :

La symétrie axiale conserve ...
Or, une rotation est la composée de deux ...
Donc une rotation conserve ...

La symétrie axiale ne conserve pas l'orientation.
Or une rotation ...
Donc ...

Vérifie ta réponse en reproduisant puis en complétant ce dessin sur ton cahier.

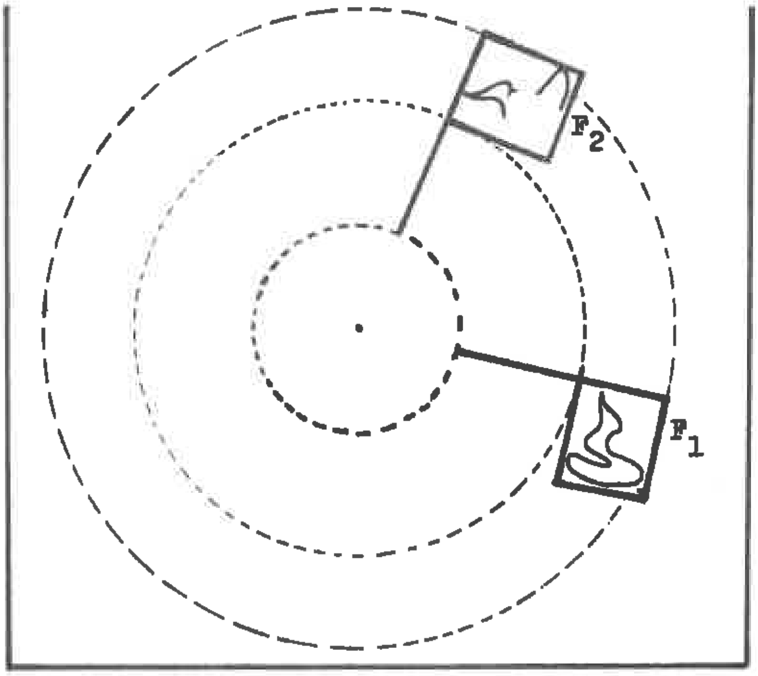


3/ ROTATION ET SENS

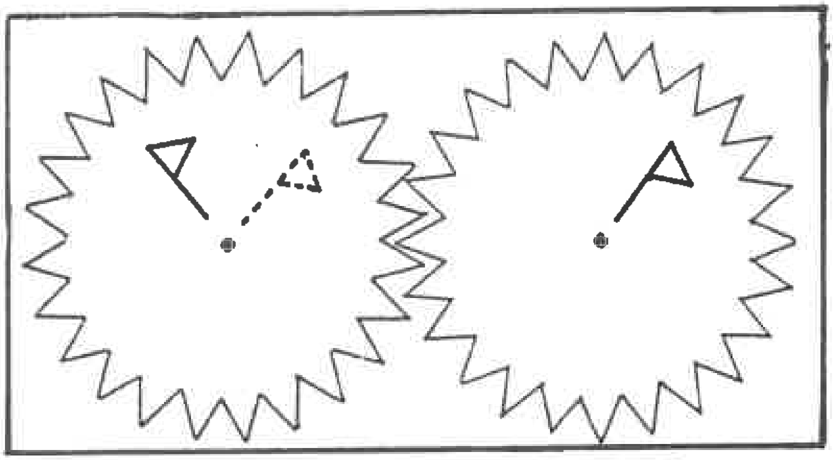
ACTIVITE 6

a) A l'aide de la rotation qui transforme F_1 en F_2, continue F_3, F_4, ...

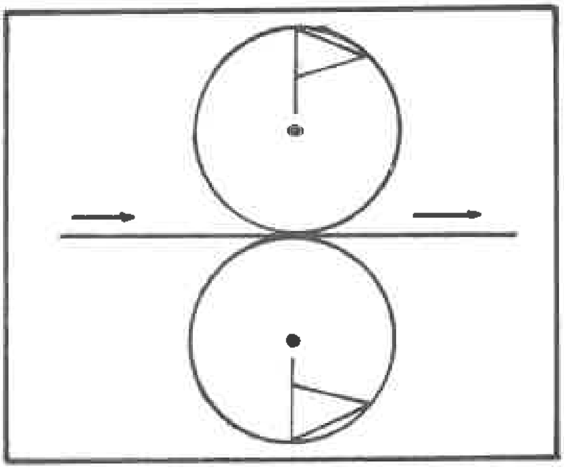
Que remarques-tu ?
Pourquoi ?



b) Sur chaque engrenage on a fixé un fanion.
Dessine la position du fanion du deuxième engrenage quand le fanion du premier occupe la position indiquée en pointillée.



c) Deux roues de centre fixe sont entraînées par un tapis roulant.
La roue supérieure tourne d'un angle de 80°.
Dessine la position finale du fanion pour chaque roue.



d) <u>Sens de rotation</u> : Pour mettre tout le monde d'accord, on choisit le même sens de rotation.
C'est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
On le signalera sur les figures par une flèche et le signe +. 

Exercice 2 : Sur un cercle de centre K et de rayon 5cm, place un point R.
Marque les points O, A, N, O', T et T' tels que :
$\widehat{RKO} = 40°$; $\widehat{RKA} = 125°$; $\widehat{NKR} = 30°$; $\widehat{IKO} = 180°$; $\widehat{IKO'} = 50°$; $\widehat{IKT} = 250°$ et $\widehat{T'KI} = 25°$.

Exercice 3

Sur ton cahier, trace la demi-droite [Ix) puis construis l'image de la demi-droite [Ix) :

- par la rotation de centre I et d'angle 37° (on l'appelle [Iy)) ;
- par la rotation de centre I et d'angle 323° (on l'appelle [Iz)).

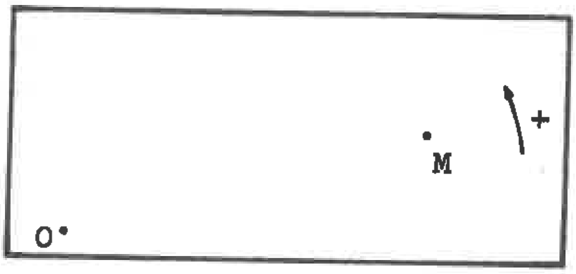
Construis la demi-droite [It) dont l'image par la rotation de centre I et d'angle 37° est [Ix).

Que remarques-tu ?

Mise au point

a) Une rotation est définie par son centre et son angle.

b) Construction 1 :



Recopie ce dessin puis construis l'image M' du point M par la rotation de centre O et d'angle 35°.

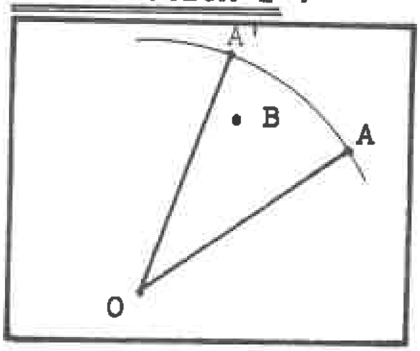
Précise les instruments utilisés.

Décris ton programme de construction de M'.

c) Conclusion 1 :

Si je construis le point M' de sorte que OM'=OM et $\widehat{MOM'} = \alpha$,
Alors M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α

d) Construction 2 :



Voici quatre points A, A', B et O.
Ces points O, A et A' déterminent-ils une rotation ?
Si oui, recopie ce dessin puis construis l'image B' de B par cette rotation.
Ecris ton programme de construction de B'.

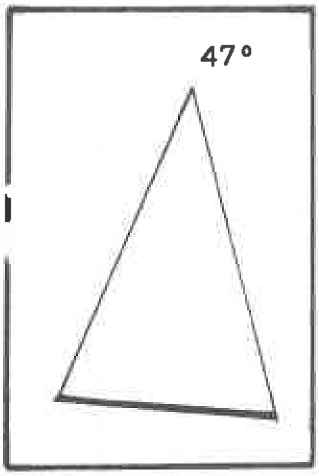
e) Conclusion 2 :

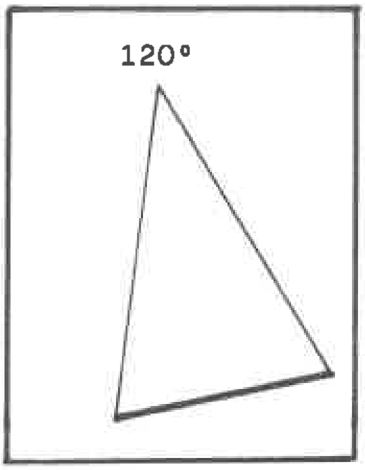
Soient ces quatre points O, A, A' et B.
Si je construis le point B' de sorte que OB'=OB et $\widehat{BOB'}=\widehat{AOA'}$,
Alors B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOA'}$.

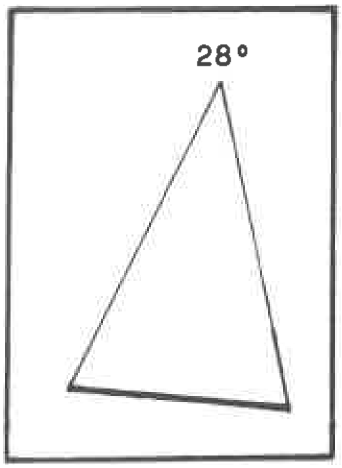
4/ CONSTRUIRE PAR ROTATION L'IMAGE D'UNE FIGURE

ACTIVITE 7 Avant de réaliser cette activité, reproduis par transparence les quatre figures.

