IREM DE REIMS

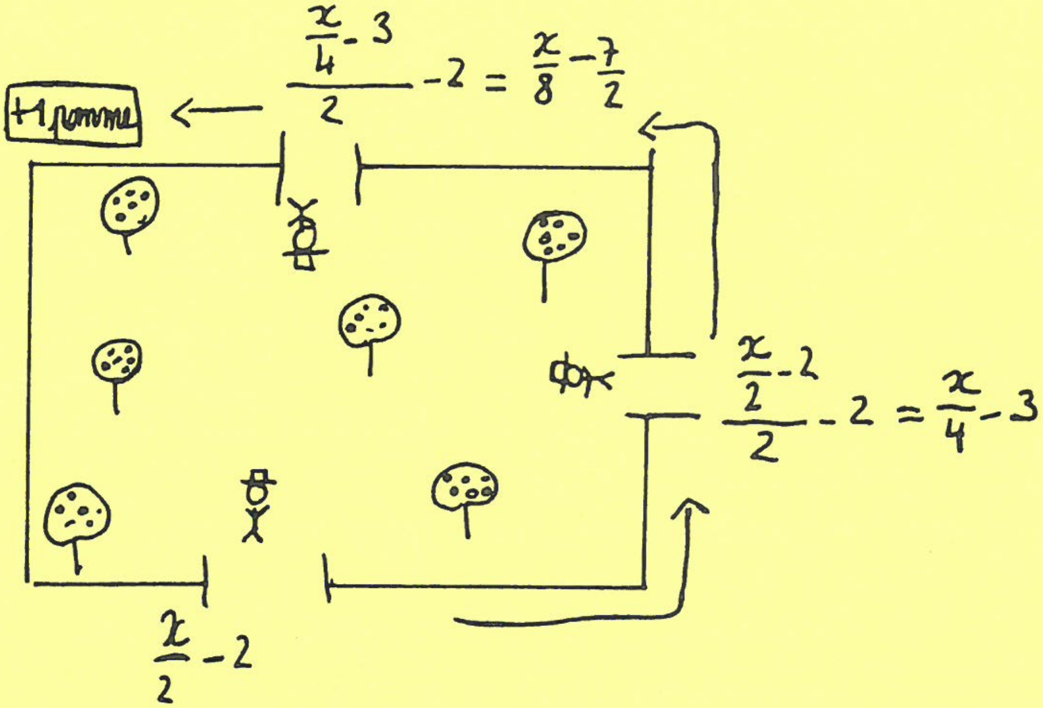
Moulin de la Housse

51100 REIMS

Tél : 26 05 32 08

# Un Fruit Bien Défendu

LES ELEVES FACE A UN PROBLEME DU XII$^{e}$ s




Groupe IREM HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

1987 - 1988

Académie de Reims

**IREM DE REIMS**

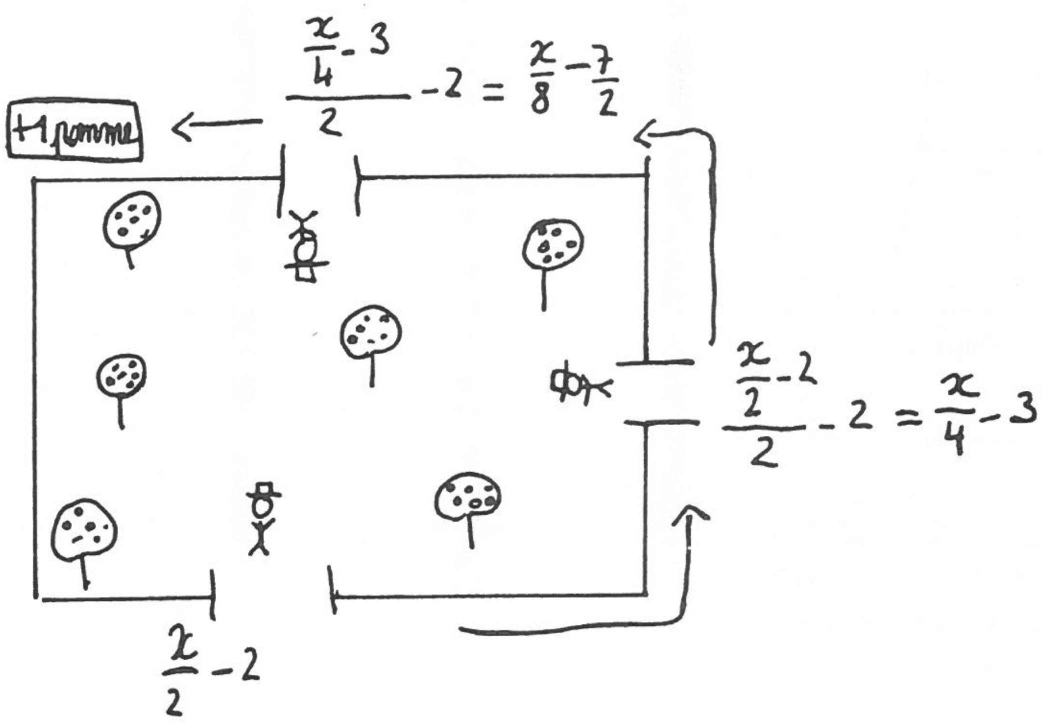
Moulin de la Housse

51100 REIMS

Tél : 26 05 32 08

# Un Fruit Bien Défendu

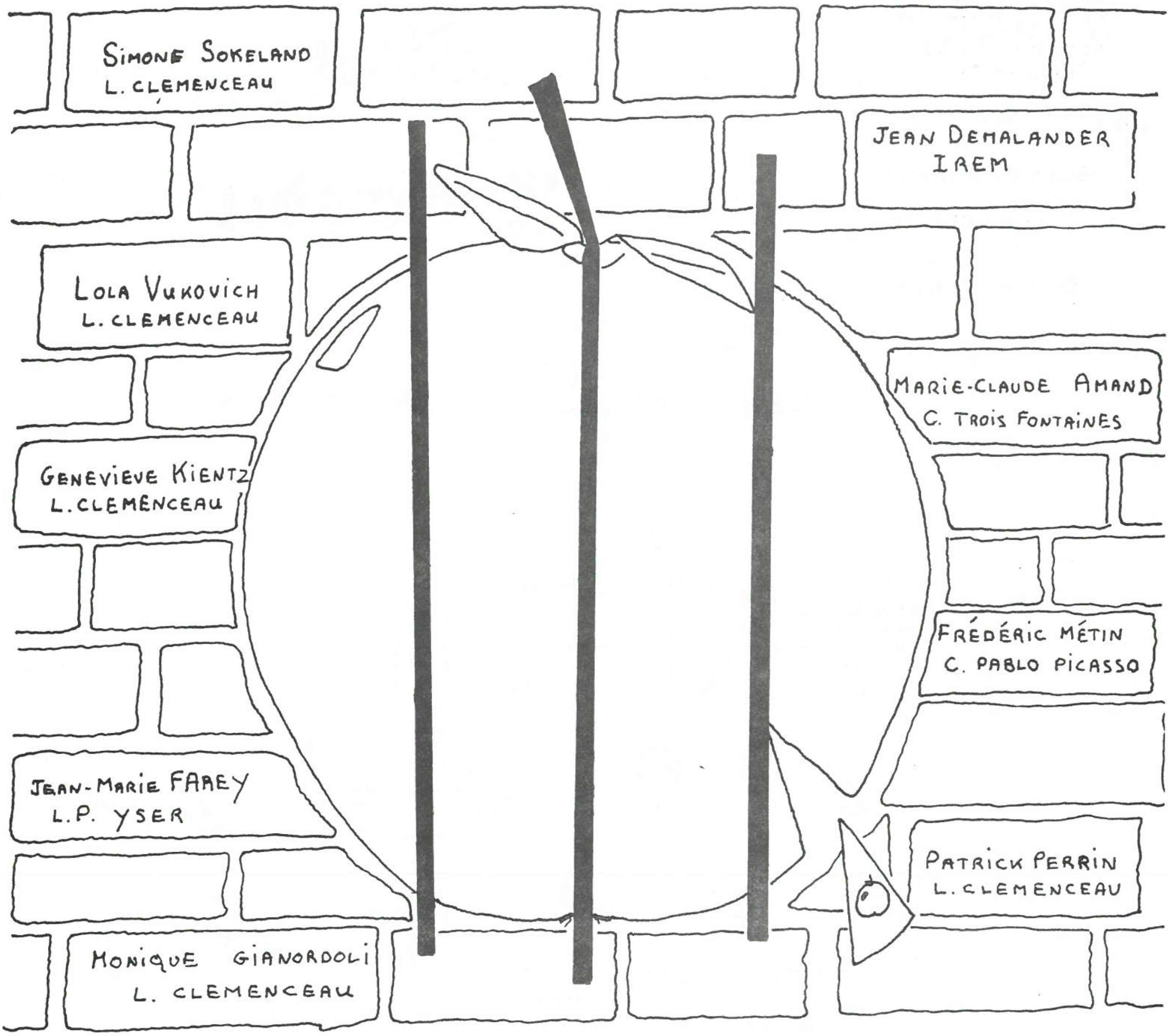
LES ELEVES FACE A UN PROBLEME DU XII$^{e}$ s




