UNIVERSITE DE REIMS
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

-:-:-:-:-:-:-:-

I. R. E. M.

LE GEOMETRE

HISTOIRES VECUES

DU COLLEGE AU LYCEE

Acteurs :
Marie Claude BALLAND
Jean Luc BOURDENET
Jean Claude FENICE
Alain FINET
Jean Louis GERARD
et des élèves de différents établissements
du département de l'Aube

INTRODUCTION

Nous avons voulu à travers ce document communiquer notre expérience sur l'utilisation du **GEOMETRE** dans nos classes. Volontairement nous l'adressons tant aux collègues des **Collèges** que des **Lycées**. Nous pensons que les activités proposées intéressent les uns comme les autres.

Nous avons essayé que ce document soit **le plus lisible et le plus pratique possible :**

- **les fiches expérimentation** : s'adressant aux professeurs pour indiquer les conditions dans lesquelles l'activité s'est déroulée,

- **les fiches élèves** : utilisables et utilisées telles quelles par les élèves,

- **le vécu** : pour les réactions que l'activité a provoquées dans la classe ou le groupe d'élèves où elle a été proposée.

Ce travail d'une année d'utilisation se poursuit dans nos classes. Il ne s'achève pas à la diffusion de ce document. Notre souhait est de permettre une **appropriation active et dynamique des mathématiques** par les élèves. Si ce document peut vous donner queques pistes ou quelques envies, alors notre objectif sera atteint.

Marie Claude BALLAND
Collège Jacobins TROYES
Jean Luc BOURDENET
Lycée C. Claudel TROYES
Jean Claude FENICE
Collège M. Hutin BOUILLY
Alain FINET
Lycée M. de Champagne TROYES
Jean Louis GERARD
Collège P. Langevin SAINTE SAVINE

Groupe I.R.E.M. informatique de l'AUBE

SOMMAIRE

1 Proposé par M. A. KELHETTER de l'Académie de NANTES

2 Conçu et expérimenté par Mme C. OUDIN du Lycée C.CLAUDEL de TROYES

De A à B... ou LE SYMETRIQUE D'UN POINT OBTENU PAR DES PERPENDICULAIRES

Public : Classe de 6ème de 23 élèves.

Objectifs :

- conjecturer, tester, prouver,
- déceler un invariant dans les différentes représentations d'une même figure.

Prérequis : Savoir tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.

Place dans la progression : Après la symétrie axiale.

Durée : Deux séquences d'une heure.

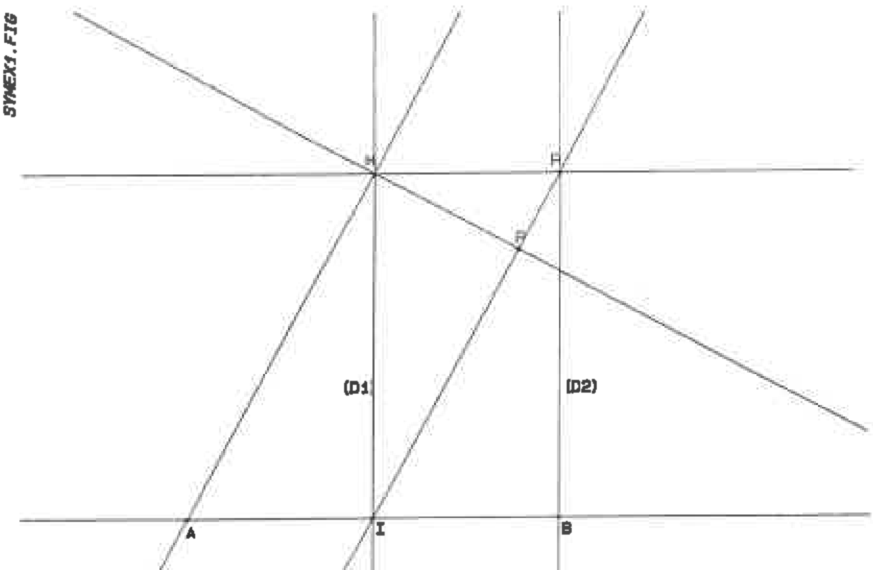
Déroulement

Matériel : Un PC, avec tablette rétroprojetée sur un tableau blanc.

Structure de la classe : Les élèves travaillent seuls ou à deux.

Etapes : A partir de la construction de perpendiculaires, les élèves vont être invités à prendre conscience de l'invariant de cette figure, c'est à dire les positions symétriques de A et B, à travers les déformations permises par le logiciel, en agissant sur les éléments variables de la figure.

SYMEX1.FIG



De A à B à la REGLE et à l'EQUERRE

1°) Tracer la droite perpendiculaire à (D_1) passant par A. Elle coupe (D_1) en un point qu'on appellera I.

