UNIVERSITÉ DE REIMS

Institut de Recherche Sur L'enseignement des Mathématiques

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

N° 1 - 1993

GROUPE
HISTOIRE DES MATHS

MISCELLANEA ANALYTICA.

LIBER PRIMUS.

De Ordinatis rationalibus in Simpliciores resolvendis.

LEMMA I.

SI sint l & x Cosinus Arcuum duorum A & B, quorum uterque eodem Radio 1 describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus n ad Unitatem, tunc erit

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} = z$, hinc erit $z^n = l+\sqrt{ll-1}$, seu $z^n - l = \sqrt{ll-1}$, sive, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + ll = ll - 1$; deletisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$

B

$+1$

UNIVERSITÉ DE REIMS

Institut de Recherche Sur L'enseignement des Mathématiques

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

N° 1 - 1993

GROUPE
HISTOIRE DES MATHS

MISCELLANEA ANALYTICA.

LIBER PRIMUS.

De Ordinatis rationalibus in Simpliciores resolvendis.

LEMMA I.

SI *sint* l & x *Cosinus Arcuum duorum* A & B, *quorum uterque eodem Radio* 1 *describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus* n *ad Unitatem, tunc erit*

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} = z$, hinc erit $z^n = l+\sqrt{ll-1}$, seu $z^n - l = \sqrt{ll-1}$, sive, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + ll = ll - 1$; deletisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$

B $+1$

MISCELLANÉES

MISCELLANEA ANALYTICA.

LIBER PRIMUS.

De Ordinatis rationalibus in Simpliciores resolvendis.

LEMMA I.

S*I sint* l *&* x *Cosinus Arcuum duorum* A *&* B, *quorum uterque eodem Radio* 1 *describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus* n *ad Unitatem, tunc erit*

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} + \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} = z$, hinc erit $z^n = l + \sqrt{ll-1}$, seu $z^n - l = \sqrt{ll-1}$, sive, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + ll = ll - 1$; deletisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$

B $+1$

Nous tenons à remercier tout particulièrement Mr Gilbert MAHEU membre de la Société des Sciences et Arts de Vitry-le-François de nous avoir autorisé à photocopier la première page de son exemplaire des **MISCELLANEA ANALYTICA** et nous vous recommandons la lecture de son mémoire sur Abraham de Moivre.

EDITORIAL

C'est avec plaisir que nous vous présentons ce premier numéro des MISCELLANEES. En effet le Groupe Histoire des Mathématiques de l'IREM de REIMS se propose de publier dans cette brochure annuelle le fruit de ses travaux .

Vous pourrez y trouver des extraits de textes anciens qui nous ont intéressés, voir enthousiasmés par leur intérèt, des comptes-rendus d'expériences faites en classe et enfin des études sur telle formule ou telle théorie ayant joué un rôle historique.

L'illustration de la couverture est la première page de l'ouvrage d'Abraham de Moivre MISCELLANEA ANALYTICA paru à Londres en 1730 dont le lemme 1 traduit une célèbre formule ...

Lemme I

Si l et x sont les cosinus de deux arcs A et B dont on suppose l'un et l'autre décrit avec un rayon de 1 et tel que le premier soit au second dans le rapport qu'a le nombre n à l'unité, alors on aura

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{ll - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l + \sqrt{ll - 1}}}$$

SOMMAIRE

* : Articles déjà parus dans VECTEUR : Bulletin de liaison de l' IREM de REIMS.

ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754)

SA VIE:

Abraham De Moivre est né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François, fils d'un médecin protestant.
Après des premières études dans une école de Vitry dirigée par des prêtres de la doctrine chrétienne (ce qui peut surprendre), le jeune Abraham se retrouve à onze ans à l'université protestante de Sedan où il se passionne pour l'Arithmétique à la suite de la lecture d'un ouvrage de François le Gendre.
En 1681, après la fermeture de l'université de Sedan, De Moivre se rend à Saumur pour étudier la philosophie. C'est là qu'il découvre le " De Ratiociniis in ludo aleae " de Huyghens, ouvrage qui influencera ses recherches ultérieures.

Abraham De Moivre

Il complète ses études de mathématiques et de physique à Paris jusqu'à l'âge de 18 ans.
A la suite de la révocation de l'édit de Nantes, le 18 octobre 1685, il est emprisonné à Saint Martin, puis relâché le 27 avril 1688. Comme deux cent à trois cent mille de ses coréligionnaires il quitte alors la France pour s'installer définitivement en Angleterre. Là il se lie d'amitié avec Edmond Halley (1656-1742) et Isaac Newton (1642-1727) et correspond avec de grands mathématiciens dont Jean et Jean-Gustave Bernoulli. Malgré toutes ses relations, il n'obtiendra jamais une chaire de mathématiques et devra toute sa vie parcourir les rues de Londres pour dispenser des cours privés à domicile. Cette contrainte alimentaire ne l'empêchera pas de publier deux ouvrages sur les probabilités: Doctrine of Chances (1ère édition 1718) et Miscellanea Analytica (1730) et une quinzaine de mémoires sur des sujets de moindre importance.
Ses travaux lui vaudront la reconnaissance honorifique de ses contemporains: il est membre de l'académie de la Royal Society (élu en 1697), membre de l'Academie de Berlin en 1735 et enfin membre "associé étranger" de l'Académie des sciences de Paris en 1754 quelques mois avant sa mort.
A en croire Montucla "il mourut d'une manière assez singulière. Depuis quelque temps son sommeil se prolongeait un peu plus chaque jour, de sorte que peu avant sa mort il durait vingt trois heures sur les vingt quatre du jour; enfin il cessa de se réveiller le 27 novembre 1754".

DE MOIVRE ET LES PROBABILITES:

Dans les trois éditions successives du "Doctrine of Chances"(1718, 1738, 1756) et dans les "Miscellanea Analytica" De Moivre précise les principes du calcul des probabilités (1), introduit une notation algébrique propre à ce calcul et l'utilise pour traiter de nombreux problèmes d'application (dés, urnes, partis).Il développe aussi la théorie des permutations et des combinaisons.
Dans ses ouvrages, on trouve également l'énoncé de la règle des probabilités composées (2) et l'approximation de la formule:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Parmi les contributions de De Moivre aux statistiques, on a la démonstration du théorème de limite centrale (3) appliqué au lancer d'une pièce de monnaie et la découverte de la distribution normale de fréquence (3).

Pour compléter cet aperçu , écoutons Laplace parler, dans son Essai philosophique sur les probabilités, de l'oeuvre de De Moivre: " Le traité de Moivre parut d'abord dans les transactions philosophiques de l'année 1711. Ensuite l'auteur le publia séparément, et il l'a perfectionné successivement dans les trois éditions qu'il en a données. Cet ouvrage est principalement fondé sur la formule du binôme, et les problèmes qu'il contient, ont, ainsi que leurs solutions, une grande généralité. Mais ce qui le distingue, est la théorie des suites récurrentes et leur usage dans ces matières. Cette théorie est l'intégration des équations linéaires aux différences finies à coefficients constants, intégration à laquelle Moivre parvient d'une manière très heureuse (4).... Moivre a repris dans son ouvrage le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats donnés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des évènements qui doivent arriver approchera sans cesse de celui de leurs possibilités respectives; il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports sera contenue dans des limites données. Pour celà, il détermine le rapport de plus grand terme du développement d'une puissance très élevée du binôme à la somme de tous ses termes, et le logarithme hyperbolique de l'excès de ce terme sur les termes qui en sont très voisins. Le plus grand terme étant alors le produit d'un nombre considérable de facteurs, son calcul numérique devient impraticable. Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un beau théorème (5) de Stirling (1692-1770) sur le terme moyen du binôme élevé à une haute puissance, théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante."

Les notes sont regroupées à la fin de cet article

DE MOIVRE ET SA FAMEUSE FORMULE DE TRIGONOMETRIE:

Vers 1705 De Moivre se proposait de résoudre le problème du partage de l'aire d'un segment d'hyperbole équilatère en parties ayant entre elles un rapport donné. La solution, calculée en grandeurs réelles, l'aurait conduit à l'usage des logarithmes. Or on ne sait pour quel motif il a délaissé leur utilisation au profit du calcul par les imaginaires. Ses spéculations l'ont conduit à la formule:

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-l}}+\frac{1/2}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-l}}}$$

dans laquelle

$$l = \cos nB \text{ et } x = \cos B$$

la quantité sous le radical vaut donc $\cos nB + i \sin nB$

En 1722, il affirme qu'on peut obtenir une relation entre x et t qui représente les sinus verses de deux arcs qui sont dans le rapport de 1 à n, par élimination de z dans les deux équations

$$1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t \qquad \text{et} \qquad 1-2z+z^2=-2zx$$

Dans ce résultat la formule est implicite car si on pose

$$x=1-\cos\theta \qquad \text{et} \qquad t=1-\cos n\theta$$

on en déduit que $(\cos\theta \pm i \sin\theta)^n=\cos n\theta \pm i \sin n\theta$

De même, il exprime en 1730, l'équivalent de

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^{1/n}=\cos\frac{(2k\pi \pm \theta)}{n} +i\sin\frac{(2k\pi \pm \theta)}{n}$$

qui lui sert à trouver les facteurs quadratiques de

$$x^{2n}+2x^n\cos n\theta +1 \quad (6).$$

Enfin en 1739 il montre que la racine n-ième d'un "impossible binomial" $a +\sqrt{-b}$ (nombre complexe) s'effectue, comme nous le faisons actuellement, en prenant la racine n-ième du module et en divisant l'argument par n et en ajoutant les multiples de $2\pi/n$ (il y a n racines)

NOTES:

(1) La correspondance échangée entre Blaise Pascal (1623-1662) et Pierre De Fermat (1601-1665) au cours del'année 1654 marque les débuts du calcul des probabilités.Dans ces lettres, seule la théorie des jeux est évoquée, et plus particulièrement le problème des partis: partager équitablement des mises lorsque le jeu est interrompu avant la fin prévue.Au vu de cette correspondance Christian Huyghens (1629-1695) entreprend en 1657 une courte étude: " De Ratiociniis in ludo aleae " dont un commentaire très enrichi parait dans l'oeuvre posthume de Jacques Bernoulli (1654-1705) Ars Conjectandi (1713) qui fonde véritablement le calcul des probabilités. A côté de l'Ars Conjectandi et du Doctrine of Chances on peut signaler également, l'essai d'analyse sur les jeux de hasard (1713) du Français Pierre Raymond de Montmort (1678-1719)

(2) En notation moderne: $p(A \cap B)=p(A)*p(B/A)$

(3) Enoncé sous la forme actuelle:
Soit X_n une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètre n et p (p fixé)

(i.e $\forall\ k\in[0;n]\cap\mathbb{N}\ p(Xn=k)=C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}$)

Si on pose $Y_n=\dfrac{X_n - m}{\sigma}$ (avec $m=np$; $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$)

la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n
et si N est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite

(i.e de densité $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2}$)

on a alors $\forall\ x\in R\ \lim_{n\to+\infty} p(Y_n\leq x)=p(N\leq x)(=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt)$

(4) Rappellons qu'on appelle, depuis De Moivre, suite récurrente une suite dans laquelle chaque terme est déterminé par une relation constante entre un nombre fini de termes qui le précèdent immédiatement.Pour une suite récurrente d'ordre k:
$u_{n+1}=a_1\ u_n+a_2\ u_{n-1}+\ldots+a_k\ u_{n-k+1}$
A signaler que De Moivre avait été précédé en 1682 par J.Dominique Cassini (1625-1712) qui avait étudié les suites définies par:
$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$
Voici un des théorèmes dus à De Moivre :
Toute suite récurrente d'ordre k peut se décomposer en une somme de k suites géométriques et réciproquement.
Dans le cas où k=2 on a par exemple si $u_n = r\ u_{n-1}$ et $v_n = r'\ v_{n-1}$ et $w_n = u_n + v_n$ alors $w_n=(r+r')\ w_{n-1} - rr'\ w_{n-2}$

Un autre résultat de De Moivre est celui-ci:

Si P est un polynôme de degré n et si on pose $\dfrac{1}{P(x)}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
la suite (a_k) est une suite récurrente d'ordre n.