Groupe IREM HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

1987 - 1988

Académie de Reims


SIMONE SOKELAND
L. CLEMENCEAU
JEAN DEMALANDER
IREM
LOLA VUKOVICH
L. CLEMENCEAU
MARIE-CLAUDE AMAND
C. TROIS FONTAINES
GENEVIEVE KIENTZ
L. CLEMENCEAU
FRÉDÉRIC MÉTIN
C. PABLO PICASSO
JEAN-MARIE FAREY
L.P. YSER
PATRICK PERRIN
L. CLEMENCEAU
MONIQUE GIANORDOLI
L. CLEMENCEAU

J.C.F

Faire en sorte que les élèves s'investissent effectivement dans un travail de recherche, leur faire comprendre qu'il faut argumenter pour valider ou non un résultat et qu'une démonstration ne consiste pas uniquement en un jeu de pur respect des formes ; voilà des objectifs difficiles à atteindre dans notre enseignement.

C'est sur cette problématique que travaille l'équipe "Histoire des Maths" de l'IREM de Reims. Le document qu'elle présente est le témoignage d'une expérience visant à provoquer une rupture propice à l'approche de ces objectifs : qu'apporte la confrontation des élèves avec des méthodes et rédactions non conformes à leurs habitudes ; sont-ils amenés à réagir et à s'investir réellement dans le problème proposé ?

Si oui, outre son indéniable intérêt culturel, l'histoire des mathématiques nous fournirait aussi de précieux instruments pour notre enseignement. Dans cette perspective, on comprendra que ce document n'est pas un aboutissement, mais une étape nécessaire dans le travail de recherche que mène l'équipe ; étape dont, me semble-t-il, on occulte trop souvent la relation.

Bertrand Turco

Directeur de l'IREM de Reims

C'est en juillet 1984 que s'est tenue, dans la ville du Mans, la première université d'été sur l'Histoire des Mathématiques. Une année après débutait un stage rémois, inscrit au Plan Académique de Formation dans le cadre de l'I.R.E.M.:le premier stage sur l'Histoire des Mathématiques dans l'Académie de Reims. Aujourd'hui une centaine de professeurs a pu participer à de tels stages dans notre Académie. Etait-il possible d'aller plus loin ?

Un groupe de professeurs rémois a pu se réunir à plusieurs reprises pendant l'année scolaire 87/88 ,pendant des périodes d'une ou deux journées consécutives . Ce groupe s'est préoccupé de mettre les élèves en présence de problèmes ou de textes historiques, afin de les faire travailler sur ceux-ci.Nous avions en effet remarqué que de nombreuses brochures I.R.E.M. étaient parues, mais qu'un nombre assez restreint de ces dernières abordaient la question des réactions et démarches des élèves.

*Et si on dit: un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna 2 de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna 2 de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna 2 de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueillis?*

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le 1er (gardien) en lui donnant 2 (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le 2ème et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22; enfin partage avec le 3ème et donne lui en 2, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le 1er (gardien) en lui donnant 2 (fruits) de plus. Il t'en reste 98 ; partage avec le 2ème et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en 2, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450. Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueillis.

Cet extrait est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8]p. 336 à 338.
"Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis..",attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Egypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmentis et diminutionis..."? les avis sont partagés.

(d'après la brochure de l'I.R.E.M. de Toulouse: Equations du premier degré. Méthode de fausse position)

Parmi ceux que nous avons étudiés, un thème a particulièrement retenu notre attention: ***la double fausse position.*** Sur ce sujet un document figure dans la remarquable brochure de l'I.R.E.M. de Toulouse, "Equations du premier degré. Méthode de fausse position", document extrait du "Liber augmenti et diminutionis vocatus numératio divinationis "attribué à Abraham Ben Ezra(1090-1167)

L'un d'entre nous ayant fait travailler sur ce texte ses élèves de première année de B.E.P. géomètre-topographe, différentes activités ont été ensuite proposées, à partir du même texte, dans une classe de quatrième, une classe de troisième, et quatre classes de seconde aux profils divers.

Dans chacune de ces classes , le document a été brièvement présenté aux élèves. Les exercices qui l'accompagnaient avaient pour but d'aider à la compréhension du texte et à la résolution du problème.

## Pourquoi le problème de Ben Ezra?

Il fait appel à des connaissances acquises dans différentes classes par les élèves et permet d'observer celles qui sont réinvesties.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème, aucune n'étant a priori meilleure qu'une autre .

Le texte fournit sans justification une solution que les élèves peuvent accepter ou rejeter au profit d'une de leur choix.

La méthode peut être éventuellement appliquée à d'autres situations du même type, ou généralisée, ou encore justifiée. Jusqu'où les élèves iront-ils pour se convaincre de sa validité ?...

Qu'attendions-nous, en fait , des élèves ?

- Que, placés dans une situation inhabituelle, ils mettent en oeuvre des démarches scientifiques.

- Qu'ils se livrent à une analyse critique de la solution proposée (exercice assez rare par ailleurs...)

- Qu'ils réinvestissent des outils et connaissances antérieurement acquis(?)

Nous présenterons d'abord les réactions des élèves à l'activité, puis leurs méthodes de résolution du problème de Ben Ezra, enfin leurs critiques vis à vis de celui-ci. Vous pouvez trouver à la fin de la brochure une description des divers scénarios et dispositifs pédagogiques mis en place.

Nous avons choisi de faire souvent apparaitre à l'intérieur de la rédaction des déclarations orales ou écrites d'élèves.

Ces témoignages inciteront peut-être certains de nos collègues à placer leurs élèves dans de telles situations, suffisamment riches et ouvertes pour permettre de repérer des phénomènes qui auraient pu passer inaperçus.