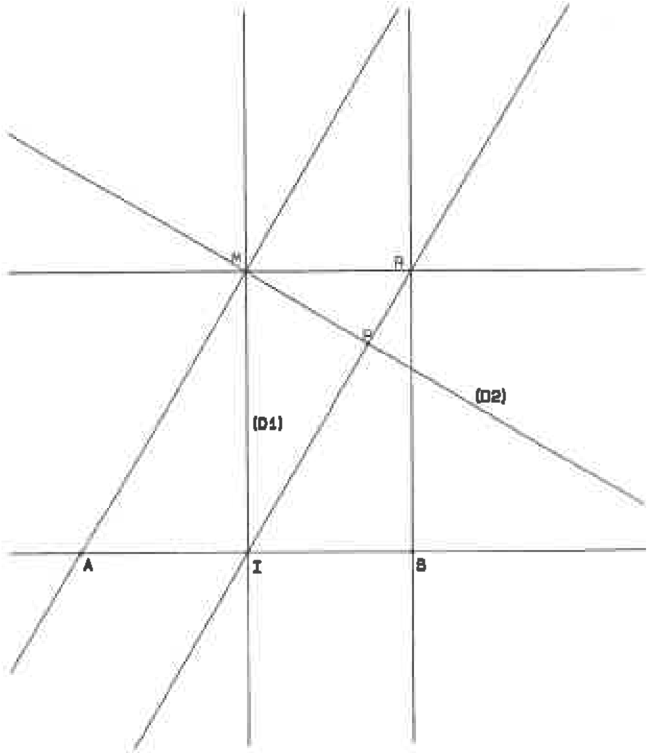
2°) Tracer la droite (AM), puis la droite perpendiculaire à (AM) et passant par M. On l'appellera (D_2).

3°) Tracer la droite perpendiculaire à (D_2) et passant par I ; elle coupe (D_2) en P.

4°) Tracer la droite perpendiculaire à (D_1) et passant par M. Elle coupe la droite (IP) en R.

5°) Tracer la droite perpendiculaire à (AI) et passant par R. Elle coupe (AI) en un point qu'on appellera B.

SYNEX1.FIG



On déplace M :

On déplace la droite (D_1) :

On déplace A :

Essayons d'expliquer cette curieuse propriété de notre construction :

- Nomme les figures particulières que tu distingues dans ce dessin :

- Sur quels côtés retrouve-t-on la longueur AI ?

- Qu'est-ce que cela permet d'expliquer ?

Le vécu

Après présentation des objectifs aux élèves, la fiche élève leur est distribuée. La construction demande un temps conséquent.

La position du point B ne suscite alors aucune remarque, la figure globalement asymétrique semble empêcher la conjecture de la position symétrique de A et B par rapport à (D1).

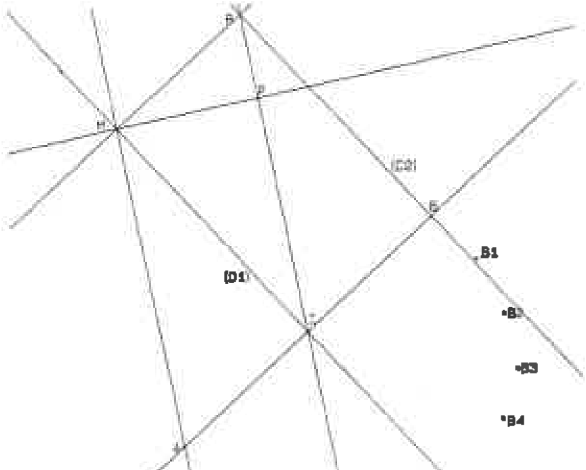
Le professeur propose, avec l'option "historique" du logiciel, la vérification pas à pas de la construction. (Fichier SYMEX1)

Si on déplace M sur (D1), qu'est-ce qui change ? Qu'est-ce qui ne change pas ?

Les élèves constatent que "*R et P bougent avec M mais que B ne bouge pas*". Toujours aucune remarque quant à A, I et B.

Et si on modifie la position de la droite (D1) ?

(D1) est définie par deux points, il est donc possible de la faire pivoter autour de l'un en déplaçant l'autre. Le professeur marque au tableau, sur lequel la figure est projetée, quelques positions successives du point B.

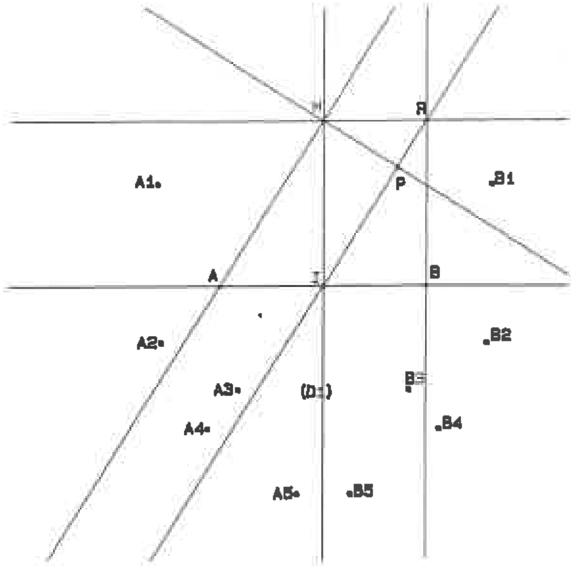


Les élèves remarquent que "*B se déplace sur un cercle de centre A*". La conjecture est infirmée, lorsque le cercle de centre A passant par un des points B est tracé. Il ne passe pas par les suivants !

Les élèves notent donc simplement que "*Tout bouge, sauf A*". La conservation de I milieu de [AB] n'est toujours pas vue.

Et si on déplace A ?

