Université de Reims
IREM DE REIMS

Moulin de la Housse -BP 347
51062 REIMS CEDEX

Tél : 26 05 32 08

Fax : 26 85 35 04

MATHEMATIQUES

SUR

LE CAHIER DE L'ECOLIER

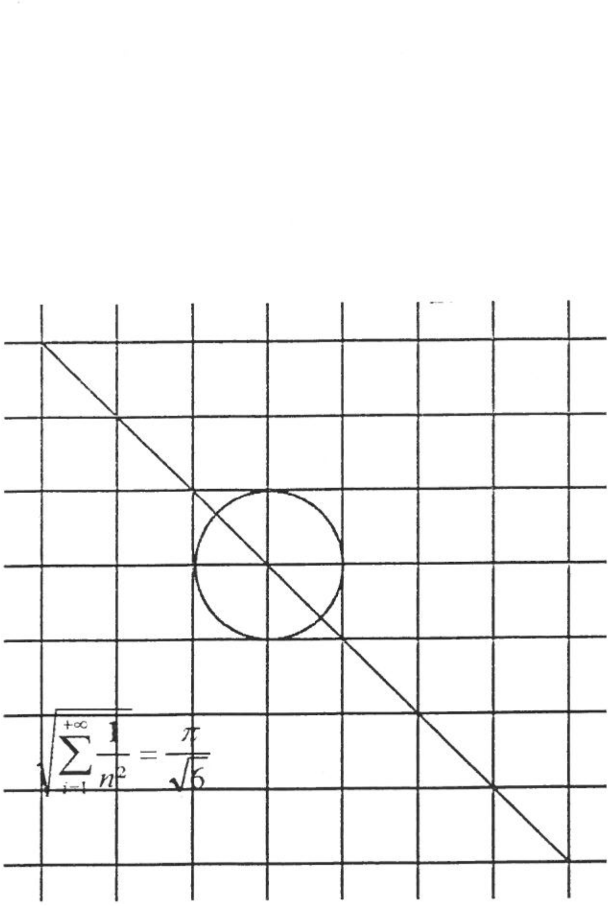
Année scolaire 93-94

IREM de Reims

MATHEMATIQUES

sur

LE CAHIER DE L'ECOLIER



IREM de REIMS

Introduction

Le quadrillage est le support le plus utilisé par les écoliers ou les étudiants mais on trouve très peu de documents qui l'utilisent comme objet de travail ou de recherche. Pourtant, il permet d'aborder pratiquement tous les thèmes des mathématiques enseignées dans les collèges, les lycées et même à l'université, à travers des activités de tous niveaux, des plus simples aux plus compliquées.

L'étude qui suit est un rapide survol des possibilités offertes par ce support familier et quotidien. Ce n'est pas un produit fini mais un recueil d'idées que chacun pourra exploiter à sa manière.

La règle du jeu est que n'est constructible que ce qui passe par des noeuds du quadrillage ou est intersection de droites constructibles. Evidemment, seule la règle non graduée est autorisée!

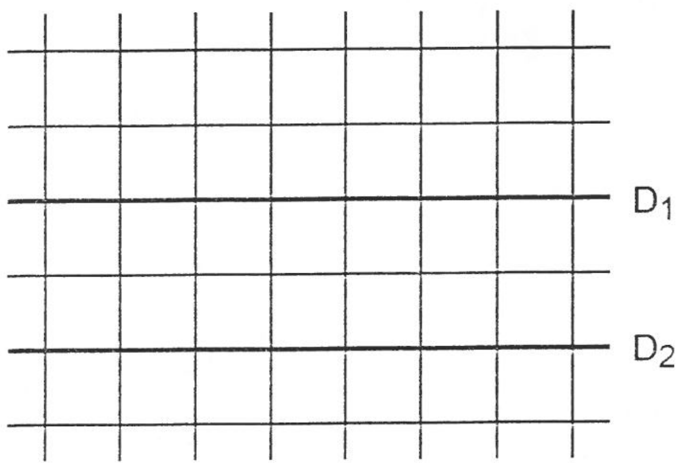
Sommaire

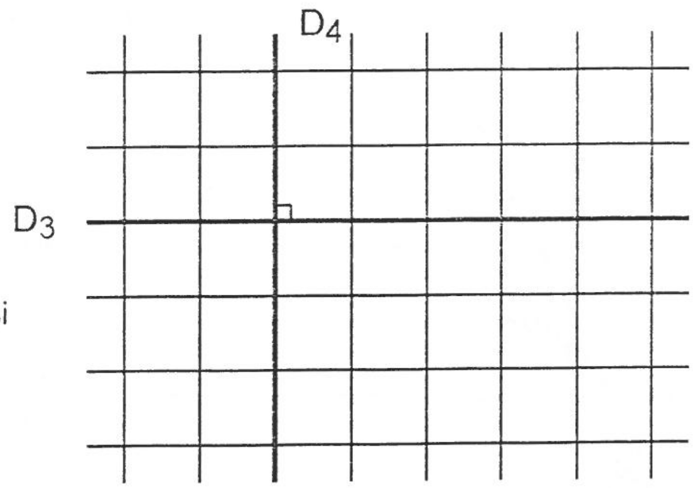
I - Les débuts du quadrillage.

Tracés de base: parallèles et perpendiculaires.

Dès l'école primaire et en sixième, on peut l'utiliser à des constructions élémentaires:

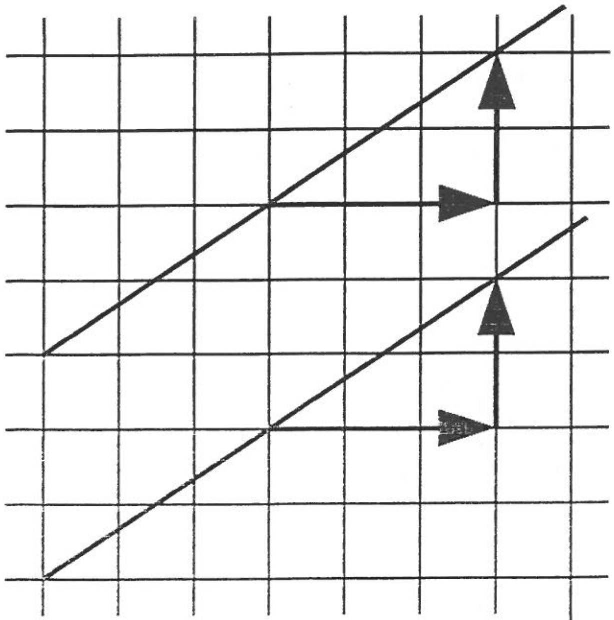
des parallèles, c'est très facile!





des perpendiculaires aussi

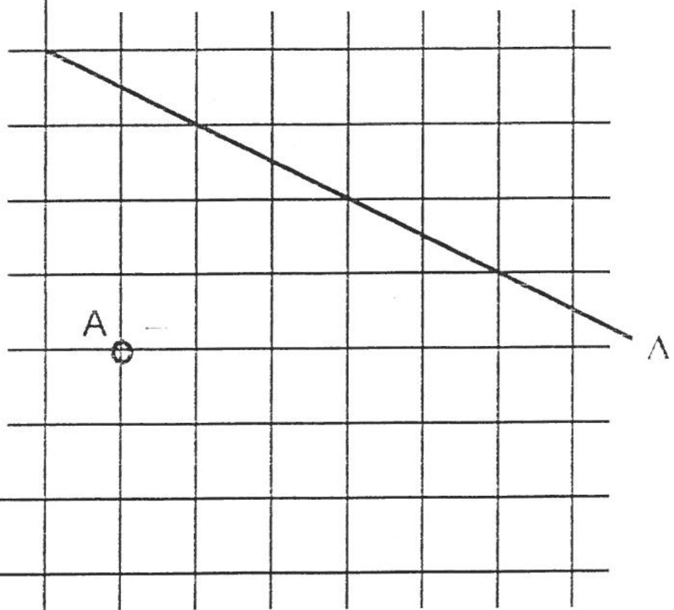
Ces exemples sont bien sûr triviaux, alors compliquons nous la tâche: il faut bien sûr que les droites passent par des noeuds du quadrillage.

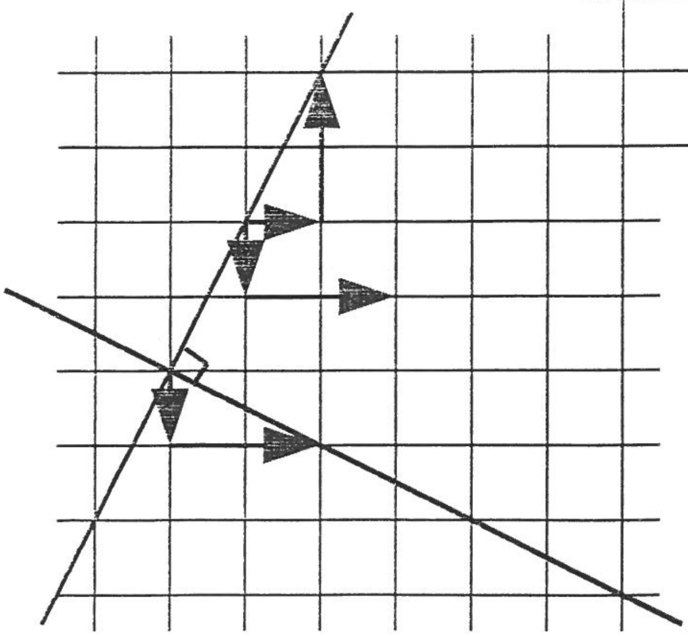


Suivez le bon chemin et vous ferez des parallèles.

Et maintenant entraînez-vous:

Tracer la parallèle à la droite Δ passant par A.



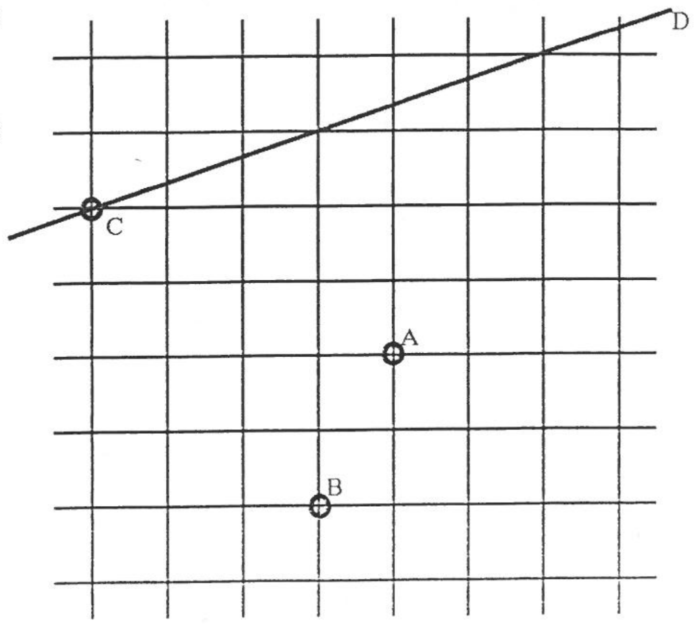


Pour les perpendiculaires, c'est plus compliqué mais on s'en sort quand même!

Il suffit de basculer l'équerre de 90°.

Tracer par A, la parallèle et la perpendiculaire à la droite D.

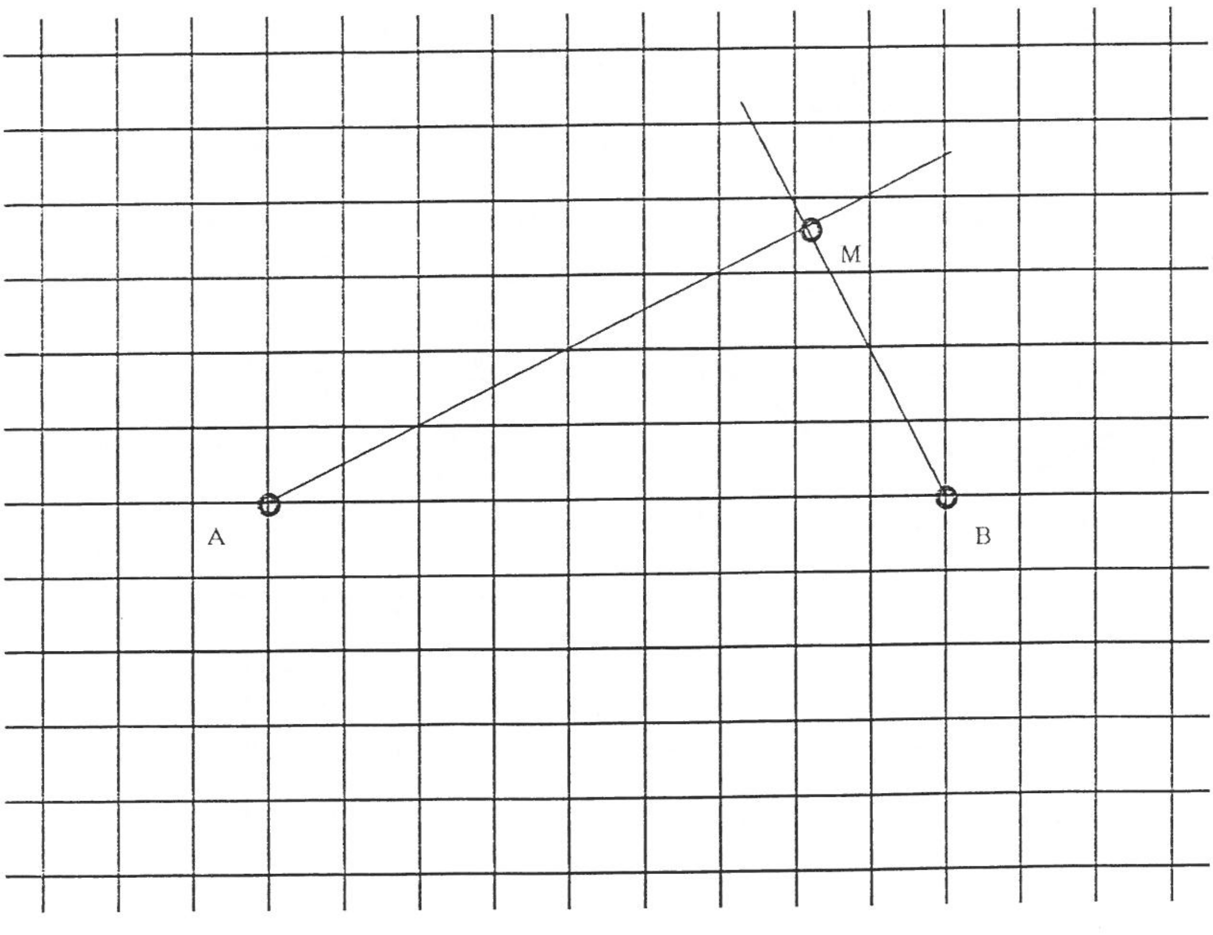
Tracer par B et par C, les perpendiculaires à D.



Amusons nous !

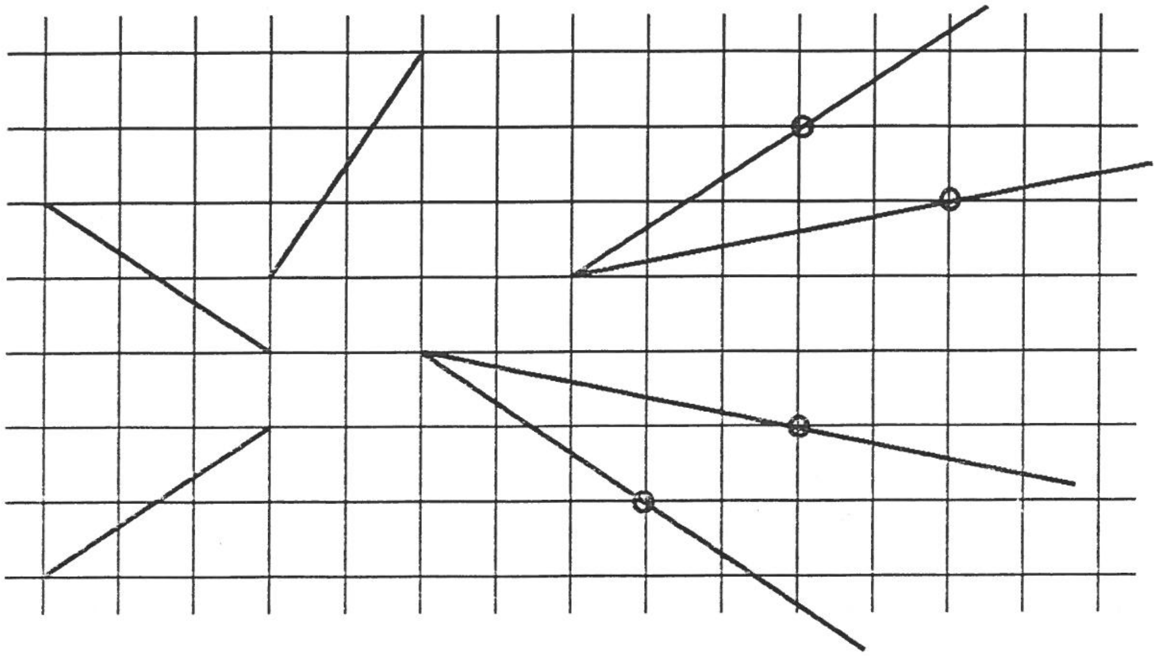
Par A, traçons une droite constructible quelconque. Par B on trace une perpendiculaire à la première. Elles se coupent en M.