# TABLE DES MATIERES

# REACTION DES ELEVES FACE A L'ACTIVITE

Dans un premier temps, le texte fait l'objet d'une lecture personnelle, le plus souvent silencieuse, mais parfois des commentaires font apparaître une certaine perplexité :

« *J'ai rien compris* » (en quatrième )

« *Qu'est-ce qu'il faut faire* ? » ( en seconde )

ou même une inquiétude :

« *Est-ce que ce sera noté* ? » ( en seconde )

Après quelques clarifications, les élèves se mettent à chercher avec intérêt; idées, questions, discussions, le débat s'installe, des réflexions fusent:

*«C'est un fou »*

*«Sa méthode est nulle »*

*«Ca doit être faux »*

Un élève de quatrième a l'idée de vérifier si 36 est la bonne réponse et se propose de «voir comment il a fait».

En troisième nombreux sont ceux qui essaient de transcrire la méthode en langage mathématique; l'un d'entre eux confond vingt demis et vingt et demi, un autre demande le sens du mot "excédent" qu'il confond avec "excès"

En B.E.P. les élèves sont enthousiastes et se lancent dans le travail .

Les élèves de seconde s'intéressent d'abord à la résolution du problème, sans manifester beaucoup de curiosité envers la méthode de Ben Ezra .

D'une manière générale, les plus "faibles" s'accrochent et fournissent un important travail personnel, ils ont parfois les meilleures idées; cet intérêt déborde même le cadre de la classe: «*j'y ai pensé hier soir*», «*j'ai voulu en parler à un copain, il n'a rien compris et pourtant il est en seconde!..*». Certains ont par ailleurs tenu à exprimer par écrit une réflexion personnelle, ce qui ne leur avait pas été demandé.

Un autre point positif concerne la participation. Des élèves habituellement silencieux osent donner leur opinion, poser des questions; ils reprennent confiance en eux. Une élève de troisième prend carrément la direction de son groupe, alors qu'elle attend d'ordinaire que le travail soit fait. Quelques-uns évoquent les "Mille et une nuits", d'autres associent le problème à telle ou telle devinette, l'imagination et la fantaisie ne sont pas exclues!

En fait les élèves s'expriment...

Ce pourrait être dû:

- à la nature de l'activité: travail de groupe sur un texte, rédigé en langage courant, prêtant à discussion, avec des questions "ouvertes" .

- au sujet abordé: les élèves se permettent de formuler des critiques sur ce texte ancien, d'auteur inconnu au panthéon des mathématiciens, sans rapport apparent avec le programme scolaire ni avec les connaissances exigibles à leur niveau; un groupe, sur la base d'un calcul faux, est même très heureux de prendre la méthode de Ben Ezra en défaut à l'aide d'un contre-exemple.

- au comportement du professeur, surtout observateur de la classe, privilégiant les initiatives et encourageant les critiques.

Il faut cependant noter que l'enthousiasme est un peu plus mesuré en seconde, où l'on a peut-être davantage l'habitude de travailler à plusieurs lors des séances hebdomadaires de T.P. , ce qui enlève l'attrait de l'exceptionnel; ou bien alors n'y voit-on pas de rentabilité immédiate? (pas de devoir noté, pas d'exercice classique du programme qui pourrait resservir)

Finalement les élèves nous ont paru dans l'ensemble plus à l'aise, désireux de bien faire, parfois soucieux de confier un certain désarroi face aux mathématiques.

Voici quelques-unes de leurs réactions...

ce genre d'exercice permet de mieux comprendre l'ennoncé du problème c'est plus explicite de lire un texte ecrit en Français, que de lire une phrase brève avec des formules. une fois que l'on a compris le texte (l'ennoncé, tout s'acroche ensemble avec une autre methode d'ennoncé je n'aurais peut-être pas compris et redigé les question

de trouver
Ce qui m'a plu c'est toute une suite de calcul avec des inconnues bien que cela soit un peu difficile et en arriver à une solution avec des lettres et des chiffres.
Il est parfois plus facile de s'exprimer mathématiquement que de s'exprimer en français.

1) cequi m'a plû dans cetravail, c'est que l'on ne fait pas souvent et que sa change du travaux habituels.

2) ce qui m'a deplu c'est la methode employé qui est beaucoup trop longue. Et surtout le vocabulaire employé pour resoudre se système

Ce qui ma plu, c'est que c'est un système qui change des Mathématiques que l'on fait d'habitude, c'est de montrer que nous a notre époque, nous pouvons réussir à trouver la solution d'un problème qui a été posé dans le passé.

4) - Retrouvez l'authenticité des textes des problèmes du siècle Ibn Ezra.

- Savoir que les choses qui nous faisons actuellement ou été reflechis et resolue bien avant nous

Ce qui m'a plus dans l'histoire des Maths c'est la recherche de la logique et des calculs récents par rapport à un texte ancien.
Mais c'est difficile de trouver la logique lorsque l'on n'a pas l'habitude de ce genre de travail

Nous pensons que ce genre de problème fait travailler notre reflexion et surtout notre logique.
En tout cas nous avons aprécier.
Ce problème nous a fait travailler en groupe et nous a inconciement "forcer" à travailler.

Ce qui est intéressant, c'est le Travail de groupe où nous pouvons nous échanger certaines Idées.

# METHODES UTILISEES PAR LES ELEVES

L'un des objectifs de cette activité, montrer qu'un même problème peut être résolu par des méthodes différentes, semble avoir été atteint.

On constate que trois méthodes sont utilisées par les élèves :

1 :une procédure arithmétique consistant à partir du résultat et à "remonter les calculs" jusqu'à retrouver le nombre de fruits cueillis .

2 :une mise en équation du problème avec utilisation d'une seule inconnue .

3 :la traduction du problème en un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues .

On verra dans les copies d'élèves que ces différentes méthodes peuvent s'interpénétrer.

La première méthode est utilisée par tous les élèves de la classe de quatrième , elle l'est moins dans les autres mais reste toujours présente (jusqu'à 5 groupes sur 9 dans une classe de seconde). La rédaction en est très variable:

* Je peux résoudre le problème plus facilement à l'envers et sous forme de tableau.

(+2)(×2)(+2) (×2)+2 ×2

| l'homme après avoir donné ces pommes il lui en reste | 3ème gardien | 2ème gardien | 1er gardien |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 18 | 36 |

deux essais d'élèves de seconde:

*Calculons $x$ :*

$$\left[\left[\left[(1+2)\times 2\right]+2\right]\times 2+2\right]\times 2=x.$$

donc $x=36$.

Le procédé de cette méthode est de prendre le problème par la fin.

A sa sortie, l'homme possede 1 pomme

Il en donne 2 de plus au troisième gardien après avoir partagé

$\Rightarrow$ $1+2=3$

$3\times 2=6$

Il possédait donc 6 pommes avant la rencontre du troisième gardien.

Il en donne 2 de plus au deuxième gardien après avoir partagé.

$\Rightarrow$ $6+2=8$

$8\times 2=16$

Il possédait donc 16 pommes avant la rencontre avec le deuxième gardien.

Il en donne deux de plus au pemier gardien après avoir partagé sa cueillette.

$\Rightarrow$ $16+2=18$

$18\times 2=36$

Il a donc cueilli 36 pommes.

Une remarquable tentative de généralisation d'un élève de quatrième:

III) Pour résoudre, à notre époque plus facilement ce problème nous pourrions commencer par la fin, c'est à dire à partir du chiffre 1 en faisant toute l'operation inverse.

$$\left.\begin{array}{l} 1+2=3 \\ 3\times 2=6 \end{array}\right\} 3^{eme} \text{ gardien}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6+2=8 \\ 8\times 2=16 \end{array}\right\} 2^{eme} \text{ gardien}$$

$$\left.\begin{array}{l} 16+2=18 \\ 18\times 2=36 \end{array}\right\} 1^{er} \text{ gardien}$$

Resultat: $\boxed{36}$

Cette méthode est valable pour tous les autres problèmes dont on donne le résultat final

La deuxième méthode recueille les faveurs de la majorité des élèves qui la connaissent...