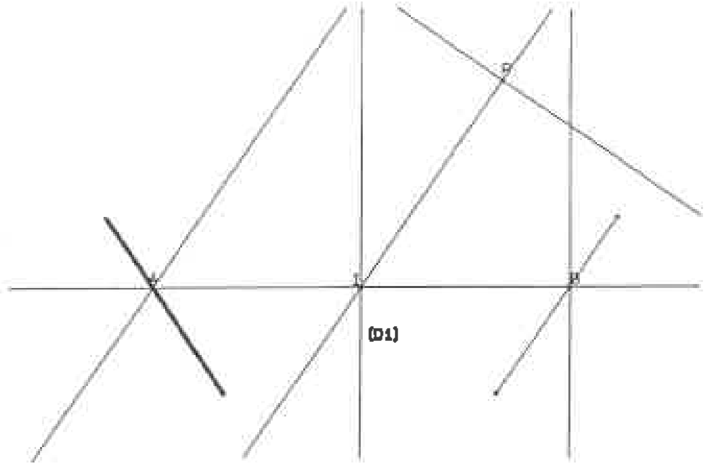
Les élèves observent que "*B bouge en sens contraire*" dans les déplacements latéraux... Là encore, plusieurs positions successives de A sont marquées et les positions correspondantes de B.



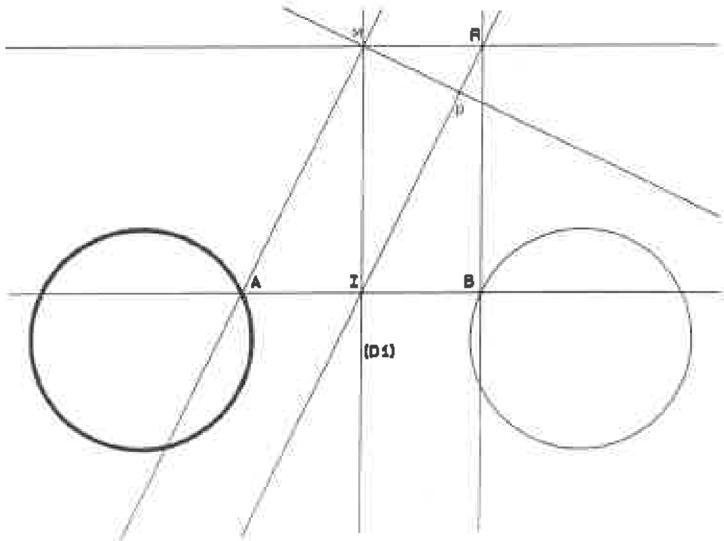
La symétrie ne surgit toujours pas...

Et si on déplace le point A sur une figure connue ?

Le point A est déplacé d'abord sur un segment (Fichier SYMEX4). Par l'option "lieu de points", le déplacement de B est visualisé. Des élèves commencent à voir la symétrie : "*les segments sont symétriques*".



Le point A est alors déplacé sur un cercle (Fichier SYMEX5). "*B décrit aussi un cercle, mais dans l'autre sens*" ; "*les cercles sont symétriques*".



La 1ère séquence se termine. Bilan : "*B est le point symétrique de A par rapport à (D1)*".

La 2ème séquence, celle qui consiste à prouver, n'a pas pu être conduite dans cette classe.

Conclusion

11 élèves sur 23 ont noté dans leurs remarques à la fin de l'heure que c'est l'animation qui leur a fait sentir la symétrie qu'ils n'avaient pas constatée sur leur dessin : le mouvement du point B l'a révélée, alors que les figures fixes successives n'avaient rien suggéré.

Deux élèves ont apprécié "que ça aille plus vite qu'à la main", et deux autres ont simplement "trouvé très bien" l'outil informatique.

LA LOI DU MILIEU
UTILISER UNE TRANSLATION

Public : Classe de 4ème. (Cela aurait pu être aussi une classe de Seconde)

Objectifs :

- conjecturer, tester, prouver,
- déceler un invariant dans les représentations d'une même figure,
- savoir utiliser des transformations, ici une translation, pour résoudre un problème.

Prérequis :

- milieu d'un segment,
- propriétés caractéristiques d'un parallélogramme,
- propriété de la "droite des milieux".

Place dans la progression en 4ème :

- après l'étude des propriétés des milieux des côtés d'un triangle,
- avant d'aborder la translation.

Durée : Deux séquences de 50 min.

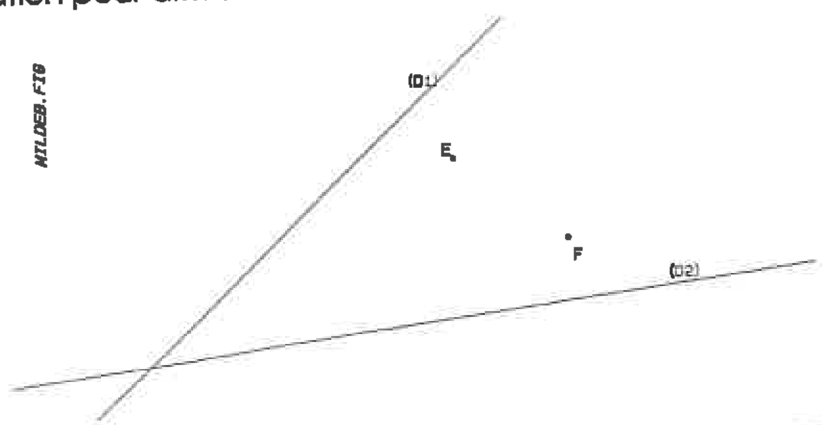
Déroulement

Matériel : Un PC avec une tablette rétroprojetable. Les élèves ont deux fiches, l'une pour les remarques, l'autre pour les constructions.

Structure de la classe : Les élèves travaillent d'abord seuls, puis par deux.