Recommençons souvent: ne voit-on rien venir ?



II - Les longueurs et les angles.

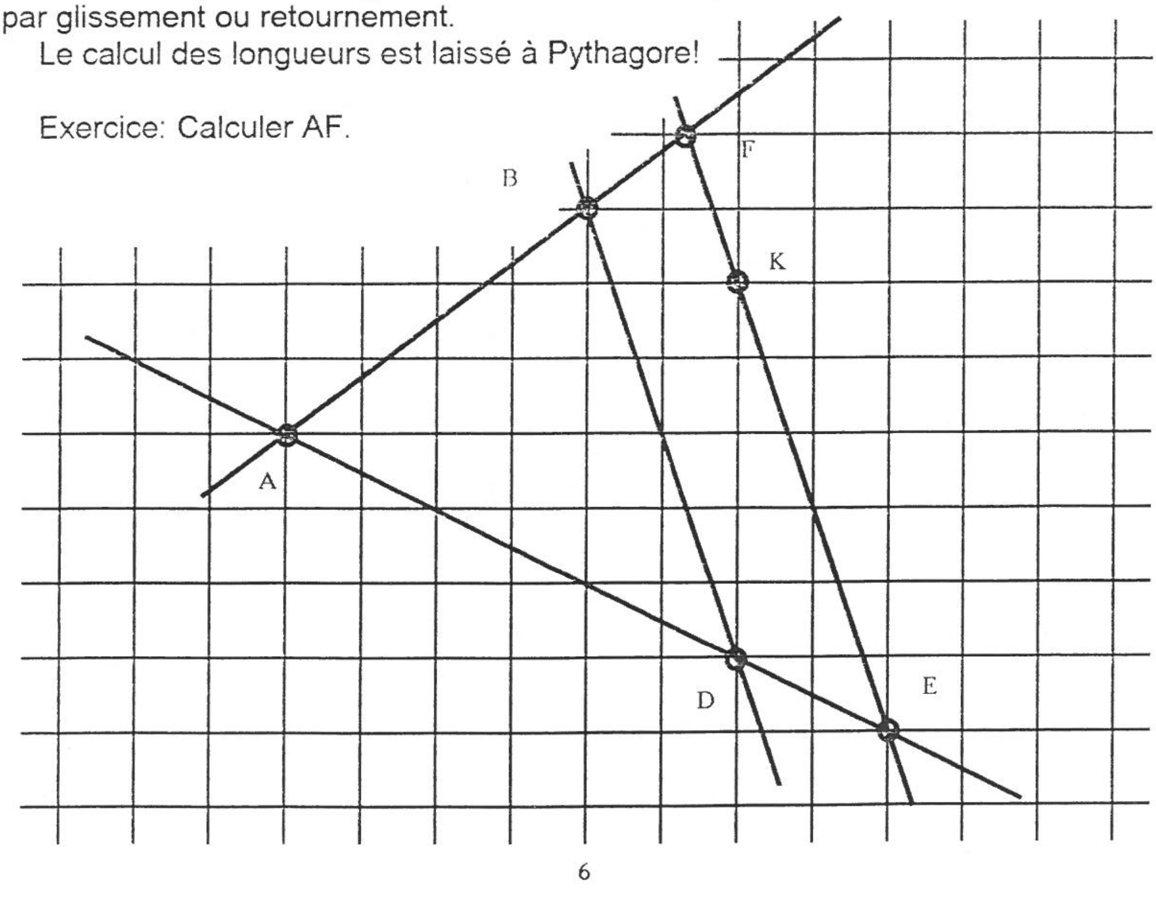
On peut aussi reporter des longueurs et des angles.



Pour les longueurs, il suffit de prendre les diagonales de rectangles de même dimension, et pour les angles, cela revient à transporter des triangles isométriques par glissement ou retournement.

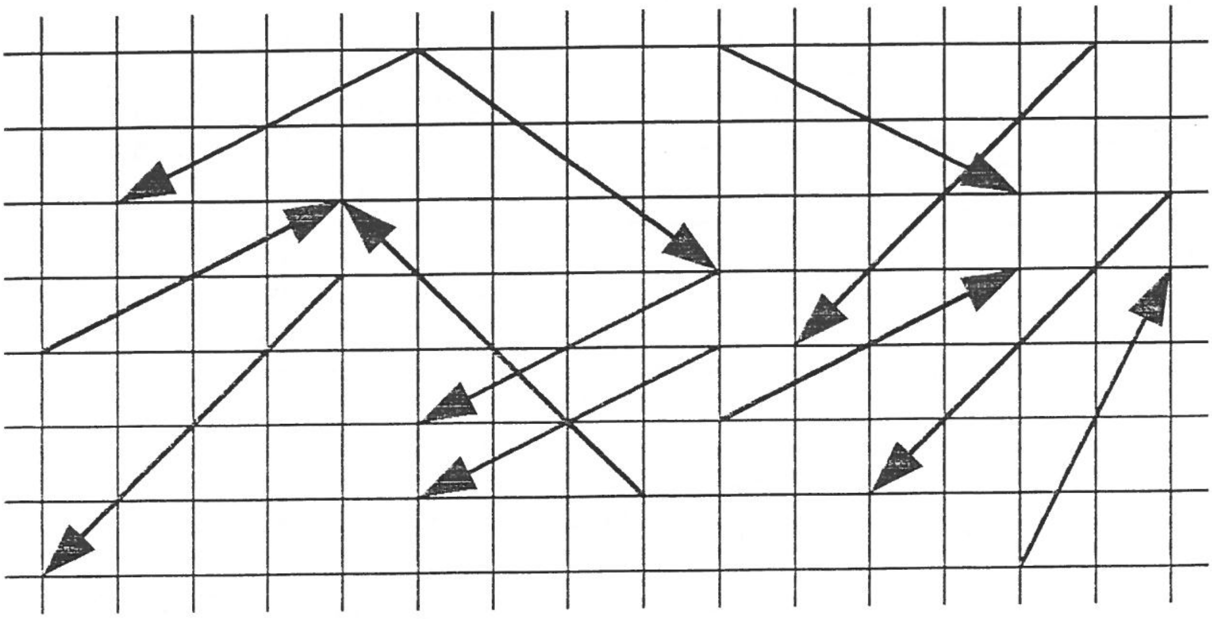
Le calcul des longueurs est laissé à Pythagore!

Exercice: Calculer AF.



III - Les vecteurs

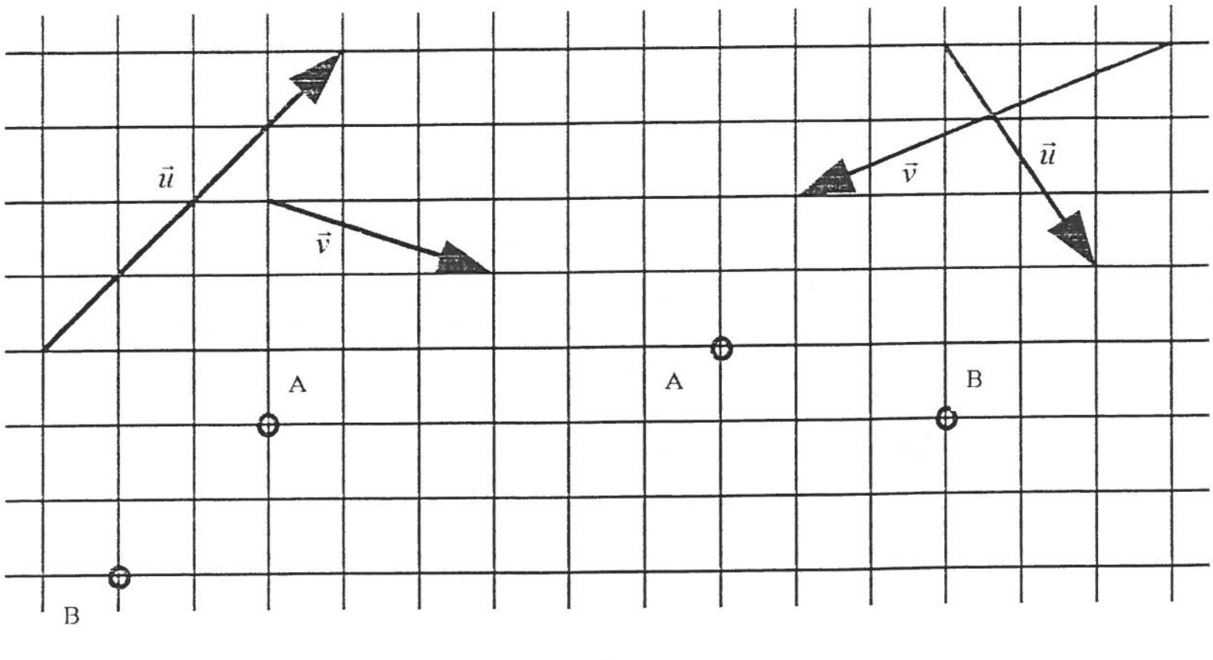
Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur. Avec le matériel précédent, nous les reconnaîtrons facilement !



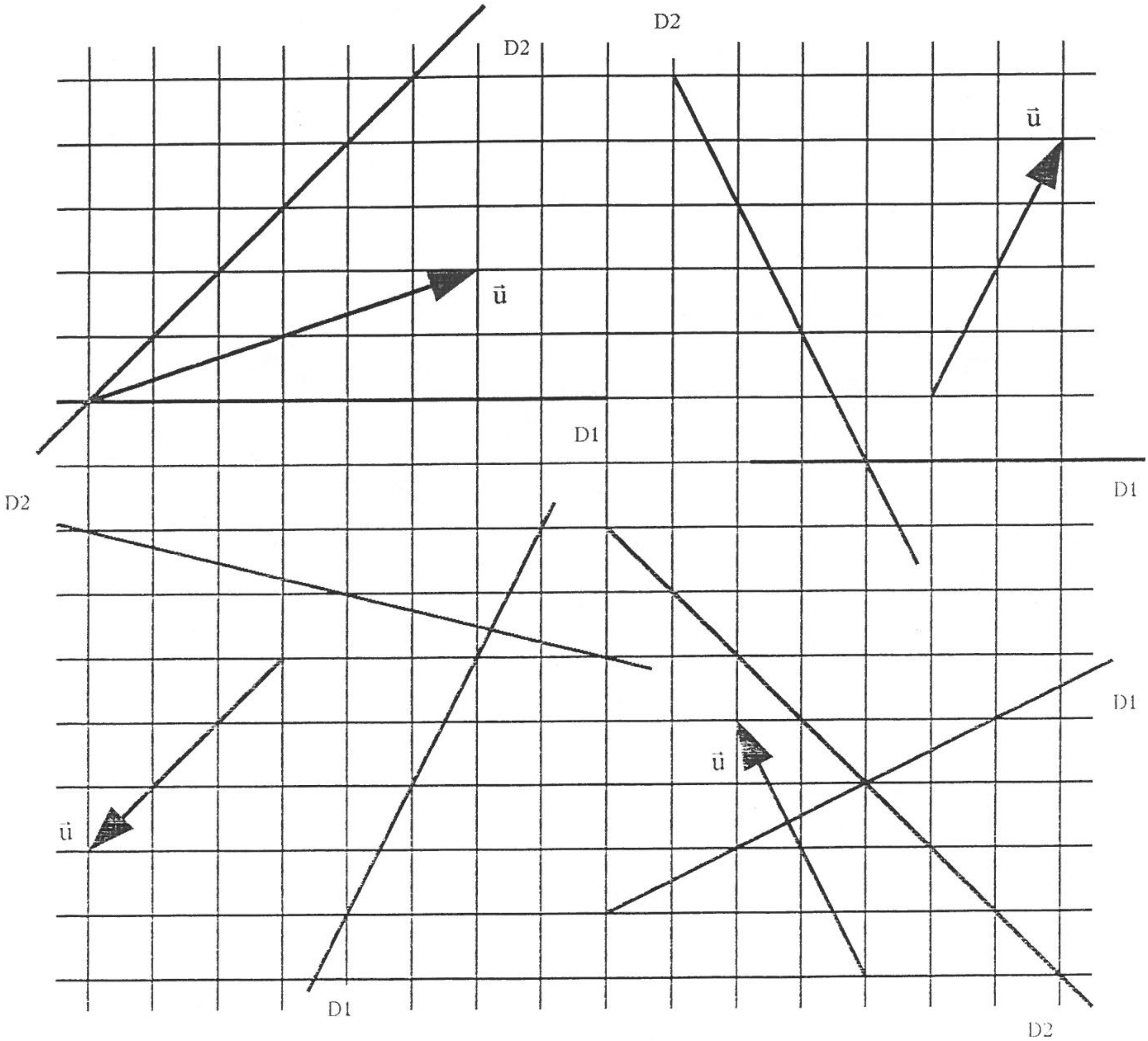
Ci-dessus, indiquer les vecteurs égaux.
Combien y-a-t-il de vecteurs différents?

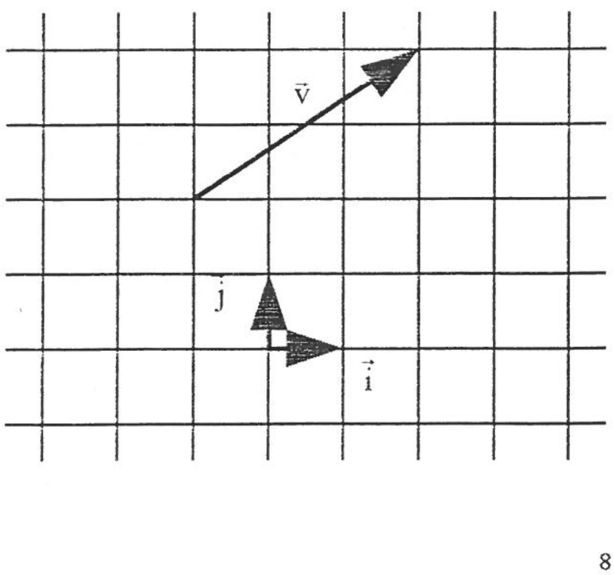
Ci-dessous, construire M et N tels que $\vec{AM} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{BN} = \vec{u} - \vec{v}$



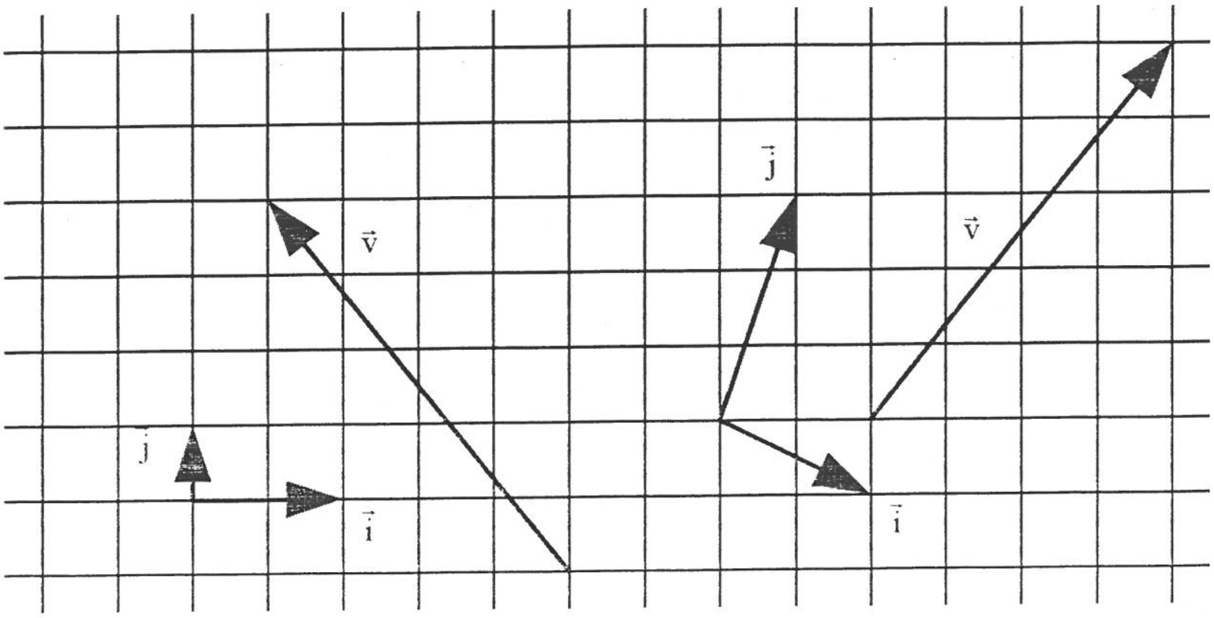
Décomposer $\vec{u}$ suivant D_1 et D_2 .