Question 1:

$$\frac{\left[\frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)}{2}-2\right]}{2}-2=1$$

$$\frac{\left[\frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)}{2}-2\right]}{2}=3$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)}{2}-2=6$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)}{2}=8$$

$$\frac{x}{2}-2=16$$

$$\frac{x}{2}=18$$

$$x=36$$

L'homme a cueilli 36 fruits

④ oui ! Je peux déterminer une méthode plus simple que j'appellerais "méthode algébrique".

Soit $x$ = le nombre de pommes.

1 $\rightarrow \dfrac{x}{2} - 2$ : 1er partage avec le 1er gardien

2 $\rightarrow \dfrac{x}{4} - 1 - 2$ : 2ème partage avec le 2ème gardien

3 $\rightarrow \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{2} - 1 - 2 = 1$ : 3ème partage avec le 3ème gardien

$$\frac{x}{8} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$x = 8\left(4 + \frac{1}{2}\right)$$

$$x = 36$$

Donc l'homme a volé 36 pommes.

Mais cette mise en équation est souvent laborieuse ...

Soit $x$ le nombre de pommes.
Il y a trois gardiens et l'homme partage les fruits avec le premier en lui en donnant deux en plus puis il partage avec le second avec deux en plus et idem pour le troisième alors on pose:

$$1 = \left(\frac{\left(\dfrac{\left(x - \frac{x}{2}\right) - 2}{2}\right) - 2}{2}\right) - 2$$

$$1 = \left(\frac{\left(\dfrac{\frac{2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{4}{2}}{2}\right) - 2}{2}\right) - 2$$

$$1 = \left(\frac{\left(\dfrac{\frac{(x-4)}{2}}{2}\right) - 2}{2}\right) - 2$$

$$1 = \frac{\left(\frac{x-4}{2} \times \frac{1}{2}\right) - 2}{2} - 2$$

$$1 = \frac{\frac{x-4}{4} - \frac{8}{4}}{2} - 2$$

$$1 = \frac{\frac{x-12}{4}}{2} - 2$$

$$= \frac{x-12}{4} \times \frac{1}{2} - 2$$

$$1 = \frac{x-12}{8} - \frac{16}{8}$$

$$\frac{8}{8} = \frac{x-28}{8}$$

$$8 = x - 28$$
$$0 = x - 36$$
$$x = 36$$

$$\boxed{\text{Donc } x = 36}$$

Et l'homme a cueilli 36 pommes.

On choisit $x$ le nombre de pomme que l'homme a eu départ.

Quand l'homme rencontre le premier gardien son nombre de pommes est divisé par 2, et on en soustrait 2 car il en a donné 2 de + au gardien donc il lui en reste 2 de moins.

Nb de pommes $= \frac{x}{2} - 2$.

Quand il rencontre le $2^{nd}$, il se passe la même chose mais son nombre initial de pommes est de $\frac{x}{2} - 2$.
donc

$$\text{Nb de pommes} = \frac{\frac{x}{2} - 2}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2 = \frac{x}{4} - 1 - 2 = \frac{x}{4} - 3.$$

Quand il rencontre le $3^{eme}$, il se passe la m̂ chose mais son nb initial de pommes est alors de $\frac{x}{4} - 3$

$$\text{Nb de pommes final} = \frac{\frac{x}{4} - 3}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - 3\right) - 2 = \frac{x}{8} - \frac{3}{2} - 2$$

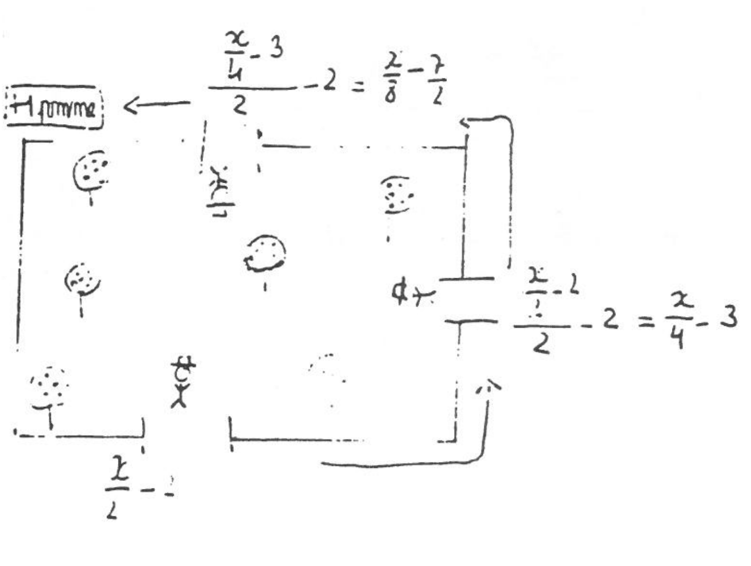
$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{2} - \frac{4}{2}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{7}{2}$$

Et comme on sait que le nb de pommes en sortant est de 1 pomme donc on pose l'équation $\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1$

$\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1$ ; $\frac{x}{8} = 1 + 3{,}5$ . $x = 4{,}5 \times 8$
$x = 36$

Donc le nb de pommes qu'il a cueillit est de 36



...et parfois infructueuse:

$1/2x \quad +2$

$1/\ x \quad +2$

$1/2x. \quad +2. = 1.$

Au premier il donne 1/2 x ~~2~~ + 2 y
Au deuxième 1/2 de 1/2 x
Au troisième 1/2 de 1/2 de 1/2 x.

3

~~1 x x = y.~~

1 x

x/2

2

La troisième méthode est utilisée par quelques groupes dans chaque classe de seconde ...

* On peut également résoudre ce problème par des équations :

$n$ = nombre initial de fruits
$x$ = nombre de fruits restant après le 1er gardien
$y$ = " "2e"
$z$ = " "3e"

$$x = \frac{n}{2} - 2 \; ; \; y = \frac{x}{2} - 2 \; ; \; z = \frac{y}{2} - 2$$

$$y = \left(\frac{n}{2} - 2\right) \times \frac{1}{2} - 2 \; ; \; y = \frac{n}{4} - 3$$

$$z = \left(\frac{n}{4} - 3\right) \times \frac{1}{2} - 2 \; ; \; z = \frac{n}{8} - \frac{7}{2}$$

$z = 1$ !
$$\frac{n}{8} - \frac{7}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{n}{8} - \frac{7}{2} - \frac{2}{2} = 0$$

$$\frac{n}{8} = \frac{9}{2} \; ; \; n = \frac{9}{2} \times 8 = \frac{72}{2} = 36$$

$x$ : nombre de fruits au départ.
$y$ : nombre de fruits après le partage avec le 1er gardien.
$z$ : nombre de fruits après le partage avec le 2ème gardien.
$t$ : nombre de fruits après le partage avec le 3ème gardien.

$$\begin{cases} x = 2(y+2) \\ y = 2(z+2) \\ z = 2(t+2) \\ t = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2(y+2) \\ y = 2(z+2) \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2(y+2) \\ y = 16 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 36 \\ y = 16 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

1°) pour le troisième gardien

on a $x_3 - \left(\frac{x_3}{2} + 2\right) = 1$

$x_3 - \frac{x_3}{2} - 2 = 1$

$\frac{2x_3 - x_3}{2} = 3$

$\frac{x_3}{2} = 3$

$x_3 = 6$

pour le deuxième gardien :

on a $x_2 - \left(\frac{x_2}{2} + 2\right) = 6$

$\frac{2x^2 - x_2}{2} = 6 + 2$

$\frac{x_2}{2} = 8$

$x_2 = 16$

pour le 1er gardien

on a $x_1 - \left(\frac{x_1}{2} + 2\right) = 16$

$\frac{x_1}{2} = 16 + 2$

$x_1 = 36$

il avait 36 fruits

mais un élève de troisième y recourt également, quoique les systèmes n'aient pas été étudiés préalablement:

1er gardien . $(x : 2) + 2 = y$

2e gardien , $(y : 2) - 2 = w$

3e gardien : $(w : 2) - 2 = 1$

donc si on repart à l'envers on a :

$w = 1 + 2 \times 2 = 6$

$y = 6 + 2 \times 2 = 16$

$x = 16 + 2 \times 2 = 36$

Pour finir une copie de seconde remarquable par l'emploi de plusieurs inconnues appelées toutes x:

(2). Autre méthode $\Rightarrow$.