Etapes :

- une première phase d'essais,
- en réponse aux conjectures des élèves, ou pour les susciter, une animation de la figure est réalisée avec le logiciel : il s'agit de découvrir les invariants de la situation pour arriver à une construction raisonnée.

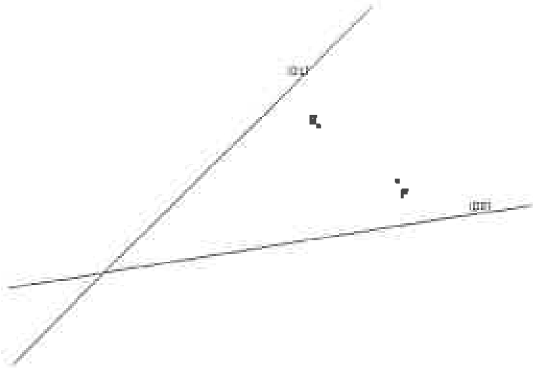


LA LOI DU MILIEU

Le problème :

Sur le premier dessin ci-joint, il s'agit de placer des points A, B, C de façon à ce que :

- E soit le milieu de [AB],
- F soit le milieu de [AC],
- B appartienne à (D1),
- C appartienne à (D2).



Expliquez votre construction :

Cherchons une méthode ... (sans tâtonnements !)

1°) On va déplacer A :

Avant, je pense que	Après, j'ai constaté que
ce qui varie : ce qui ne variera pas :	ce qui a varié : ce qui n'a pas varié :

On va déplacer B. Mêmes questions ...

Et si on déplace C ?

Après cette aide, faire un autre essai sur le dessin (II)...

2°) Une autre aide : Plaçons un des deux points sur sa droite, B par exemple et déplaçons le :

Avant, je pense que	Après, j'ai constaté que
ce qui varie : ce qui ne variera pas :	ce qui a varié : ce qui n'a pas varié :

Après cette aide, faire une nouvelle construction sur le dessin (III)...

Le vécu

1 Travail avec MILDEB :

Stratégies dominantes observées :

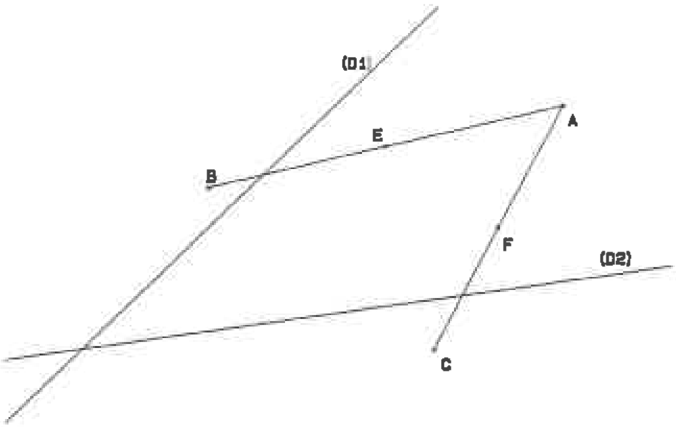
- placer B sur (D1), symétriser B par rapport à E pour obtenir A, symétriser A par rapport à F pour obtenir C, effacer et recommencer...
- peu cherchent à "voir" mentalement la bonne position de B et de C avant de dessiner.

Remarque : La situation triangle et segment des milieux n'est pas reconnue.

2 Travail avec MILIA (déplacement de A) :

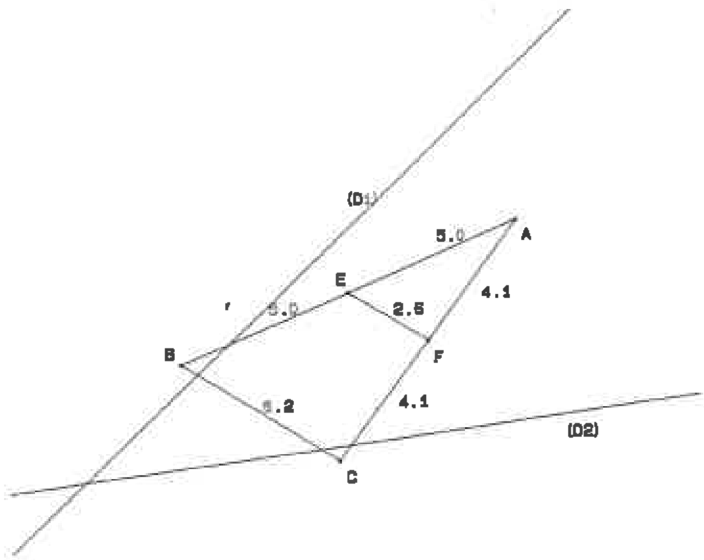
Pour toute la classe tout change sauf bien sur E, F, (D1) et (D2).

Le déplacement de A les conforte dans leur idée que "tout bouge".



3 Travail avec MILIB (déplacement de A, (BC) étant tracé) :

Une majorité remarque le rapport 1/2 entre EF et BC, et une faible minorité le parallélisme de (EF) et (BC).



4 Travail avec MIL2 (déplacement de B) :

Avant la manipulation, quelques uns pensent que BC ne variera pas.

Le fait de déplacer le point B (peut être parce que l'on semble agir directement sur [BC]) fait prendre conscience majoritairement du parallélisme de (BC) et de (EF).

5 Travail avec MIL3 (déplacement de C) :

La grande majorité conjecture que BC ne variera pas, quelques uns que (BC) doit rester parallèle à (EF).