De Moivre s'est aussi préoccupé de sommer $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ainsi que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

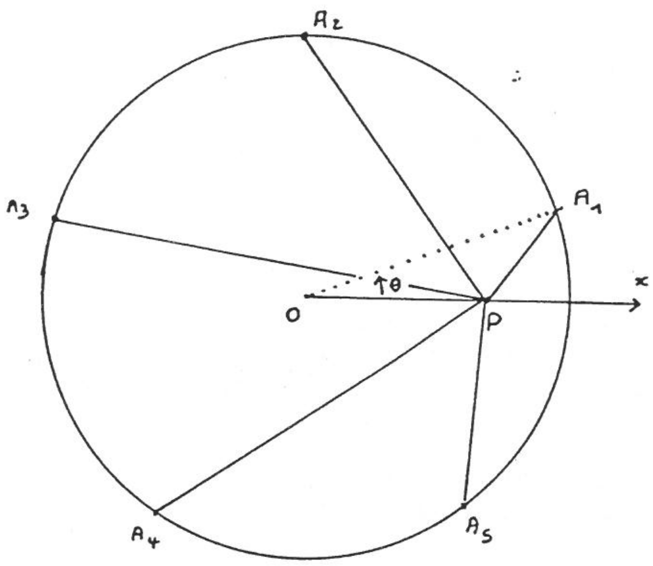
quand la suite (a_k) est récurrente d'ordre n.

Sa théorie a été développée par Euler, Lagrange, Laplace, Lucas, Montel....

(5) $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left[\dfrac{n}{e}\right]^n$ pour n très grand

(6) Sur le cercle trigonométrique on place sur l'axe Ox un point P d'abscisse x
On trace un polygone régulier à m côtés A_1, A_2, ..., $A_{m+1}=A_1$
alors $PA_1^2.PA_2^2....PA_m^2=x^{2m}-2\cos(m\theta).x^m+1$
Celà revient à écrire

$$\prod_{k=0}^{m-1}(x^2-2x\cos(\theta+2k\pi/m)+1)=x^{2m}-2\cos(m\theta).x^m+1$$



cas où m = 5

Ce théorème est exposé dans le premier chapitre et démontré dans le second chapitre des " Miscellanea Analytica de sériebus et quadratures". Il généralise un résultat précédent du à Cotes (1682-1716) (cas où $\theta=0$) et publié en 1722 par son collégue de Cambridge Robert Smith

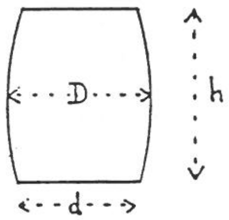
REFERENCES:

Histoire des mathématiques: Jean-Paul Collette
Mathématiques et mathématiciens: Pierre Dedron et Jean Itard
Histoire des logarithmes: C.Naux
Histoire des mathématiques:J.F. Montucla
Dictionnaire encyclopédique Larousse
Cours de probabilités et de statistiques: C.T.U. de Besançon

LA FORMULE DES TROIS NIVEAUX

Où l'on cherche à jauger les tonneaux

Trouver le volume d'un tonneau est un problème très ancien On trouve dans la littérature différentes formules qui toutes sont dépendantes des trois dimensions facilement mesurables à savoir le petit diamètre d,le grand diamètre D et la hauteur h du tonneau.



Ces formules se ramènent toujours à la forme: **V=πhC**
C pouvant être considéré comme le carré du diamètre moyen du tonneau.

Citons les quatre formules suivantes:

$$V=\frac{\pi h}{4}\left(\frac{5D+4d}{9}\right)^2 \qquad \text{(Larousse 1931)}$$

$$V=\pi h\left[\frac{d}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right)\right]^2 \qquad \text{(Petit Larousse 1993)}$$

$$V=\frac{\pi h}{4}\left[\frac{5D+3d}{8}\right]^2 \qquad \text{(formule de Dhez)}$$

$$V=\frac{\pi h}{4}\left(\frac{2D^2+d^2}{3}\right)$$

Si D=d le "tonneau" est un cylindre et les quatre formules donnent: $\frac{\pi h D^2}{4}$

Si d=0 et h=D le "tonneau" est une sphère et on trouve dans l'ordre: $\frac{25\pi D^3}{364}$., $\frac{\pi D^3}{9}$, $\frac{25\pi D^3}{256}$, $\frac{\pi D^3}{6}$.

Si D=0 le "tonneau" est un cône à deux nappes (sablier) et on trouve dans l'ordre: $\frac{4\pi h d^2}{81}$, $\frac{\pi h d^2}{36}$, $\frac{9\pi h d^2}{256}$, $\frac{\pi h d^2}{12}$

La dernière formule semble donc posséder un caractère de généralité que les autres n'ont pas puisqu'elle est la seule à donner les volumes exacts de ces trois solides. On l'appelle actuellement la formule des trois niveaux.

Où l'on apprend l'histoire mouvementée de la formule

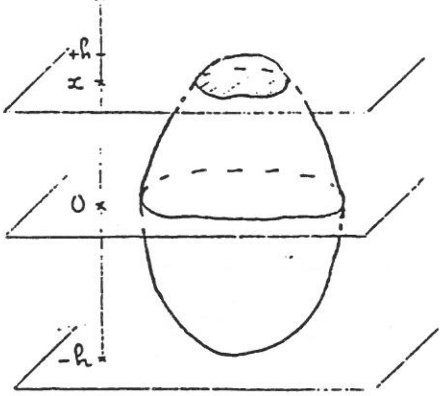
Plusieurs fois oubliée puis redécouverte cette formule apparait à différentes époques.On la trouve une première fois dans le Lilavati de Bhaskara (XII siècle).
Dans un grand ouvrage sur la géométrie du solide (Nova stereometria doliorum) publié en 1615,Képler donne la formule à propos du jaugeage des tonneaux.Elle a aussi été donnée par Toricelli en 1644.

Newton a montré dans son Methodus differentialis comment on peut calculer approximativement un segment solide au moyen de plusieurs sections parallèles et en particulier avec la formule des trois niveaux.Mac Laurin (Fluxions 1742) complétant le travail de Newton a fait apparaitre que la dite formule donne exactement le volume cherché lorsque l'aire de la section située à une distance x de l'une des bases est une fonction entière de x (polynôme) ne dépassant pas le troisième degré (cf § suivant).Plus tard Simpson retrouva les résultats de Newton et de Mac Laurin.

Enfin au milieu du XIX siècle la formule fut à nouveau redécouverte,d'une part par Sarrus suite à une question d'un tonnelier,d'autre part par Baillargé qui lui donna le nom de formule universelle prismoidale du cubage de tous les corps.(cf coupure de presse en fin d'article).

Où l'on découvre les conditions de validité de la formule

Dans le bulletin de mathématiques spéciales de 1896 Niewenglowski a découvert tous les solides dont le volume peut être exprimé par la formule des trois niveaux.



Soit f(x) l'aire de la section découpée dans le solide par un plan parallèle aux bases et situé à une distance algébrique x du plan équidistant des bases.
Supposons que f soit une fonction continue,le volume du solide,en désignant par 2h sa hauteur,est alors:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \text{ ou } F(h)-F(-h)$$

F étant une primitive de f.

La formule des trois niveaux est applicable si et seulement si:

$$F(h)-F(-h) = (h/3)(f(h)+f(-h)+4f(0))$$

Sachant que $F'=f$ et en posant $A=f(0)$,l'équation s'écrit:

$$F(h)-F(-h) = (h/3)(F'(h)+F'(-h)+4A)$$

Avec le changement de variable:$y=F(h)-F(-h)$,elle devient:

$$3y=h(y'+4A)$$

dont les solutions sont de la forme: $y=2Ah+(2/3)Bh^3$,

B désignant une constante arbitraire.En dérivant on obtient:

$y'=2A+2Bh^2$ ou encore: $f(h)-A-Bh^2+f(-h)-A-Bh^2=0$

Cette dernière équation signifie que la fonction I définie par $I(h)=f(h)-A-Bh^2$ doit être impaire.

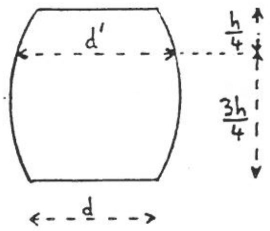
Réciproquement on vérifie sans peine que toute fonction f de la forme: $f(h)=A+Bh^2+I(h)$ où A et B sont des constantes et I une fonction impaire continue,vérifie l'équation initiale.

Remarquons en particulier que la formule des trois niveaux est applicable aux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à trois (résultat découvert par Mac Laurin).

Où l'on se pose des questions d'unicité

Existe-t-il d'autres formules à trois niveaux? Revenons un instant au calcul du volume d'un tonneau et considérons la formule suivante:

$$V=\frac{\pi h}{8}\left(\frac{2d^2}{9}+\frac{16d'^2}{9}\right)$$



où d désigne le diamètre commun des deux bases et d' le diamètre de la section prise au quart de la hauteur h.
On vérifie facilement que cette formule est applicable au cylindre, au cône à deux nappes et à la sphère.
Est elle applicable à d'autres solides?

Pour répondre à cette question il faut formuler en termes mathématiques le problème.
Soit F un ensemble de fonctions continues, h un réel donné trouver tous les réels $r \in]-h;h[$, k, l, m tels que:

pour tout $f \in F$ $\displaystyle\int_{-h}^{h} f(t)dt = kf(h)+lf(-h)+mf(r)$ (E)

On peut donner une réponse à ce problème lorsque F est l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n avec n=2 ou n=3.

<u>Etude du cas n=3</u>
L'égalité (E) doit être vérifié en particulier pour

$f(t) = (t^2-h^2)(t-r)$ ce qui donne: $(4/3)rh^3 = 0$ d'où $r = 0$

Sachant cela on détermine k en écrivant l'égalité (E) pour $f(t) = (t+h)t$ et l'on trouve $k = h/3$
De la même façon on trouve $l = h/3$ et $m = 4h/3$ en utilisant $f(t) = (t-h)t$ et $f(t) = (t-h)(t+h)$.
On retrouve donc dans ce cas la Formule des trois niveaux.
On peut alors conclure que celle-ci est la seule applicable à un ensemble de fonctions contenant les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

<u>Etude du cas n=2</u>
Le problème est équivalent à la résolution du système suivant

$$kh^2+lh^2+mr^2 = (2/3)h^3$$
$$kh-lh+mr = 0$$
$$k+l+m = 2h$$

que l'on obtient en écrivant l'égalité (E) successivement

pour $f(t) = t^2$, $f(t) = t$, $f(t) = 1$.

Relativement aux inconnues k,l,m on a un système de Cramer

puisque le déterminant $\begin{vmatrix} h^2 & h^2 & r^2 \\ h & -h & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

qui est égal à $2h(r^2-h^2)$,est toujours différent de zéro.
Pour chaque valeur de r il existe donc un triplet (k,l,m) unique répondant au problème.
Par exemple pour $r=(h/2)$ on trouve: $k=-\frac{h}{3}$ $l=\frac{5h}{9}$ $m=\frac{16h}{9}$

c'est pourquoi la formule proposée au début de ce paragraphe est applicable à tout "tonneau" dont l'aire de la section située à une distance x des bases est une fonction polynôme en x de degré inférieur ou égal à deux.Ce qui est le cas du cylindre,du cône et de la sphère.

Pour terminer donnons une interprétation élégante des résultats précédents en termes d'algèbre linéaire.
On sait que l'ensemble P_n des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel sur R de dimension n+1.Les applications suivantes de P_n vers R

$u: f \longmapsto f(h)$ $\qquad v: f \longmapsto f(-h)$

$w: f \longmapsto f(r)$ $\qquad I: f \longmapsto \int_{-h}^{h} f(x)dx$

sont des formes linéaires dont l'ensemble est un espace vectoriel (noté P_n*) appelé dual de P_n et qui a la même dimension que P_n.
Dès que $n \geqslant 2$,la famille (u,v,w) est libre.Pour n=2 elle forme donc une base de P_n* et par conséquent I est une combinaison linéaire de u,v,w.Pour n=3 on a prouvé ci-dessus que la famille (u,v,w,I) est lié si et seulement si r=0.