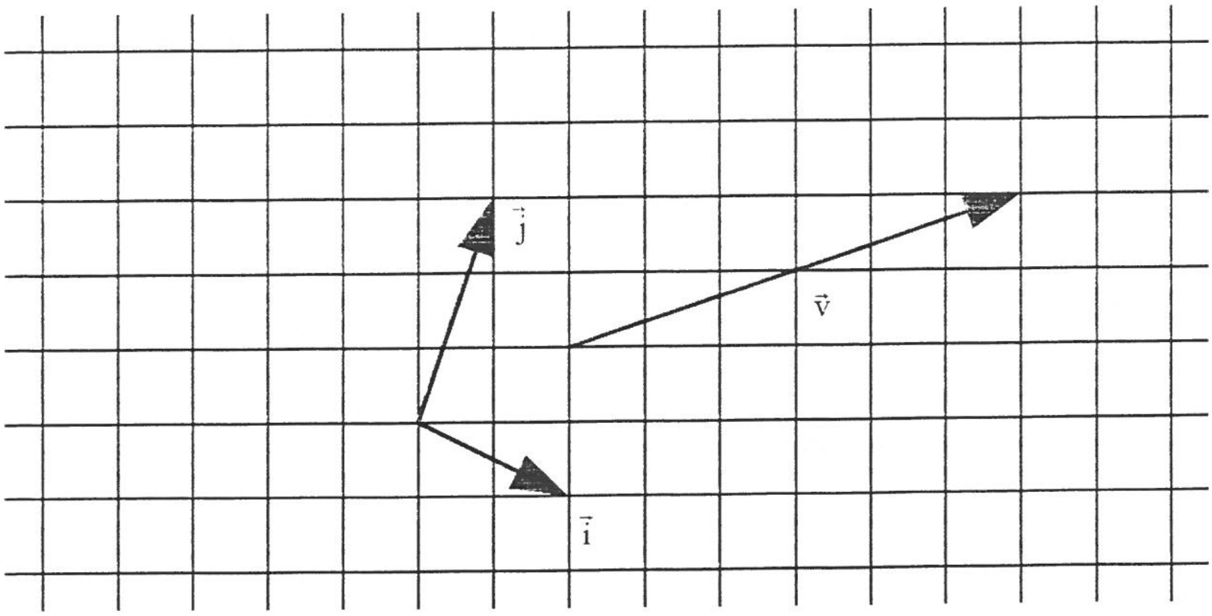


Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ construire le vecteur (2;3) et donner les coordonnées du vecteur déssiné.

Faites de même avec les cas suivants:



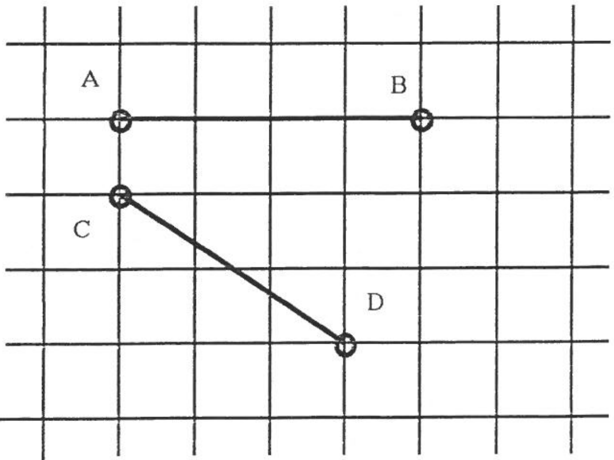
Tout cela peut vous paraître enfantin !
Essayez alors de trouver les coordonnées du vecteur déssiné sur la figure ci-dessous.



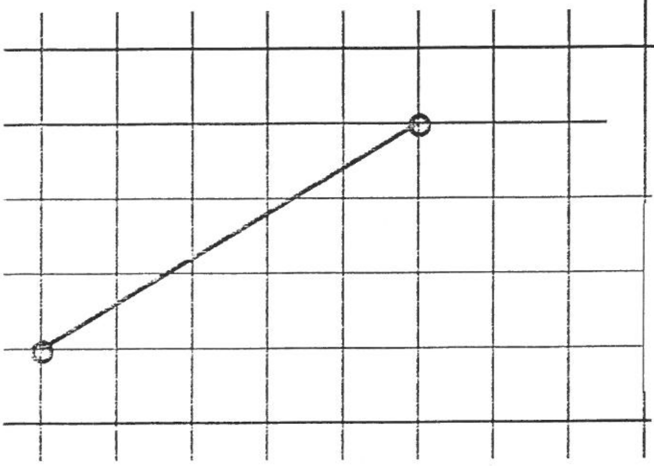
Sans doute, la lecture du paragraphe suivant vous éclairera.

IV - Barycentres

Partageons!



En période d'austérité, il faut savoir partager: [AB] en quatre parts égales ou [CD] en deux et trois est à la portée de tout le monde.



C'est quand même plus dur de partager équitablement celui là en quatre.

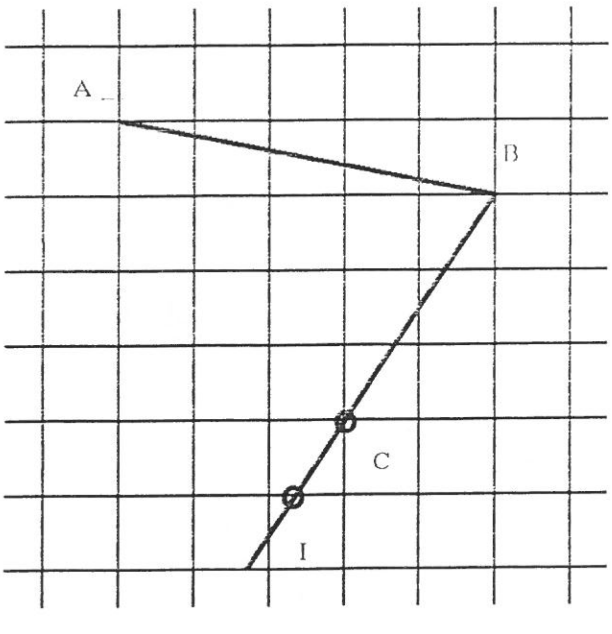
Quand on a compris comment partager, les barycentres sont un jeu d'enfant.

G est barycentre de (A,a) et (B,b), $a+b \neq 0$ s'il vérifie:

$$a.\overline{GA} + b.\overline{GB} = 0$$

ou encore

$$\overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB}$$



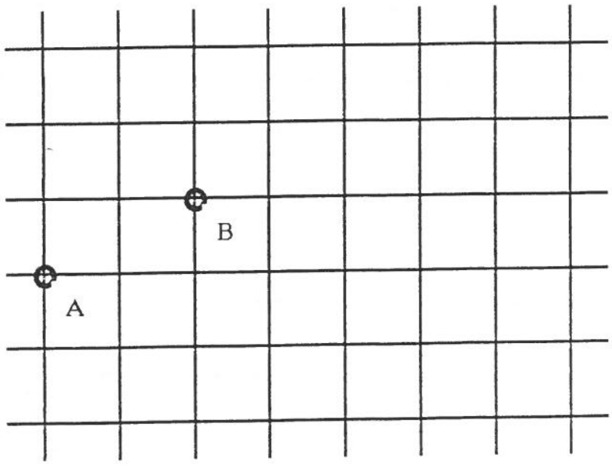
Sur la figure ci-contre, placer le milieu de [AB], puis le barycentre de (A,2),(C,3).

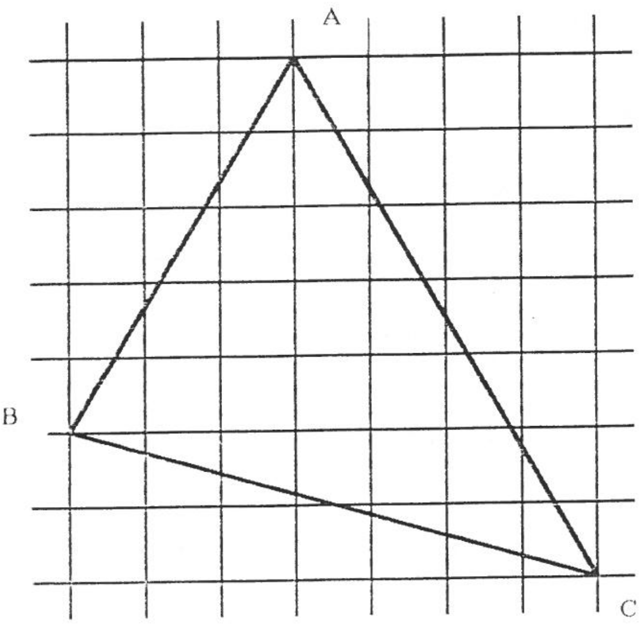
On reconnait par ailleurs le point I comme barycentre de (B,1) et (C,-4) car :

$$\overline{IB} - 4\overline{IC} = 0 \text{ ou } \overline{IB} = 4\overline{IC}$$

Passez à la page suivante et amusez vous!

Trouvez le barycentre de:
(A,2), (B, -3).

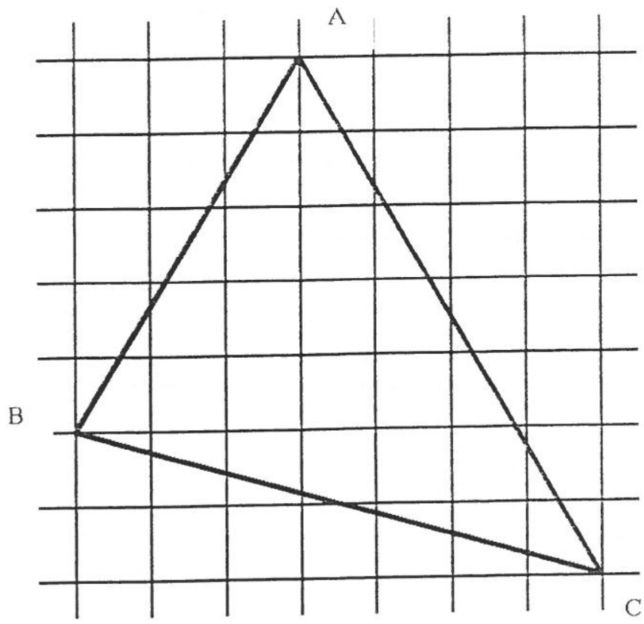




Et le centre de gravité du triangle ABC?

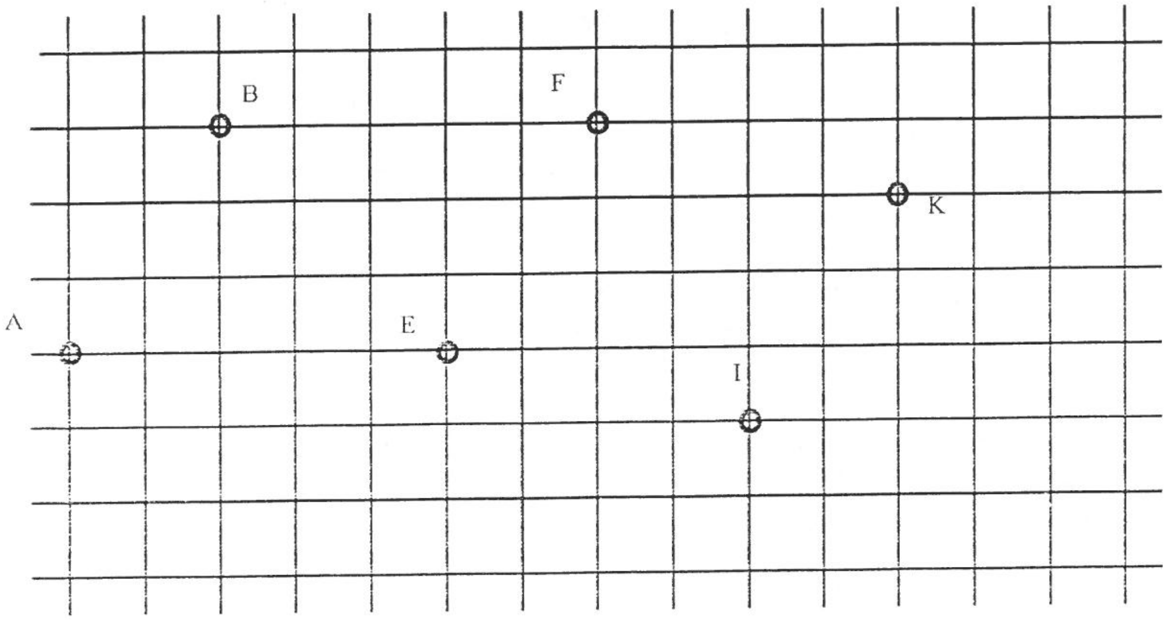
Déterminer le barycentre de (A,1), (B,2), (C,3).

Recommencez avec (A,1), (B,2), (C,-1).



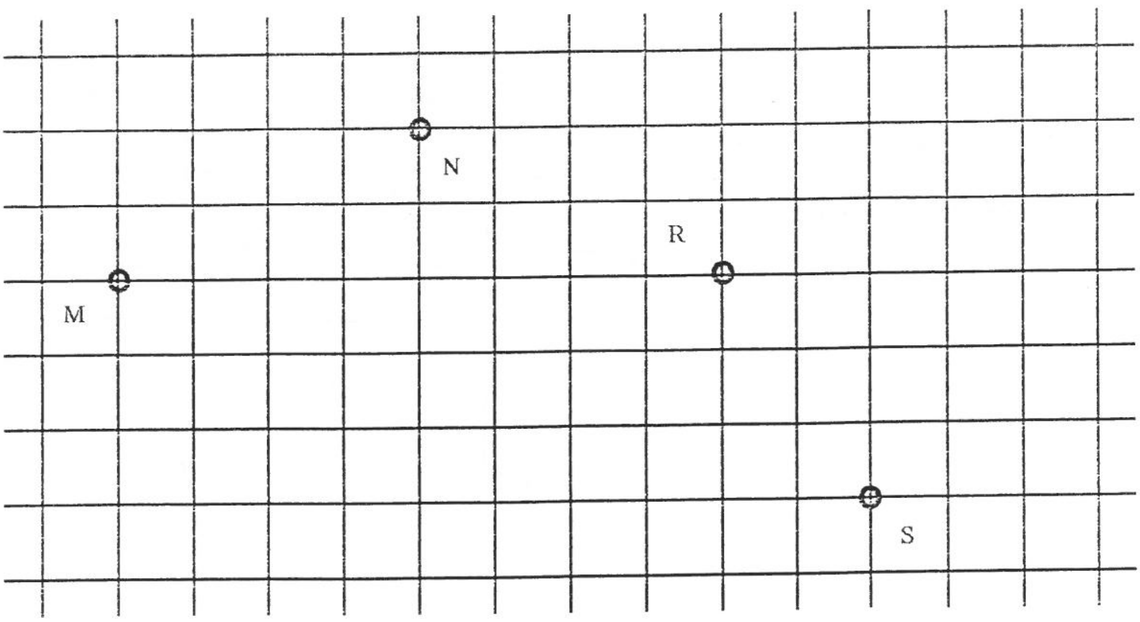
V - Des figures plus complexes.