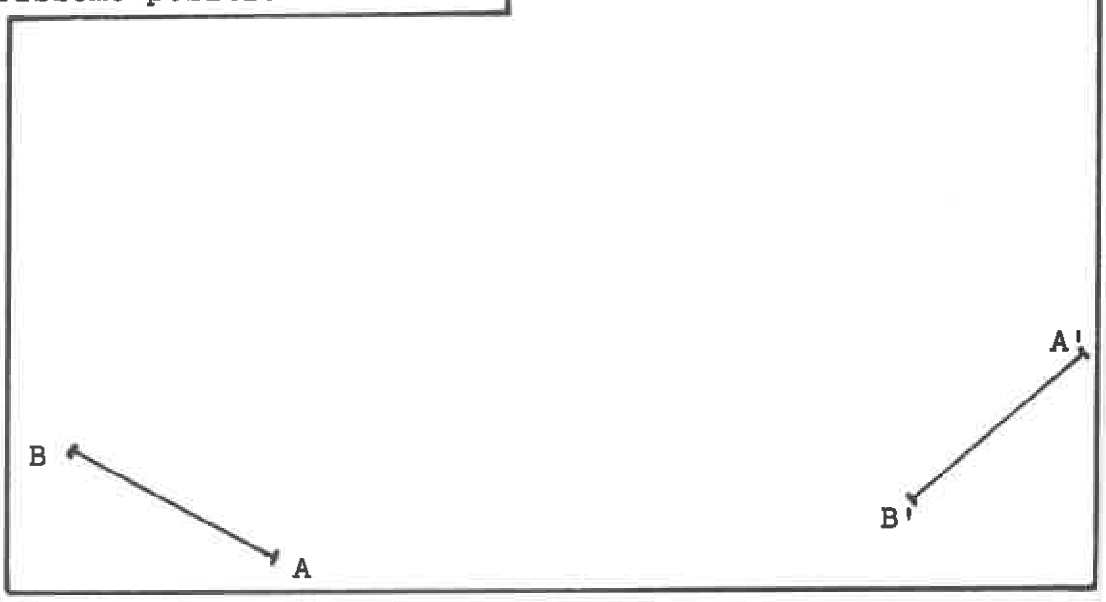
Dessine la position de la balançoire par rotation de centre O et d'angle :







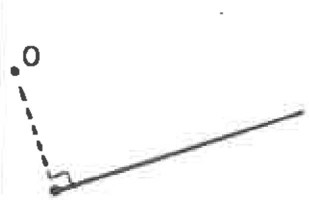
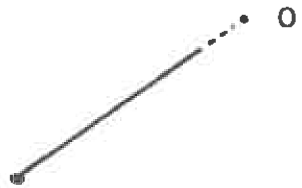
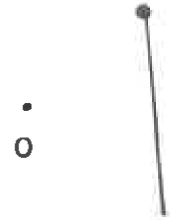
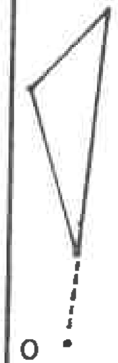
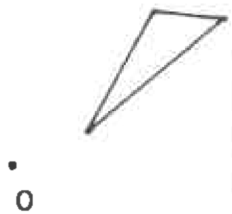
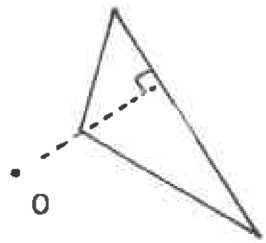
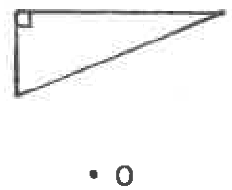
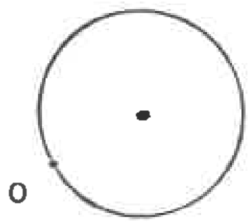
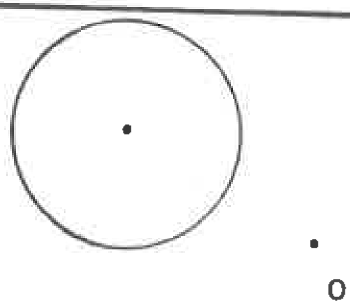
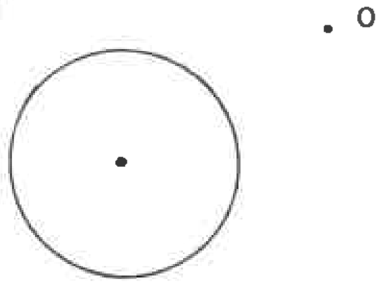
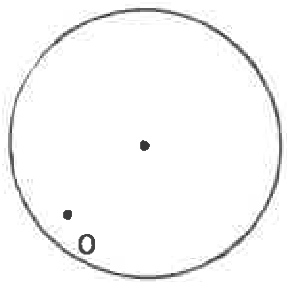
La balançoire passe de [AB] en [A'B'] .
Où sont fixées les cordes qui la maintiennent.
Quel est l'angle de rotation ?
Dessine alors une troisième position.



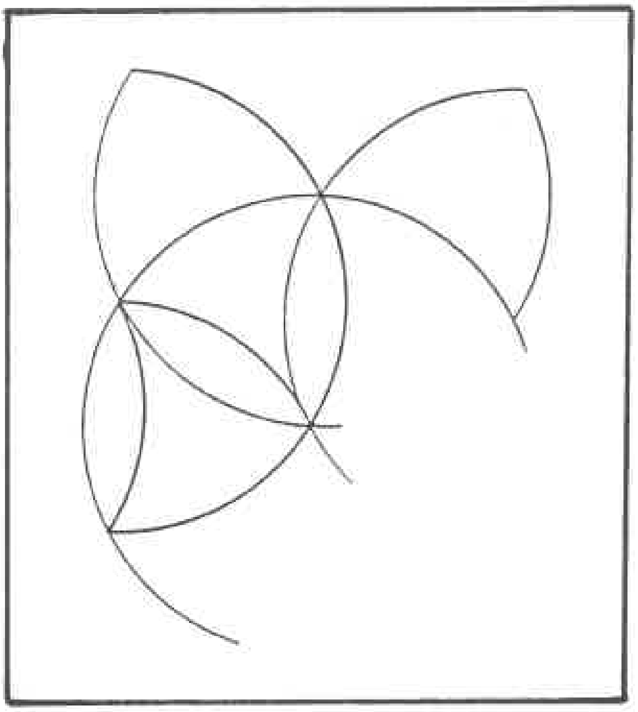
Exercice 4

Construis ABC, un triangle isocèle et rectangle en B.
On appelle M le milieu de l'hypoténuse.
Construis les points A', B', C' et M' les images des points A, B, C et M par rotation de centre A et d'angle 90°.
Construis les points A", B", C" et M" les images des points A', B', C' et M' par la même rotation.
Repasse en rouge la cocotte ABCMB'C'M'B"C"A".
Calcule son aire en fonction de celle du triangle ABC.

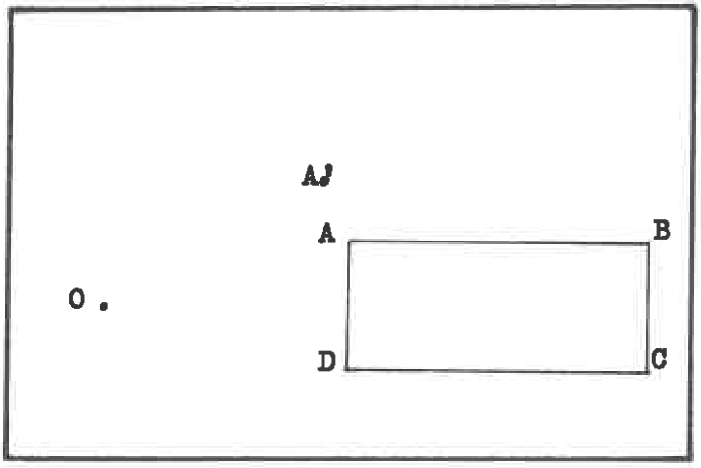
Trace le transformé de chaque figure par rotation de centre O et de rayon α.

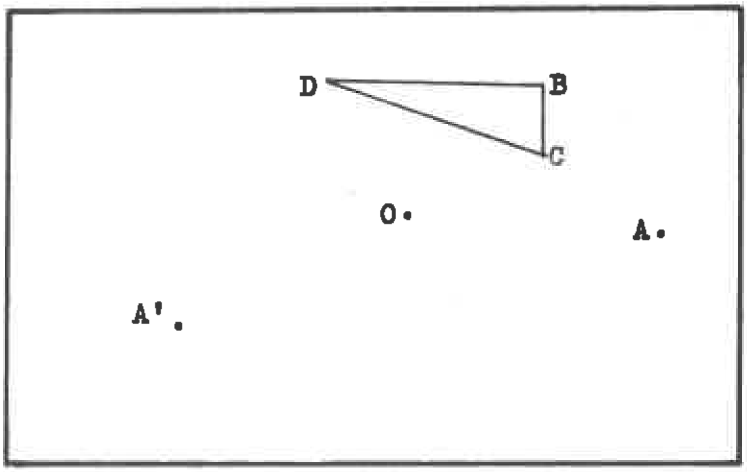
angle α / figure	60°	90°	42°	165°
demi-droite				
triangle				
cercle				

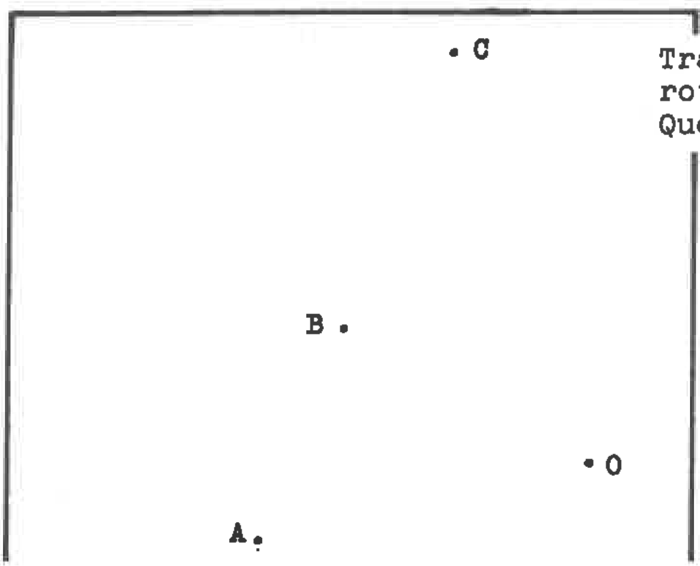
Complète la rosace



Construis les images des figures par la rotation de centre O qui envoie A en A'