$1 = \frac{x}{2} - 2. \iff \frac{x}{2} = 3 \qquad x = 6.$

$6 = \frac{x}{2} - 2 \iff \frac{x}{2} = 8 \qquad x = 16.$

$16 = \frac{x}{2} - 2 \iff \frac{x}{2} = 18 \qquad x = 36.$

*Quelques brefs commentaires...*

*Faut-il s'étonner que la méthode arithmétique disparaisse au fur et à mesure des études, alors que la méthode algébrique devient une sorte de réflexe ?*

*Dans ce problème, la première est aussi performante sinon plus que la seconde. L'emploi de celle-ci serait-il lié à un conditionnement?*

*La méthode arithmétique subsiste chez des élèves catalogués comme "faibles" en mathématiques ,mais aussi chez de "très bons" élèves.*

*La lecture de certaines copies(cf p 16) permet de constater que le recours à un système d'équations n'est qu'une étape intermédiaire dans le processus de formalisation du problème.*

# LES ELEVES ET LA SOLUTION DE BEN EZRA

## LE RESULTAT OBTENU PAR BEN EZRA EST-IL CORRECT ?

Les termes ***vérifier*** et ***résoudre*** sont parfois confondus.

Certains élèves, d'ailleurs rares, se contentent d'affirmer que 36 est bien solution.

D'autres effectuent la vérification classique: le nombre 36 satisfait bien aux conditions imposées.

vérification:

L'homme a cueilli 36 pommes, il partage avec le gardien n°1 : $\frac{36}{2} = 18$
il lui en donne deux de plus.
Le gardien n°1 aura $18 + 2 = 20$ pommes
Il reste 16 pommes qu'il partage avec le gardien n°2: $\frac{16}{2} = 8$ et il lui en donne deux de plus.
Le gardien n°2 aura $8 + 2 = 10$ pommes
Il en reste 6 qu'il partage avec le gardien n°3 : $\frac{6}{2} = 3$ et il lui en donne deux de plus.
Le gardien n°3 aura 5 $(3 + 2)$ pommes.
Et il restera à l'homme 1 seule pomme

Quelques-uns, à titre d'explication, présentent une vérification classique sous le titre "Résolution du problème"

*Résolution du problème :*
*Un homme est entré dans un verger et il a cueilli 36 fruits (hypothèse). Mais le verger avait 3 ~~porte~~ portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea ses 36 fruits avec le 1er gardien il ne lui en reste plus que 18. Il en donna deux ~~de~~ plus au 1er, cela signifie qu'il en retrancha 2 de ses 18 fruits. Il ne lui en reste plus que 16 fruits. ~~Puis~~ Puis il partagea ses 16 fruits avec le 2ème gardien il ne lui en reste plus que 8 fruits. Il donna deux fruits de plus au 2ème gardien, cela signifie qu'il retrancha 2 fruits de ses 8 fruits. Il ne reste plus que 6 fruits; enfin il partagea avec le 3e gardien ses 6 fruits, il ne lui en reste plus que 3 fruits il en donna 2 de plus à celui-ci c'est-à dire qu'il retrancha 2 fruits à ses 3 fruits, c'est donc logique qu'à la fin il ne lui reste plus qu'un fruit. Le chiffre exact ne peut être que 36 fruits.*

## COMMENT LES ELEVES REAGISSENT-ILS A PRIORI FACE A LA METHODE PROPOSEE?

Une grande partie des élèves commencent par exprimer une forte méfiance.

«Il y va à tâton»

«Il y va au pif»

«Les nombres qu'il essaient sont-ils vraiment aléatoires?»

«Avec zéro ça marche ou ça marche pas?»

*Non, en lisant la solution proposée je pense que le résultat est bon par hasard. Le resonnement parait "tordu" et très compliqué*

La perplexité est grande...

Beaucoup cherchent à mettre la méthode en défaut:

A première vue cette méthode ne me paraît pas juste, c'est pour cela que je vais essayer de démontrer qu'elle est fausse en me basant sur mes propres chiffres et en la mettant à l'épreuve pour éliminer les chances du hasard pour la vérifier.

Question : est-il possible de trouver le m̂ resultat (36) en n'ayant pas les mêmes nombres dans le 1e et le 2e plateau.

- Si l'on prend 300 dans le plateau 1.

  * 300 $\xrightarrow{:2-2}$ 148 $\xrightarrow{:2-2}$ 72. $\xrightarrow{:2-2}$ 34

  comparé avec le reste 1 on se trompe de 33

  33 c'est la 1e erreur

- Si l'on prend 450 dans le 2e plt.

  * 450 $\xrightarrow{:2-2}$ 225 $\xrightarrow{:2-2}$ 109,5 $\xrightarrow{:2-2}$ 52,75

  comparé avec le reste 1 on se trompe de 51,75 c'est la 2e erreur

  * multiplie la par 300

  51,75 x 300 = 15525

  * multiplie la 1e erreur par 450

  33 x 450 = 14850

  fait la difference du plus grd et du plus petit

  15525 - 14850 = 675.

  * Soustrait la 1e erreur de la 2e tu trouve

  51,75 - 33 = 18,75.

  * divise 675 par 18,75 tu trouve 36.

  le même nombre que celui que l'on trouve avec 100 et 200 dans les 2 plateaux et certains parviennent à réfuter la méthode :

3 - Bien qu'il ait trouvé un résultat juste son raisonnement est faux car si on le suit en prenant 300 et 400 à la place de 100 et 200 comme il l'avait fait, alors il nous reste 0 pommes or il me faut une pomme restante.

calculs : (p = pommes)

* $\frac{300}{2} = 150$ donc gardien n°1 → 152 p. il reste 148 p.

$\frac{148}{2} = 74$ donc gardien n°2 → 76 p.

il reste 72 p

$\frac{72}{2} = 36$ donc gardien n°3 → 38 p.

Il reste 34, c'est notre première erreur.

* $\frac{400}{2} = 200$ donc gardien n°1 → 202 p il reste 198 p.

$\frac{198}{2} = 99$ donc gardien n°2 → 101 p il reste 97 p.

$\frac{97}{2} = 48,5$ donc gardien n°3 → 50,5 p

Il reste 46,5, c'est notre deuxième erreur.

calculs faits suivant le raisonnement :

$46,5 \times 300 = 13950$
$400 \times 34 = 13600$
$13950 - 13600 = 350$
$46,5 - 34 = 12,5$
$350 - 12,5 = 28$.

Le nombre de pommes cueillies est de 28.

vérification : $\frac{28}{2} = 14$ gardien n°1 → 16 p.