Puisque l'on sait construire des parallèles et des perpendiculaires, on peut construire des parallélogrammes, des rectangles et autres quadrilatères:



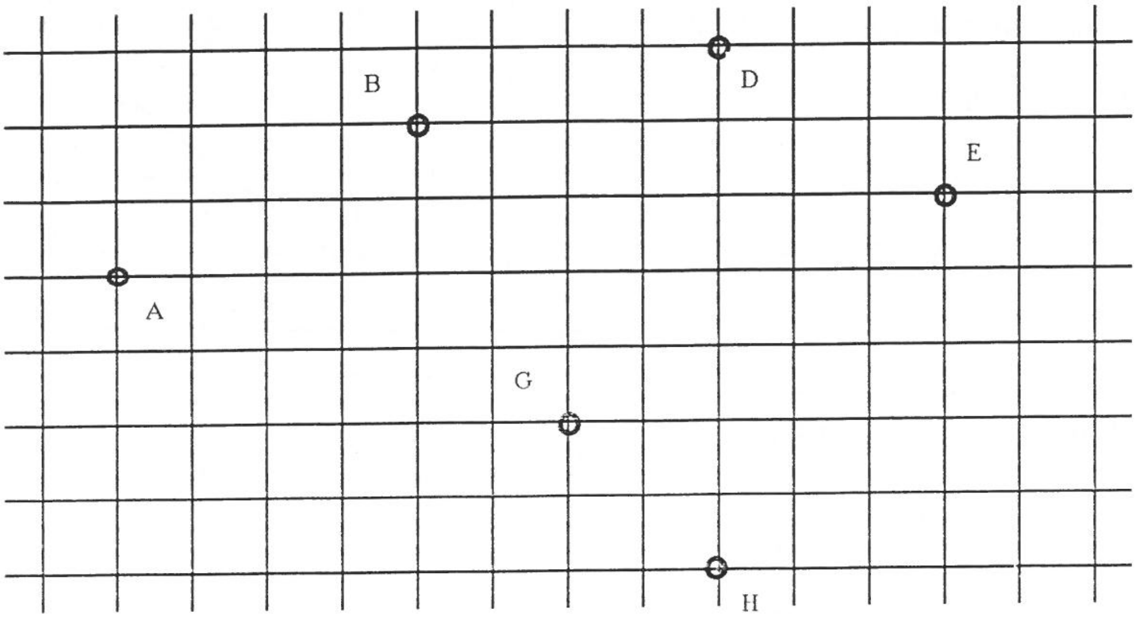
Construire un parallélogramme ABCD, un rectangle EFGH, un trapeze IJKL de bases [KL] et [IJ] ou [IL] et [JK].

Ci-dessous, construire un carré MNPQ et un losange RSTU. Peut-on tracer un losange RTSU ?



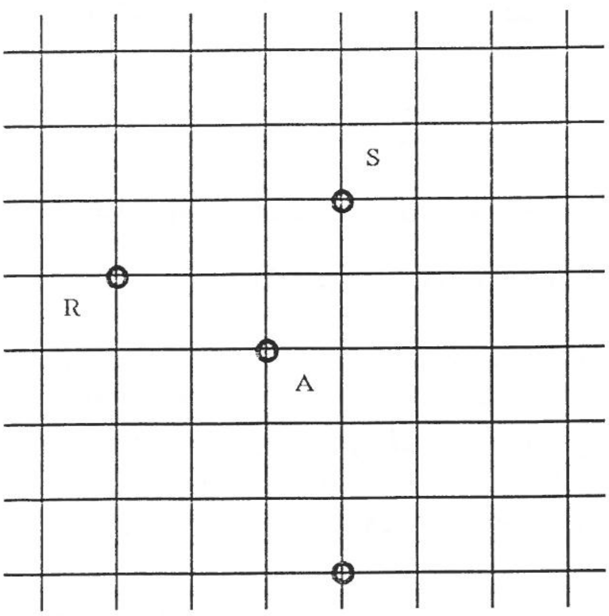
On peut aussi construire des triangles de toutes natures ou presque!

Tracer un triangle rectangle ABC, d'hypothénuse AB ou non, un triangle isocèle DEF de sommet D et un triangle isocèle GHI de base [GH].



Vous avez remarqué la simplicité du problème. Essayons maintenant de construire un triangle isocèle dont la base n'est ni sur le quadrillage ni sur une de ses diagonales: peut-on construire un tel triangle?

La réponse à cette question résoudra le problème du losange précédent.



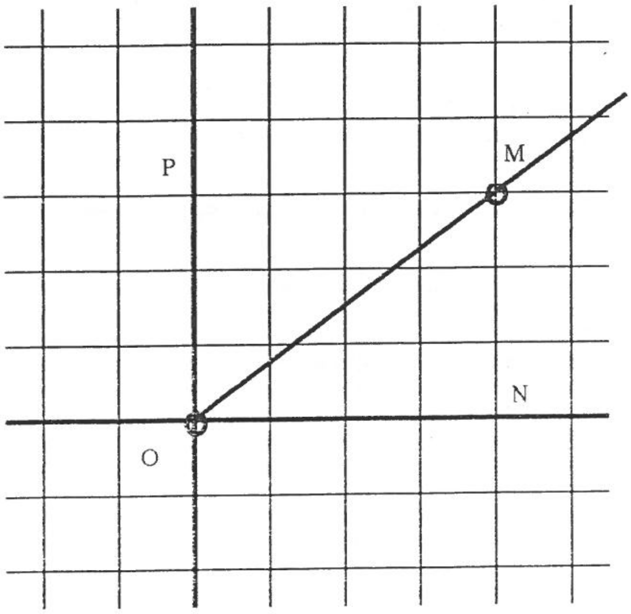
On voit sur cet exemple que c'est possible:

le point A est à égale distance des deux autres, mais le quadrilatère complété sera un carré.

Cependant, il y a d'autres points, noeuds du quadrillage, qui répondent à la question et donc on peut construire un losange qui a pour diagonale [RS].

Mais est-ce toujours possible, quelle que soit la position de la diagonale?

Soient deux points O et M, noeuds du quadrillage. Peut-on construire un losange de diagonale [OM] ?



Pour essayer de résoudre ce problème dans sa généralité, on peut se placer dans un repère orthonormé et fixer l'origine sur l'un d'eux.

L'équation de (OM) est :

$$\boxed{Px - Ny = 0}$$

L'équation de la médiatrice est:

$$\boxed{Nx + Py = b}$$

On écrit alors que le milieu de [OM] est sur cette médiatrice et l'on obtient:

$$\boxed{2Nx+2Py= P^2+N^2}$$

qui est l'équation de la médiatrice de [OM].

Le problème est de savoir s'il y a des solutions entières à cette équation; ces solutions nous permettrons de construire les triangles isocèles et les losanges cherchés.

Commençons par diviser l'équation par d le PGCD de N et P, on obtient:

$$\boxed{2nx + 2py = (n^2 + p^2)d} \qquad \text{(E)}$$

avec N = nd et P = pd, n et p sont premiers entre eux.

1) n et p impairs: alors $n^2 + p^2$ est pair et l'on peut tout diviser par 2:

$$\boxed{nx + py = \frac{n^2+p^2}{2}d} \qquad \frac{n^2+p^2}{2} \in \mathbb{N}$$

Si n = 1 alors $x = \frac{1+p^2}{2}d - py, \quad y \in \mathbb{Z}$ et on a autant de solutions que l'on veut.

(de même avec p = 1)

Si n et p $\neq 1$, Bezout assure l'existence de $(x_o, y_o) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\boxed{nx_o + py_o = 1}$

et en multipliant par $\frac{n^2+p^2}{2}d$ on obtient $\boxed{nx_o\frac{n^2+p^2}{2}d + py_o\frac{n^2+p^2}{2}d = \frac{n^2+p^2}{2}d}$ qui donne, pour chaque couple (x_0,y_0) des solutions entières de la forme:

$$\boxed{(x_0\frac{n^2+p^2}{2}d; y_0\frac{n^2+p^2}{2})}$$

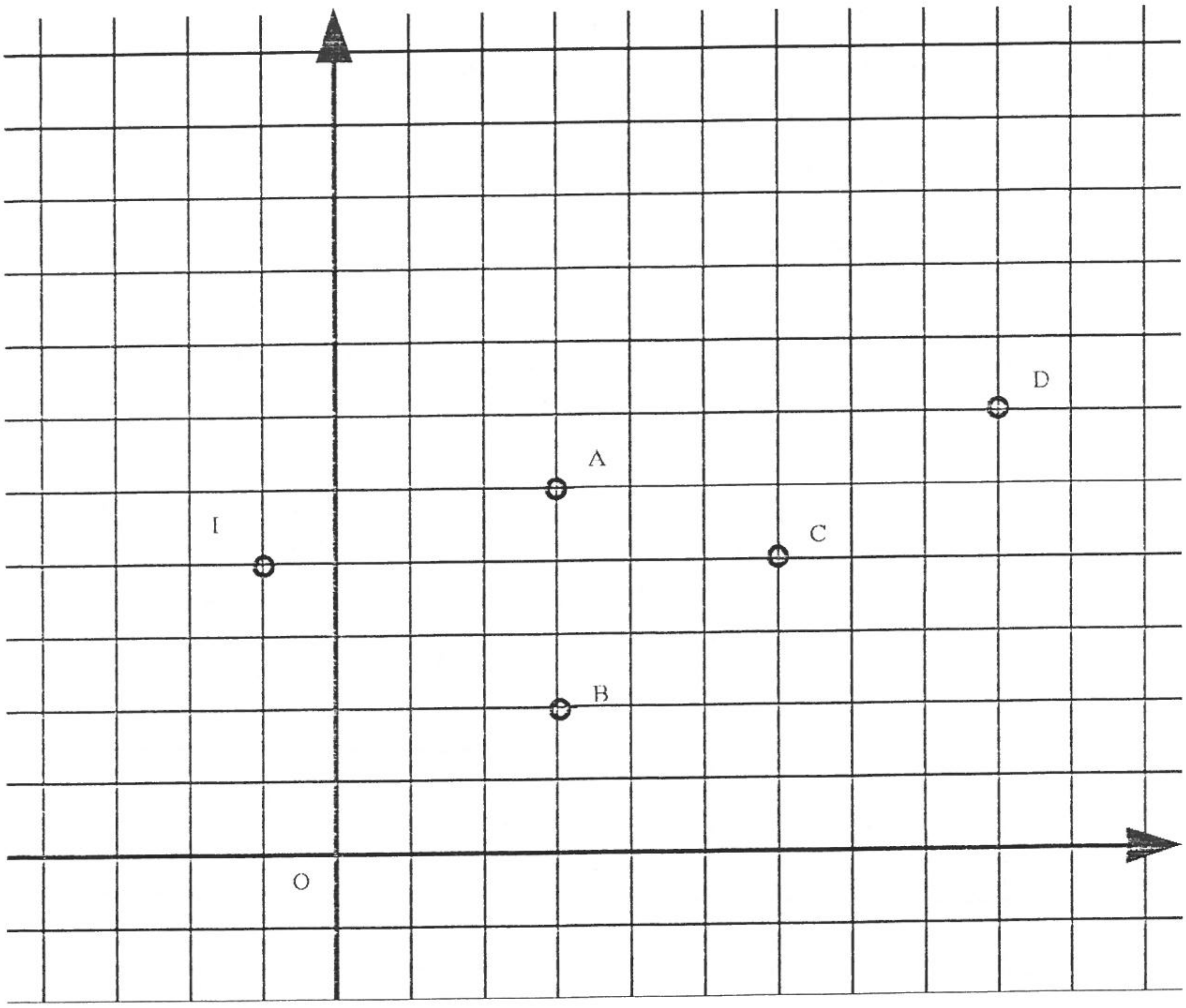
2) n est pair (donc p impair ou l'inverse):

a) d impair, il n'y a aucun espoir car d'un côté on a un nombre pair et de l'autre un impair dans l'équation:

$$\boxed{2nx + 2py = (n^2 + p^2)d}$$

b) d pair, alors on peut encore diviser par 2 et l'on a comme précédemment des solutions.

Voyons sur un exemple:



Dans le cas A:

N = 3 et P = 5, d=1.

n=3, p=5 donc n et p sont impairs, il y a des solutions de la forme ($x = 17x_0$, $y = 17y_0$) ou le couple (x_0, y_0) est solution de $3x_0 + 5y_0 = 1$, par exemple (2, -1).

On remarquera que le point I (-1; 4) convient sans qu'il soit de la forme ($x = 17x_0$, $y = 17y_0$) !

Les formules précédentes ne permettent donc pas de les trouver toutes.

Graphiquement, il suffit de tracer la perpendiculaire à (OA) passant par I. Il semble que le point le plus proche de O (ou A) répondant à la question, définisse toujours un triangle rectangle isocèle: à vous de chercher!

Dans le cas B, n impair, p pair, il n'y a pas de solution.

Dans le cas C, n impair, p pair mais d = 2, il y a des solutions.

Dans le cas D, n impair, p pair et d = 3, pas de solution.

Vous pouvez écrire les équations des différentes médiatrices pour vous convaincre.

Une nouvelle question se pose alors: peut-on tracer un triangle équilatéral dans ce maillage?

Pendant que vous cherchez, passons à autre chose.

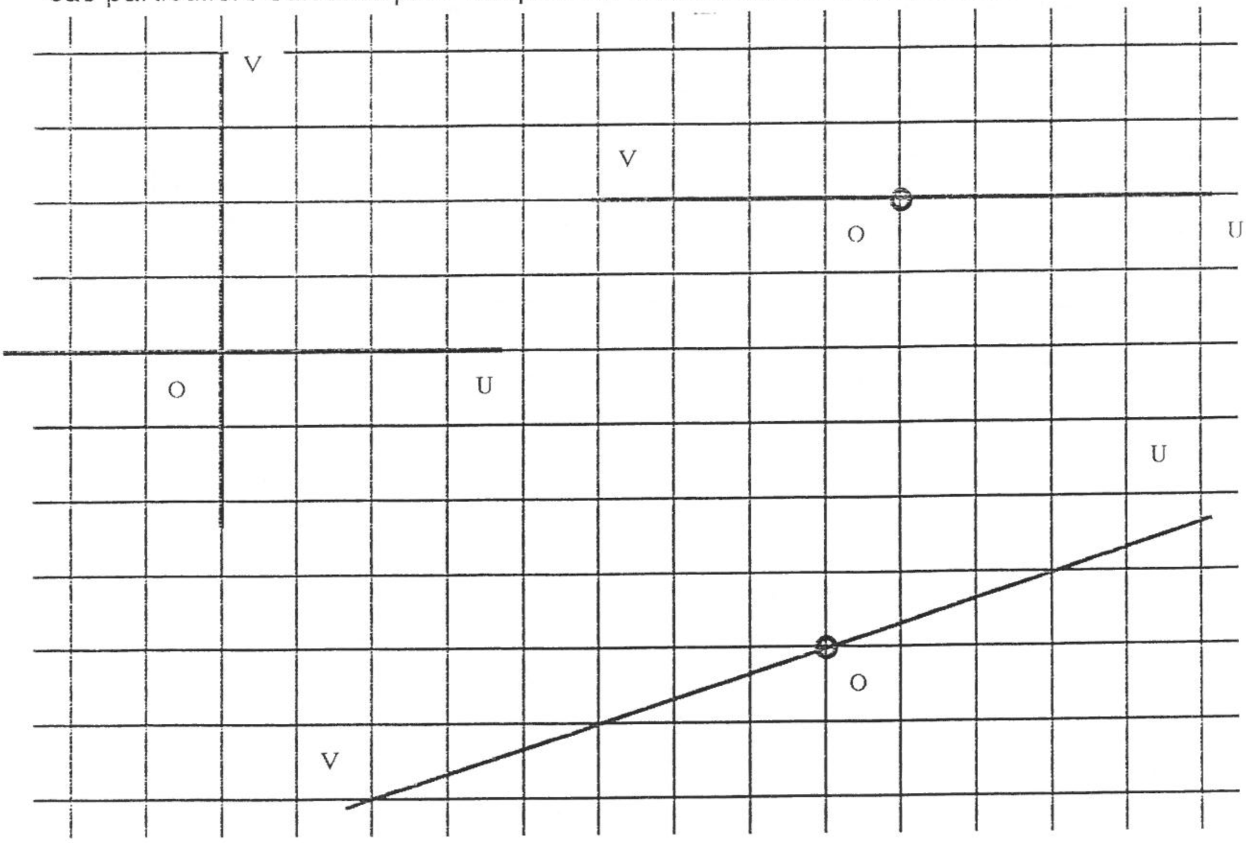
VI - Autour de la bissectrice

Premier problème:

on donne deux demi-droites constructibles (Ou) et (Ov) d'origine O noeud du quadrillage.