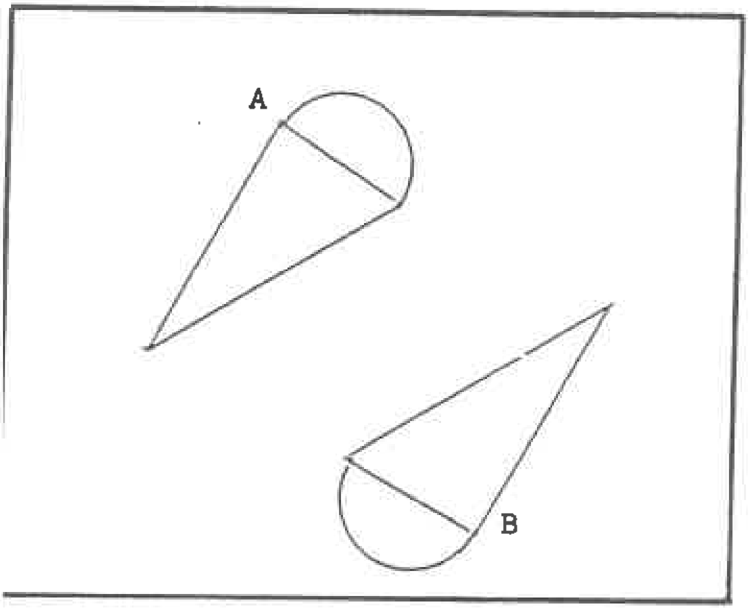


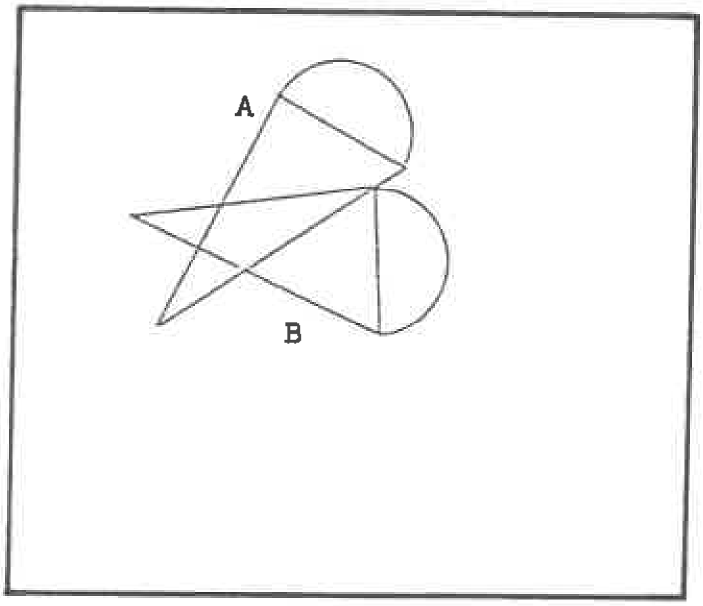


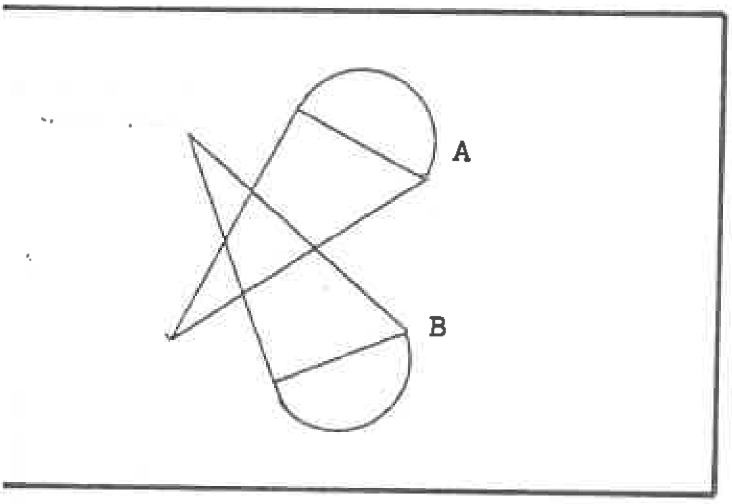
Trace les images des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle 240°.
Que remarques-tu ?

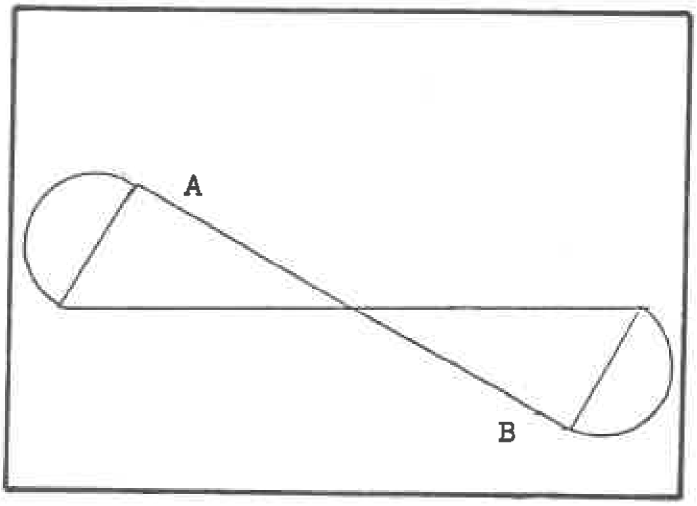
Activité 9

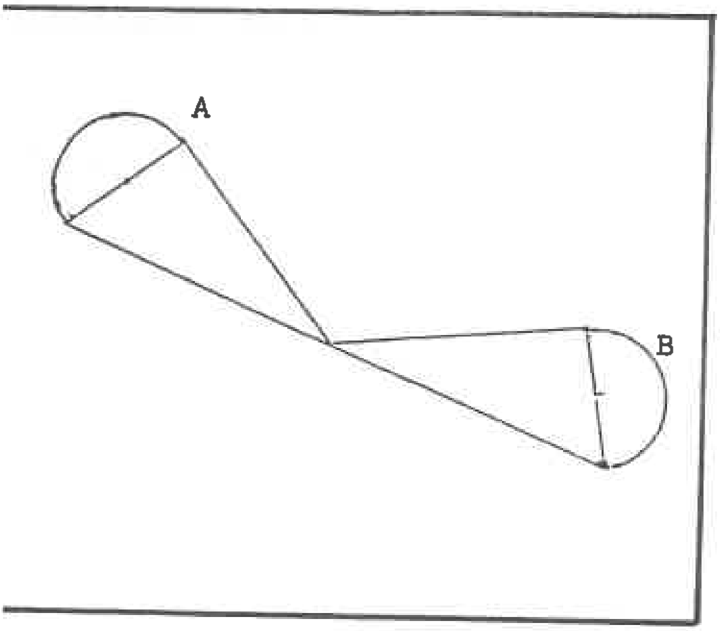
Voici douze situations. Pour chacune d'elles, une transformation permet de transformer la figure A en la figure B. Repère les rotations.