Philippe Deleham & Patrick Perrin

IREM de REIMS

Sources:
E.Fourrey Curiosités géométriques Vuibert 1938
Goulard Sur la formule des trois niveaux Mathésis 1897
J.L.Ovaert & J.L.Verley Algèbre vol.1 Cedic Nathan

Annexe:
Le Stereometricon Baillairgé
Extrait du Québec Daily Mercury 20 Mars 1872

LE STEREOMETRICON BAILLAIRGÉ.

MEMBRE TITULAIRE DE LA SOCIÉTÉ DE VULGARISATION POUR L'ENSEIGNEMENT DU PEUPLE EN FRANCE, ETC., ETC.

Treize médailles d'honneur et dix-sept diplômes de France, Russie, Italie, Belgique, du Canada, du Japon, etc. (*Breveté au Canada, aux Etats-Unis et en Europe.*)

Le tableau est un cadre de 5 pieds de longueur sur 3 pieds de largeur et quelques pouces d'épaisseur, avec panneau ou couvercle vitré et articulé, fermant à clef, de manière à exclure la poussière, tout en exhibant et donnant accès à quelque 200 modèles (en bois franc, polis, vernis ou huilès à demande) de toutes les formes élémentaires géométriques et autres que l'on puisse concevoir. Chaque modèle est simplement attaché au tableau par une tige en fil de fer qui permet à l'élève et au professeur de l'en détacher et replacer à volonté.

L'usage du tableau, avec le traité qui l'accompagne, réduit toute la science ou l'art du toisé, du travail d'une année à celui d'une journée, et simplifie à tel point l'étude et l'enseignement de la géométrie dans l'espace (géométrie des solides, des corps ou des volumes) la nomenclature des formes géométriques et autres, le développement des surfaces, la projection géométrique et la perspective, les surfaces planes et convexes, la géométrie et la trigonométrie sphériques, et le toisé des surfaces et des volumes, que l'on peut maintenant enseigner les différentes branches ci-dessus énumérées dans les écoles même élémentaires et dans les couvents, où il eut été oiseux d'y songer auparavant.

Chaque tableau est accompagné, au besoin, d'un traité qui explique le mode de mesurage par la "formule prismoïdale" et qui décrit le solide, sa nature, sa forme, ses bases opposées et la nature de sa section centrale.

—

L'on demande des agents pour la vente du Tableau ici et à l'étranger.

Pour trouver le volume d'un corps quelconque.

RÈGLE : A la sommes des surfaces des extrémités parallèles, ajouter quatre fois la surface au centre, et multiplier le tout par la sixième partie de la hauteur ou longueur du solide.

LE STEREOMETRICON **BAILLAIRGE** STEREOMETRICON

Breveté au CANADA aux ETATS-UNIS et en EUROPE.

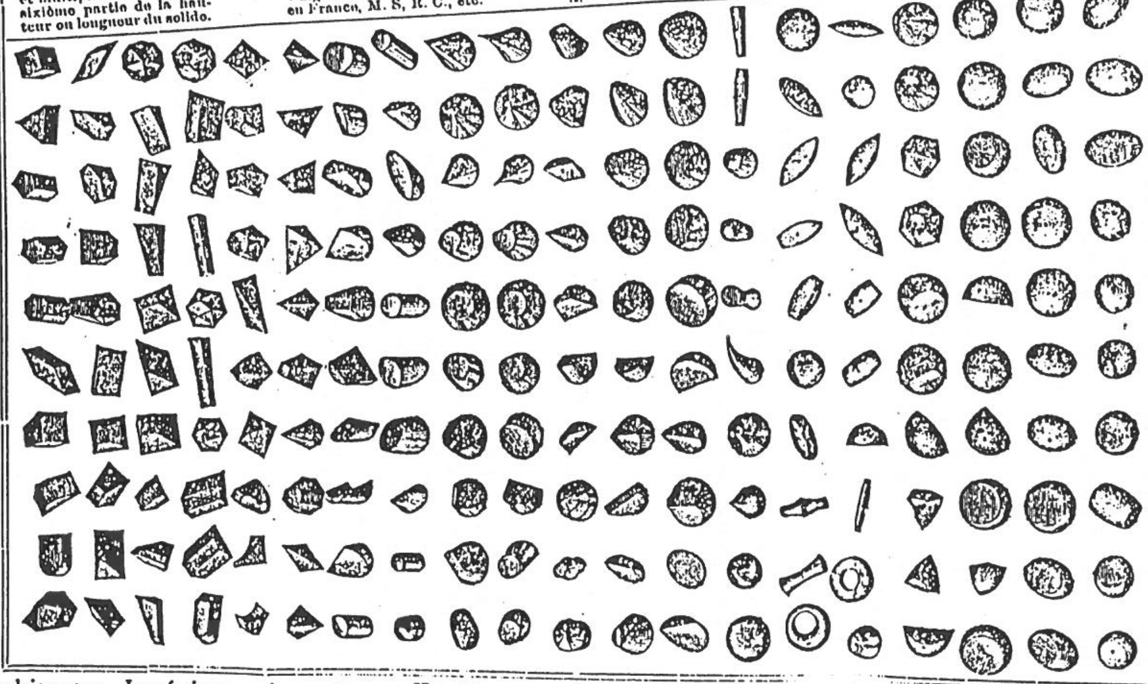
Membre Titulaire de la Société pour la Vulgarisation de l'Education en France, M. S, R. C., etc.

Patented in CANADA in the UNITED STATES and in EUROPE.

Honorary Member of the Society for the Generalization of Education in France, F. R. S. C., etc.

To find the solid content of any body.

RULE : To the sum of the parallel end areas, add four times the middle area, and multiply the whole by one sixth part of the height or length of the body.



Approuvé par le Conseil de l'Instruction Publique de la Province de Québec, et déjà adopté et commandé par un grand nombre d'institutions d'éducation et autres, tant ici qu'à l'étranger. Pour informations et certificats, s'adresser à l'auteur.

C. BAILLAIRGÉ,

QUÉBEC,

CANADA.

Membre Titulaire de la Société pour la Vulgarisation de l'Education en France, etc.

—

SOUSCRIPTEURS.

L'Archevêque de Québec, l'Evêque de Rimouski, l'Evêque de Kingston, l'Evêque de St. Hyacinthe, l'Ecole des Arts et des Sciences, l'Université Laval, le Séminaire de Québec, les Colleges d'Ottawa, Nicolet, Rimouski, Montmagny, St. Michel, etc., l'Ecole Normale Laval, les Ecoles des Frères, l'Académie Commerciale, le Bureaux des Arpenteurs, le Département d'Education, Nouveau-Brunswick, la Corporation de Québec, R. Hamilton, Ecr., F. N. Martin et C. Roy, Ingenieurs Civils, etc. La Société pour la vulgarisation de l'Enseignement du Peuple, France. F. Peachy, J. Lepage, etc., Architectes, N. Piton, T. Maguire, J. Marcotte, constructeurs, le Conseil de l'Instruction Publique, Q. l'Ecole Normale Jacques Cartier, M. Piton Manitoba, le Collége d'Aylmer, L'Assomption, Ste. Anne de la Pocatière, St. Hyacinthe, le High School, Q., le Collége Morin, Q., l'Académie de Lafrance, Q., Bureau du Gouvernement, Q., Couvent des Ursulines, Couvent du Bon Pasteur, Sœurs Grises, Sœurs de la Congrégation, Sœurs de Jésus-Marie, Q., etc. M. S. W. Townsend, Hamilton, etc.

Etc., Etc., Etc.

A l'usage des Architectes, Ingénieurs, Arpenteurs, Etudiants et Apprentis, Officiers de Douane et d'Accise, Professeurs de Géométrie et de Mathématiques, Universités, Colléges, Séminaires, Couvent et autres Etablissements d'Education, Ecoles des Arts et du Dessin, Mécaniciens, Mesureurs, Jaugeurs, Constructeurs de navires, Contracteurs, Artisans et autres du Canada et à l'Etranger.

La lecture de M. Baillairgé, mercredi dernier au soir, devant la Société Littéraire et Historique de Québec, a démontré encore une fois combien peut devenir intéressant, même dans un sens populaire, un sujet d'ailleurs sec et abstrait, quand il est habilement traité.

Le lecteur montra le rapport de la Géométrie à toutes les industries de la vie. Il en fit remonter l'origine à l'antiquité la plus éloignée et en suivit le développement graduel jusqu'à nos jours. Il démontra comment elle est la base de tous nos travaux publics et combien nous lui devons pour tous les arts, de construction : ses rapports avec la mécanique, l'hydraulique, l'optique et toutes les sciences physiques. La plus belle moitié du genre humain, dit M. B., à la perception la plus vive et la plus juste des avantages et des beautés de la géométrie, comme cela se manifeste dans les combinaisons toujours variées et si finement imaginées de leurs dessins pour les ouvrages à l'aiguille, leurs dentelles, et leurs broderies. Il montra ses rapports avec la chimie dans la cristallisation et la polarisation : avec la botanique et la zoologie dans les lois de la morphologie ; avec la théologie, et ainsi de suite. En partant du cercle et des autres sections coniques, il fit une comparaison vraiment poétique entre l'ingénieur qui trace ses courbes dans les bois et sur les eaux de la terre, et l'astronome qui décrit ses vastes circuits au milieu des forêts étoilées des cieux. La parabole fut entièrement expliquée dans son application au jet des projectiles de guerre, aussi en ce qui concerne les jets d'eau, le porte-voix, le miroir et le réflecteur qui, dans les phares, réunit, pour ainsi dire, tous les rayons de lumière en un faisceau, et les lance à la fois au service de l'humanité. En parlant de l'ellipse cette courbe presque magique décrite dans les cieux par chaque planète qui tourne autour du soleil, par chaque satellite autour de sa planète primaire, il fit allusion au plus beau de tous les ovales—la figure gracieuse de la femme. Il montra comme la réapparition d'une comète peut maintenant être annoncée pour le jour même où elle devra paraître, et cela après une absence d'un siècle, et comment dans les siècles passés, quand ces phénomènes n'étaient pas prédits, ils surgissaient brusquement dans le monde, portant partout et créant l'anxiété, la consternation la plus vive, comme si tout allait finir.

En un mot, M. Baillairgé parcourut le vaste champ du mesurage et de la géométrie, plane et sphérique, véritable tour de force pour une seule lecture. Il intéressa si vivement son auditoire pendant deux heures que le président, M. Anderson, fit remarquer que ces deux heures lui avaient à peine paru une heure ; et nul doute qu'il en était de même pour toutes les autres personnes puisque M. Wilkie, en secondant le vote de remerciments proposé par le Capt. Ashe, fit allusion au plaisir avec lequel il avait écouté la lecture, comme, disait-il, s'il eût entendu de la poésie au lieu de l'aride sujet qu'il avait entrevu dans le titre.

M. Baillairgé expliqua ensuite en détail son tableau stéréométrique que nous espérons voir bientôt introduit dans toutes les écoles de cette Puissance. Il montra combien ce tableau contribuerait à abréger le temps jusqu'à présent consacré à l'étude des solides et même à celles des surfaces planes et convexes, de la trigonométrie sphérique, de la projection géométrique, de la perspective, du développement des surfaces, des ombres et des ombrages, et ainsi de suite. M. Wilkie, en autant qu'il lui avait été possible de vérifier les calculs corrobora l'avancé de M. B., concernant l'énorme économie de temps, où beaucoup de problêmes abstrus qui exigeaient généralement des heures ou des jours de travail avant d'en trouver la solution, peuvent maintenant (si la règle, est d'une application aussi générale, comme M. Baillairgé l'assume, et comme cela a été certifié par une foule de personnes dans des témoignages sous leur propre signature) à l'aide de la nouvelle formule et du tableau, être résolue en autant de minutes ; pour ne rien dire de l'utilité des modèles pour communiquer d'un seul coup d'œil une connaissance de leur nomenclature ou de leurs noms, et familiariser avec leurs formes et leurs figures variées. Il montra comment les modèles suggèrent à l'architecte et à l'ingénieur, au constructeur et à l'ouvrier, les formes et les proportions relatives de bâtisses, toits, dômes, jetées et quais, citernes et réservoirs, chaudières, cuves, futailles, tonneaux et autres vaisseaux de capacité, terrassements de toutes sortes, comprenant les déblais et remblais pour voies ferrées, et autres, le fût de la colonne Grecque ou Romaine, le plançon écarri ou à faux bois, le bois en grume, le billot, la tente à camper, l'ouverture ébrasée ou non d'un chassis, d'une porte, la meurtrière ou meurtrière dans une muraille, la voûte du rond point d'une église ou d'une salle, la bille du billard, le boulet, ou, sur une plus grande échelle, la Lune, la Terre, le Soleil, les Planètes.