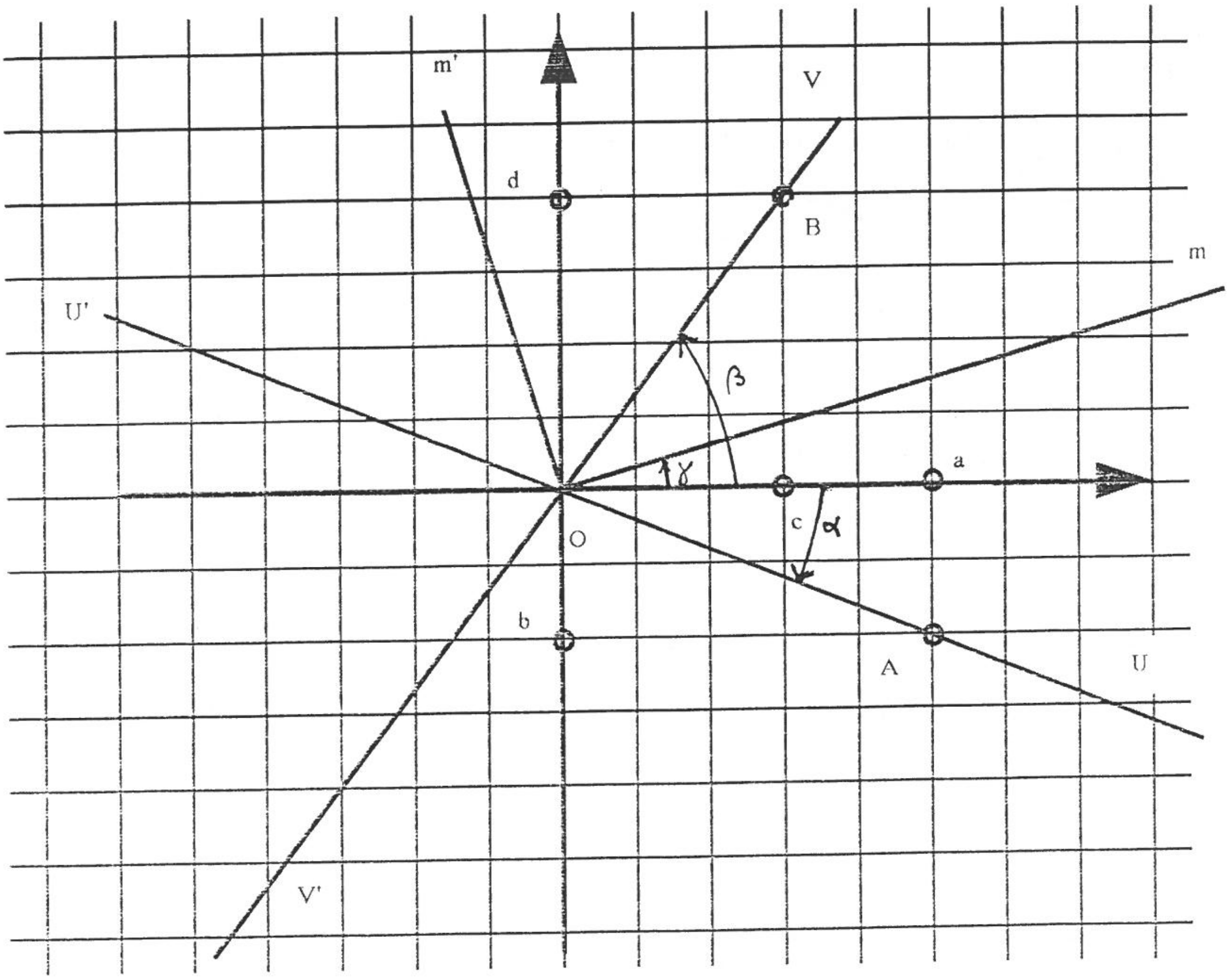
Peut-on construire (Om) bissectrice de uÔv ?

Plaçons nous dans un repère orthonormé (O,I,J) et commençons par éliminer les cas particuliers suivants pour lesquels la constructibilité est évidente.



Par ailleurs, quitte à utiliser la demi-droite (Ou') opposée à (Ou) ou (Ov') opposée à (Ov) et étudier la constructibilité de (Om') qui est perpendiculaire à (Om), on peut choisir (O,I,J) tel que $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ et $-\pi/2 < \beta < \pi/2$.

En effet la constructibilité de (Om) équivaut à celle de (Om').



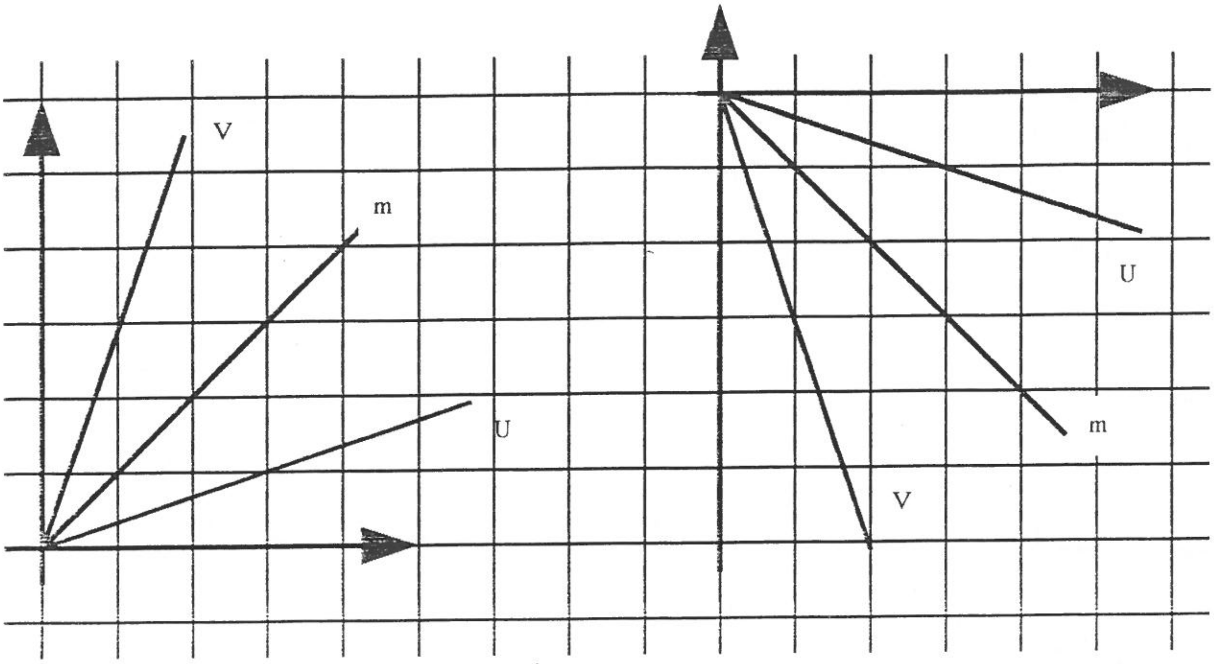
L'étude qui suit repose principalement sur la propriété selon laquelle:
"(Om) est constructible si et seulement si tan γ est rationnel."

Puisque (OU) et (OV) sont constructibles, on peut trouver A(a,b) sur (OU) et B(c,d) sur (OV) avec a,b,c,d entiers, a et c non nuls.

On a tan α = b/a ; tan β =d/c et $2\gamma = \alpha + \beta$.

Comme $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ et $-\pi/2 < \beta < \pi/2$, alors $-\pi < \alpha + \beta < \pi$.

Examinons d'abord les cas $\alpha + \beta = \pi/2$ et $\alpha + \beta = -\pi/2$.



Dans ces deux cas, (Om) est portée par y = x ou y = - x qui sont constructibles. On supposera désormais : $\alpha + \beta \neq \pm \pi/2$

Posons $\tan \gamma = t$. On a alors $\tan 2\gamma = \tan(\alpha + \beta)$ soit : $\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$

soit $\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{ad + bc}{ac - bd}$

ce qui donne l'équation: $(ad + bc)\, t^2 + 2(ac - bd)t - (ad + bc) = 0$ (E)

La constructibilité de (Om) est liée à l'existence et à la rationnalité des solutions de (E).

<u>1er cas</u>: ad + bc = 0.

(E) équivaut à t = 0 d'où $\gamma = 0$. (Om) est l'axe (Ox).
Remarque: ad + bc = 0 <=> b/a = - d/c <=> $\alpha = -\beta$. (OU) et (OV) sont symétriques par rapport à (Ox) d'où le résultat !

<u>2ème cas</u>: $ad + bc \neq 0$.

$\Delta' = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ donc $\Delta' > 0$.
(E) admet deux solutions distinctes dans IR.

F $t_1 = \dfrac{bd - ac + \sqrt{\Delta'}}{ad + bc}$ et $t_2 = \dfrac{bd - ac - \sqrt{\Delta'}}{ad + bc}$ Ces deux solutions sont rationnelles si et seulement si: $\Delta' = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ est un carré parfait.

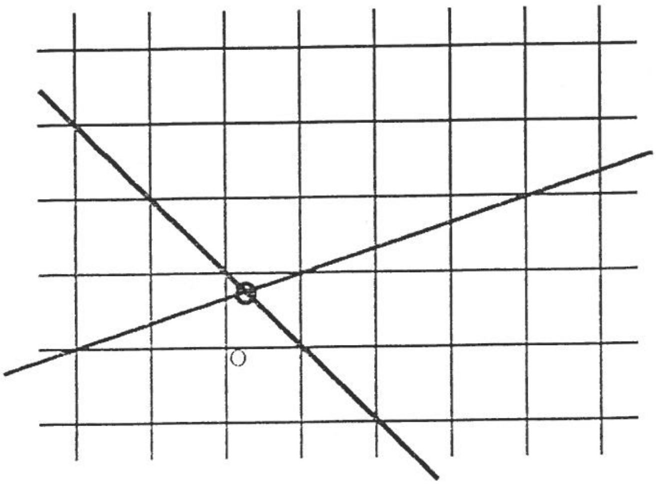
Cette condition étant réalisée, (Om) est constructible et admet pour pente t_1 ou t_2, l'autre racine est la pente de (Om').

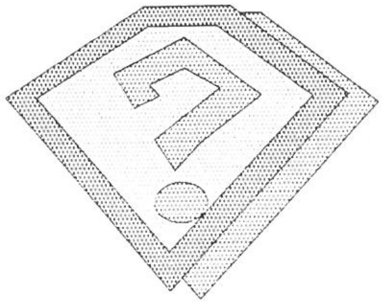
Le lecteur vérifiera que dans les cas particuliers où la constructibilité de (Om) a été mise en évidence, la condition " Δ' carré parfait " est satisfaite.

Vous vérifierez aussi que dans les cas où ad + bc $\neq$ 0 les formules F s'appliquent.

Exemple d'application:
a = 3, b = - 2, c = 29, d = 54. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 221^2$. solutions: 1/4 et -4.

Que se passe-t-il si O n'est pas un noeud du quadrillage?



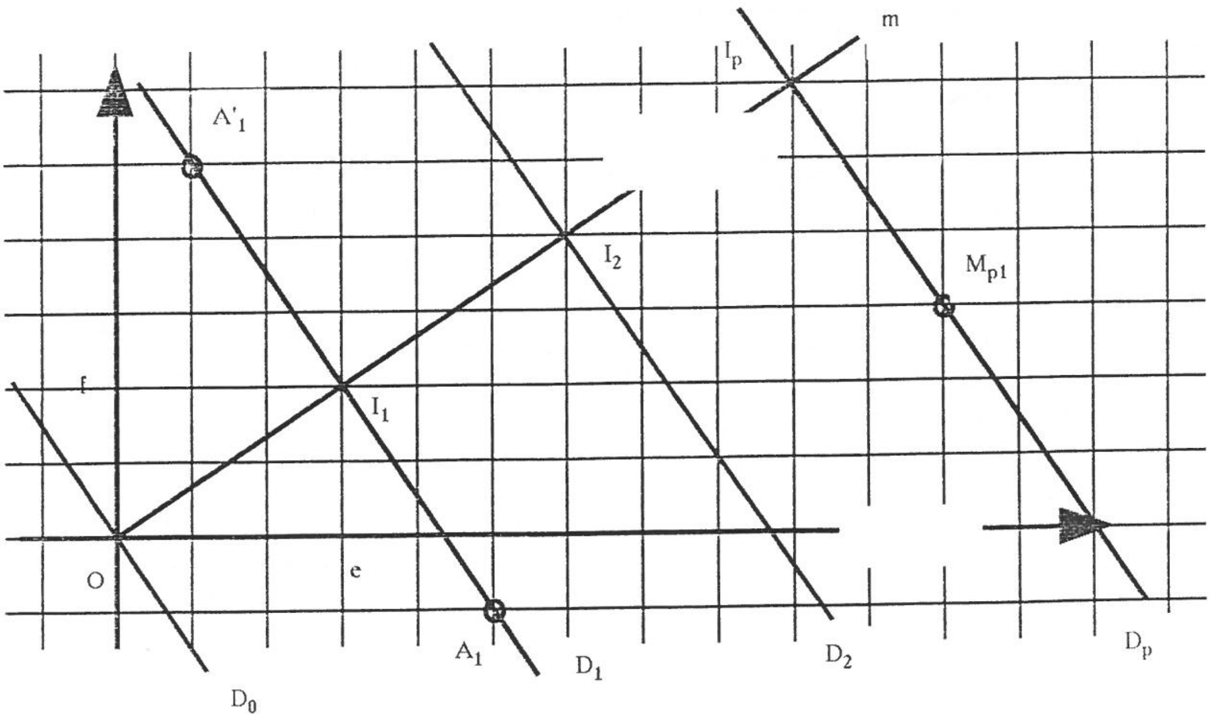


à vos stylos!

Problème N°2

On donne une demi-droite constructible (Om), O étant un noeud du quadrillage. Construire deux demi-droites (Ou) et (Ov) telles que (Om) soit bissectrice de $u\hat{O}v$.

Là encore on utilise un repère orthonormé que l'on peut choisir tel que (om) soit dans le premier quadrant.



Sur les perpendiculaires à (Om) en O, I_1, I_2, ... I_p, on peut placer des points symétriques par rapport à (Om) ce qui permet de tracer les demi-droites cherchées. Il y a une infinité de solutions.

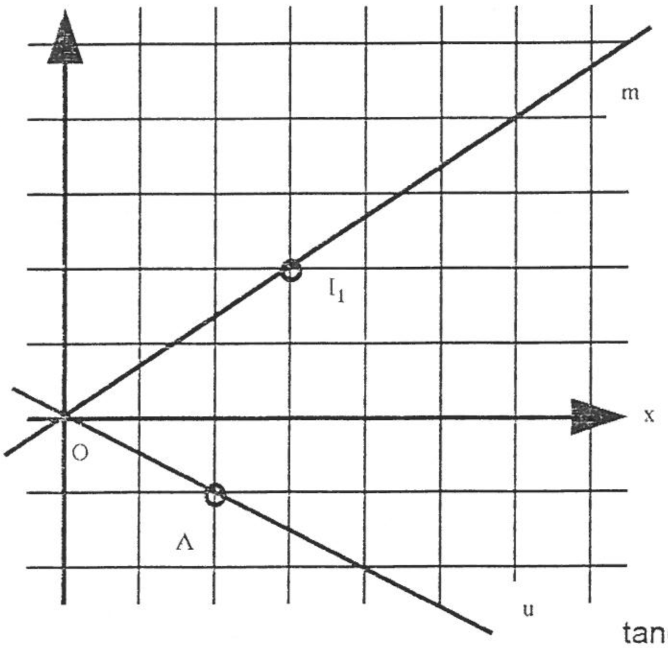
Par exemple, pour le noeud I_1 (e;f) on a les points A_1 (e+f;e-f), A_2 (e+2f;e-2f) etc sur D_1.

Sur D_p on a les points M_{p1} , ..., M_{pk} où p est le N° de la droite et k celui du point. On a alors les points M_{pk} (pe+kf;pf-ke) et M'_{pk} (pe-kf;pf +ke) qui sont symétriques et qui donnent les droites (OM_{pk}) et (OM'_{pk}) cherchées.

Si on note θ_{pk} l'angle $M_{pk}\hat{O}m$, on a $\tan\theta_{pk} = \dfrac{k}{p}$

En faisant varier k et p dans IN*, on obtient toutes les valeurs rationnelles positives de cette tangente.

Mais existe-t-il des solutions au problème, d'un autre type que celle obtenues précédement ?



On se donne une demi-droite [Ou) constructible mais quelconque. [Ou) est-elle une des 1/2 droites [OM_{pk}) vues dans la première partie ?

Cherchons si [Ou) contient un point M_{pk} .

Soit A(a,b), I_1(e,f), g=(Ou;Om), h=(Ox;Om) et j=(Ox;Om).

Une première méthode est d'étudier la rationnalité de tan(g).

Or g = j - h et donc:

$$\tan(g) = \frac{\tan(j) - \tan(h)}{1 + \tan(j)\tan(h)} = \frac{\frac{f}{e} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{f}{e}\frac{b}{a}} = \frac{af - eb}{ae + bf}$$

a, b, e, f, étant entiers, tan(g) est rationnel et on obtient p = ae + bf et k = af -be.

(Ou) passe par le point M_{pk} (pe + kf ; pf - ke). Le point M'_{pk} (pe - kf ; pf + ke) lui est symétrique par rapport à (Om).