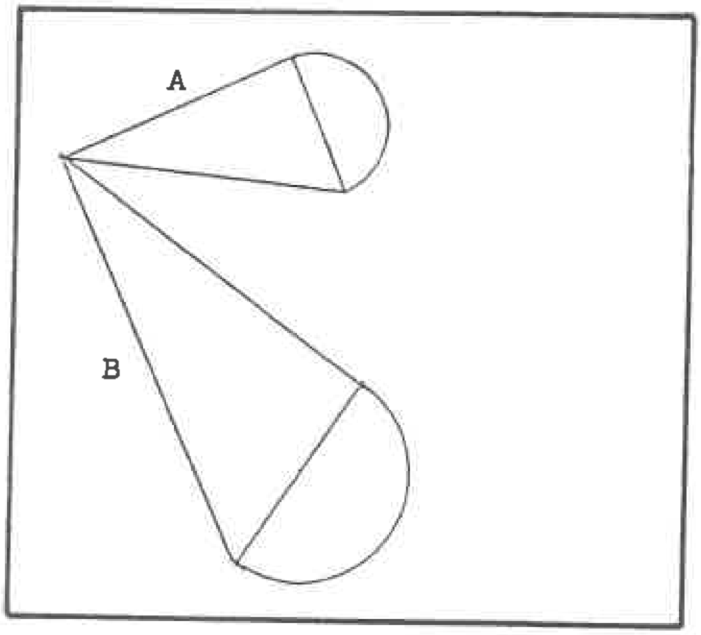


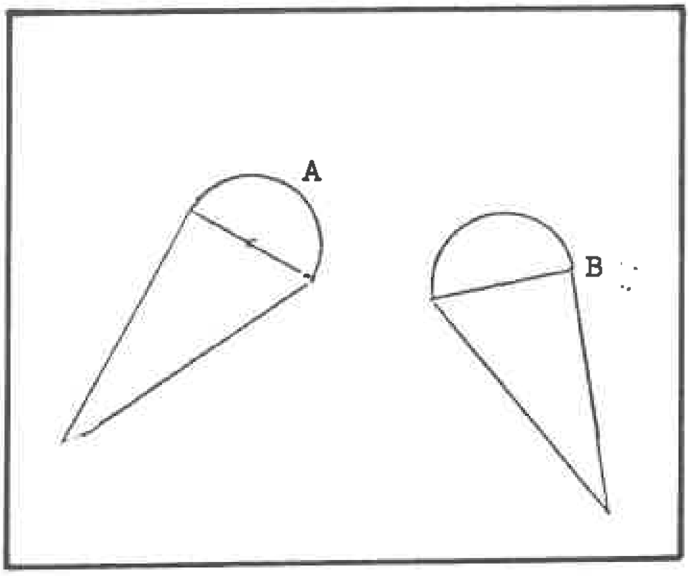


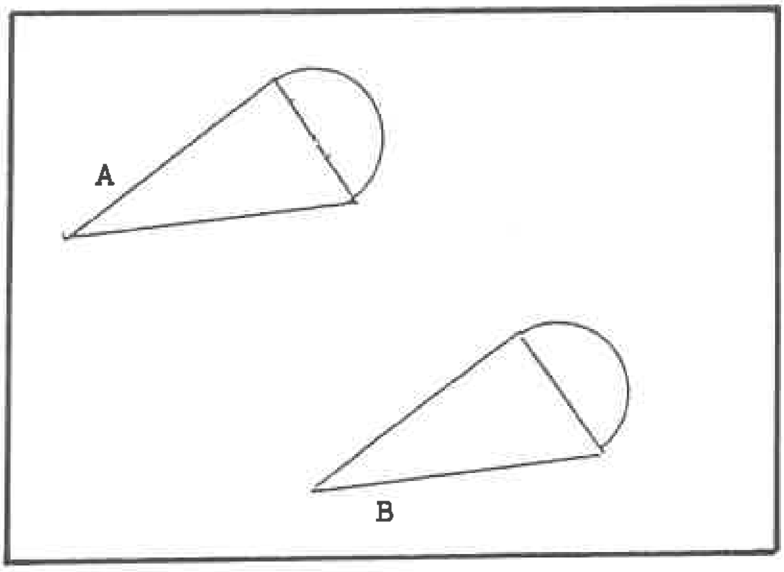


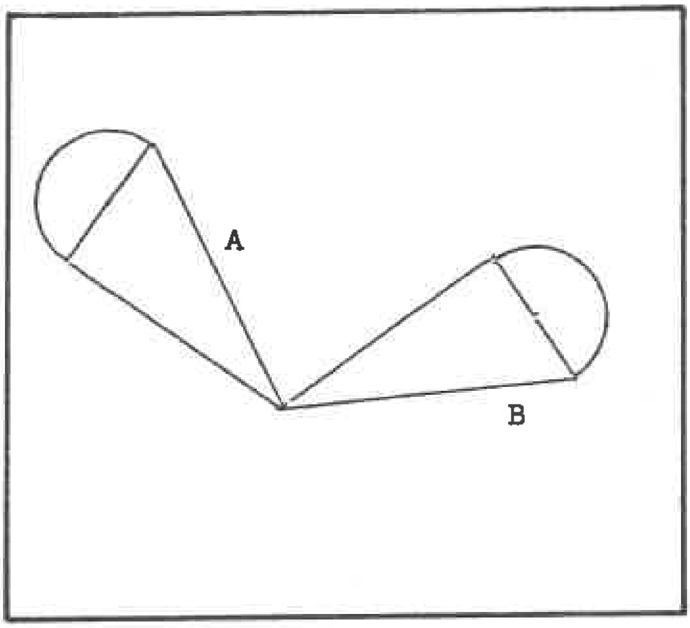


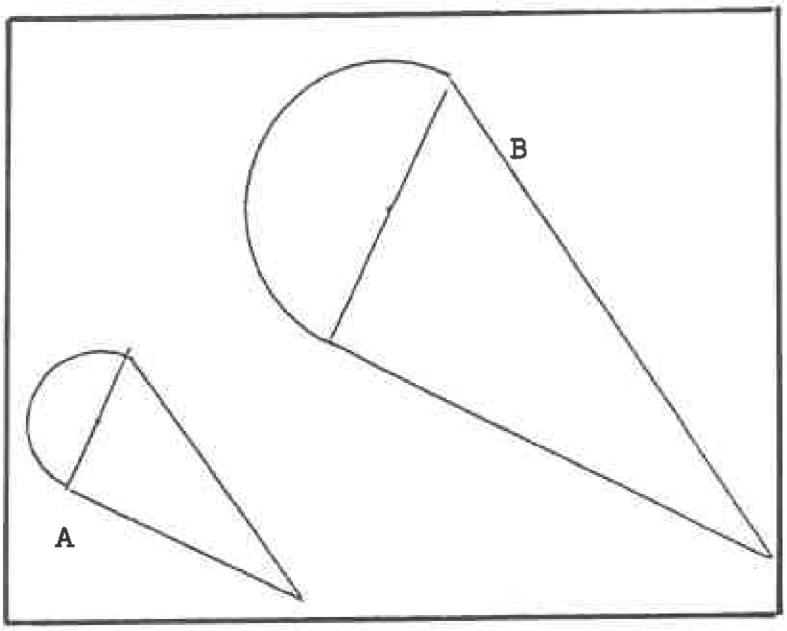


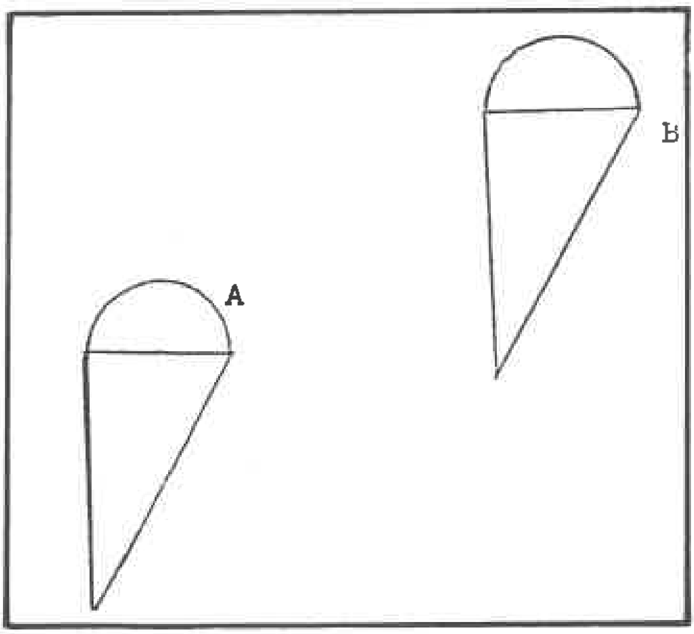


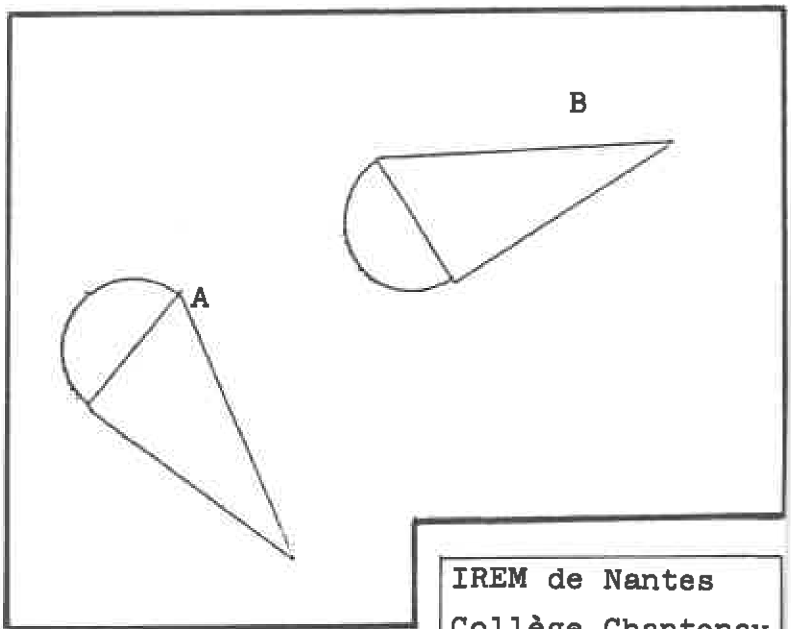






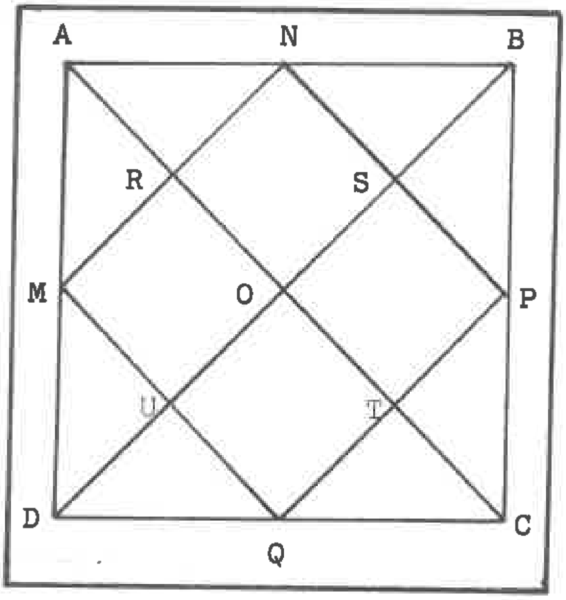






IREM de Nantes
Collège Chantenay

exercice 5



Complète les phrases suivantes :

L'image du triangle AMR par la rotation de centre O et d'angle 90° est ....

L'image du triangle AMR par la rotation de centre O et d'angle 270° est ....

Le triangle PTC a pour image NSB par la rotation ....

Le triangle ABC a pour image DAB par la rotation ....

Le carré ORMU a pour image le carré TPSO par la rotation ....

Le segment [NB] a pour image le segment [MA] par la rotation ....

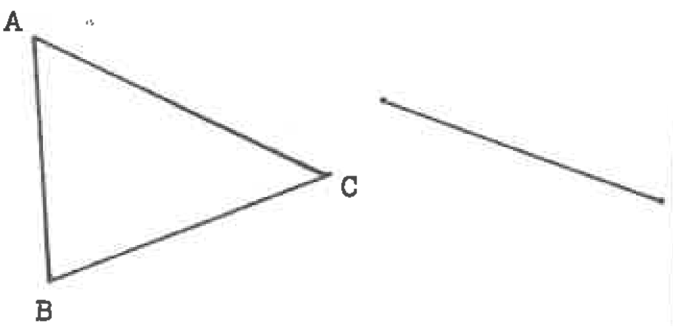
Le segment [NB] a pour image le segment [PC] par la rotation ....

Les segments ... et ... ne se correspondent pas par rotation.