$\frac{12}{2} = 6$ gardien n°2 → 8 p

$\frac{4}{2} = 2$ gardien n°2 → 4 p.

Il reste 0 pommes, donc le raisonnement est tout à fait faux excepté avec quelques nombres comme 100 et 200.

...Avez-vous trouvé l'erreur?

## QUELS SONT LES ARGUMENTS DEVELOPPES?

Des différences importantes se manifestent suivant les classes.

Ces différences peuvent-être dues:

-aux questions posées par le professeur

-au type de classe

Un élève de troisième (oralement):

*«Il a pris 100 ,il a vu que c'était trop grand ,alors je ne comprends pas pourquoi il a pris ensuite 200 »*

Un élève de seconde manifeste la même préóccupation:

*«Pourquoi 100 et 200?»*

Des élèves substituent d'autres entiers à 100 et 200, puis constatent qu'ils obtiennent de nouveau 36 comme résultat.

Tel élève remarque après deux essais que la méthode n'a pas été mise en défaut:il conclut qu'elle est correcte.

Dans les 2 cas, le résultat est 36 donc ma supposition était fausse donc cette méthode est juste. Cette demonstration s'appelle une demonstration par l'absurde.

Une partie non négligeable des élèves se préoccupe de la relation entre les nombres choisis : Doit-on prendre un nombre et son double? deux nombres dont l'écart est 100?

Avec un écart de 100 :

300 400

$\frac{300}{2} = 150 - 2 = 148$.

$\frac{148}{2} = 74 - 2 = 72$.

$\frac{72}{2} = 36 - 2 = 34$.

Erreur de 33

$\frac{400}{2} = 200 - 2 = 198$

$\frac{198}{2} = 99 - 2 = 97$

$\frac{97}{2} = 48,5 - 2 = 46,5$

Erreur de 45,5.

$300 \times 45,5 = 13650$

$400 \times 33 = 13200$

$13650 - 13200 = 450$

$45,5 - 33 = 12,5$

$\frac{450}{12,5} = \boxed{36}$.

Avec un écart de 150.

350 500

$\frac{350}{2} = 175 - 2 = 173$

$\frac{173}{2} = 86,5 - 2 = 84,5$

$\frac{84,5}{2} = 42,25 - 2 = 40,25$

Erreur de 39,25.

$\frac{500}{2} = 250 - 2 = 248$

$\frac{248}{2} = 124 - 2 = 122$

$\frac{122}{2} = 61 - 2 = 59$

Erreur de 58.

$350 \times 58 = 20300$

$500 \times 39,25 = 19625$

$20300 - 19625 = 675$

$58 - 39,25 = 18,75$

$\frac{675}{18,75} = 36$

Oui, la méthode exposée par Ben Ezra est bonne puisque avec d'autres exemples le résultat est bon, nous trouvons 36.

Quelques élèves de seconde font un essai de généralisation, choisissant x et 2x comme nombres de départ :

Remplaçons 100 par $x$

$$\frac{\frac{\frac{x}{2}-2}{2}-2}{2}-2 = \frac{x}{8}-\frac{7}{2}$$ : c'est ce que l'on appelle le 1er reste

$$\frac{x}{8}-\frac{7}{2}-1 = \frac{x-36}{8}$$ : 1ère erreur

$$\frac{\frac{\frac{2x}{2}-2}{2}-2}{2}-2 = \frac{x}{4}-\frac{7}{2}$$ 2ème reste

$$\frac{x}{4}-\frac{7}{2}-1 = \frac{x-18}{4}$$ : 2ème erreur

On multiplie la 2ème erreur avec le 1er plateau puis on lui soustrait la 1ère erreur multipliée par le 2ème plate ce qui nous donne :

$$\left(\frac{x-18}{4}\right)x - \left(\frac{x-36}{8}\right)2x = \frac{x^2-18x}{4} - \frac{x^2-36}{4}$$
$$= \frac{9}{2}x$$

puis il soustrait les 2 erreurs

$$\frac{x-18}{4} - \frac{x-36}{8} = \frac{x}{8}$$

on divise $\frac{9}{2}x$ par $\frac{x}{8}$ et on obtient 36

si bien que quelque soit le nombre choisi dans le 1er plateau on obtient toujours 36 comme résultat

D'autres élèves de seconde choisissent deux variables littérales pour remplacer 100 et 200 et aboutissent au résultat attendu:

III) La mise en équation donne : $x \geqslant x'$

$$\frac{x \times \left(\frac{1}{8}x' - 3{,}5 - 1\right) - x' \times \left(\frac{1}{8}x - 3{,}5 - 1\right)}{\frac{1}{8}x' - 3{,}5 - 1 - \frac{1}{8}x + 3{,}5 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}xx' - 4{,}5x - \frac{1}{8}xx' + 4{,}5x'}{\frac{1}{8}x' - \frac{1}{8}x}$$

$$\Rightarrow \frac{4{,}5x' - 4{,}5x}{\frac{1}{8}x' - \frac{1}{8}x} = \frac{4{,}5\,(x' - x)}{\frac{1}{8}\,(x' - x)} = \frac{4{,}5}{\frac{1}{8}} = 36$$

On obtient 36 quels que soient $x$ et $x'$.

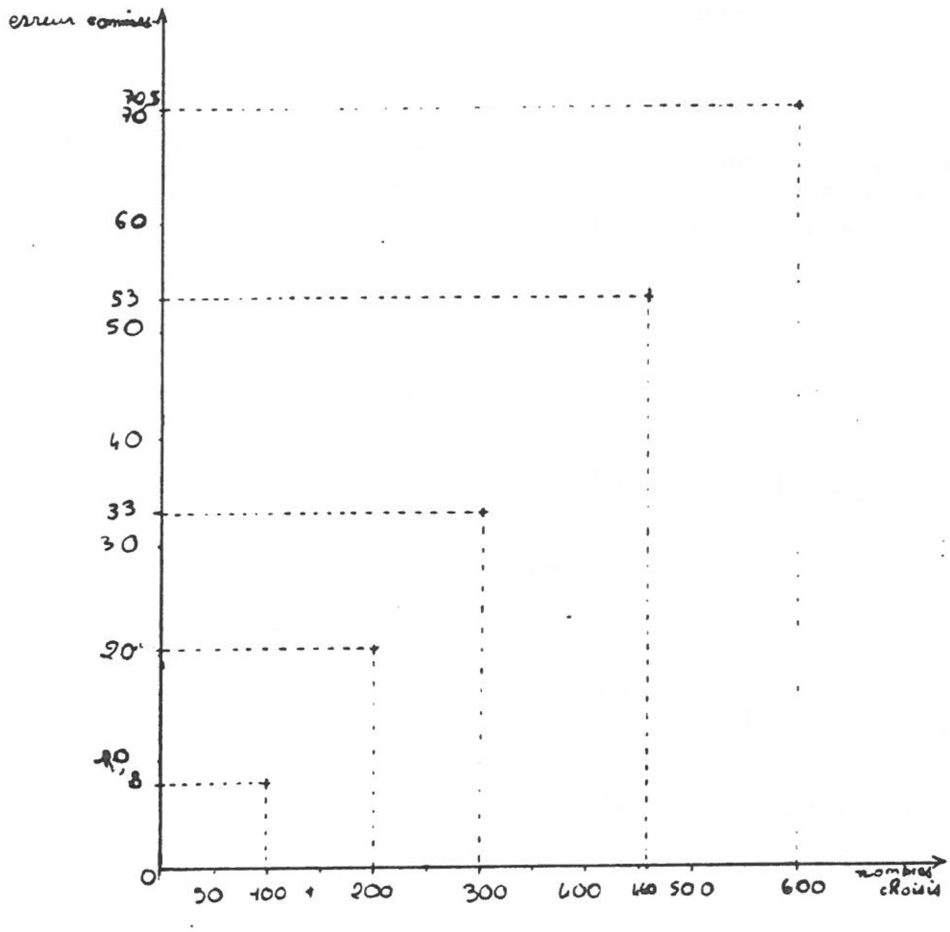
Le concept de fonction affine est sous-jacent dans la méthode de Ben Ezra; il semble qu'aucun élève n'ait reconnu a priori la situation comme affine ...