Nous pouvons ajouter que le Ministre de l'Education du Nouveau Brunswick a envoyer à M. Baillairgé une commande pour un tableau dans le but d'introduire ce système dans toutes les écoles de cette province ; et M. Vannier, en écrivant de France, à M. Baillairgé, le 6 janvier dernier, pour l'informer de l'octroi de lettres-patentes pour ce pays, dit que MM. Humbert & Noé, le Président et le Secrétaire de la Société pour la généralisation de l'éducation en France, ont exprimé leur intention, de lui conférer, à leur prochaine assemblée générale, quelque marque de distinction pour les services que son intervention et sa découverte vont rendre à l'éducation. M. Giard, en écrivant à M. Baillairgé, de la part de l'Hon. M. Chauveau, Ministre de l'Instruction Publique, dit : " Il se fera un devoir " d'en recommander l'adoption dans toutes les maisons " d'éducation et dans toutes les écoles." Du Séminaire et de l'Université-Laval, M. Maingui écrit : " Plus on " étudie, plus on approfondit cette formule du cubage " des corps, plus on est enchanté de sa simplicité, de " sa clarté et surtout de sa grande généralité." Le Rév. M. McQuarries, B. A. " sera enchanté de voir les " vieux et ennuyeux procédés remplacés par une for- " mule aussi simple et aussi exacte." Newton, de Yale Collége, Etats-Unis, : " considère ce tableau un " arrangement des plus utiles pour démontrer la va- " riété et l'étendue des applications de la formule." Le collége de l'Assomption " adoptera le système de " M. Baillairgé comme partie de son cours d'instruc- " tion." M. Wilkie a écrit à l'auteur que " la règle " est précise et simple, et abrégera considérablement " les procédés de calcul." Le tableau, dit ce juge " compétent, " comprenant une grande variété de mo- " dèles élémentaires servira admirablement à former " l'œil et devra faciliter considérablement l'étude du " toisé des corps."

M. Wilkie dit encore : " Le gouvernement rendrait " un véritable service aux écoles d'un ordre moyen ou " élevé en leur procurant une collection aussi ins- " tructive."

Il y a d'autres personnes qui sans considérer l'exactitude comparative de la formule, ou de ses avantages dans son application au simple mesurage, sont frappées du fait que les modèles sont de beaucoup plus instructifs pour l'élève et le maître que leur simple représentation sur un tableau ou sur le papier, et qui, dans leurs opinions écrites, ont fait surtout allusion à ce trait du système proposé. M. Joly, Président de la Branche de Québec de l'école des Arts de Montréal, dans une lettre sur le sujet à M. Weaver, Président du Bureau, et après avoir été lui-même témoin de ses avantages dans plus d'une occasion, dit dans son style expressif, " la différence est énorme." Le Professeur Toussaint de l'Ecole Normale, Dufresne, de l'Académie de Montmagny, Boivin de St. Hyacinthe et beaucoup d'autres sont de la même opinion, parmi eux MM. R. S. M. Bouchette, O'Farrell, Fletcher, St. Aubin, Steckel, Juneau, Verner, Gallagher, Lafrance, et le frère Anthony, etc. On ne peut non plus oublier que les professeurs de l'Université-Laval, après avoir lu l'énoncé de la formule de M. B., comme il est donné dans son traité de 1866, s'exprimèrent ainsi : " Un doute involontaire s'empare d'abord de l'esprit, lorsqu'on lit le No. 1521 ; mais un examen attentif des paragraphes suivants, dissipe bientôt ce doute et l'on reste étonné à la vue d'une formule, si claire, si aisée à retenir et dont l'application est si générale. M. Fletcher, du Département des Terres de la Couronne, dit : " J'ai comparé, pour plusieurs solides, les résultats " obtenus par votre mode de calcul avec ceux des pro- " cédés ordinaires beaucoup plus longs, et je vous féli- " cite sincèrement sur votre énoncée d'une formule " aussi brève que simple dans son caractère, et aussi " précise que satisfaisante dans ses résultats."

M. Baillairgé prit aussi occasion dans sa lecture de faire allusion sous d'autres rapports, à son traité de Géométrie et de Toisé, dans lequel il fit voir qu'il a introduit beaucoup de modifications importantes dans le mode ordinaire de traiter le sujet de la géométrie et de la Trigonométrie plane et sphérique. En terminant nous devons ajouter que le conseil de l'Instruction Publique, à sa dernière réunion, a nommé un comité, composé de l'Archevêque de Québec, et des Evêques Langevin et Larocque, qui devra faire rapport au Conseil à sa prochaine assemblée générale en juin, et qui, on ne peut en douter, après les témoignages si nombreux et si flatteurs concernant l'utilité et les nombreux avantages du tableau stéréométrique pour des fins d'éducation, ne pourra qu'en recommander et conseiller l'adoption dans toutes les écoles de la Puissance.


IOHANNES WALLIS S.T.P. GEOMETRIÆ PROF. SAVILIANUS OXON. REG. MAJ.tis A SACRIS REGALIS SOCIET. LOND. SODALIS
D. Loggan ad vivum delin.
M Burghers sc

John WALLIS

Né à Ashford en 1616 est mort à Londres en 1703; élève de l'université de Cambridge il fit des études de philologie, philosophie, théologie, mèdecine et Mathématiques, il fut un très bon calculateur ce qui transparait dans toute son oeuvre ; il fut un des fondateurs de la Société Royale de Londres. Ses travaux mathématiques occupent plus de 2 gros volumes sur les 3 publiés de ses Opera Mathématica en 1697 - 1699.

L'extrait publié ici provient de l'une de ses oeuvres, considérée comme la plus importante, l'ARITHMETIQUE DES INFINIS publiée d'abord en 1656 à une époque ou le calcul différentiel n'était pas encore inventée.

Ici WALLIS calcule l'aire sous la parabole, $y=x^2$ en notation moderne, et l'aire limité par la spirale d'Archimède, cette dernière obtenue par le deplacement uniforme d'un point sur une droite, qui tourne uniformément autour d'un point.

ARITHMETIQUE DES INFINIS

John WALLIS 1655

PROP XIX

Lemme

SI on considère la suite des quantités en raison doublée Arithmético-proportionnelle(1), (ou bien la suite des nombres carrés) croissante de façon continue d'un point ou bien de 0 pour le début (je calcule de la sorte 0, 1, 4, 9, &c) il est proposé de rechercher, quelle raison à celle-ci à la suite identiquement égale au plus grand terme.

Soit la recherche par le moyen de l'induction (Comme dans la prop 1), on aura

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18} \qquad \frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

Et ainsi de suite.

La raison se développant est partout plus grande que le sous triple, ou si vous voulez $\frac{1}{3}$. Mais l'excès décroit continuellement, selon que le nombre de termes augmente; je calcule $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, &c; certes le dénominateur de la fraction augmente, ou bien celui adjoint à la raison, en chaque terme d'un nombre composé de 6, (ainsi qu'il parait) de sorte que l'excès du nombre se développant au dessus du sous-triple, est celui qu'a l'unité au sextuple du nombre de termes après 0. Et donc ———

PROP XX

Thèoreme

SI on propose la suite des quantités en double raison Arithmétique-proportionnelle (ou bien la suite des nombres carrés) continuellement croissante, d'un point ou bien 0 comme début; le rapport qu'a celle-ci à la suite identiquement égale au plus grand, surpassera la sous-triple, et l'excès sera, ce rapport qu'a l'unité au sextuple du nombre de termes après 0; ou bien, qu'a la racine carré du premier terme après 0, au sextuple de la racine carré du plus grand terme.

J'estime (si le premier terme après 0 est fixé à 1, & la racine du dernier k,) $\frac{k+1}{3}k^2 + \frac{k+1}{6k}k^2$. Ou (ayant posé pour m le nombre, ou bien la quantité des termes), & k pour le dernier coté [la racine du dernier]) $\frac{m}{3}k^2 + \frac{m}{6m-6}k^2$.

C'est manifeste par la proposition précédente.

Et avec le nombre croissant de termes, cet excès au dessus du sous triple diminue ainsi de façon continue de sorte qu'enfin il sort plus petit qu'une quantité assignable à volonté, (comme il est manifeste;) si on progresse vers l'infinie, il s'évanouit tout à fait. Et donc ———

PROP XXI

Théorème

SI est proposée la suite infinie des Quantités en double raison Arithmético-Proportionnelles (ou bien la suite des nombres carrés) croissante de façon continue, commençant d'un point ou bien de 0; celle-là sera à la suite identiquement égale au plus grand, comme 1 à 3.

C'est manifeste d'après ce que prècède.

PROP XXII

Théorème

POur cette raison le Cône ou la Pyramide par rapport au Cylindre ou au Prisme (sur une base identique ou égale avec la même hauteur) est comme 1 à 3.

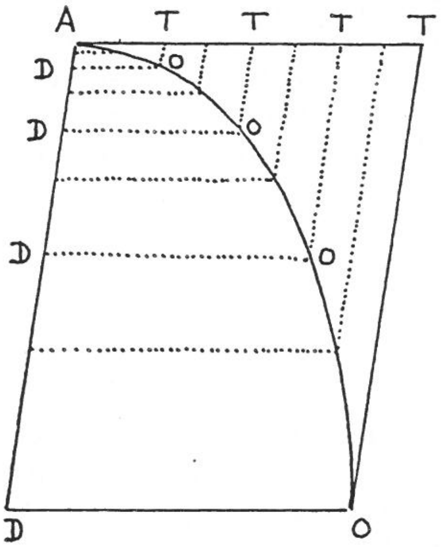
En effet nous supposons autant le Cône que la Pyramide composés d'une infinité de plans semblables et parallèles, en double raison Arithmético-proportionnelle déterminée, dont le plus petit est supposé un point, et le plus grand la base (par ce que nous disons à la Prop 6. des Sect. Con.); le Cylindre ou le Prisme, par des plans partout égaux au plus grand (comme il est manifeste:) Le rapport est donc comme 1 à 3 par la Prop. précédente.

PROP XXIII

Corollaire

DE même le complément de la Semi-parabole, (Comprends la figure AOT qui avec la semi-parabole elle-même remplit le Parallélogramme,) est au Parallélogramme TD (sur celui-là même ou bien ayant une base égale sur une hauteur égale) comme 1 à 3. (Et en conséquence, la semi-parabole elle-même est au même Parallélogramme, comme 2 à 3.)