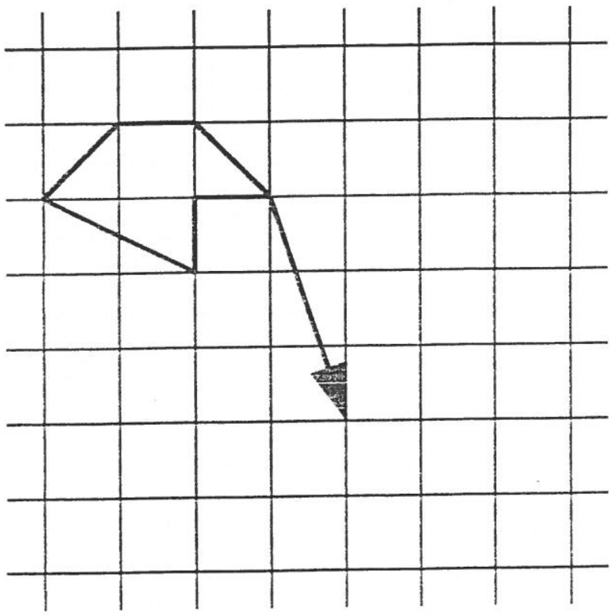
Remarque:

Cette méthode permet de construire analytiquement la droite symétrique d'une droite constructible par rapport à une droite constructible. Appliquons la au dessin du dessus où e=3, f=2, a=2 et b= -1. Le point M'_{pk} (pe - kf ; pf + ke) est (-2; 29).

VII - Et les transformations?

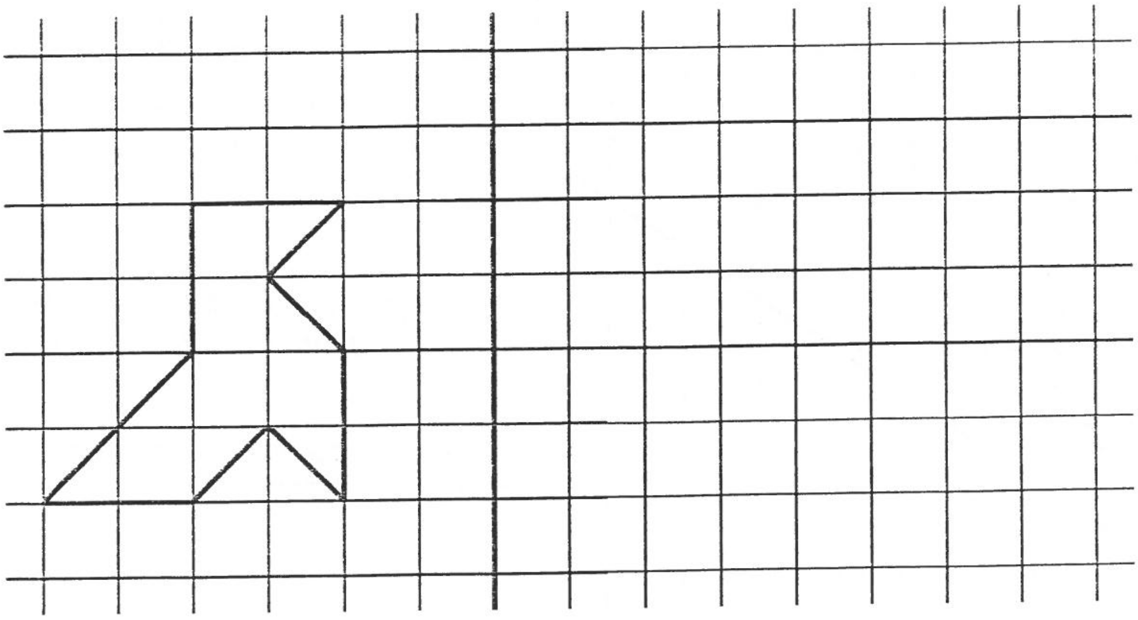
Nous avons vu des droites, des triangles, des quadrilatères. Nous allons maintenant les transformer.

La translation est un jeu d'enfant: entraînez vous

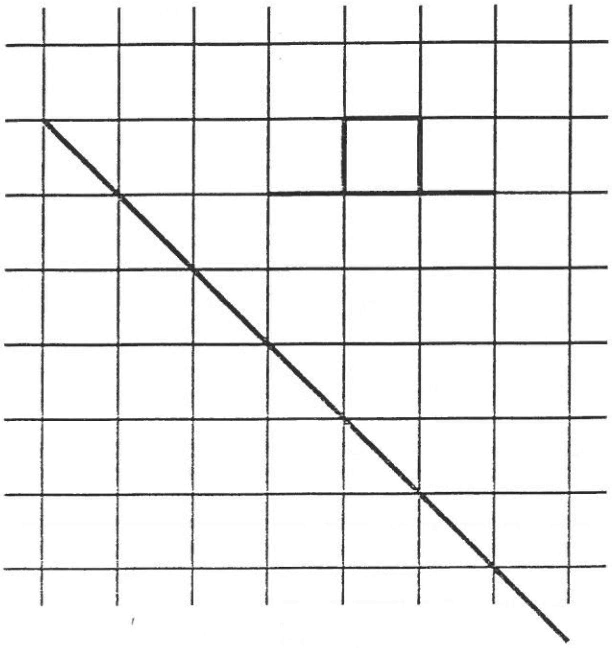


La symétrie.

Tout élève connait la cocotte!

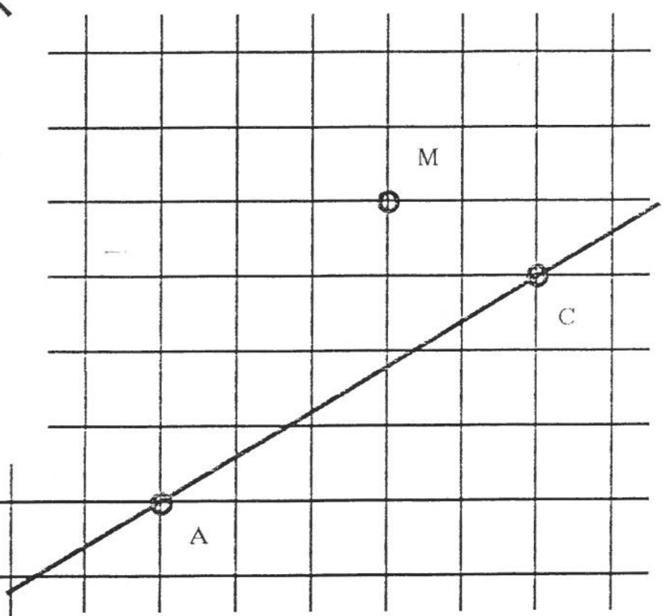


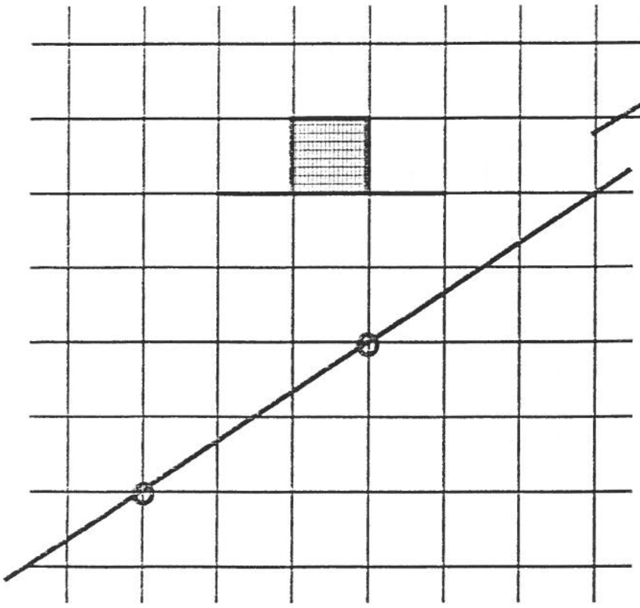
On peut aussi travailler avec des axes à 45°.



C'est plus délicat quand l'axe fait un angle quelconque: on a vu précédemment comment, dans certains cas, construire un losange dont on connait une diagonale. Cela va nous permettre de trouver deux points symétriques ce qui va faciliter notre travail.

Pour la figure ci-contre commencez par construire un losange ABCD puis vous pourrez placer le symétrique de M. Il n'est pas sur un noeud.

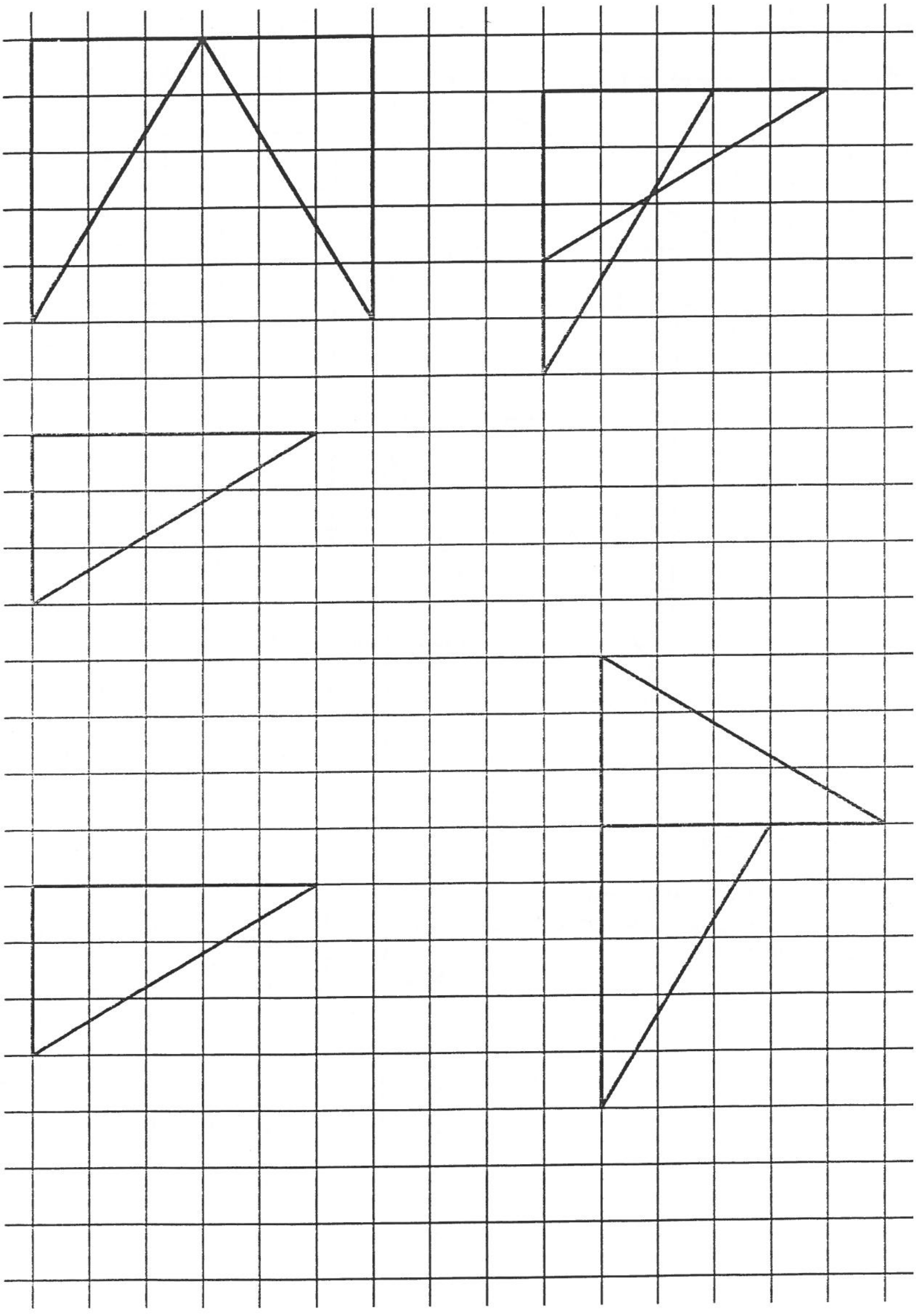


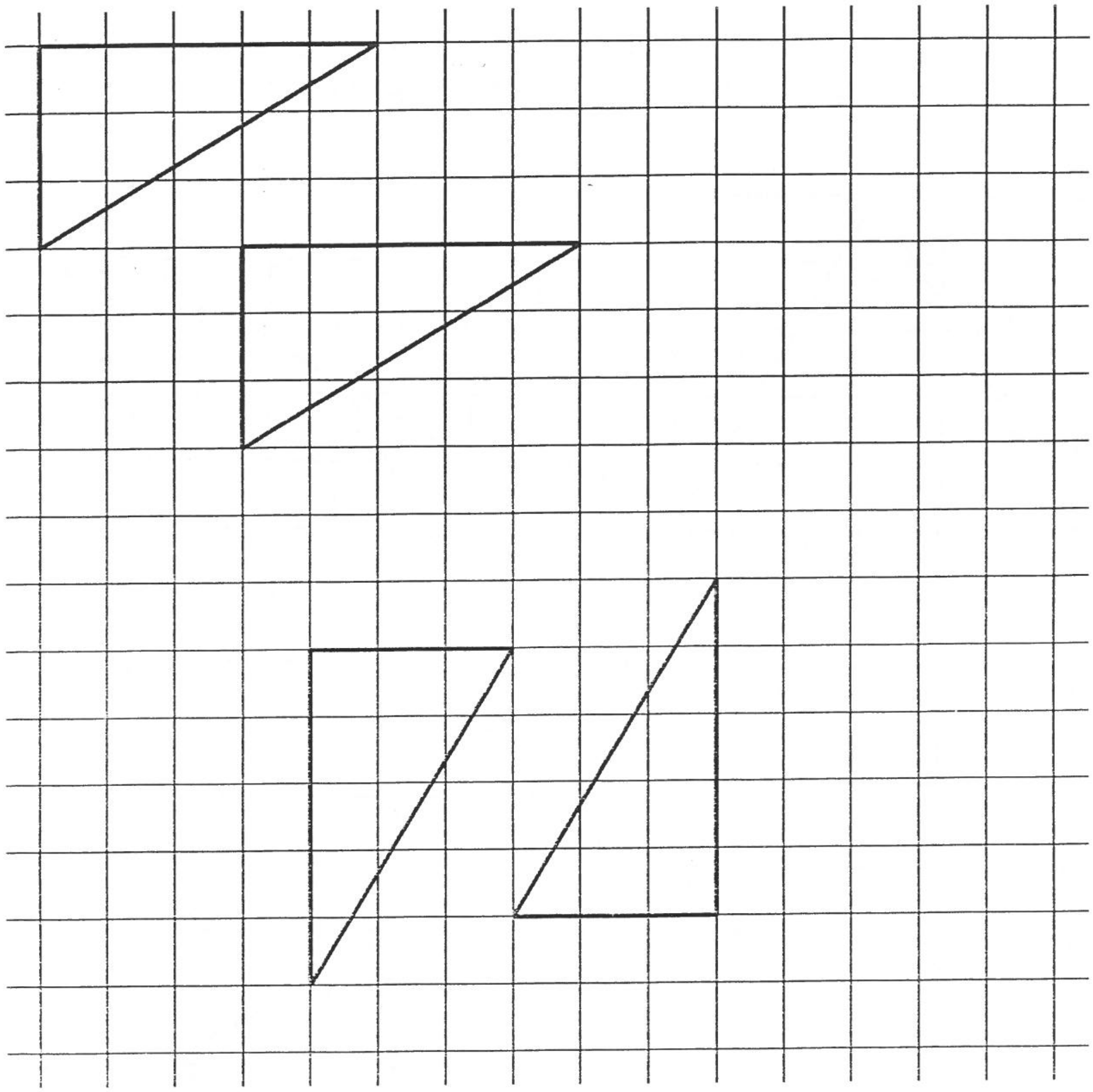


Essayez maintenant avec cette nouvelle figure. Chapeau si vous y arrivez!

Le paragraphe VI sur la bissectrice peut vous y aider.

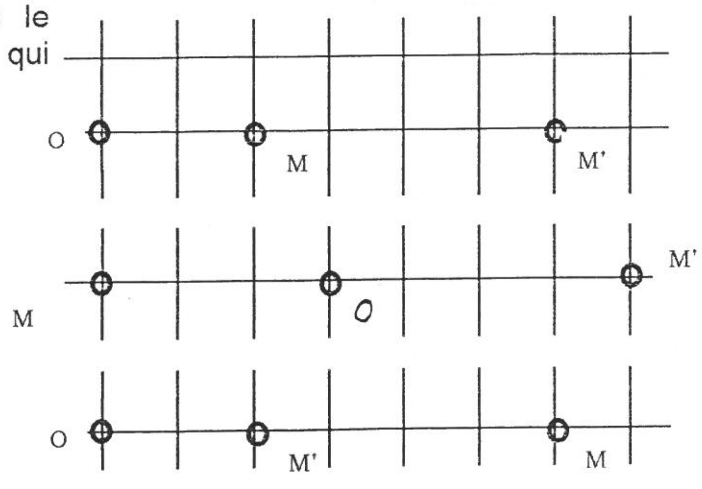
Dans les exercices suivants, il s'agit de transporter un triangle sur l'autre triangle en une, deux ou trois symétries orthogonales que vous déterminerez.