La méthode de " Ben Ezra" est vraiment peu claire et compliquée
Je n'ai trouvé presque aucun rapport avec les fonctions affines.
Cependant, je suis impressionnée par son intelligence ..

Cette activité était interessante et originale, mais l'application des fonctions affines par rapport au cours n'était pas évidente. Il était interes- -sant aussi de voir la façon dont Ben Ezra effectuait ses calculs sans disposer de certains signes mathematiques élémentaires. Le proble- -me en lui même était attrayant.

...sauf quand le professeur l'a explicitement indiqué:

Dessin



Fonction affine :

$100 \to 8\ (e_x)$
$200 \to 20{,}5.$

$e_x = ax + b.$
$8 = 100a + b$
$20{,}5 = 200a + b$

$$\begin{cases} 8 - 100a = b \\ 20{,}5 - 200a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - 100a = 20{,}5 - 200a. \\ 8 - 20{,}5 = -200a + 100a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12{,}5 = -100a \\ \dfrac{-12{,}5}{-100} = a \end{cases} \Rightarrow 0{,}125 = a.$$

$8 = 100 \times 0{,}125 = b$
$8 - 12{,}5 = b.$
$-4{,}5 = b.$

$y = 0{,}125x - 4{,}5$

Mais de nos jours on peut calculer le "36"
grâce à l'application affine :
Soit $x_1$ le 1er nombre choisi
Soit $e_{x_1}$ la 1ère erreur
Soit $x_2$ le 2ème nombre choisi
Soit $e_{x_2}$ la 2ème erreur.

$$x_1 \times e_{x_2} - x_2 \times e_{x_1}$$

$$\frac{x_1 \times e_{x_2} - x_2 \times e_{x_1}}{e_{x_2} - e_{x_1}}$$

$$= \frac{x_1 \times (0{,}125x_2 - 4{,}5) - x_2 \times (0{,}125x_1 - 4{,}5)}{0{,}125x_2 \cancel{- 4{,}5} - 0{,}125x_1 \cancel{+ 4{,}5}}$$

$$= \frac{\cancel{0{,}125x_2x_1} - 4{,}5x_1 - \cancel{0{,}125x_1x_2} + 4{,}5x_2}{0{,}125(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{4{,}5 \cancel{(x_2 - x_1)}}{0{,}125 \cancel{(x_2 - x_1)}}$$

$$= \boxed{36}$$

Aucun élève n'a tenté spontanément d'appliquer la méthode à d'autres situations (en modifiant le nombre 3, les nombres 1 ou l'opérateur concerné: division par 2, suivi d'une soustraction de 2 unités)

Faute de temps?

POURQUOI AU FAIT ELARGIR LE PROBLEME?

L'énoncé utilisait de façon explicite des données précises:

3 portes, 1 fruit, division par 2 des fruits restants...

Ces nombres, contrairement à 100 et 200, figurent dans l'énoncé. Est-il moins naturel de les modifier?

Un seul élève a affirmé que sa méthode lui permettait de résoudre une classe de problèmes plus étendue(cf p12).

Interrogés sur les réflexions que ce travail leur inspire, certains élèves s'essaient à une comparaison avec des méthodes "plus modernes ".

Je pense que si Abraham Ben Ezra vivait dans notre siècle. Ils serait étonné de la rapidité qu'on utilise pour la double fausse position, alors qu'il a fallu beaucoup d'années pour découvrir son système

* Ma conclusion c'est que leur méthode est très bien mais elle est compliquée et longue. Et c'est pour cela que à force des mathématiciens ont inventé des méthodes plus faciles et plus clairs.

Cela m'étonne que les anciens savants aient pensé à une solutions relativement longue alors que c'était beaucoup pluss simple de procéder comme ci-dessus. Ils ont peut-être pensé à cette solution mais la trouvant trop simple ont décidé d'en trouver une plus compliqués pour se distraire.

Non sollicitée, une élève de seconde tient à faire connaître son sentiment:

Abraham Ben Ezra utilise une méthode particulière et très recherchée. On comprend très facilement le raisonnement suivi par Abraham au cours des deux premiers paragraphes. Un très jeune élève le comprendrait très rapidement. Par contre le troisième paragraphe, je suis plus sceptique et j'avoue que sa logique me dépasse totalement. Monsieur Ben Ezra commence à donner une image beaucoup plus compliquée des mathématiques.

Dans cette dernière partie du texte il y a une légère ressemblance avec les maths de notre siècle. On a beaucoup plus l'impression qu'il utilise une méthode mathématique et qu'il ne suit plus la logique. Seuls les bons mathématiciens ayant appris la méthode comprennent ce raisonnement. C'est un mélange de l'ancienne vision des maths et une vue progressive sur les maths modernes.

C'est à ces hommes là que l'on doit les difficultés dans cette matière pour les mauvais et ses facilités pour les petits cracks, passionnés des maths.

# CONCLUSION

L'opinion commune est que les mathématiques sont un outil de calcul: on ne retient que l'aspect technique, voire algorithmique de la discipline. En contrepartie elles seraient closes et achevées, parvenues à une froide perfection, au fond peu humaines.

Si l'appropriation par les élèves de méthodes éprouvées et d'algorithmes performants est sans doute indispensable, nous ne pensons pas que l'activité mathématique se réduise à ce seul aspect. Ne devons-nous pas leur montrer toutes les étapes de la démarche scientifique? Faire des mathématiques, n'est-ce pas se poser des questions tout autant que les résoudre?

Sous cet angle, l'introduction dans la classe de textes historiques, lorsqu'elle n'est pas uniquement anecdotique, revêt un caractère formateur particulièrement intéressant.

Le texte de Ben Ezra invitait plus précisément les élèves à confronter leurs connaissances et savoir-faire à ceux d'un mathématicien du XII$^{ème}$ siècle, et pouvait ainsi leur montrer le long chemin séparant les premières tentatives de résolution d'un problème des méthodes actuelles très élaborées, qui leur sont souvent présentées dans un conditionnement de produit fini.

Avons-nous réussi à élargir l'horizon mathématique de nos élèves? Nous l'espérons; en tout cas chez certains nous avons constaté une modification durable du comportement vis à vis de la matière.

De plus cette activité nous a permis de mettre au grand jour les démarches mises en oeuvre par les élèves et d'engager une réflexion sur ce sujet à l'intérieur de notre groupe.

Enfin n'oublions pas que la grande majorité d'entre eux a pris un réel plaisir à travailler sur ce texte. Tant mieux... d'autant que ce plaisir fut partagé par leurs professeurs.

# ANNEXES

*classe de première année de B.E.P.*

Le texte de Ben Ezra est présenté aux 16 élèves, sortant de Troisième, d'une classe préparant au diplôme d'Opérateur Géomètre Topographe. Leur horaire hebdomadaire est de 5h par semaine).

Dans les semaines qui ont précédé, ont été étudiées les fonctions linéaires et affines et les suites arithmétiques.

**Dispositif pédagogique:**

Les élèves qui travaillent par deux ont besoin d'une heure pour poser des questions et recueillir les informations du professeur ; Le travail écrit sera demandé après une heure et demie de travail.