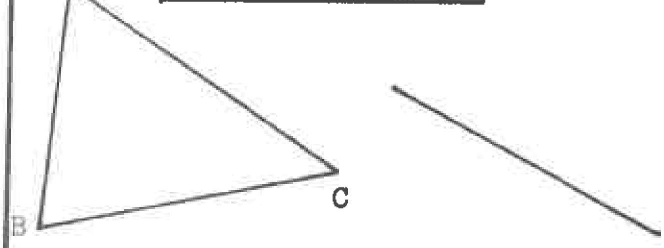
exercice 6

Le triangle ABC a pour image le triangle A'B'C' par une rotation.
Complète chaque figure, sans oublier de nommer les points et de laisser les traits ou codages de construction en utilisant :

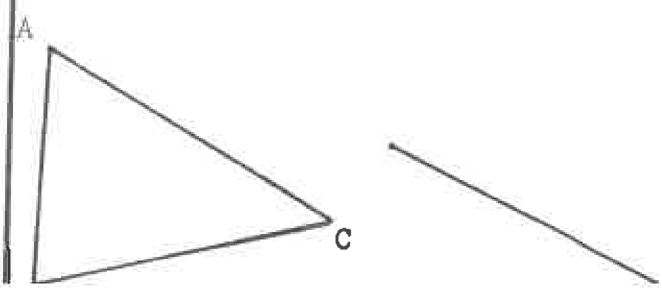
Compas et règle



Rapporteur et règle



Equerre et règle graduée



Exercice 7

Claire doit faire l'exercice suivant :

"Tracer un triangle ABC, choisir un point D en dehors de ABC puis construire l'image du triangle ABC par la rotation de centre D et d'angle 60°."

Claire a perdu son rapporteur. Elle en demande un à son papa qui lui répond : "Tu n'en as pas besoin pour cet exercice !"

Comment va-t-elle faire ?

Existe-t-il d'autres angles de rotation pour lesquels on peut travailler au compas seulement ?

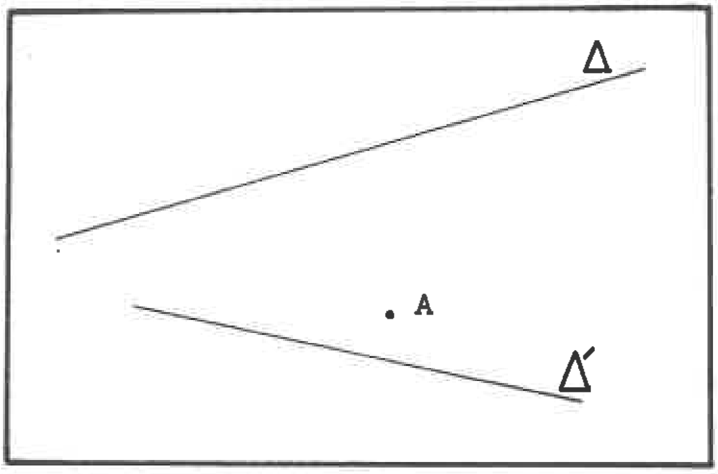
Problème 1

Soit ABC un triangle quelconque.

A l'extérieur de ce triangle construis deux triangles équilatéraux ABD et ACE.

Compare les longueurs des segments CD et BE.

Problème 2



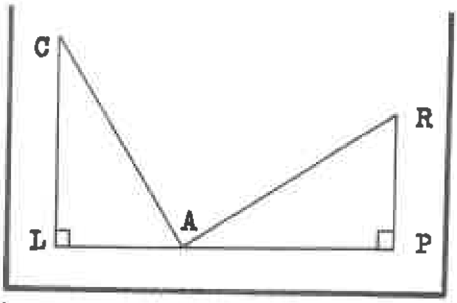
Recopie le dessin ci-dessus et construis un triangle équilatéral ABC tel que B est sur Δ et C sur Δ'.

Une indication pour t'aider : Suppose le problème résolu.
Trouve une transformation permettant de passer de B à C.
Déduis-en une méthode de construction.

Une question subsidiaire : Le problème a-t-il toujours une solution unique ?

Problème 3

Dessine deux triangles rectangles "identiques" LAC et PAR comme ci-contre :



a) Montre que CAR est un "demi-carré".

b) Trace les carrés CARE et LPQS ayant même centre.

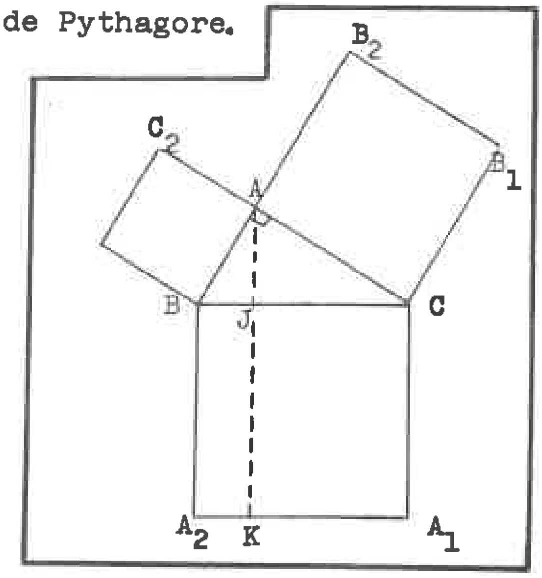
c) Par quelle rotation le triangle LAC a-t-il pour image PRA ?

d) Calcule de deux manières l'aire du trapèze LCRP.

e) En nommant a,b et c les longueurs LC, LA et CA des côtés du triangle rectangle, déduis-en la formule de pythagore.

Problème 4

Voici une autre démonstration du théorème de Pythagore.



Pour cela, tu vas montrer:

aire BJA_2 = aire BAA_2

aire BAA_2 = aire BC_1C

aire BC_1C = aire BAC_1

pour conclure :

aire $BJKA_2$ = aire BAC_2C_1

aire $CJKA_1$ = aire CB_1B_2A

aire BAC_2C_1 + aire CB_1B_2A = aire BCA_1A_2

1) Voici deux théorèmes :

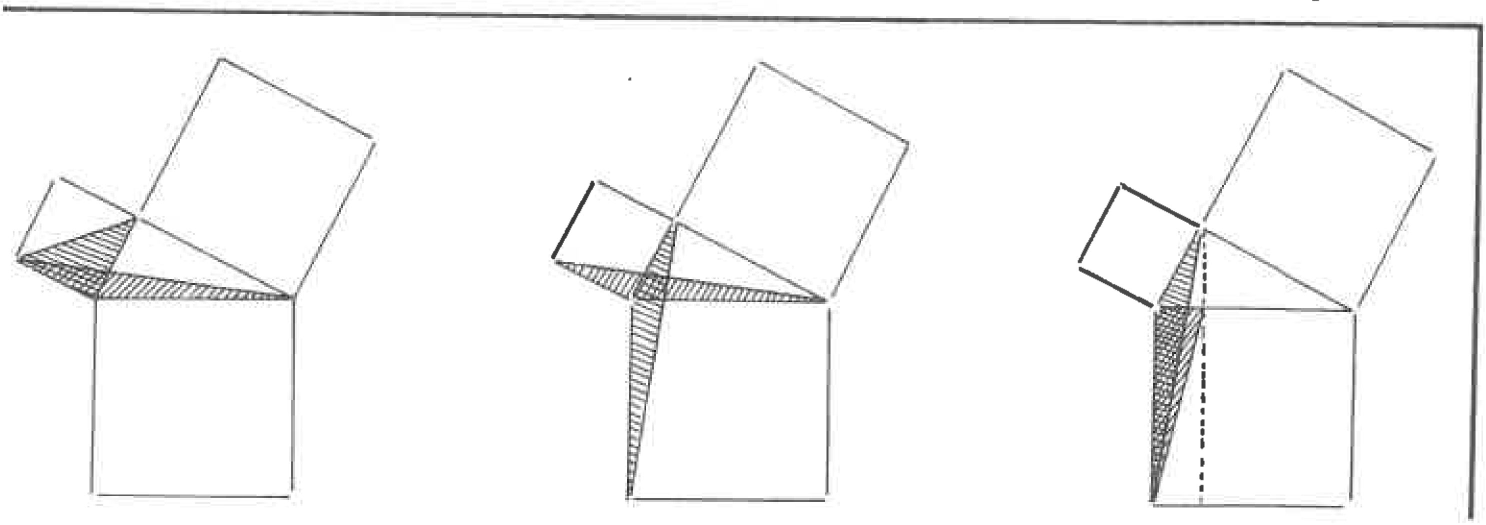
-A- Deux triangles ayant même base et même hauteur ont même aire.

-B- Un triangle et son triangle transformé obtenu par rotation ont même aire.

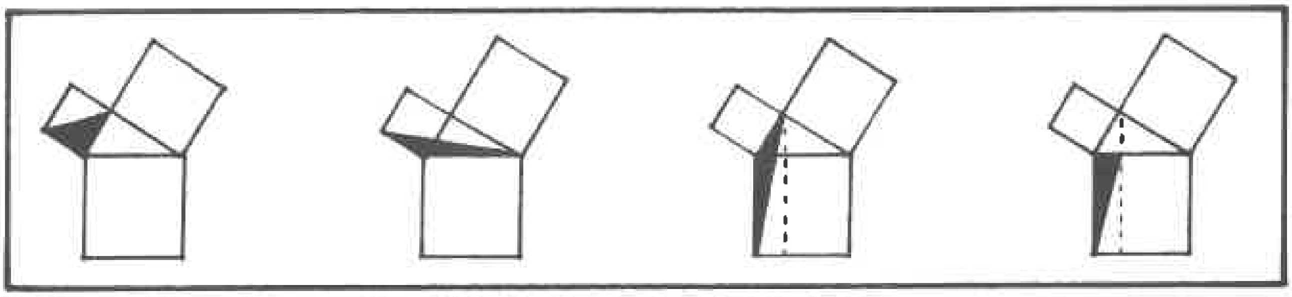
Dans chaque cas indique le théorème utilisé pour démontrer l'égalité des aires des triangles hachurés.

Pour -A- trace en rouge les hauteurs, en bleu les bases.