Le déplacement effectif de C confirme leurs suppositions. A ce stade de l'observation, le professeur demande aux élèves de refaire des essais de construction sur la partie (II) de leur fiche.

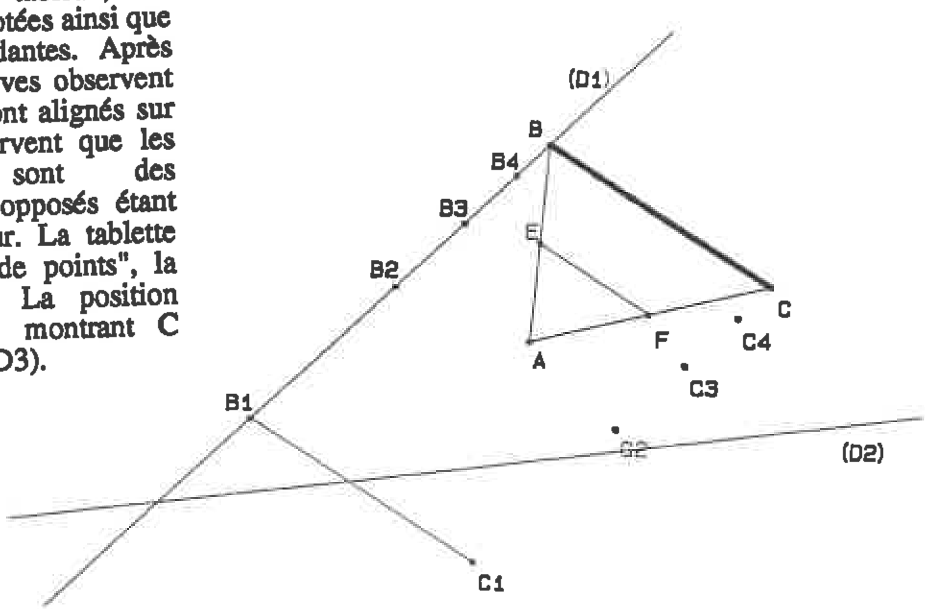
13 élèves utilisent une stratégie de translation de la règle graduée, en partant de (EF), jusqu'à ce que les divisions 0 et 5 de leur graduation arrivent l'une sur (D1), l'autre sur (D2), sachant à présent que BC = 5 cm. Pour eux le problème est résolu. (La propriété de la "droite des milieux" n'est pas explicitement évoquée)

Le professeur recentre alors le problème : peut-on obtenir sans tâtonnement la construction ?

6 Travail avec MIL4 (déplacement de B sur (D1)) :

Rares sont ceux qui conjecturent que C va se déplacer sur une parallèle à (D1).

La figure étant projetée au tableau, les différentes positions de B sont notées ainsi que les positions de C correspondantes. Après extinction de la tablette, les élèves observent que les points C1, C2, C3 ... sont alignés sur une parallèle à (D1). Ils observent que les quadrilatères CiBiBjCj sont des parallélogrammes, leurs côtés opposés étant parallèles et de même longueur. La tablette étant rallumée, grâce à "lieu de points", la droite (D3) est matérialisée. La position solution apparaît au passage, montrant C comme intersection de (D1) et (D3).



Le professeur invite alors les élèves à réaliser une construction non tâtonnante, sur la partie (III) de la fiche.

- un seul donne une construction satisfaisante,
- quatre d'entre eux tracent une droite (D3) passant par F.

MIL5 permet avec l'"historique" de présenter la démarche de construction de l'élève qui a su utiliser (D3).

La deuxième séquence a été consacrée à la verbalisation des remarques faites à cette dernière étape. La propriété de la "droite des milieux" est alors revenue.

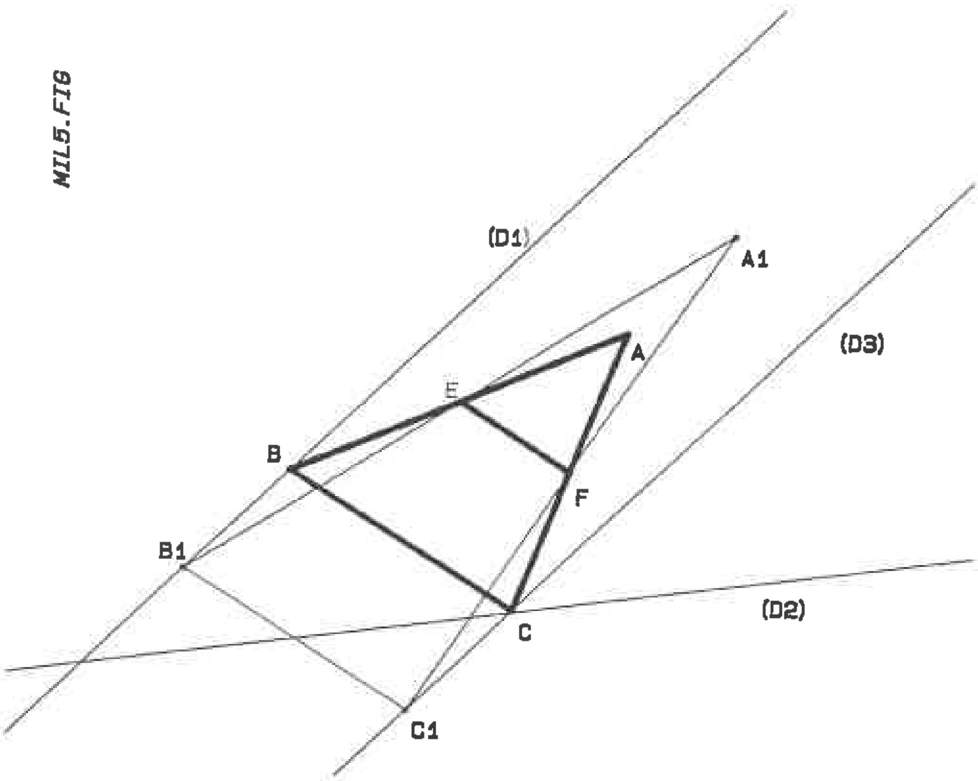
Remarques :