**Remarque:**

3 groupes ont travaillé sur A

3 groupes ont travaillé sur B

1 groupe a travaillé sur C

7 élèves ont tenu à rendre une rédaction personnelle.

## Résolution d'équations du premier degré à une inconnue

"Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ...", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Egypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? les avis sont partagés.

L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8] p. 336 à 338.

### Enoncé du problème

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

### Résolution du problème

LA DOUBLE FAUSSE POSITION

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450.

Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.

**Préliminaire** : dans les représentations et tableaux de résolution, on appellera :

$x$ : nombre de fruits après cueillette

$y$ : nombre de fruits après sortie du verger

**Travail demandé** ; au choix :

(A). Présenter, dans un tableau, les nombres successifs utilisés dans les phases (1) et (2) de la résolution

. Trouver une méthode plus simple et plus rapide pour arriver à la solution

. A partir d'une troisième "fausse position", montrer que la fonction $f : x \longmapsto y$ est du type affine.

(B). Rechercher l'expression algébrique de $f : x \longmapsto y$ et utiliser celle-ci pour calculer $x$ quand $y = 1$

. Trouver, à partir de la proportionnalité des accroissements, une expression de $x$ en fonction de $x_1, y_1, x_2, y_2$ et $y$ (=1)

(C) Trouver l'expression utilisée dans la méthode "D.F.P." pour le calcul de $x$ (=36) à partir des nombres intervenant dans le calcul ; ces nombres sont à exprimer au moyen de $x_1, y_1, x_2, y_2$ et $y$ (=1)

## *Classe de Seconde*

La recherche s'est faite dans une classe d'un profil plutôt littéraire de 39 élèves pendant la séance de travaux dirigés. Nous venions de terminer les révisions concernant les fonctions affines.

**Questions posées à la classe:**

1°Comment feriez-vous pour résoudre ce problème?

2°Le résultat de l'auteur dépend-il des nombres choisis au départ?

3°Expliquer son raisonnement en mettant en évidence une fonction affine. Préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette fonction.

**Dispositif pédagogique:**

Les élèves ont travaillé par groupes de 4 à 5 élèves dont la constitution s'est faite librement. Un compte-rendu par groupe devait être rédigé à la fin de la séance.

**Durée 1h30**

**_Classe de Seconde_**

**Travail dirigé par demi classe :**

de 15 à 16h30 ; 19 élèves, de 16h30 à 18h ; 20 élèves:

Chaque élève reçoit :

**le texte** qui ne peut lui paraître en application d'un cours précis:

**les questions suivantes:**

1) Comment auriez-vous résolu le problème ?

2) Le résultat de l'auteur est-il juste ?

3) Le raisonnement de l'auteur est-il juste ?

Ils peuvent travailler en groupes ( pas plus de quatre ) et choisir leurs camarades de travail .

Chaque groupe pourra rendre une feuille répondant aux questions.

Seulement deux groupes de deux et deux élèves isolés ne rendent pas de feuille.

Volontairement le professeur intervient le moins possible, désirant observer les élèves et regarder tout particulièrement les élèves qui ne participent pas beaucoup.

D'ailleurs une conversation amène une élève à réfléchir sur les causes et les effets de son absence de participation. Par la suite, la transformation de son comportement, même si les résultats scolaires ne prennent pas un essor miraculeux, est durable et encourageante.

## *Classe de Seconde*

Le travail suivant a été proposé pendant une séance de T.P., où la classe est dédoublée. Les élèves avaient auparavant étudié les propriétés des applications affines et la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Les élèves ont travaillé en groupes librement constitués. Chaque groupe devait remettre un compte rendu. Le travail n'était pas noté.

La question 1° était prévue comme un simple "échauffement", mais les élèves en eurent bien besoin pour assimiler la méthode de Ben Ezra.

La question 4°(trop ambitieuse pour le niveau de la classe?) ne fut étudiée par aucun groupe.

2 -

# LA DOUBLE FAUSSE POSITION.

(ou comment résolvait-on les équations du premier degré à une inconnue au moyen âge)

II.1.1. "Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ...", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Egypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? les avis sont partagés.

L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8] p. 336 à 338.

## Enoncé du Problème

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

## Questions

1°/ Vérifiez la solution donnée par Ben Ezra.

2°/ Savez vous résoudre le problème par une autre méthode ? Si oui exposez votre méthode.

3°/ La méthode exposée par Ben Ezra est-elle toujours correcte ? Justifiez votre réponse.

4°/ Appelez $x$ le nombre de fruits cueillis et $r$ le nombre de fruits restants après les 3 partages, exprimez $r$ en fonction de $x$ et reprenez la question 3°/.

## Résolution du Problème

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450. Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.

## *Classe de Seconde*

A la suite du chapitre sur les applications affines et problèmes du premier degré, j'ai proposé le texte de Ben Ezra, en Travaux Dirigés, à une classe dont la majorité des élèves souhaite faire une 1ère S.

Le texte distribué, je demandai seulement :

"qu'en pensez-vous?"

Suite à une discussion avec mes collègues ayant déjà proposé ce texte dans leur classe, j'avais souhaité voir la réaction de mes élèves si je ne posais aucune question précise ; je pensais alors qu'ils liraient le texte jusqu'au bout puis réagiraient par rapport à la solution proposée.

Mais **tous** se sont arrêter à l'énoncé du problème...

Au bout de trois quart d'heure la plupart d'entre eux n'avaient pas regardé la solution de Ben Ezra mais avaient résolu le problème à leur manière. Je suis alors intervenue pour préciser ce que j'attendais d'eux par la suite. "Exprimez le nombre y de fruits restant à la sortie en fonction du nombre x de fruits cueillis" "La méthode proposée est-elle justifiée?"

Les élèves ont travaillé par groupes de 3 à 5 formés, chaque groupe rendant une copie à la fin de la séance.

*Classe de Quatrième*

**première phase:** une séquence d'une heure.

Le texte est distribué sans préalable aux élèves (25 latinistes) qui en font une lecture personnelle. Nous reprenons alors ensemble cette lecture, précisons l'énoncé.

Ensuite j'essaie de répondre à quelques questions et de mener le débat sans induire chez eux de réponses ou de comportements.

**Deuxième phase:** les élèves sont invités à rédiger un compte-rendu de la séance pour la semaine suivante; pour les guider, quatre questions:

1)pourquoi "double fausse position?

2)la méthode est-elle juste? Comment le vérifier?

3)Comment résoudrait-on aujourd'hui ce problème?

4)Quelles réflexions ce travail vous inspire-t-il?

## *Classe de Troisième*

Travail donné à neuf élèves de troisième qui n'ont pas participé au séjour de ski.

Les neuf élèves présents travaillent trois heures sur le sujet proposé et doivent rendre un travail rédigé. Ils peuvent former des groupes : un groupe de 4, un de 3 et un de 2 se constituent spontanément.

# DES MATHEMATICIENS ARABES

"Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ...", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Egypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? les avis sont partagés.

L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8] p. 336 à 338.

### Énoncé du problème

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

### Résolution du problème

LA DOUBLE FAUSSE POSITION

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450.

Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.

(1) lis attentivement ce texte.

(2) Que veut faire Ben Ezra !

(3) Qu'as-tu envie de faire, toi ?

(4) Trouves-tu la méthode de Ben Ezra facile ! exacte !

(5) Peux-tu déterminer une méthode plus simple ! Explique

(6) dans d'autres traités d'arithmétique, on trouve le même genre de méthode que celle décrite par Ben Ezra

lis la page ci-contre et applique la méthode au problème d'Al-Kashi