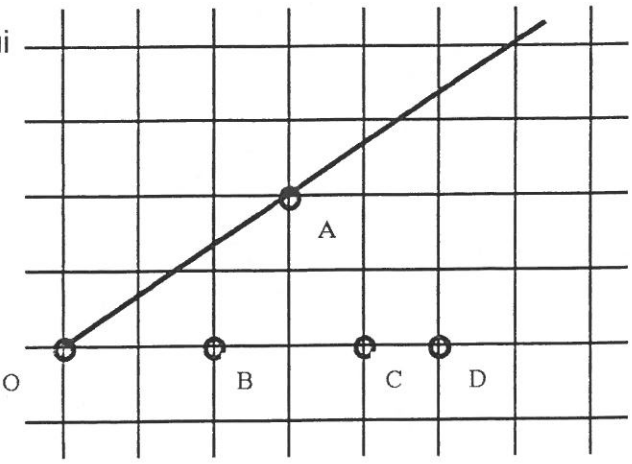
Les homothéties

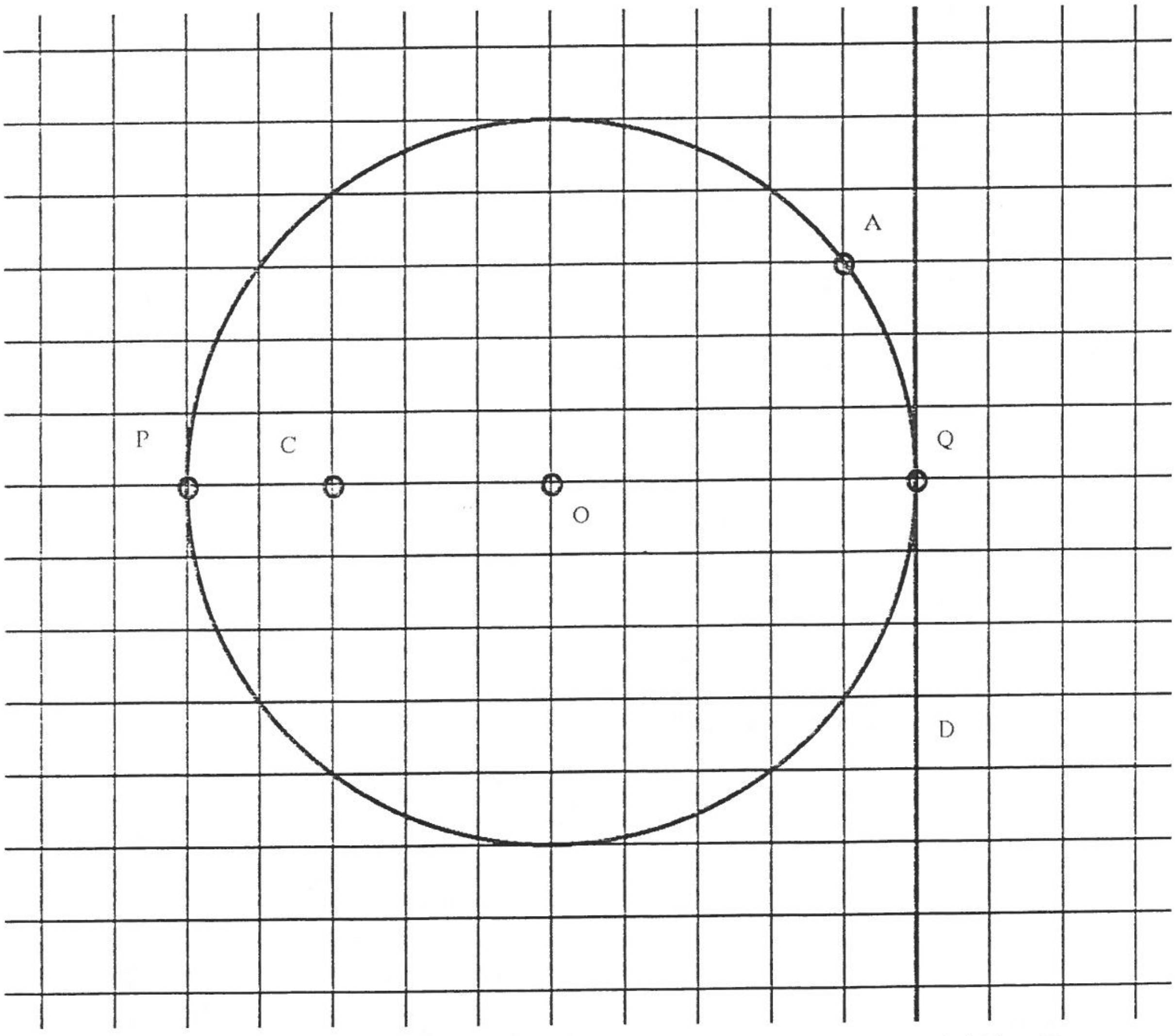
Trouver dans chacun des cas le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme M en M'.



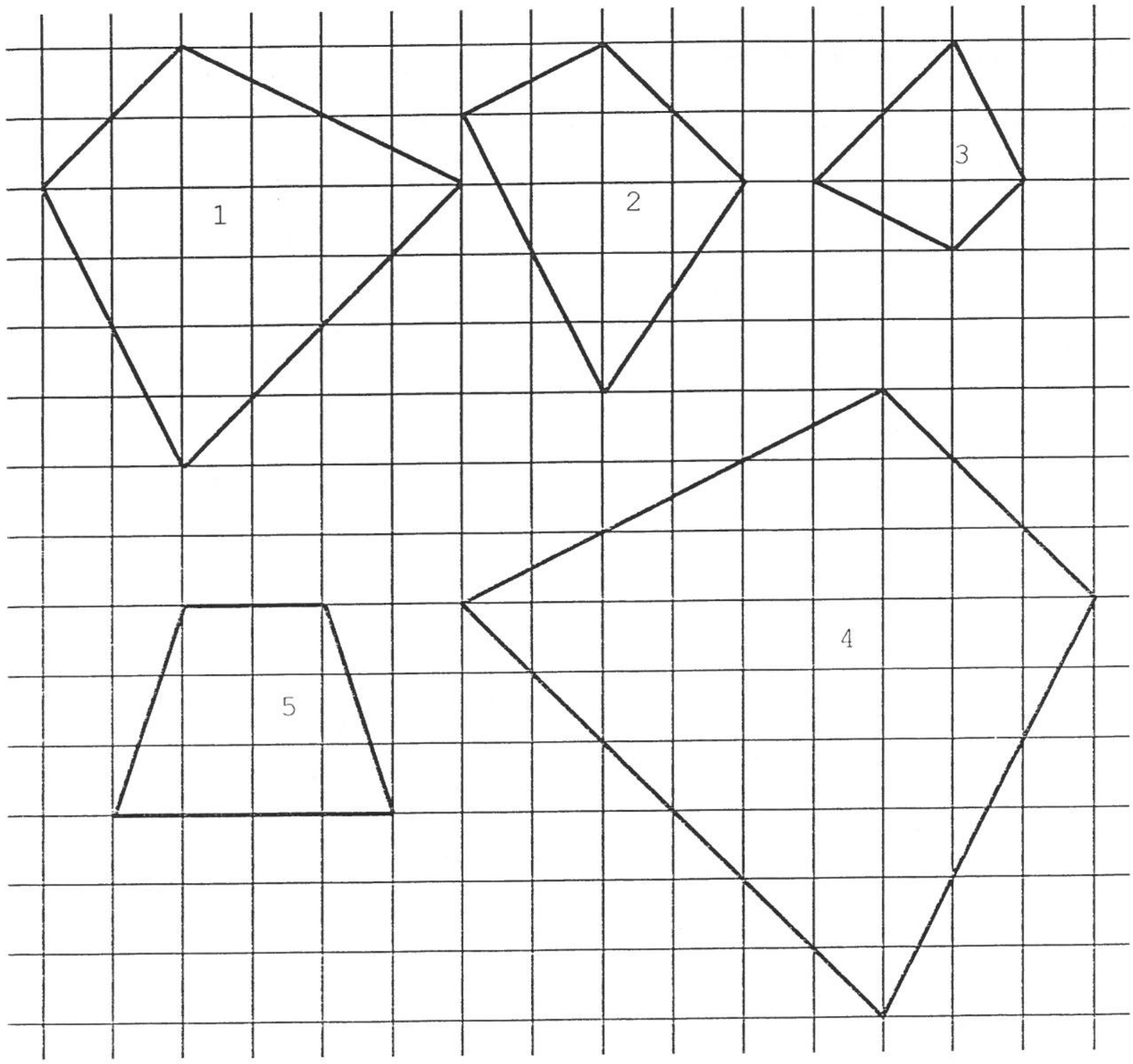
H est l'homothétie de centre O qui envoie B en D.

Construire H(A) puis H(C).





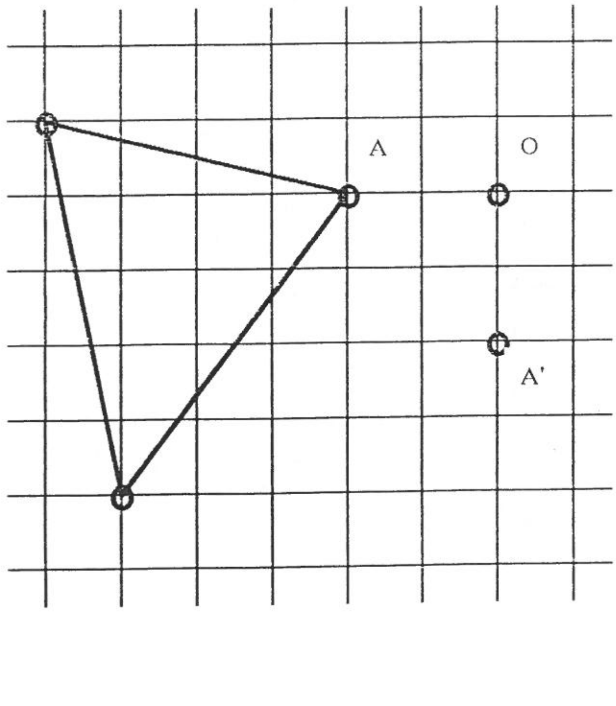
Sur la figure ci-dessus, h est l'homothétie de centre c et telle que h(Q) = P.
Construire les images des points A, O et P par h.
De même, construire les images de la droite D et du cercle par h.



Les figures 2, 3, 4, 5, sont-elles des réductions ou des agrandissements de 1. Si oui, donner l'échelle et l'aire pour chacune d'elles.

La rotation

Sur la figure ci-contre, construire l'image du triangle par la rotation de centre O qui transforme A en A'.



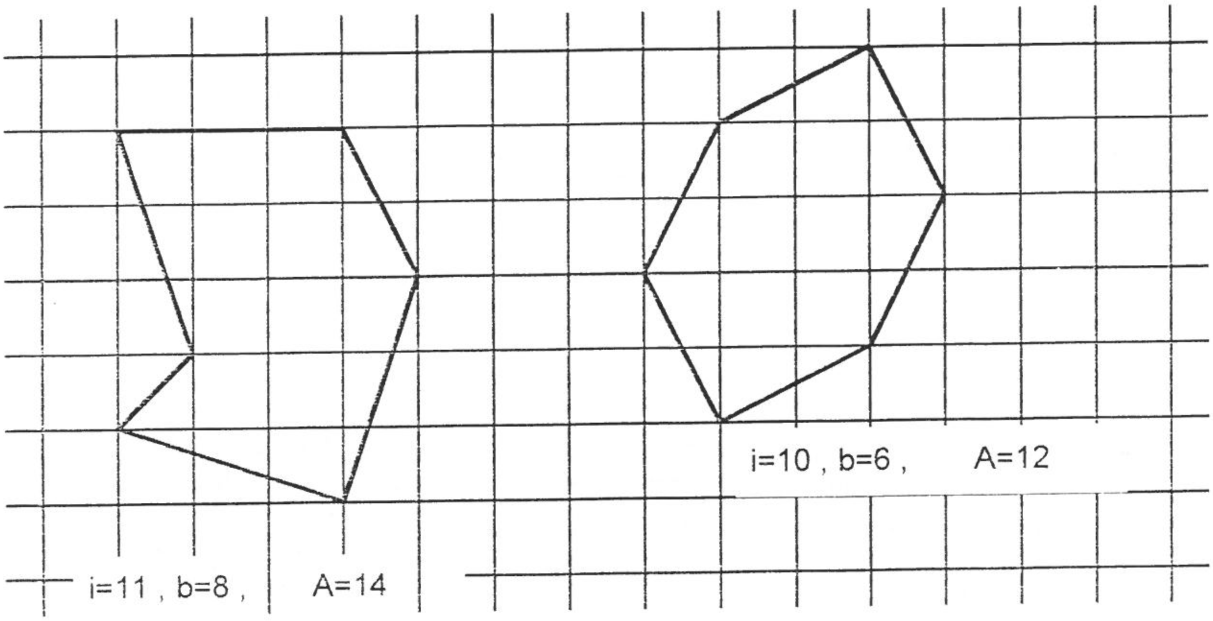
VIII - La formule de Pick

C'est en 1899 que G. Pick donne sa formule qui exprime l'aire de tout polygone non croisé et non troué dont les sommets sont noeuds du quadrillage:

$$\boxed{Aire = i + \frac{1}{2}b - 1}$$

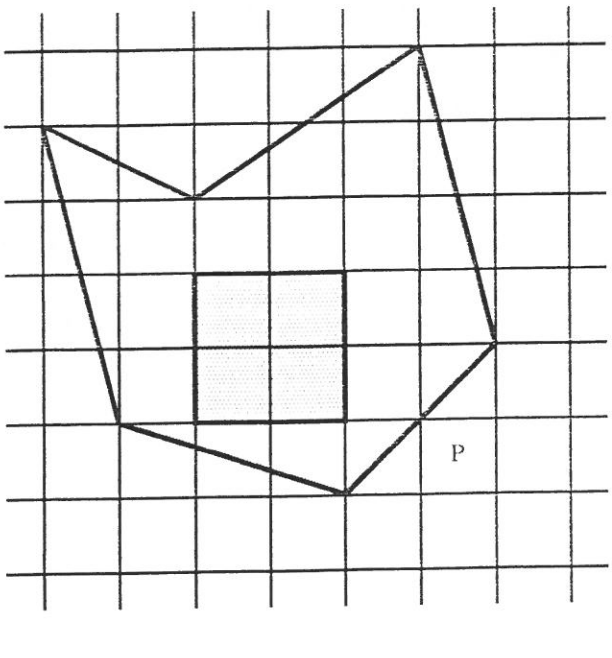
i = nombre de noeuds intérieurs
b = nombre de noeuds sur le bord

Exemples:



Pour les troués, il suffit de les considérer comme différence de polygones non troués.

On compte l'aire de P comme s'il était plein et on retranche l'aire du trou, le carré grisé.



Vous avez sans doute remarqué que l'aire obtenue pour tout polygone répondant aux conditions de validité de la formule de Pick est entière ou demi entière.

Cette remarque va nous permettre de répondre à une question que nous nous sommes posé à propos du triangle équilatéral: est-il possible d'en dessiner un dont les sommets soient sur les noeuds du quadrillage ?

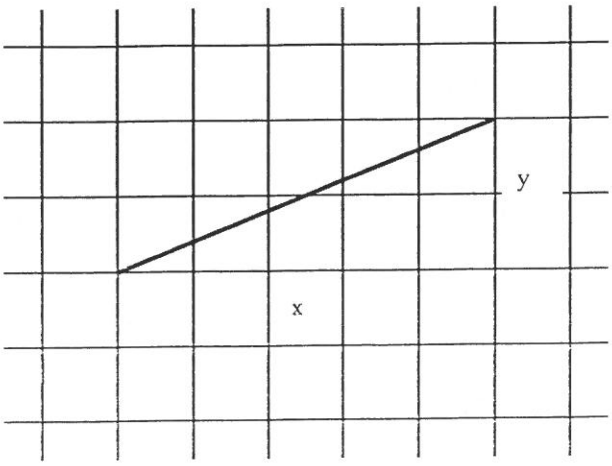
Comme on le voit sur cette figure, le côté de tout triangle de ce type a pour longueur :

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et l'aire du triangle équilatéral, qui est:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ne peut être ni entière ni demi entière, a^2 étant entier, l'aire est irrationnelle.



Nous voici arrivés au terme de notre survol d'activités que l'on peut faire sur quadrillage. Notre ambition était d'attirer votre attention sur ce support. Nous y sommes parvenu si ce travail vous incite à le prolonger et à parcourir bien d'autres chemins que nous avons délaissés, géométrie analytique, espace, autres transformations etc.