- Le fait de placer C à l'intersection de (D2) et (D3) n'est pas naturelle.
- Les étapes intermédiaires B1, C1 obtenues le plus souvent en tâtonnant par les élèves sont effacées car considérées comme une erreur et non comme une aide dont on peut tirer un enseignement.

Conclusion

La difficulté est grande de considérer comme invariants autre chose que des points ou des segments fixes.

La représentation dominante des élèves (il faut obtenir la "bonne figure" et cacher les errances...) a semblé faire obstacle en partie à la recherche et à l'exploitation d'une construction intermédiaire.



REINVESTISSEMENT
COINCER UN TRIANGLE EQUILATERAL ENTRE DEUX DROITES
UTILISER UNE ROTATION

Public : Classe de 4ème. Cela pourrait être aussi une classe de 1ère S.

Objectifs :

- conjecturer, tester, prouver,
- déceler un invariant dans les représentations d'une même figure,
- savoir utiliser des transformations, ici une rotation, pour résoudre un problème, ici de construction.

Prérequis :

- rotation,
- propriétés caractéristiques d'un triangle équilatéral.

Place dans la progression en 4ème : après la rotation, et la séquence "loi du milieu".

Durée minimale prévisible : 1 séquence de 50 min.

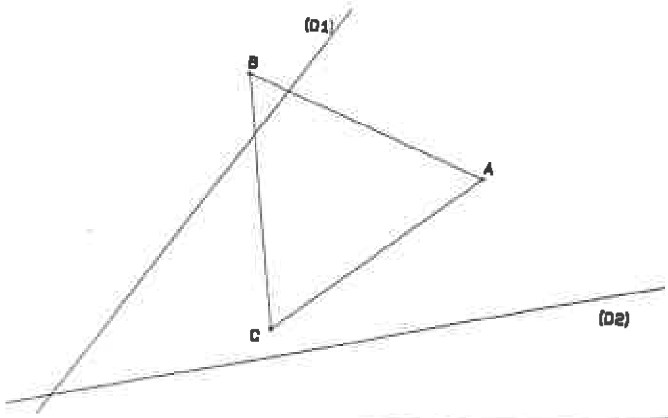
Déroulement possible

Matériel : Un PC avec une tablette rétroprojetable. Les élèves ont deux fiches, l'une pour les remarques, l'autre pour les constructions.

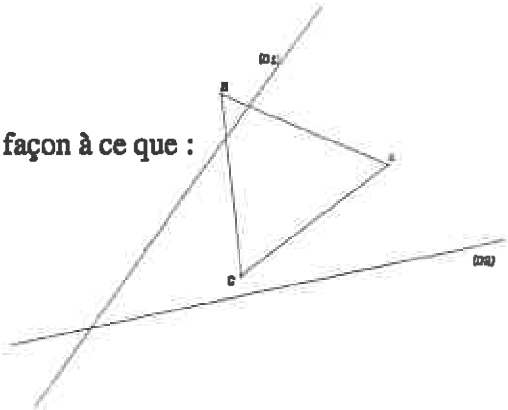
Structure de la classe : Les élèves travaillent d'abord seuls, puis par deux.

Etapes :

- une première phase d'essais,
- en réponse aux conjectures des élèves, ou pour les susciter, une animation de la figure est réalisée avec le logiciel : il s'agit de découvrir les invariants de la situation pour arriver à une construction raisonnée.



COINCER UN TRIANGLE EQUILATERAL ENTRE DEUX DROITES



Problème :

Sur le premier dessin ci-joint, il s'agit de placer des points B et C de façon à ce que :

- B appartienne à (D1),
- C appartienne à (D2).
- (ABC) soit un triangle équilatéral.

Expliquez votre construction :

1°) Modifions la position de B :

Avant, je pense que	Après, j'ai constaté que
ce qui varie : ce qui ne variera pas :	ce qui a varié : ce qui n'a pas varié :

2°) Deuxième aide, fixons un des deux points sur une droite, par exemple B sur (D1), et déplaçons le :

Avant, je pense que	Après, j'ai constaté que
ce qui varie : ce qui ne variera pas :	ce qui a varié : ce qui n'a pas varié :

Que décrit le point C ?

Après cette aide, faire une nouvelle construction sur le dessin (II)...

3°) Pour aller plus loin :

N'existe-t-il qu'une seule solution ?

Quels sont, suivant les positions de A, (D1) et (D2), les différents cas possibles ?

UN PAVE

Public : Classe de 5ème de 27 élèves. Ce pourrait être une classe de Seconde.

Objectifs :

- l'intersection d'un plan avec 2 faces parallèles d'un cube se fait suivant deux droites parallèles,
- intersection d'un plan et d'un cube.

Prérequis :

- quelques connaissances sur le cube ou sur le pavé,
- parallélogramme.