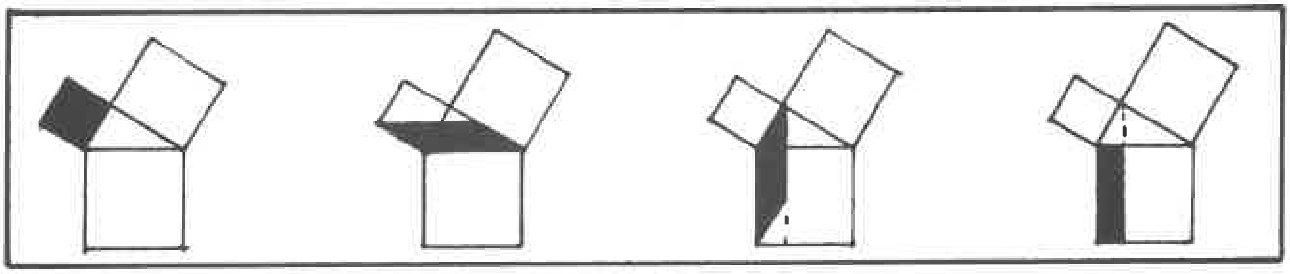
Pour -B- marque en rouge le centre et l'angle de rotation.



2) On obtient l'enchaînement suivant :

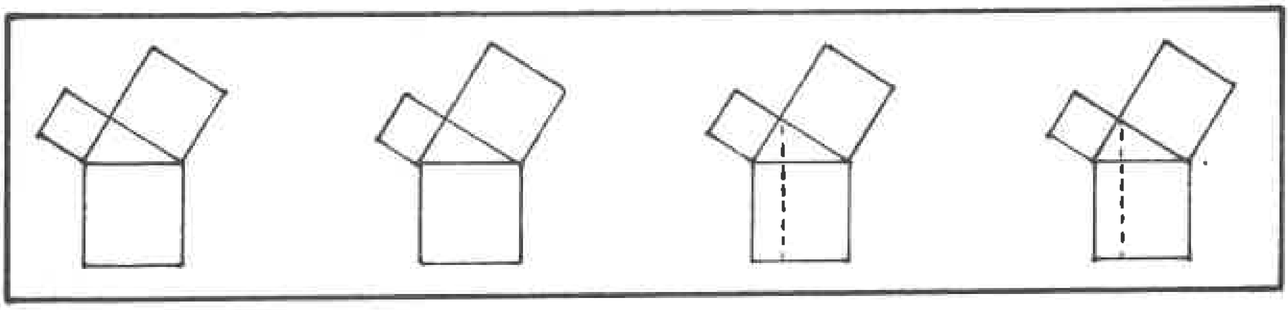


3) Déduis-en cet enchaînement :

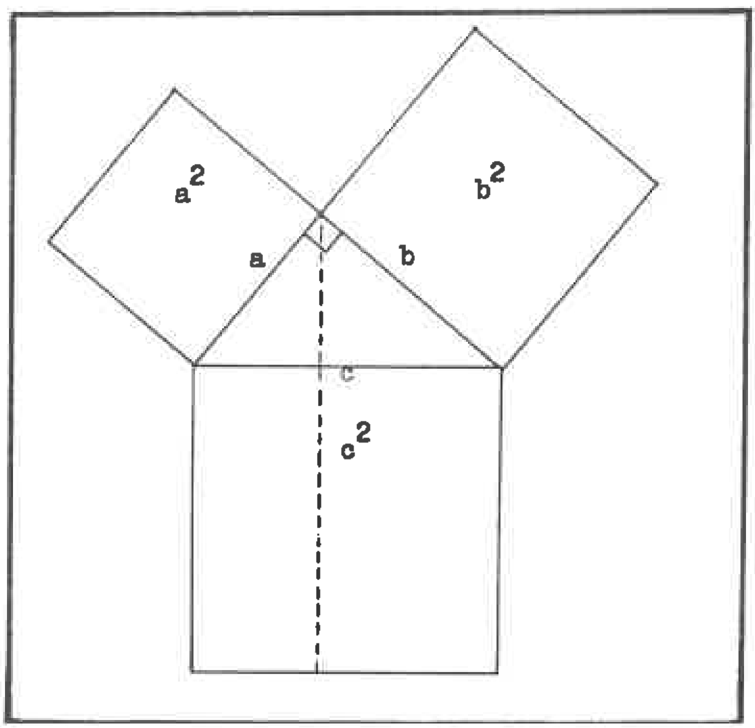


Que viens-tu de démontrer ?

4) Que se passe-t-il pour l'autre carré ?



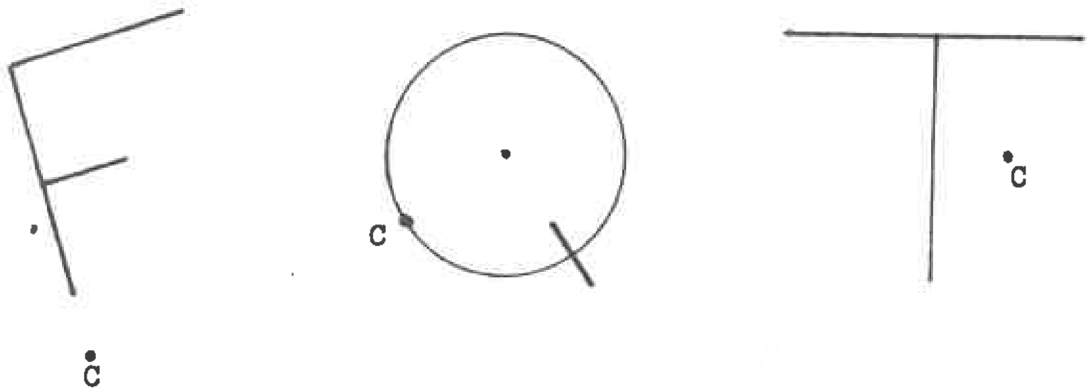
5) Déduis-en le résultat de Pythagore.



CONTROLE N° 37

Exercice 1

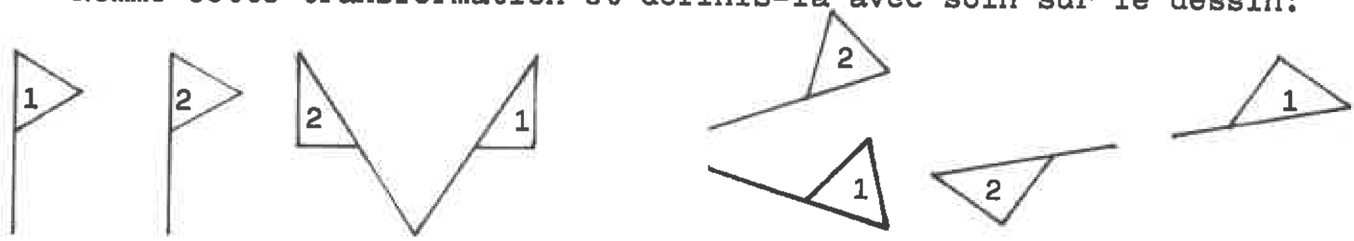
Construis l'image de chacune de ces trois figures par rotation de centre C et d'angle 100° :



Exercice 2

Indique, si possible, pour chacune des figures ci-dessous une transformation qui permet de passer de F_1 à F_2.

Nomme cette transformation et définis-la avec soin sur le dessin:



a : ....
....
....

b : ....
....
....

c : ....
....
....

d : ....
....
....

e : ....
....
....

f : ....
....
....

g : ....
....
....

h : ....
....
....

Exercice 3

Trouve toutes les rotations qui laissent invariantes un carré.

Exercice 4

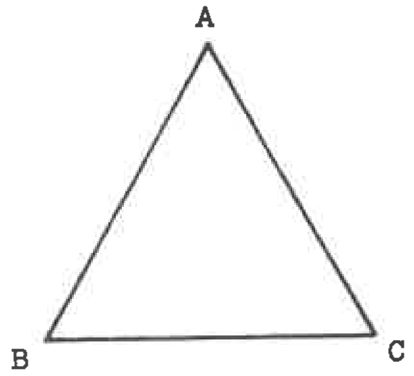
Soit ABC un triangle équilatéral.

Trace l'image C' de C par la rotation de centre A et d'angle $\widehat{BAC}$.

Trace l'image B' de B par la rotation de centre C et d'angle $\widehat{ACB}$.

Trace l'image A' de A par la rotation de centre B et d'angle $\widehat{CBA}$.

Que remarques-tu ?



MATHEMATIQUES 4 EME

ANNEE SCOLAIRE 1988

DOSSIER N° 38

TITRE : PB. DE PLUS COURTE DISTANCE

4

PREREQUIS

SYMETRIE AXIALE

AIRE D'UN TRIANGLE

TRIANGLE RECTANGLE

PYTHAGORE

OBJECTIFS

- REVOIR LA MEDIATRICE, LA BISSECTRICE ET LE THEOREME DE PYTHAGORE
- INEGALITE TRIANGULAIRE
- TRACE DE TANGENTES
- CALCUL D'AIRES

REALISE PAR :

DOMINIQUE ANTOINE

PIERRE BISSEY

JEAN CLAUDE DUPERRET

ROBERT CHAPOT

GERALD GENTHON

BERNARD CHARLAIX

GERARD PAPA

COLLEGE ALBERT CAMUS - 11 RUE MIRABEAU - 10600 - LA CHAPELLE SAINT LUC

DOSSIER N° 38

PROBLEMES DE PLUS COURTE DISTANCE

Mode d'emploi

PREREQUIS : Symétrie axiale - Aire d'un triangle - Triangle rectangle - Pythagore

OBJECTIFS : Revoir médiatrice (régionnement du plan), bissectrice, Pythagore - Inégalité triangulaire - Tracé de tangentes - Calcul d'aires.

CAPACITES EXIGIBLES : Connaître et utiliser l'inégalité triangulaire - Connaître le régionnement du plan par la médiatrice - Construire des tangentes.

DUREE : 5 ou 4 heures + Controle (1 heure).