Soit enfin la figure AOT de sommet A , de diamètre AT, de base TO, et à celle-ci parallèle autant que l'on voudra (entre la base & le sommet) TO, TO, &c. Puisque (par la prop. 21 Con. Sect.) les droites DO, DO, &c sont en raison sous-doubléesdes droites AD, AD, &c. Par contre les droites AD, AD, &c elles-mêmes, c'est à dire TO, TO, &c seront en raison doublées de DO, DO, &c elles-mêmes c'est à dire de AT, AT, &c. Donc toute la figure AOT (étant composée des droites infinies en nombre TO, TO, &c. en double raison des droites AT, AT, &c. Arithmétiquement proportionnelles) sera au Parallélogramme également élevé TD (étant composé par autant de droites égales à la plus grande des TO) comme 1 à 3 par la prop. 21. (Ce qui devait être prouvé) Et conséquemment, la semi parabole AOD (ce qui reste du parallélogramme) au même Parallélogramme, comme 2 à 3.(2)

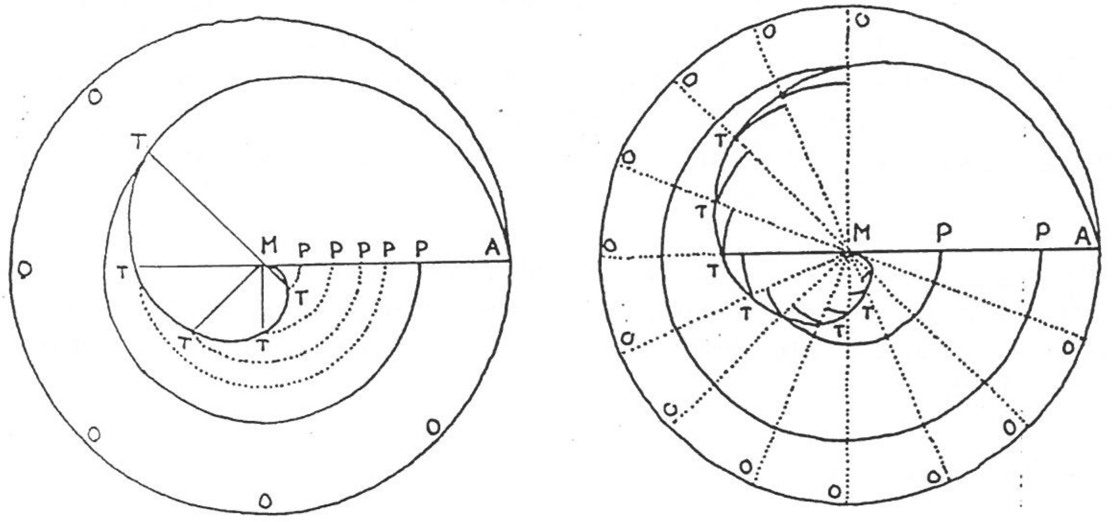


PROP XXIV

Corollaire

DE même la figure MTM, qui est limitée par la Spirale MT (Commencant à l'origine de la Spirale) et la droite MT; est au

Secteur correspondant PMT; comme 1 à 3.[3]



En effet (comme nous avons dit à la Prop. 5.) nous supposons cette Figure MTM composée par une infinité de Secteurs semblables, dont les rayons sont Arithmético-proportionnels, pour cette raison les Secteurs eux-mêmes en doubles raison Arithmético-proportionnelles (bien sûr de leur côtés;) Quant au secteur PMT il est pris parmi tous les secteurs égaux aux plus grand: En conséquence cette figure là sera à celle-ci comme 1 à 3 par la prop. 21.

Et j'appelle ici par le nom de Secteur, aussi l'aggregat[4] en tel nombre qu'on voudra de Secteurs; il est permis d'égaler le demi-cercle (ou même le cercle entier) ou bien même de le surpasser; (comme nous avons averti au-dessus au sujet de l'appellation d'Angle, à la prop. 5).

NOTES

(1) <u>raison</u> Le mot est traduit du latin *ratio* comme "rapport" avec un sens assez général d'ailleurs de "mettre en relation" ici par exemple des longueurs ou des nombres, on retrouve ici les rapports des longueurs des segments de la Géometrie Grecque d'Euclide (livre V) que Wallis et la plupart des Mathématiciens de l'époque d'ailleurs connaissaient parfaitement.

On pourra comprendre y *en raison de x* comme $y = kx$, y *en raison doublée de x* comme $y = kx^2$ et enfin y *en raison sous doublée de* x comme $y = k\sqrt{x}$

Donc une *suite de quantités en raison arithmético-proportionnelle* correspond actuellement à une suite arithmétique $an+b$, $n \in N$; et une *suite de quantités en raison doublée arithmético-proportionnelle* est donc de la forme $(an+b)^2$.

(2) La surface ATOD est supposée constituée d'un infinité de lignes parallèles à AD et placées les unes à côté des autres à intervalles réguliers et très proches, connaissant la limite de la somme des longueurs des lignes TO sur autant de lignes AD Wallis en déduit l'aire ATO; c'est un raisonnement caractéristique de la théorie des indivisibles, née en Italie avec Galilée et Cavalieri dans la première moitié du XVI^{eme} siècle.

(3) Spirale Il s'agit ici de la Spirale d'Archimède (remarquer la référence au Anciens) obtenue par le déplacement uniforme d'un point sur une droite, cette dernière tournant à vitesse uniforme autour d'un point fixe

(4) Aggrègat = Somme.

BIBLIOGRAPHIE

Origine Du Texte:

Arithmetica Infinitorum 1655 in
OPERA MATHEMATICA Johannis WALLIS 1695

Pour la vie de WALLIS:
Histoire abrégée des sciences Mathématiques Maurice D'OCCAGNE
VUIBERT 1952

Sur le livre 5 d'EUCLIDE on pourra consulter:
NOMBRES, MESURE ET CONTINUE. Epistémologie et histoire
Jean DHOMBRES CEDIC/FERNAND NATHAN.

Sur la théorie des indivisibles (Galilée, Cavaliéri, Toricelli ...):
L'article de François DE GANDT dans FRAGMENT D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES II :BROCHURE A.P.M.E.P. N°65 1987

Traduction:
JClaude PENIN
Groupe Histoire Des Math.
IREM De REIMS

Compte rendu d'une séquence
faite en Terminale Scientifique, portant sur l'introduction du calcul des dérivées à partir d'un extrait de l'ouvrage du Marquis de l'Hospital :
Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1697.

On y trouvera d'abord les deux questionnaires données aux élèves, puis le texte du Marquis de l'Hospital, et enfin quelques commentaires sur le déroulement de la séquence.

Jean Claude Penin

QUESTIONNAIRE 1

Le texte présenté ci-joint est le début d'un ouvrage paru en 1697 et intitulé ANALYSE DES INFINIMENTS PETITS POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES par M^{r} Le Marquis De L'HOSPITAL.

1) Lire le texte du Marquis de l'Hospital jusqu'à la page 6.

2) Qu'est-ce qu'une <u>différence</u> selon le texte (page 2); comment la note-t-il ?

3) Dans la définition II et l'avertissement que suit (page 2) le Marquis De l'Hospital considère une ligne courbe et les quantités x,y,z,t,u. Dans l'exemple considéré ces quantités sont elles variables ? Comment le comprenez-vous ?

4) Dans les pages 2 et 3 comment le Marquis nous explique-t-il ce qu'est une quantité infiniment petite ?
Selon le texte une quantité infiniment petite est elle égale à 0 ?

5) En utilisant la règle I et la proposition I (page 3 et 4) cherchez la différence des quantités suivantes:

$$5+x-y \qquad\qquad y+z-a+b$$

A quoi vous fait penser <u>la différence d'une quantité variable</u> ?

7) Dans la page 5 il explique comment chercher la différence d'une égalité, situez ce passage.
Trouvez les différences de:

$$y=x^3 \qquad y=\frac{1}{x} \qquad y=8x+4$$

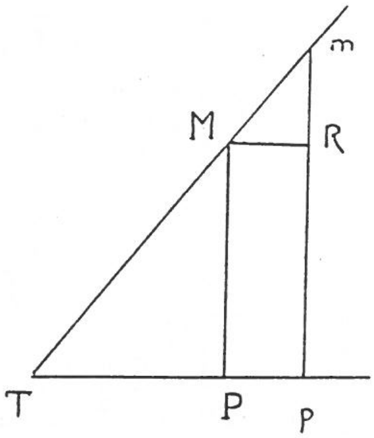
Comment avec les différences de l'Hospital exprimer les dérivées des fonctions:

$$x \longrightarrow x^3; \qquad x \longrightarrow \frac{1}{x} \; ; \quad x \longrightarrow 8x+4$$

<u>Glossaire</u>

Appliquées = Ordonnées
Coupées = Abscisses
$\overline{A+X}$ désigne (A+X)

QUESTIONNAIRE 2



1) Lire le texte du Marquis de l'Hospital page 28 ; 29 ; 30.

2) On supose que TPM est un triangle rectangle en P ; On suppose de plus que MRm est un triangle rectangle en R et que (MR) est parrallèle à (TP).

Montrez par tout moyen à votre convenance que: $\dfrac{mR}{RM} = \dfrac{MP}{PT}$

3) Dans la proposition I (page 11) comment comprenez-vous l'expression de l'Hospital $mR(dy) : RM(dx) :: MP(y) : PT= \dfrac{ydx}{dy}$

4) Dans la remarque page 28 et 29 il parle du signe de PT et de ses conséquences, à quoi cela correspond-il actuellement ?

5) Déterminez la sous tangente à la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$.

6) Soit la courbe d'équation $2x^2+y^2=1$; Calculer selon la méthode de l'Hospital sa sous tangente. En déduire $\dfrac{dx}{dy}$.

7) Dans le dernier paragraphe de la page 13 il dit " *il faut chercher qu'elle doit être la raison de dx à dy en ce point ; car il est visible que cette raison étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diamètre sera aussi déterminé.*"

Comment comprenez-vous cette phrase ?

En déduire pour la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$ la position de la tangente pour x=0.

8) En utilisant la remarque précédente pouvez-vous trouver les coordonnées des points de la courbe d'équation $2x^2+y^2=1$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses puis parallèles à l'axe des ordonnées.

<u>Glossaire</u>

raison = rapport

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les regles de ce Calcul.

DÉFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ses appliquées la droite *PM*; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* sera la difference de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour base l'arc *Mm*, sera la différence du segment *AM*; & le petit espace *MPpm*, celle de l'espace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*. FIG. I.

COROLLAIRE.

I. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'espace mixtiligne* APM, s; *& le segment* AM, t: dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, *& dt celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par éxemple qu'on puisse prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'espace Apm pour l'espace APM, le petit espace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par éxemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités constantes : de sorte que* x *devenant* x + dx ; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* * *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

PROPOSITION I.

Problême.

4. PRENDRE *la différence de plusieurs quantités ajoûtées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la difference. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'est à dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

* Art. 1. viendra alors $y + dy$; & z, $z + dz$; pour la constante a, *elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres, ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera ydx
* Art. 1. $+ xdy + dxdy$, c'est à dire * $ydx + xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car si l'on divise par éxemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx + xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la difference dz

de la ſeconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz ſera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ eſt $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui ſe prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une ſeule quantité. Il en eſt ainſi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres, eſt egale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainſi la différence de ax eſt $xa + adx$, c'eſt à dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ eſt $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car ſuppoſant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, ſoit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'enſuit que leur différence, c'eſt à dire leurs accroiſſemens ou diminutions ſeront auſſi égales entr'elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle. * *Art. 5.*

REGLE III.

Pour les quantités diviſées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque eſt égale au

produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur: le tout diviſé par le quarré du dénominateur.

Ainſi la différence de $\frac{a}{x}$ ſera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ ſera $\frac{adx}{aa + 2ax + xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Premier cas, lorſque la puiſſance eſt parfaite, c'eſt à dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre entier. La différence de xx eſt $2xdx$, de x^3 eſt $3xxdx$, de x^4 eſt $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre choſe que le produit de x par x, ſa différence * ſera $xdx + xdx$, c'eſt à dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre choſe que le produit de x par x par x, ſa différence * ſera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'eſt à dire $3xxdx$; & comme il en eſt ainſi des autres puiſſances à l'infini, il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m ſera $mx^{m-1}dx$. * *Art. 5.*

Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ ſera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorſque la puiſſance eſt imparfaite, c'eſt à dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre rompu. Soit propoſé de prendre la difference de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on ſuppoſera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puiſſance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} ſa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ ſera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés *Mm* du poligone qui compose * une ligne courbe; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*. FIG. 2. * Art. 5.

PROPOSITION I.

Problême.

9. SOIT *une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT. FIG. 3.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diametre au point T, soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x; PM, y; (donc Pp ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR\,(dy) : RM\,(dx) :: MP\,(y) : PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entiérement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT.

REMARQUE.