Place dans la progression : Après une étude du pavé ou du cube.

Durée : 2 heures.

Déroulement

Matériel : Un PC, avec tablette rétroprojetable.

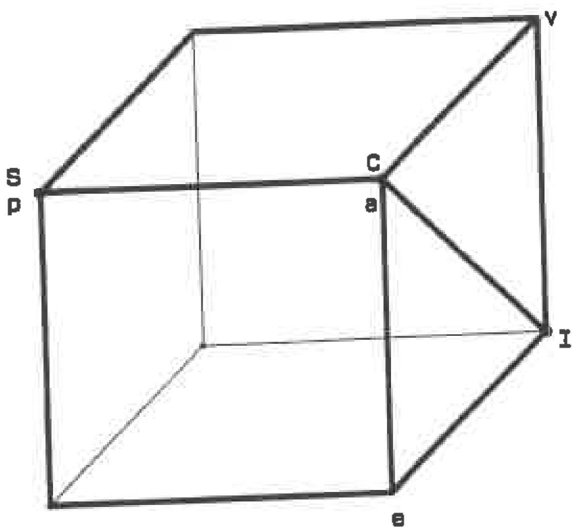
Structure de la classe : Classe entière.

Etapes : Après chaque phase, à partir de la propriété mise en évidence par le logiciel, les élèves devaient compléter une figure analogue à celle présentée à l'écran sur une feuille polycopiée.

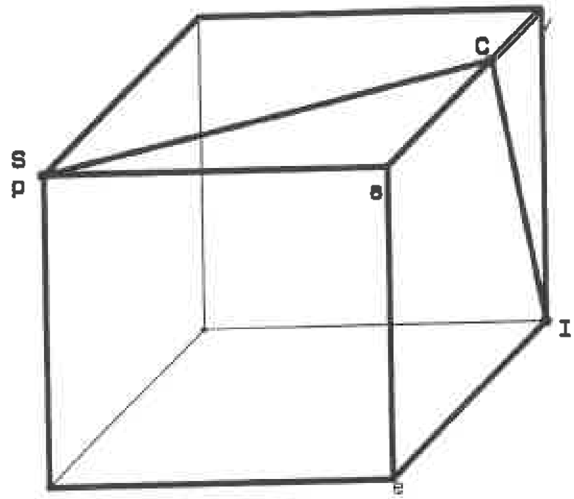
SCIER UN PAVE

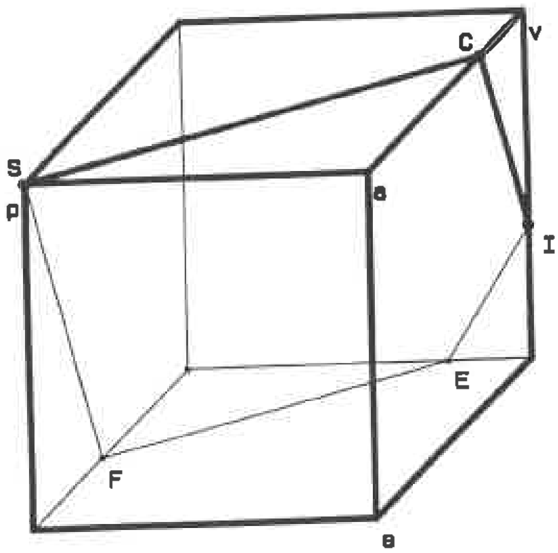
Représentez sur chacune des faces de ces pavés les traits de scie.

Que constatez-vous ?