PRESENTATION DES DOCUMENTS

- ACTIVITE 1 : page 38-1, durée 1 heure. Le titre ne fait pas référence au sujet de l'inégalité triangulaire.
- EXERCICES 1 à 4 : page 38-2, à la maison.
- ACTIVITE 2 : page 38-2, (4) et (5) facultatifs ou à la maison.
- ACTIVITE 3 : page 38-3, début en classe et fin à la maison. distance d'un point à une droite. — 1 heure
- EXERCICES 5, 7 et 8 : page 38-4 (le 6 est facultatif).
- ACTIVITE 4 : page 38-4. — 1 heure
- EXERCICES 10 et 12(a) : page 38-5, durée 1 heure.
- EXERCICES 9 et 12(b) : page 38-5, à la maison.
- ACTIVITE 5 : page 38-5, droite et cercle.
- EXERCICES 14 et 15 : page 38-6. — 1 heure
- EXERCICE 16 : page 38-6, à la maison.

PLAN

0 / Des spaghetti ! Oui ! Mais des mathematiques.
1 / Inégalité triangulaire.
2 / Distance d'un point à une droite.
3 / Position relative d'une droite et d'un cercle.

CONTROLE

page 38-7, Barême : 1) 4
2) 3
3) 3
4) a : 1 - b : 2 - c : 2
5) Dessin : 1 - a : 1 - b+c : 1 - d : 2

Remarque : Le texte des exercices 3, 7 et 14(b) est ambigu.

DOSSIER N° 38

PROBLEMES DE PLUS COURTE DISTANCE

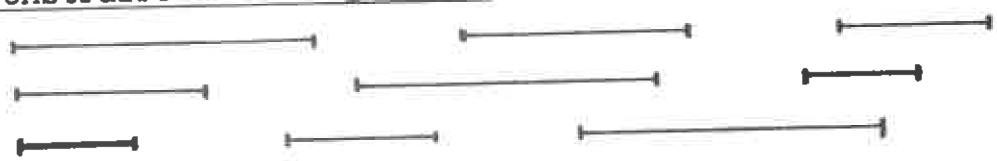
0 / DES SPAGHETTI ! OUI ! MAIS ... DES MATHEMATIQUES

ACTIVITE 1

1) Prends un spaghetti, casse-le en trois morceaux, mesure les et note les résultats.
Peux-tu construire un triangle avec ces trois morceaux ?
Recommence avec neuf spaghettis.
Complète ce tableau :

avec ces trois longueurs			j'obtiens un triangle
a	b	c	
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non
			oui - non

a) Dans les cas où les trois morceaux ne permettent pas de construire un triangle, explique pourquoi.
b) Dans les cas qui marchent, explique pourquoi.
c) A quelle condition ça marche ?
d) Trouve un cas limite. En existe-t-il d'autres ?

2) Essaie de construire un triangle avec :
1er cas :
2ème cas :
3ème cas :

Que remarques-tu ?

3) Propose dans chaque cas trois distances EF, FG et GE telles que :
1er cas : Les trois points E, F et G sont les sommets d'un triangle.
2ème cas : Les trois points E, F et G sont alignés.
3ème cas : Un triangle est infaisable.

4)

Pour			le triangle ABC existe-til ?
AB	BC	AC	
10cm	7cm	5cm	oui non
6cm	8cm	16cm	oui non
5cm	4cm	10cm	oui non

Exercice 1

Soient O et O' deux points distants de 10cm,

C' le cercle de centre O' et de rayon R' avec R' = 4cm,

C un cercle de centre O et de rayon R.

Recopie et complète le tableau en donnant à R des valeurs de plus en plus grandes (10 valeurs).

Valeurs de R	Nombre de points d'intersection des cercles C et C'	R+R'
... . . .	... . . .	... . . .

Quelle relation vérifie R et R' lorsque les cercles se coupent ?

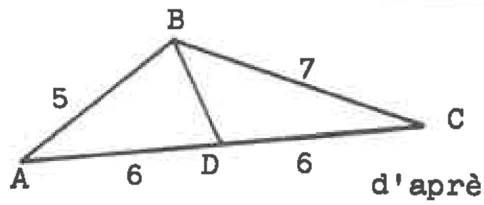
Exercice 2

E et F sont deux points distants de 4cm.

Où doit-on placer un point G pour que EG + GF soit minimum.?

Exercice 3

Calcule la distance BD.



d'après M. Gardner

Exercice 4

a) Deux cercles de 7cm et 4cm de rayon sont tangents extérieurement. Quelle est la distance entre leurs centres ?

b) Soit C un cercle de centre O et de rayon 8cm.
Soit C' un cercle de centre O' et de rayon 3cm, tangent intérieurement au cercle C.
Sur la même figure trace plusieurs positions du cercle C'.
Où doit se trouver le point O' ?

ACTIVITE 2 : DES PARTAGES EQUITABLES

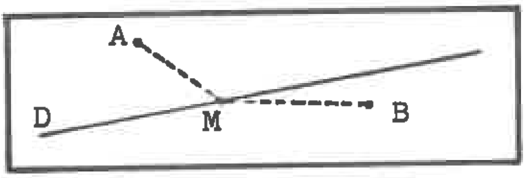
1) Soient A_1 et A_2 deux points. Colorie en rouge la région du plan constituée des points plus proches de A_1 que de A_2. Colorie en bleu celle des points plus proches de A_2 que de A_1.
Où se trouvent les points qui ne sont pas coloriés ?
2) Même problème avec deux droites D_1 et D_2 parallèles.
3) Même problème avec deux droites D_1 et D_2 sécantes.
4) Même problème avec un point A et une droite D ne passant pas par A.
5) Même problème avec un point A et un cercle C ne passant pas par A.

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du seg-ment. C'est un axe de symétrie du segment.
Méthode de construction ?

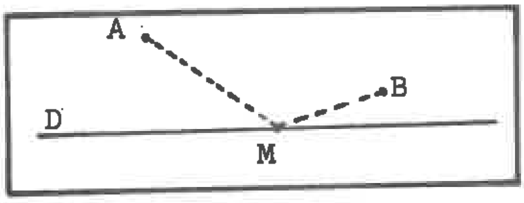
Les points des bissectrices de deux droites sécantes sont équidistants de ces deux droites. Ce sont des axes de symétrie de ces deux droites.
Méthode de construction ?

ACTIVITE 3

1) Deux points, une droite



Quelle doit-être la position du point M sur la droite D pour que le trajet AMB soit le plus court possible ?



Même question.

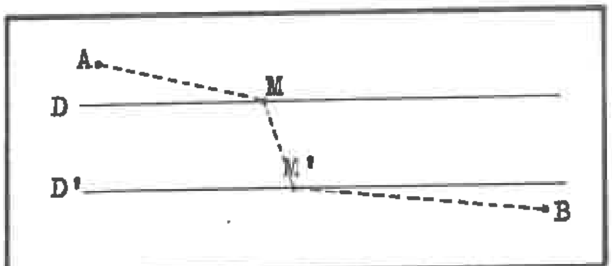
Une indication : Construis le symétrique B' de B par rapport à D et compare les longueurs des trajets AMB et AMB'.

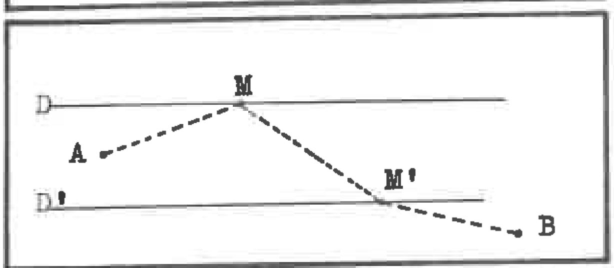
2) Deux points, deux droites

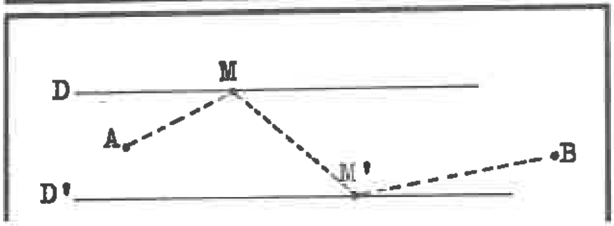
Pour chacun des trois exercices, détermine la position de M sur la droite D et de M' sur la droite D' de façon que le trajet AMM'B soit le plus court possible.

Deux cas sont à étudier dans chaque exercice :

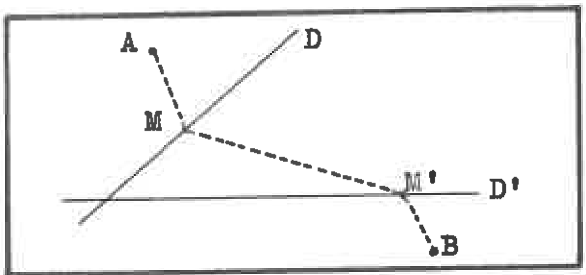
D et D' sont parallèles

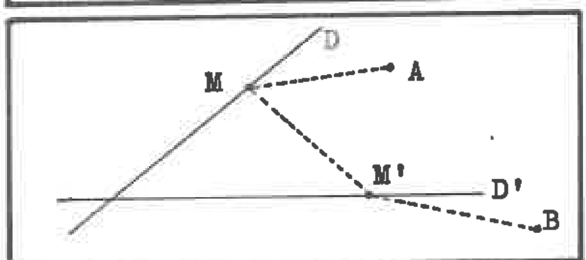


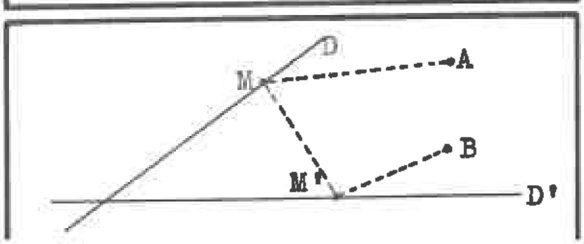




D et D' sont sécants

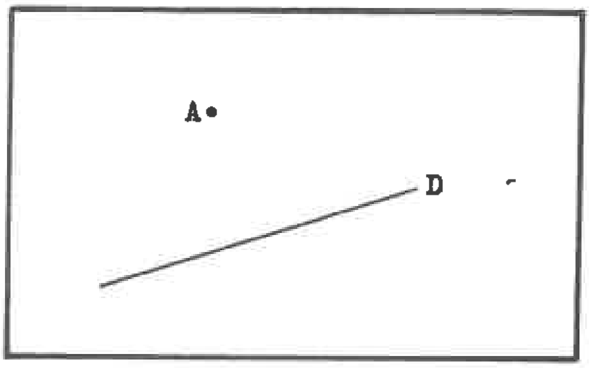






2 / DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

A RETENIR



Soient D une droite et
A un point n'appartenant
pas à D.
Comment traces-tu le plus
court chemin de A à D ?
Recopie et complète la
phrase : "Pour déterminer la distance d'un point A à une droite D..."