10. LORSQUE le point T tombe du côté opposé au point A origine des x, il est clair que x croissant, y dimi- FIG. 4.

nue, & qu'il faut changer par consequent * dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où dy se rencontre : autrement la valeur de dx en dy seroit négative; & partant aussi celle de $PT\ (\frac{ydx}{dy})$. Il est mieux cependant, pour ne se point embarasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a prescrites * sans y rien changer; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a supposé en faisant le calcul : & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans. * Art. 8. * Sect. 1.

EXEMPLE I.

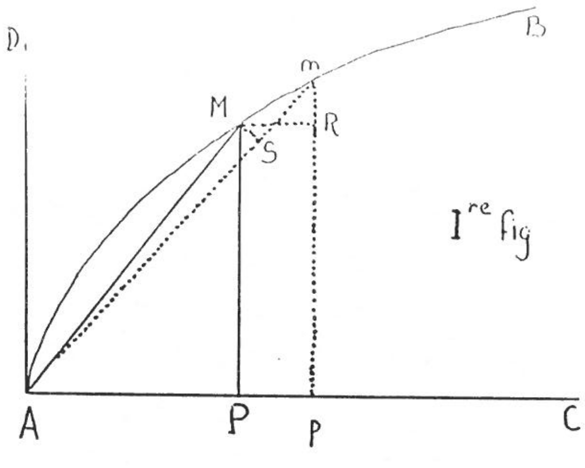
FIG. 3. 11. 1°. SI l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM; la courbe AM sera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy sa valeur ax. D'où il suit que si l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle sera tangente au point M. Ce qui étoit proposé.

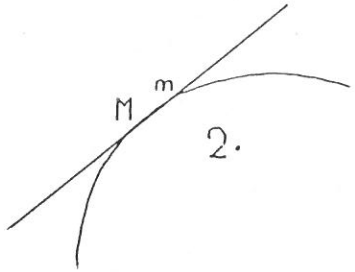
FIG. 4. 2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les asymptotes. On aura en prenant les différences $xdy + ydx = 0$, & partant $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = -x$. D'où il suit que si l'on prend $PT = PA$ du côté opposé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle sera la tangente en M.

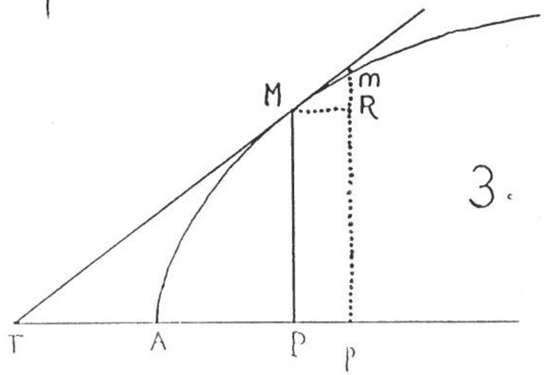
3° Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorsque l'exposant m marque un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = my^m = mx$ en mettant pour y^m sa valeur x.

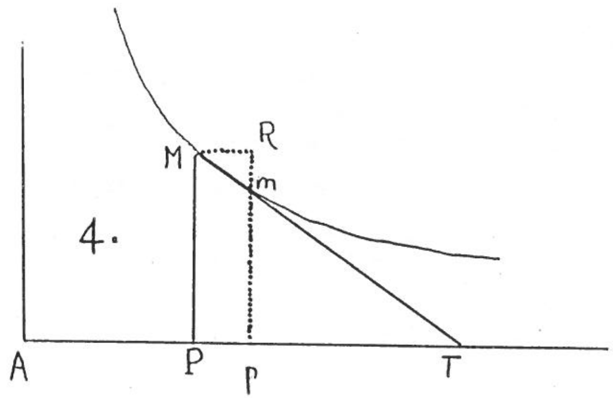
Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation ſera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la ſoutangente $PT = \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation ſera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la ſoutangente $PT = -2x$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raiſon de dx à dy en ce point ; car il eſt viſible que cette raiſon étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diametre ſera auſſi déterminé. On a dans cet éxemple $dx . dy :: my^{m-1} . 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raiſon de dy à dx doit y être infiniment grande lorſque m ſurpaſſe 1, & infiniment petite lorſqu'elle eſt moindre : c'eſt à dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & ſe confondre avec le diametre dans le ſecond.









COMMENTAIRES

Objectifs

1) Introduire et reviser le calcul différentiel

2) Montrer aux élèves un texte de mathématiques de la fin du XVII^{e} et leur dire quelques mots de l'histoire du calcul différentiel et en citer les acteurs principaux (Ceci en 2 ou 3 minutes).

3) Faire redécouvrir aux élèves sous une forme différente de celle utilisée actuellement des résultats qu'en fait ils connaissent déjà (car vus en 1ère)

4) Changer l'ordinaire par quelque chose qui n'est pas au programme du BAC.

5) Faire prendre aux élèves du recul par rapport à ce qu'ils font en mathématiques : j'entends par la que nous utilisons en mathématiques un certain langage et symbolisme assez invariable, ceux de nos élèves qui ont en mal compris certaines articulations majeures ont des difficultés difficilement repèrables ; ces textes que nous leurs offrons usent d'un autre langage, souvent plus concret, voire familier et peuvent les amener à comprendre mieux (là je rêve peut-être...) ce qu'ils font ordinairement.

Déroulement de la première séance

Ce texte et les deux questionnaires furent donnés en classe de Terminale C le Lundi matin de la rentrée des vacances de la Toussaint, les élèves ont ce jour une séquence de 2 heures que je pensais prolonger le lendemain matin. Cette date ne fut pas choisie au hasard, le texte est en effet un peu long et n'intéresse pas directement le BAC, il me semblait qu'il fallait mieux avoir des élèves "frais" car j'allais leur demander un effort dans un domaine à priori non *directement rentable* !

Les élèves ont commencé par lire le texte jusqu'à la page 6 comme c'est demandé dans le questionnaire n°1.
Des mots non prévus dans le glossaire donné m'ont été demandés ainsi par exemple le mot *quantité* que je pensais être clair.
Pour la façon de différencier le Marquis semble avoir été très convaincant
et ils ont facilement traité les exercices des questions 5), 6) et 7) du questionnaire ; le rapprochement avec les dérivées n'a pas fait de

problème.

Pendant toute cette première séquence les élèves ont été attentifs et ont paru intéresses .

Déroulement de la deuxième séance

La deuxième séquence a eu lieu le lendemain matin, j'ai alors la classe en demi-groupe 1 heure chacun : nous avons donc entamé le questionnaire n°2 dans lequel ont été traité les 6 premières questions, la 7ème n'ayant pu qu'être ébauchée.

La 2ème a été résolue avec le théorème de Thalès.

la 3ème malgrè la notation n'a pas posée de problème particulier, notation qu'il ont accepté d'ailleurs facilement.

Dans la 4ème je voulais qu'il me dise que le signe de PT correspond actuellement au sens de variation de la "fonction" mais ce n'est pas venu !

Le résultat de la 5ème les a fort étonné : La sous tangente à cette parabole étant le double de l'abscisse ! certains m'ont demandé si c'était vrai pour toute les fonctions.

Bilan

Ce texte a permis d'illustrer une notion que l'on ne voit pas en Math. (Mais en Physique...) c'est celle d'INFINIMENT PETIT et en particulier de les manipuler, de les voir agir si j'ose dire, de les voir constituer ce fameux triangle caractéristique (page 11) par qui nous avons du mal à faire passer la notion de différentielle. Le fait de considérer une courbe comme un polygone d'une infinité de cotés (page 3) me parait intéressant vis à vis des élèves.

Le texte a intéressé les élèves et ils ont tous joué le jeu, bien que le texte fut un peu long ; un élève m'a dit que cela changeait de l'ordinaire.

Le marquis de l'Hospital semble par ses arguments avoir complètement convaincu les élèves et aucun n'a posé de question relativement au fait de ce que pouvait être dx ou dy quant à leur nature exacte, ainsi ils ont très bien accepté la demande du bas de la page 2 qui permet de gérer l'utilisation de ces infiniments petits, et le fait d'èliminer dxdy dans la différentiation de xy leur a paru naturel!

GERBERT (938-1003)

Né en Auvergne d'origine obscure, Gerbert fait ses études au monastère de Saint Géraud d'Aurillac.

De là, il est envoyé par Borel, (comte de Barcelone et duc de la Marche), en Espagne dans la province de la Marche pour y étudier les mathématiques.

Peut-être, grace aux musulmans qui occupaient le reste de la péninsule, quelque chose de l'enseignement des mathématiques arabes avait-il passé dans les écoles chrétiennes de la Marche.

Il est présenté au Pape Jean XIII pour sa science exceptionnelle, puis à l'empereur Otton 1er; Adalbéron, évèque de Reims le fait écolâtre: clerc qui dirigeait l'école attachée à la cathédrale. Gerbert y enseigne et fait enseigner les connaissances profanes et religieuses; il expliquait ses leçons à l'aide de machines. On lui attribue la conception d'une sphère pour observer les astres, d'une horloge composée avec des principes de mécanique et d'orgues hydrauliques.

Conseillé d'Adalbéron, il lui succède sur le trône archiépiscopal de Reims: Il joue alors un rôle dominant dans une série de Conciles au France (Senlis, S^{t} Basle), où il se fait le champion de églises nationales.

Suspendu et excommunié par le pape pour avoir refusé de quitter le siège de Reims; Otton III (qui avait été son élève) le fait élire évèque de Ravenne, puis pape en 999 à la mort de Grégoire V.

Gerbert , qui prend le nom de Sylvestre II, gouverne de manière autoritaire: il cherche à relever de son délabrement le Saint-Siège, jouet des factions aristocratiques de Rome et de la politique européenne. IL rêve d'un empire latino-germanique capable de contrebalancer Byzance. L'opposition romaine l'oblige à quitter Rome en 1001. La mort d'Otton condamne ses rêves de réforme. Il meurt en 1003.

Pape de l'an mille, philosophe, homme politique (il pronait parait-il la séparation de l'église et de l'état) et homme de science, Gerbert enflamma l'imagination des chroniqueurs du Moyen-Age; Il aurait vendu tout jeune son âme au diable (Vincent de Beauvais, XIII^{e}).

Son tombeau servait d'indicateur à la mort du pontife romain: quand celle-ci approchait "il en coulait de l'eau tant qu'autant il y a de la boue" (Malmesbury XII^{e})

Accusé de magie, il fut réhabilité après la révolution française.

Il nous est connu par les documents pontificaux, son abondante correspondance et ses ouvrages scientifiques. Le traité sur l'Abacus traduit par Chasles expose les principes du calcul décimal. Ce dernier prétend que Gerbert n'aurait pas emprunté aux arabes mais à Boèce la théorie de l'Abacus

Les historiens des sciences ne sont pas d'accord sur le part qui doit revenir, soit à Gerbert dans le progrès des sciences en Europe, soit aux arabes dans la méthode de Gerbert, mais il est clair qu'il joua un grand rôle dans la diffusion des connaissances mathématiques.

Le texte proposé est celui d'une lettre de Gerbert (peut être déjà archevèque de Ravenne vers 998) à Adelbold évèque d'Utrecht; dans celle-ci Gerbert explique à son interlocuteur pour quelle raison deux méthodes de calcul de l'aire d'un triangle équilatèral dont on connait le côté, donne des résultats différents. Le sujet est grave et montre l'état d'avancement des sciences mathématiques vers l'an mille en Occident.

La première méthode est appelée Géométrique, c'est celle que nos élèves connaissent: **hauteur X base:2** à ceci près qu'ici apparait une difficulté de taille le calcul de la hauteur, nos élèves de collèges connaissent la solution: Le théorème de Pythagore et le résultat est irrationnel par rapport au côté; Gerbert connait ce théorème mais domine mal la question des irrationnels qu'on ne sait ni appréhender et encore moins représenter à l'époque (La science grecque est oubliée et ce seront les savant arabes qui résoudront en partie ces problèmes); mais Gerbert est "astucieux" et il s'en tire très bien.