Le sujet du CAPES externe de 92, que nous mettons en annexe, étudie les configurations planes soumises à des conditions mettant en jeu les entiers.

Vous pouvez nous faire part de vos remarques, critiques, suggestions, à

l'IREM de Reims
Moulin de la Housse
BP 347
51062 REIMS Cedex

A N N E X E

SUJET DU CAPES EXTERNE 92

Notations et objectifs du problème

Le plan affine euclidien orienté, noté $\mathscr{P}$, est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$ d'origine O. A tout point M de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$ on associe son affixe $z = x+iy$; ceci permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un point entier du plan est un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs. L'ensemble de tous les points entiers est appelé réseau. Le réseau s'identifie à la partie de $\mathbb{C}$, notée $\mathbb{Z}[i]$ et définie par: $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib\ ;\ (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$.

L'objectif général du problème réside en la recherche et l'étude de configurations planes soumises à des conditions mettant en jeu les entiers:

Thème A: recherche des polygones réguliers dont les sommets appartiennent au réseau;

Thème B: recherche et étude de parties du plan dont les distances mutuelles entre les points sont des entiers;

Thème C: recherche et étude de configurations contenant un nombre fixé de points du réseau.

Les notations et objectifs spécifiques à chaque thème sont précisés en en-tête de chacun d'eux. Les thèmes B et C sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. Ils dépendent de la question préliminaire du thème A.

Thème A: Polygones réguliers à sommets entiers

On se propose de démontrer que les seuls polygones réguliers convexes à sommets entiers sont les carrés. Pour ceci, on établit d'abord un résultat préliminaire qui sera utilisé à nouveau dans le thème B et le thème C. Dans tout ce thème A, les coordonnées des points sont définies dans $\mathscr{R}$.

A.I Question préliminaire

A.I.1 Soit θ un nombre réel, et n un entier supérieur ou égal à 1.Montrer que:

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta . \cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

A.I.2 En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes tels que, pour tout n,élément de $\mathbb{N}^*$, P_n vérifie les propriétés suivantes:

- P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers, et unitaire (c'est-à-dire tel que le coefficient de X^n soit égal à 1).
- pour tout réel θ, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.

A.I.3 Soit θ un nombre réel tel que $\frac{\theta}{\pi}$ soit rationnel.Montrer que $2\cos\theta$ est solution d'une équation de la forme

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (1)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $0 \leq i \leq n-1$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

A.I.4 Soit θ un nombre réel. On suppose que $\frac{\theta}{\pi}$ et $\cos\theta$ sont rationnels.

Montrer que $\cos\theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(On pourra commencer par montrer que toute solution rationnelle de l'équation (1) est un entier relatif).

Tournez la page S.V.P.

A.II Application aux polygones réguliers à sommets entiers

Dans cette partie n désigne un entier supérieur ou égal à 3.On rappelle qu'une suite $(A_1, \dots, A_n)$ de n points distincts du plan définit un polygone régulier convexe P ayant pour sommets ces n points s'il existe une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$, ou $-\frac{2\pi}{n}$, telle que $r(A_i) = A_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $r(A_n) = A_1$. On sait qu'une telle rotation est unique. On convient d'écrire $P = (A_1, \dots, A_n)$. Le centre Ω de la rotation r s'appelle le centre de P.

<u>A.II.1</u> Soit $P = (A_1, \dots, A_n)$ un polygone régulier convexe dont les n sommets sont des points entiers. Soit Ω son centre.

a) Montrer que Ω est l'isobarycentre de l'ensemble des sommets de P, et en déduire que Ω est à coordonnées rationnelles.

b) En notant ω l'affixe de Ω, rappeler la représentation analytique de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, ou $-\frac{2\pi}{n}$, au moyen des affixes.

c) En écrivant que $r(A_1) = A_2$, montrer que $\cos\frac{2\pi}{n}$ et $\sin\frac{2\pi}{n}$ sont rationnels. En déduire, au moyen de A.I.4, que n = 4, c'est-à-dire que P est un carré.

<u>A.II.2</u>. Soient A_1 et A_2 deux points entiers distincts. Montrer que les deux carrés $C = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ et $C' = (A_1, A_2, A'_3, A'_4)$ admettant A_1 et A_2 comme sommets consécutifs ont tous leurs sommets entiers. Préciser les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de A_3, A_4, A'_3, A'_4 en fonction des coordonnées (x_1, y_1) de A_1 et (x_2, y_2) de A_2.

Thème B: Ensembles à distances entières

Un sous-ensemble non vide E de points du plan est appelé <u>ensemble à distances entières</u> lorsque, pour tous points A et B appartenant à E, la distance AB est un nombre entier. La partie B.I étudie quelques exemples. La partie B.II établit qu'un ensemble infini à distances entières est nécessairement contenu dans une droite. Par contre, dans la partie B.III, on montre que, pour tout entier n ($n \geq 3$), il existe un ensemble à distances entières constitué de n points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

B.I Etude de quelques exemples

<u>B.I.1</u> Les sommets d'un carré, d'un rectangle , d'un losange peuvent-ils former un ensemble à distances entières?

<u>B.I.2</u> Soit ABC un triangle équilatéral de côté 112.

a) Justifier l'existence et l'unicité du point D défini par les conditions suivantes: AD = 73, BD = 57, D et C sont d'un même côté de la droite (AB).

b) Calculer les coordonnées x et y de D dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O' est le milieu de [AB], $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{O'A}}{\|\overrightarrow{O'A}\|}$, $\vec{\jmath} = \frac{\overrightarrow{O'C}}{\|\overrightarrow{O'C}\|}$. On observera que x est rationnel et on l'écrira sous forme d'une fraction irréductible. On observera également que $y = y_1\sqrt{3}$ où y_1 est un nombre rationnel qu'on écrira sous forme d'une fraction irréductible.

c) Montrer que $E = \{A, B, C, D\}$ est un ensemble à distances entières.

B.II Ensembles infinis à distances entières

B.II.1 Soit H une hyperbole et $\mathscr{R}''$ un repère cartésien du plan dans lequel H a pour équation,

$$xy = 1.$$

Soit Γ une courbe du plan, d'équation, dans $\mathscr{R}''$,

$$a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y + f = 0,$$

où a , b , c , d , e ne sont pas tous nuls.

Montrer que, si $\Gamma \cap H$ est infini, alors $\Gamma = H$ et donner un majorant du nombre de points de $\Gamma \cap H$ lorsque $\Gamma \neq H$.

B.II.2 Soit E un ensemble à distances entières contenant trois points A, B, C non alignés. On pose $p = AB$, $q = AC$ et, pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$,

$$U_j = \{M \in \mathscr{P} \ ; \ |MA-MB| = j\} \text{ et } V_k = \{M \in \mathscr{P} \ ; \ |MA-MC| = k\}.$$

a) Préciser la nature géométrique des ensembles U_j et V_k pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$. On distinguera les cas $j = 0$ et $j = p$ (resp. $k = 0$ et $k = q$) des cas $0 < j < p$ (resp. $0 < k < q$).

b) Déduire de B.II.1 que, quelque soit $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$, $U_j \cap V_k$ est une partie finie (éventuellement vide) du plan.

c) Démontrer que $E \subset \bigcup_{0 \le j \le p} U_j$, et $E \subset \bigcup_{0 \le k \le q} V_k$, et en déduire que E est fini.

B.II.3 Etant donné un point A et un vecteur $\vec{v}$, on note $E_{A,\vec{v}}$ l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\, \vec{v}$ avec $x \in \mathbb{Z}$.

Soit E une partie infinie du plan. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(*) E est à distances entières;

(**) Il existe un point A et un vecteur $\vec{v}$ de norme 1 tels que $E \subset E_{A,\vec{v}}$.

B.III Ensembles finis à distances entières

Soit ϕ le nombre réel défini par $\cos \phi = \frac{4}{5}$, $0 < \phi < \pi$. Pour tout entier naturel p, on note M_p le point d'affixe $e^{2ip\phi}$.

B.III.1 Montrer que les points M_p, p appartenant à $\mathbb{N}$, sont deux à deux distincts.

B.III 2 Soient p et q deux entiers naturels. Prouver que la distance M_pM_q est égale à $2\,|\sin (p-q)\phi\,|$. En déduire que M_pM_q est un nombre rationnel.

B.III.3 Soit un entier n supérieur ou égal à 3. Montrer qu'il existe un ensemble à distances entières, constitué de n points, et contenu dans un cercle de centre O.

Thème C: Configurations contenant un nombre fixé de points du réseau

Après l'étude de quelques exemples (partie C.I), on se propose d'établir que, pour chaque entier n, n appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe:

- un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau (partie C.II);
- un carré à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau (partie C.III);

Tournez la page S.V.P.

- un cercle passant par exactement n points du réseau (partie C.IV).
Dans tout ce thème C, sauf mention expresse du contraire, les coordonnées sont définies dans le repère $\mathcal{R}$.

C.I Etude de quelques exemples

C.I.1 Construire, sans justification, mais en précisant les coordonnées de leurs centres et leurs rayons, quatre cercles C_1, C_2, C_3 et C_4 tels que, pour chaque $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe exactement j points du réseau à l'intérieur de C_j.

C.I.2 Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Donner, sans justification, les coordonnées des sommets d'un carré à l'intérieur duquel se trouvent exactement n^2 points du réseau.

C.II Cercle à l'intérieur duquel se trouvent n points du réseau

C.II.1 Classification des points du réseau

a) Soit B une partie bornée du plan. Montrer que B ne contient qu'un nombre fini de points du réseau.

b) On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$. Montrer qu'il n'existe pas deux points du réseau à la même distance de A.
En déduire qu'on peut classer les points du réseau en une suite $(M_n)_{n\geq 1}$ telle que $AM_n < AM_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C.II.2 Application

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, déduire de C.II.1.b qu'il existe un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau.

C.III Carré à l'intérieur duquel se trouvent n points du réseau

C.III.1 Définition d'une fonction sur le réseau

Soit D_1 la droite d'équation $x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3} = 0$ et D_2 la droite d'équation $x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

a) Montrer que D_1 et D_2 sont perpendiculaires, préciser les coordonnées de leur point d'intersection Ω, et représenter graphiquement ces deux droites.

b) On pose $X = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}})$, $Y = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3})$. Montrer qu'on définit ainsi un changement de repère orthonormé direct dans lequel les nouveaux axes sont portés respectivement par D_1 et D_2

Soit M un point du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère précédent et on pose

$$f(M) = |X| + |Y| = \frac{1}{2}\left|x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2}\left|x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right|.$$

C.III.2 Injectivité de la fonction f

On considère deux points M_1 et M_2 du réseau, de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans $\mathcal{R}$, tels que $f(M_1) = f(M_2)$.

a) Montrer qu'il existe quatre nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vérifiant $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 1$ et tels que $\alpha x_1 + \beta y_1 - \gamma x_2 - \delta y_2 + \frac{\gamma - \alpha}{3} = 0$, $\beta x_1 - \alpha y_1 - \delta x_2 + \gamma y_2 + \frac{\delta - \beta}{3} = 0$.(On pourra observer que, pour tout réel x, on a $|x| = \lambda x$ avec $\lambda^2 = 1$)

b) En déduire que $M_1 = M_2$.(On pourra commencer par montrer que $\gamma - \alpha = \delta - \beta = 0$)

C.III.3 Nouvelle classification des points du réseau

Montrer, en utilisant la même méthode qu'en C.II.1, que l'on peut classer les points du réseau en une suite $(N_n)_{n\geq 1}$ telle que $f(N_n) < f(N_{n+1})$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

C.III.4 Soit un réel a strictement positif. Montrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (X, Y) vérifient $|X| + |Y| < a$ est l'intérieur d'un carré C_a dont on précisera les sommets.
En déduire que pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe un carré C_a dont l'intérieur contient exactement n points du réseau.

C.IV Cercle passant par n points du réseau

C.IV.1 Nombre de solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = 5^n$

Soit un entier n appartenant à $\mathbb{N}$. On lui associe les deux ensembles suivants:

$\mathscr{E}_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ ; \ x^2 + y^2 = 5^n\}$

$E_n = \{z \in \mathbb{Z}[i] \ ; \ |z|^2 = 5^n\}$

a) Montrer que $\mathscr{E}_n$ et E_n sont des ensembles finis de même cardinal .

b) Déterminer E_0.

Pour tout élément ω de E_0 et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on pose

$$Z_{\omega,p} = \omega\,(2 + i)^p\,(2 - i)^{n-p}.$$

c) Prouver que $Z_{\omega,p}$ appartient à E_n et que l'application $(\omega, p) \to Z_{\omega,p}$, de $E_0 \times \{0, ..., n\}$ dans E_n, est injective.(On pourra montrer que, si $Z_{\omega,p} = Z_{\omega',q}$ avec ω et ω' éléments de E_0 et p et q entiers inférieurs ou égaux à n, alors $\left(\frac{2 + i}{2 - i}\right)^{4\,(p-q)} = 1$ et utiliser A.I.4)

d) Soit $z = x + iy$ un élément de E_n, avec $n \geq 1$. Montrer que (x, y) vérifie l'un des systèmes de relations suivants:

(1) $\begin{cases} 2x - y \equiv 0 \pmod 5 \\ x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} 2x + y \equiv 0 \pmod 5 \\ -x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

En déduire que l'un des deux nombres $\frac{z}{2 + i}$ ou $\frac{z}{2 - i}$ appartient à E_{n-1}.

e) Prouver que l'application $(\omega, p) \to Z_{\omega,p}$, de $E_0 \times \{0, ..., n\}$ dans E_n, est bijective. En déduire le nombre d'éléments de $\mathscr{E}_n$.

Tournez la page S.V.P.

C.IV.2 Cercle passant par un nombre pair de points du réseau

a) On pose, pour chaque entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $A_n = \{(x, y) \in \mathscr{E}_n$; x pair et y impair $\}$ et $B_n = \{(x, y) \in \mathscr{E}_n$; x impair et y pair $\}$.
Montrer que A_n et B_n ont le même cardinal et que $\mathscr{E}_n = A_n \cup B_n$ et $A_n \cap B_n = \emptyset$.
b) Soit un entier k de $\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de points du réseau appartenant au cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}.5^{\frac{k-1}{2}}$.

C.IV.3 Cercle passant par un nombre impair de points du réseau

Soient un entier k de $\mathbb{N}^*$ et Γ_k le cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{3}.5^k$.

a) Montrer que le nombre de points du réseau appartenant à Γ_k est égal au cardinal de l'ensemble F_k défini par $F_k = \{z = x + iy\ ;\ z \in E_{2k},\ x \equiv -1 \pmod 3,\ y \equiv 0 \pmod 3\}$.

Les questions b, c et d ont pour objet de calculer le cardinal de F_k.

b) Montrer que quels que soient $\omega \in E_0$ et $z \in E_{2k}$, ωz et $\omega \bar{z}$ appartiennent à E_{2k}. Prouver alors que la relation (R), définie sur E_{2k} par:
"Pour z et z' dans E_{2k}, on a z(R)z' si, et seulement si, il existe $\omega \in E_0$ tel que $z' = \omega z$ ou tel que $z' = \omega \bar{z}$ "
est une relation d'équivalence sur E_{2k}.

On désigne par (R)(z) la classe d'équivalence d'un élément z de E_{2k}.

c) Soit $z = x + iy$ un élément de E_{2k}.
- On suppose $xy \neq 0$. Expliciter les éléments de (R)(z) en fonction de x et de y et montrer que $(R)(z) \cap F_k$ possède deux éléments.
- On suppose $xy = 0$. Expliciter les éléments de (R)(z) et montrer que $(R)(z) \cap F_k$ possède un élément.

d) En déduire que F_k possède 2k+1 éléments.

TITRE : MATHEMATIQUES SUR LE CAHIER DE L'ECOLIER

AUTEUR : Pierre BRESSON, Sylvestre SUBISSI -
antenne IREM 52 de l'IREM de Reims

NIVEAU : ECOLE, COLLEGE, LYCEE, UNIVERSITE

DATE : AVRIL 1994

MOTS-CLE : spécialité GEOMETRIE DU QUADRILLAGE

autres ACTIVITES, ANGLES, BARYCENTRES, BISSECTRICE
FIGURES, LONGUEURS, TRANSFORMATIONS,
LA FORMULE DE PICK
VECTEURS

CAPES EXTERNE 92

RESUME : Le quadrillage est le support le plus utilisé par les écoliers ou les étudiants mais on trouve très peu de documents qui l'utilisent comme objet de travail ou de recherche.

Pourtant, il permet d'aborder pratiquement tous les thèmes des mathématiques enseignées dans les collèges, les lycées et même à l'université, à travers des activités de tous niveaux, des plus simples aux plus compliquées.

Cette étude est un rapide survol des possibilités offertes par ce support familier et quotidien.

ISBN 2-910076-02-4

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	36	30 F	Re31