Exercice 5

Soit ABCD un trapèze, I le point d'intersection de ses diagonales.
Compare les aires des triangles AID et BIC.
Pour démontrer cette propriété compare les aires des triangles ADC
et BDC.

Exerice 6

Quelle est l'aire maximum d'un triangle ABC tel que AB=6cm et AC=5cm.

Exercice 7

Soit [AM] un segment de 7cm.
Trace un triangle ABC de médiane [AM] et de périmètre 12cm.

Exercice 8

Un triangle EFG est tel que EF=8cm et EG=5cm.
Où doit se trouver le point G pour que l'aire de EFG soit maximum ?

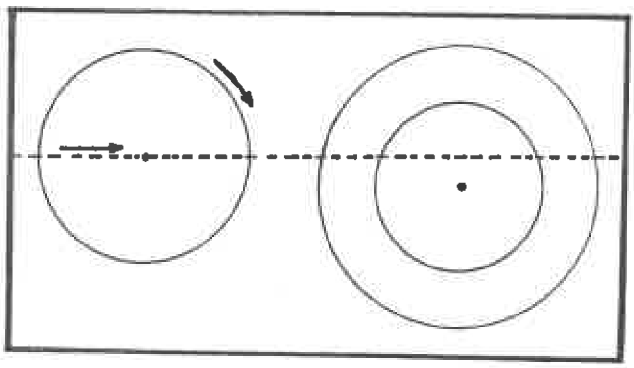
ACTIVITE 4

a) Soit [AB] un segment de 6cm.
Trace dix triangles de côté [AB] et de 15cm^2 d'aire.
Où doit se trouver le 3ème sommet ? Pourquoi ?

b) Où se trouvent les points situés à 5cm d'une droite D ?

c) Colorie l'ensemble des points situés à plus de 2cm de deux droites.

d) Décalque ce schéma d'une machine à laver les voitures.
Seule une brosse de côté a été représentée.
Hachure la partie de le roue qui sera nettoyée.



Exercice 9

Marque un point A puis trace dix droites situées à 5cm de ce point.

Peux-tu caractériser ces droites ?

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC = 12cm et BC = 8cm.

a) Choisis un point M du segment [BC].

b) Mesure MH la distance du point M à la droite (AB), puis mesure MK la distance du point M à la droite (AC).

c) Calcule MH + MK.

d) Recommence (a) (b) (c) avec d'autres positions du point M. Que constates-tu ?

e) Nous allons démontrer ce que tu as pu constater.

Pour cela :

- calcule l'aire du triangle ABM en fonction de MH,
- calcule l'aire du triangle ACM en fonction de MK,
- déduis-en l'aire du triangle ABC en fonction de MH et MK,
- conclusion ?

Exercice 11

Même problème avec un triangle équilatéral et un point intérieur au triangle.

Exercice 12

a) Soient ABC un triangle et M le milieu de [AC].

Compare les aires des triangles ABM et CBM.

Enonce la propriété que tu viens de démontrer.

b) Dessine un triangle ABC.

Construis le point D, symétrique de B par rapport au point A,

le point E, symétrique de A par rapport au point C,

le point F, symétrique de C par rapport au point B.

Démontre que l'aire du triangle DEF est égale à sept fois l'aire du triangle ABC.

ACTIVITE 5

Soient C un cercle de centre O et 5cm de rayon ; D une droite située à 3 cm de O. La droite D coupe le cercle en deux points A et B.

a) Calcule la distance AB.

b) Recopie et complète le tableau :

distance de O à D	0	1	2	3	...
distance de A à B					

c) Trace un graphique avec en abscisse la distance de O à D et en ordonnée la distance de A à B.

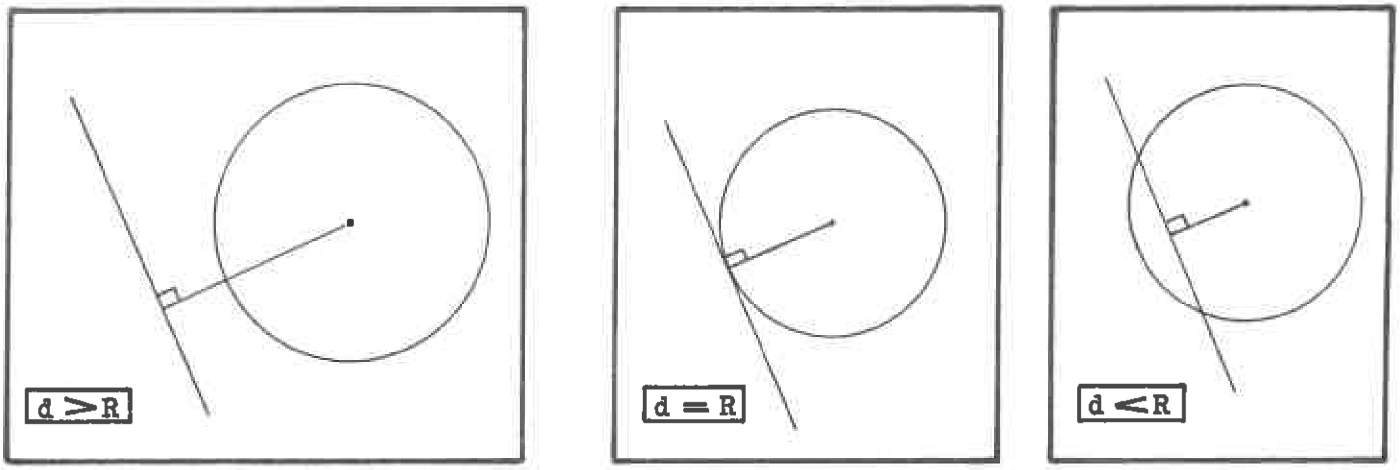
d) Calcule AB en fonction de d (d est la distance de O à D).

3 / POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

A RETENIR

La position d'un cercle par rapport à une droite est déterminée par la distance du centre du cercle à la droite.

Trois cas sont possibles :



La droite et le cercle n'ont pas de point commun.	La droite et le cercle ont un seul point commun. La droite est tangente au cercle.	La droite et le cercle ont deux points communs. La droite et le cercle sont sécants.

Exercice 14

Etant donné un segment [BC] de 5cm :

a) Trace un triangle rectangle ABC d'hypoténuse [BC].

b) Trace un triangle rectangle dont le sommet A se trouve à 4cm de B et de C.

c) Trace un triangle rectangle dont le sommet A se trouve à 3cm de B et à 4cm de C.

d) Trace un triangle rectangle en A dont ce sommet se trouve à 3,5cm de B.

Exercice 15

Soient C un cercle de centre O et de rayon 3cm et un point A situé à 10cm de O. Construis les tangentes au cercle C passant par A.

Exercice 16

a) Trace un cercle de centre A et de rayon 6cm.

b) Choisi un point F à l'intérieur du cercle.

c) Choisis un point M sur le cercle.

d) Trace la médiatrice de [FM].

e) Recommence (c) (d) (e) pour d'autres points M.

f) Observe.

CONTROLE N° 38

Exercice 1

Indique dans chacun des cas si ces trois longueurs permettent de construire un triangle. Précise les triangles particuliers.

a	b	c	d	e	f	g	h
3	6	8,5	9,3	2,4	3,9	5,4	3
9	8	12,7	5,8	2,4	10,5	2,6	4
10	16	4,3	3,5	2,4	3,9	5,4	5

Justifie les réponses négatives.

Exercice 2

Ecris les inégalités vérifiées par les longueurs des côtés d'un triangle EFG.

Exercice 3

Trace un cercle C_1 de diamètre [GH] mesurant 6cm ; un point I distinct de G et de H ; et le cercle C_2 de centre H et de rayon HI.
Que peux-tu dire de la doite (GI) ? Pourquoi ?

Exercice 4

a) Trace un cercle C de centre O et de 5cm de rayon.
Marque un point M du cercle.
Construis la droite D tangente au cercle au point M.

b) Trace le lieu des centres des cercles de rayon 2cm, tangents à D.

c) Parmi ceux-ci, construis les quatre cercles tangents au cercle C.

Exercice 5

Soient D un disque de rayon 3,5cm ; [BC] un diamètre de D ; A un point du disque D ; h la distance de A à (BC).

a) Calcule l'aire a du triangle ABC en fonction de h.

b) Donne la valeur maximum de h.

c) Déduis-en la valeur maximum de a.

d) Mêmes questions avec un disque D de rayon R.

TITRE : MATHEMATIQUES EN ACTIVITES N° 6

AUTEUR : EQUIPE Enseignants IREM de Reims-CEG Albert Camus (Aube)

NIVEAU : 4ème - Année scolaire 1988

DATE : Novembre 1988

MOTS-CLE : spécialité MATHEMATIQUES

autres EXPERIMENTATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES

RESUME : Voici 3 ans que notre équipe, bien soudée, accomplit ce travail en commun.

Le fascicule n° 6 comprend 8 dossiers de 4ème et fait suite au fascicule n° 5 de 4ème. Il y a en tout 6 fascicules :

- 2 fascicules (couverture verte) concernent la 6ème (85-86 & 86-87)
- 2 fascicules (couverture bulle) concernent la 5ème (86-87 & 87)
- 2 fascicules (couverture rose) concernent la 4ème (87 & 88)

L'expérimentation des nouveaux programmes va se poursuivre en ce qui concerne la classe de 3ème. Le premier (N° 7) est prévu pour Février 89

CONTENU DU FASCICULE N° 6 :

Dossier n° 31 : Puissance

32 : Théorème de Pythagore

33 : Puissances de dix

34 : Applications linéaires

35 : Sphère

36 : Statistiques

37 : Rotations

38 : Problèmes de plus courte distance

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	116	20,00 F	Re24