La deuxième méthode, appelée Arithmétique est très curieuse, vous la découvrirez en lisant la lettre, il semblerait que ce soit un souvenir d'une méthode utilisée par les arpenteurs romains (agrimensores) pour calculer l'aire d'un triangle.

Enfin Gerbert passe aux explications, véritable démonstration de calcul intégral...

GERBERTI

EPISTOLA AD ADELBOLDUM

De causa diversitatis arearum in trigono aequilatero, geometrice arithmeticeve expenso.

(Texte établi par BUBNOV)

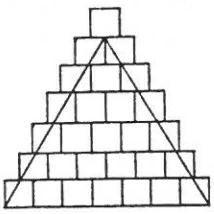
ADELBOLDO nunc usque dilecto semperque diligendo fidei integritatem, integritatisque constantiam.

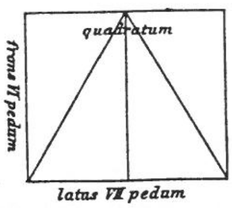
In his geometricis figuris, quas a nobis sumpsisti, erat trigonus quidam aequilaterus, cujus erat latus XXX pedum, cathetus XXVI, secundum collationem lateris et catheti area CCCXC .Hunc eumdem trigonum, si absque ratione catheti secundum arithmeticam regulam metiaris, scilicet ut latus unum in se multiplicetur eique multiplicationi lateris unius numerus adjiciatur, et ex hac summa medietas sumatur, erit area CCCCLXV. Videsne qualiter hae duae regulae dissonent ? Sed et illa geometricalis, quae per rationem catheti aream in CCCXC pedes metiebatur, subtilius est a me discussa, et catheto suo non nisi XXV et quinque septimas unius concedo, et areae XXXLXXXV et quinque septimas.Et sit tibi regula universalis in omni trigono aequilatero cathetum inveniendi;lateri semper septimam deme, et sex reliquas partes catheto concede.

Ut quod dicitur, melius intellegas, in minoribus numeris libet exemplificare. Do tibi trigonum in latere VII pedum longitudinem habentem. Hunc per geometricalem regulam sic metior. Tollo septimam lateri et senarium, qui reliquus est, do perpendiculo. Per hoc latus duco, et dico: sexies septem, qui reddunt XLII. Ex his medietas XXI area est dicti trigoni.

Hunc eumdem trigonum si per arithmeticam regulam metiaris, et dicas: septies septem, ut fiant XLIX, latusque adjicias ut sint LVI, dividasque, ut ad aream pervenias, XXVIII invenies. Ecce sic in trigono unius magnitudinis diversae sunt areae, quod fieri nequit.

Sed ne diutius mireris , causam tibi diversitatis aperiam. Notum tibi esse credo qui pedes longi, qui quadrati, qui crassi esse dicantur, quodque ad areas metiendas non nisi quadratos [constratos] recipere solemus.Eorum quantulamcumque partem trigonus attingat, arithmeticalis regula eos pro integris computat. Depingere libet, ut manifestius sit, quod dicitur.





Ecce in hac descriptiuncula XXVIII pedes, quamvis non integri, habentur. Unde arithmeticalis regula pro toto partem accipiens cum integris dimidiatos recipit. Solertia autem geometricae disciplinae particulas, latera excedentes abjiciens, recisurasque dimidiatas intra latera remanentes componens, quod lineis clauditur, hoc tantum computat. Nam in hac descriptiuncula, quam septenarius per latera metitur, si perpendiculum quaeras, senarius est. Hunc per VII ducens quasi quadratum imples, cujus sit frons VI pedum, latus VII , et aream ejus sic in XLII constituis.Hunc si dimidiaveris, trigonum in XXI pedes relinquis.

Ut lucidius intelligas, oculos appone, et mei semper memento.

Lettre de Gerbert à Adelbold

Explication de la différence des résultats obtenus dans la mesure de la surface d'un triangle équilatéral selon que l'on emploie la méthode géométrique ou la méthode arithmétique.

A Adelbold que j'ai toujours aimé et que j'aimerai toujours, avec l'assurance de toute mon estime, entière et durable.

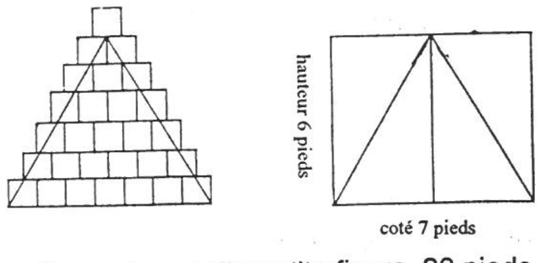
Parmi les figures géométriques que tu as reçues de nous, il y a un triangle équilatéral dont le côté est de 30 pieds, la cathète[1] de 26 et dont l'aire, calculée à partir du côté et de la cathète, de 390. Si tu mesures ce même triangle mais sans utiliser la méthode de la cathète, en suivant la règle arithmétique[2], c'est-à-dire si, après avoir multiplié un côté par lui-même, tu ajoutes au résultat le nombre qui mesure ce même côté et si, de la somme ainsi obtenue, tu prends la moitié, tu obtiendras une aire de 465. Vois-tu à quel point ces deux règles sont en désaccord ? Mais d'une part, j'ai astucieusement écarté la règle géométrique qui, grâce à la cathète, mesurait l'aire en 390 pieds[3], et d'autre part j'attribue à la cathète seulement 25 et cinq septièmes et, pour son aire, 385 et cinq septièmes. Applique donc cette règle générale qui permet de trouver la cathète de tout triangle équilatéral: retranche toujours du côté la septième partie et attribue à la cathète les 6 parties qui restent.

Afin que tu comprennes mieux ce qui a été dit, je veux te donner un exemple avec de plus petits nombres. Soit un triangle qui a une dimension de sept pieds pour le côté. Je mesure ce triangle selon la règle géométrique. J'enlève un septième au côté, et je donne les six septièmes qui restent à la perpendiculaire. Je multiplie le côté par cette perpendiculaire et je dis: six fois sept font 42, dont la moitié: 21, est l'aire du dit triangle.

Supposons que tu mesures le même triangle par la règle arithmétique, que tu dises: sept fois sept font 49 et que tu ajoutes le côté pour obtenir 56 et que tu partages en deux pour obtenir l'aire, tu trouveras 28. Voilà que dans un triangle dont le côté conserve la même valeur, les aires sont différentes, ce qui ne peut être.

Mais afin que tu ne restes pas dans l'embarras plus longtemps, je vais te montrer la raison de cette différence. Je crois que tu sais ce que l'on entend par pieds de longueur, pieds carrés et pieds de volume et que pour mesurer des aires, nous avons l'habitude de ne prendre que des carrés, par empilement. Quelle que soit l'importance de la partie de ces carrés qui se trouve en contact avec le triangle, la règle arithmétique compte ces carrés pour des carrés entiers.

Je veux te dessiner ce dont nous parlons afin que ce soit plus clair pour toi.



Voilà donc qu'il y a, dans cette petite figure, 28 pieds carrés, quoiqu'ils ne soient pas tous entiers. D'où la règle arithmétique qui prend la partie pour le tout et qui considère ces éléments de carrés comme des carrés entiers. Or l'ingéniosité de la méthode géométrique - qui néglige les petites parties qui dépassent des côtés et qui conserve les parties coupées intérieures au triangle - consiste à prendre en compte seulement ce qui est à l'intérieur des côtés. Car, si, dans cette petite figure dans laquelle sept pieds mesurent les côtés, tu cherches la perpendiculaire, tu trouves: six pieds. En multipliant ce nombre par 7, comme lorsque, en le remplissant de petits carrés, tu calcules la surface d'un rectangle dont la hauteur est de 6 pieds et le côté de 7 pieds, tu obtiens, pour son aire: 42. Si tu divises par 2, il restera 21 pieds pour le triangle.

Pour mieux comprendre, regarde bien la figure et souviens-toi toujours de moi.

NOTES

(1) Cathète: hauteur.

(2) $\frac{n \times (n+1)}{2} = C_n^2$ Nombre triangulaire

(3) Résultat pourtant très bon que Gerbert, pour une raison didactique, va écarter; peut-être sait-il qu'il est précis, c'est vraisemblable mais de toute façon l'exemple n'est pas de lui puisqu'on le retrouve dans différents écrits antérieurs.

SOURCES

GERBERTI OPERA MATHEMATICA Dr. Nicolaus Bubnov Berolini 1899

Geneviéve KIENTZ
Jean GOUDOUR
Jean-claude PENIN

Combien de diamètres dans le périmètre du cercle ?

ou encadrer π "comme Archimède"

C'est sous ce titre que le travail suivant a été donné à des élèves de 1 ère année BEP, actuellement "seconde professionnelle des L.P.

Il était hors de question de procéder par rapport de segments à la manière d'Archimède [1](1) sur une figure où n'apparaissent d'ailleurs pas les fameux polygones; simplement, le texte original donne l'idée d'une méthode à laquelle les élèves sont sensibles et qui peut déboucher sur la maitrise de l'approche de π.

Voici ce qui leur fut donné :

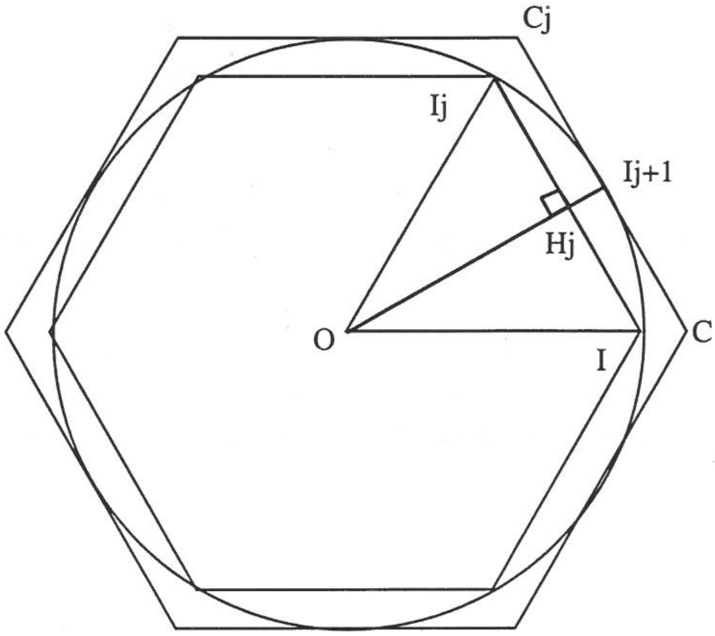
<u>Principe</u> : * si $\widehat{S}$ est périmètre du cercle dans $\pi = \frac{\widehat{S}}{D}$ (ici le rayon sera 50 donc $\pi = \frac{\widehat{S}}{100}$)

* Les périmètres des polygones réguliers inscrits P R I j croissent avec j
(j=1 hexagone; j=2 dodécagones; etc...)
et approchent $\widehat{S}$ par valeur inférieure $\frac{\widehat{S}_i}{100} < \pi$

* Les périmètres des polygones réguliers circonscrits P R C j décroissent avec j
et approchent $\widehat{S}$ par valeur supérieure $\frac{\widehat{S}_c}{100} > \pi$

1 Œuvres complètes (ti) "De la mesure du cerle", Prop III, p130 à 134

Figure :



ici j=1 (6 cotés) tous les calculs dans OII, sont faisables par application du théorème de Pythagore, l'objectif étant de passer de II_1, à II_2 (j=2 12 cotés) $[CC_1]$ est homothétique de $[II_1]$, dans une homothétie de $(0; \frac{50}{OH_1})$

Déroulement : de j=1 à j=5 (6; 12; ...96 cotés)

coté	IIj	$\rightarrow \hat{S}_i \rightarrow \hat{S}_i/100$
demi corde	IHj	
apothème	OHj	
coté	CCj	$\rightarrow \hat{S}_i \rightarrow \hat{S}_i/100$
flèche	Hj Ij +1	

(la dernière ligne permettant d'accéder à IIj+1)

La moitié des élèves sont arrivés au bout...en terminant le travail chez eux - Ce qui donnait ceci:

			$\hat{S}_c/100$	$\hat{S}_c/100$
j=1	II_1	50	3	
	1/2 cadre	25		
(n=6)	apothème	43, 3 0 1 2 7 0		
	CC_1	57, 7 3 5 0 2 7		3, 4 6 4 1 0
	flèche	6, 6 9 8 7 3 0		

et en abrégeant la présentation :

j=2	25,881905	3,10583	
	12,940952		
n=12	48,296291		
	26,794920		3,21539
	1,703709		

j=3	13,052619	3,13263	
	6,526309		
n=24	49,572243		
	13,165249		3,015966
	0,427757		

j=4	6,540313	3,13935	
	3,270156		
n=48	49,892946		
	6,554346		3,14609
	0,107054		

j=5	3,271908	3,14103	
	1,635954		
n=96	49,973229		3,14271
	3,273661		
	0,026771		3,14271

<u>Les plus curieux</u> n'ont pas manqué de comparer avec l'encadrement obtenu par Archimède et que j'avais donné sous la forme : $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

$(3{,}14085 < \pi < 3{,}14286)$

<u>Deux courageux</u> sont passés à j=6 (192 côtés) ...$(3{,}14145 < \pi < 3{,}14187)$

L'encadrement donné par Archimède a été obtenu en soignant particulièrement majoration et minoration. C'est, par contre, sans se poser de questions et sans que je leur pose, que les élèves ont noté toutes les décimales affichées, et arrondi chaque fois, au plus proche, les valeurs d'encadrement.

Archimède Géomètre, gravure anonyme du 16ème siècle

SOURCE : Bibliothèque Nationale de Paris

La Quadrature de la Parabole
(d'après Archimède 287-212 av.J.C)

Dans son traité "De la quadrature de la parabole", Archimède entreprend de déterminer l'aire d'un segment de parabole, c'est à dire l'aire de la région située entre une parabole et une sécante.

Il donne d'abord le résultat suivant : Lorsqu'on a une sécante AC à la parabole, et que l'on trace la parallèle à l'axe par le milieu D de la sécante, celle-ci coupe la parabole en un point B où la tangente à la parabole est parallèle à la sécante. Réciproquement, si une sécante et une tangente sont parallèles, la parallèle à l'axe passant par le point de contact coupe la sécante en son milieu (cf figure 1).

Question 1 : démontrez les propriétés précédentes à partir de la définition suivante de la parabole : courbe d'équation $\mathbf{y = kx^2}$ dans un repère orthonormé. Vous utiliserez les notations suivantes : A(a;a') B(b;b') C(c;c') ...etc...

Pour faciliter les choses, on appelera diamètre du segment de parabole la droite BD et le point B sera le sommet du segment de parabole.

Archimède rappelle ensuite la relation fondamentale suivante : "Les carrés des segments découpés sur deux sécantes parallèles, par la parabole et le diamètre du segment de parabole, sont dans le même rapport que les segments découpés sur ce diamètre, par la parabole et les deux sécantes." En termes actuels : $\frac{EG^2}{DA^2} = \frac{BG}{BD}$ (cf figure 1).

Question 2 : démontrez ce résultat (même méthode et notations que Q.1).

La méthode d'Archimède pour mesurer l'aire du segment de parabole limité par la sécante AC, consiste à inscrire dans ce segment des polygones "s'approchant de plus en plus" de la parabole.

Le premier de ces polygones est le triangle ABC ; le deuxième est AEBFC obtenu en traçant des segments de parallèles à l'axe, au quart et aux trois quarts de la sécante AC (cf figure 2).

Question 3 : montrez que EH = FI = (3/4)BD.
Montrez que les triangles ABE et AHJ ont la même aire.
Déduisez-en que l'aire du polygone AEBFC est égale à 5/4 de l'aire du triangle ABC.

Le troisième de ces polygones est obtenu en partageant la sécante AC en huit parties égales (cf figure 3).

Question 4 : expliquez pourquoi la somme des aires des quatre triangles AKE, ELB, BMF, FNC est le quart de la somme des aires des deux triangles ABE et BFC.

Archimède imagine ensuite de réitérer indéfiniment le procédé. Si l'aire du triangle ABC est prise comme unité, le deuxième polygone de la suite mesure $1 + (1/4)$, le troisième $1 + (1/4) + (1/4)^2$ ...etc...

Intuitivement l'aire de ces polygones est de plus en plus proche de celle du segment de parabole.

Question 5 : Déduisez de ce précède la mesure de l'aire du segment de parabole.

Sources :

J.DHOMBRES : Nombre, mesure et continu, Cedic Nathan 1980.
B.BETTINELLI : Le trésor d'Archimède, Irem de Besançon 1988.

figure 1

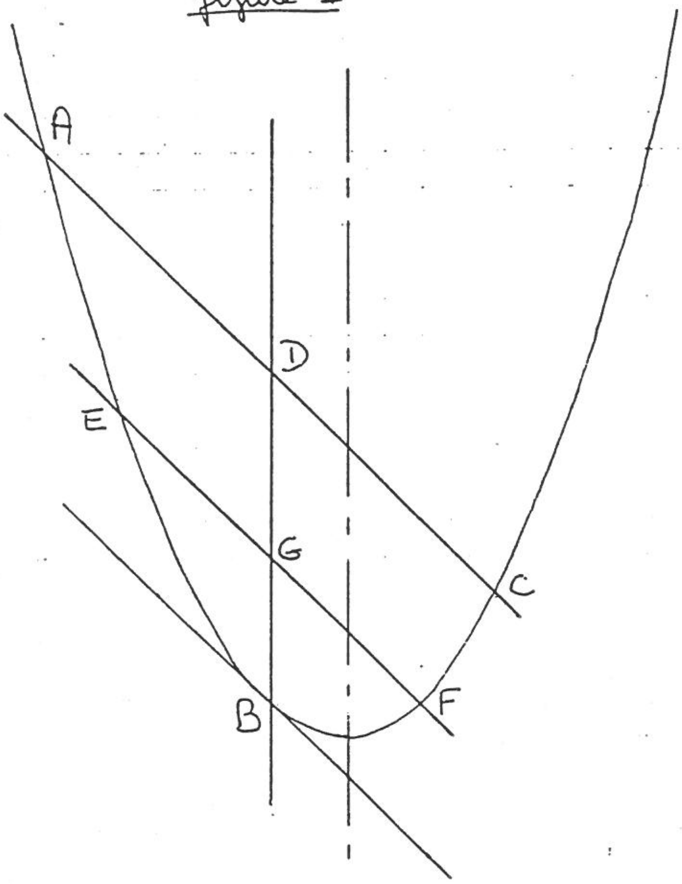


figure 2

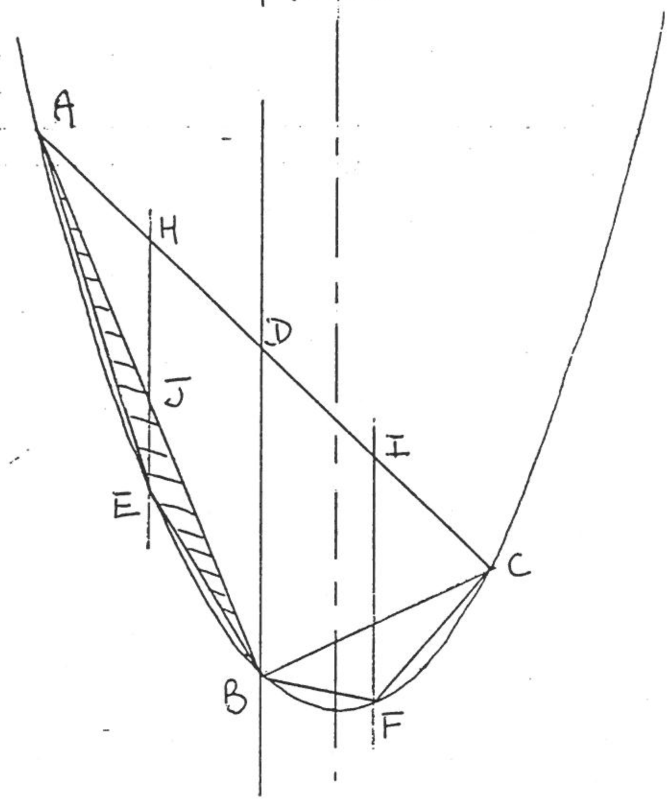
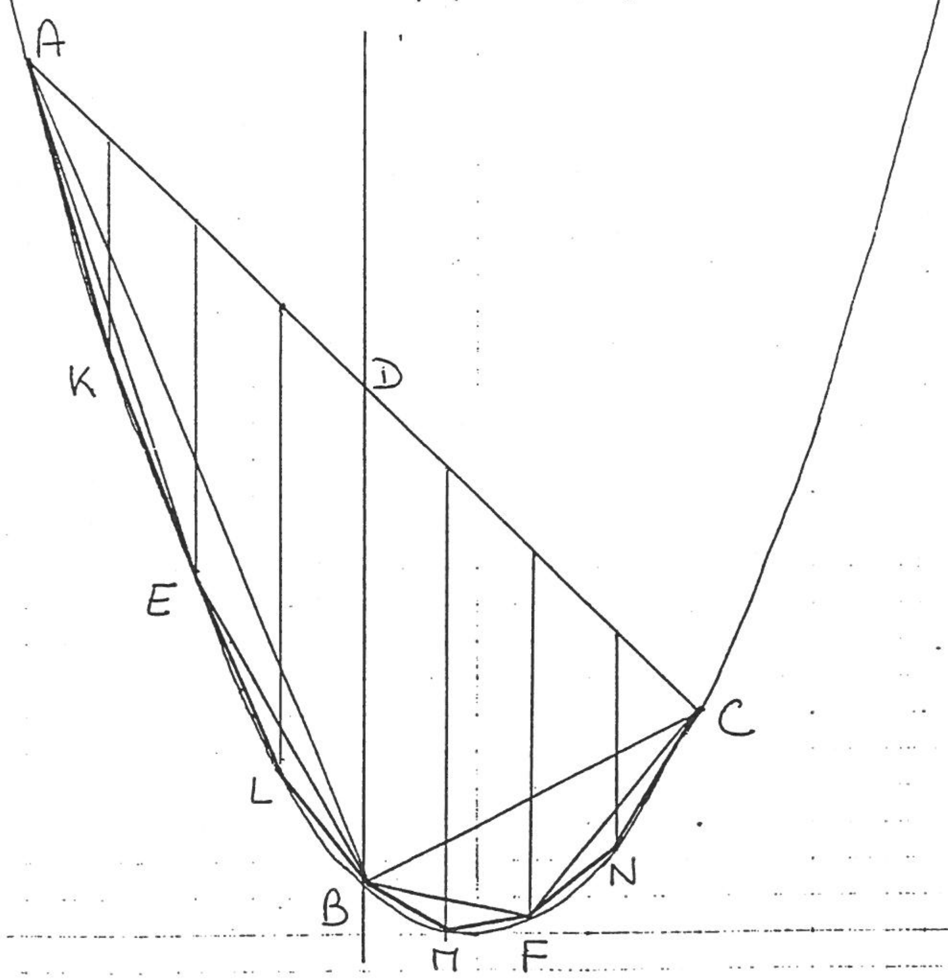


figure 3 (agrandissᵗ x1,5)



ont collaboré à la rédaction de cette publication :

Philippe Deleham
Jean-Marie Farey
Genevieve Kientz
Jean-Claude Penin
Patrick Perrin
Simone Sokeland

Fiche Dublirem

Titre : MISCELLANÉES

Auteur : Groupe "Histoire des Maths" de Reims

Niveau : Second cycle

Date : Novembre 1993

Mots-clé : **spécialité**: Histoire des mathématiques

autres : Activité en classe
Aire
Archimède
Calcul différentiel
Pi
Probabilité
Trigonométrie
Volume

Résumé : Brochure périodique contenant :
- des extraits de textes anciens.
- des comptes-rendus d'expérimentations en classe.
- des études de formules ou thèmes mathématiques ayant joué un rôle historique.

ISBN 2-910076-00-8

Format	Nombre de pages	Prix	IREM numéro
A4	45	25,00 F	Re29