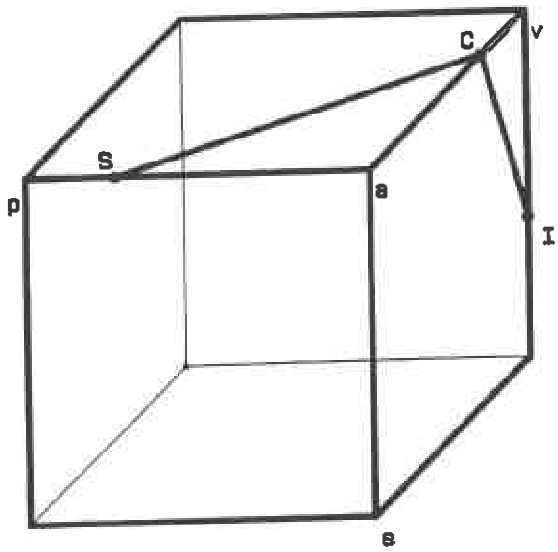


SCIE2.FIG





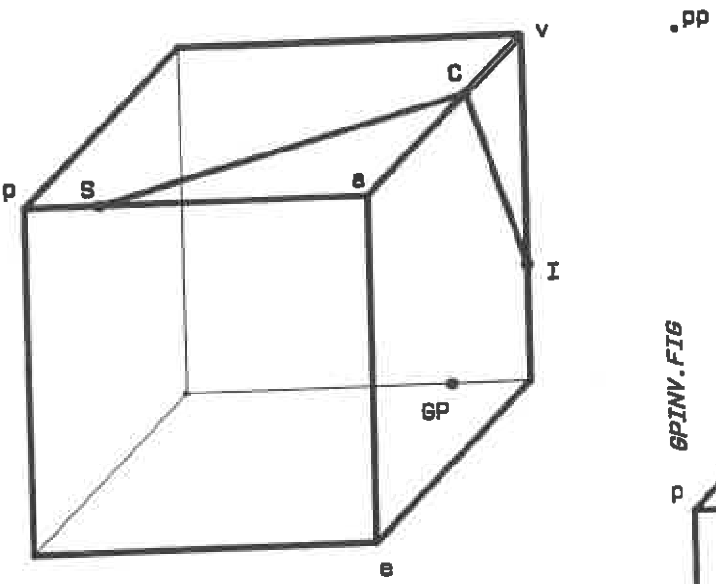
SCIE3.FIG



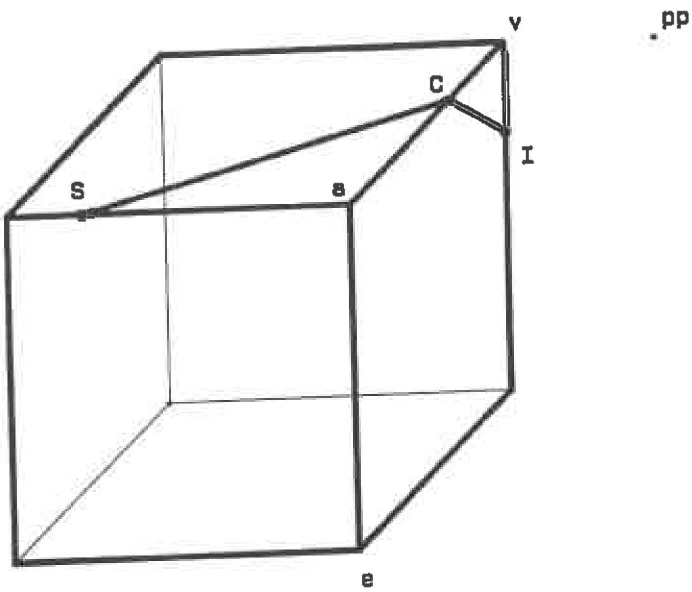
SCIER UN PAVE (suite)

Représentez sur chacun de ces pavés les points pp et GP, puis les traits de scie sur chacune des faces :

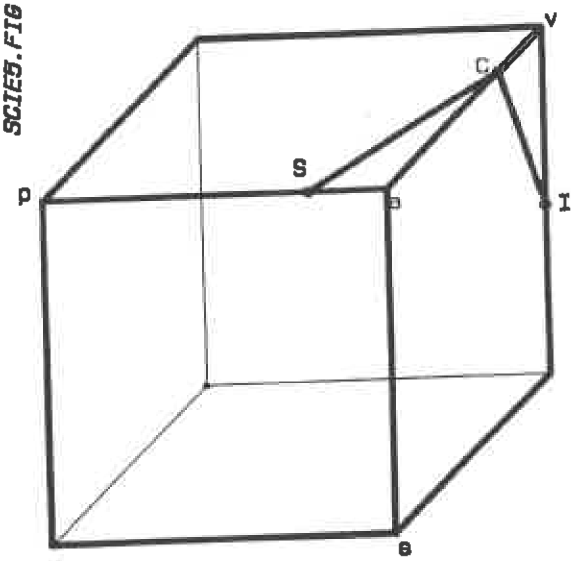
GPOINT.FIG



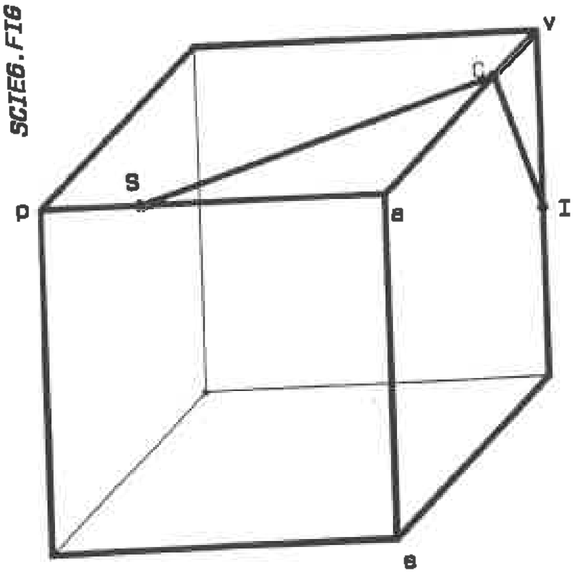
GPINV.FIG



SCIE5.FIG



SCIE6.FIG



Le vécu

Un premier temps d'appropriation de la figure :

- nombre de faces, pour certains 4, d'autres 5.
- appellation des faces : base, gauche, droite, devant, derrière, haut.

Scions le pavé en suivant les traits de scie [SC] et [CI]. Le dessin 1 est réussi par tous.

Avec le logiciel, déplacement de C sur l'arête [av]. Réactions :

- I ne bouge pas,
- S non plus,
- E bouge dans le sens contraire.

Et la figure (SCIE) ?

- c'est un rectangle,
- c'est un parallélogramme.

Pourquoi ?

- parce que les côtés opposés sont parallèles,
- deux à deux.

Résultats sur le dessin 2 :

- 16 juste,
- 6 avec un parallélisme approximatif dû certainement au fait de vouloir que l'angle E soit droit. L'un d'entre eux l'a d'ailleurs explicitement noté,
- 2 juste avec une tentative pour tracer une parallèle à (CI) de partir du sommet en bas, au fond, à gauche,
- 3 faux car incomplet, ou avec E non situé sur l'arête, ou avec E situé sur le sommet en bas, au fond, à gauche.

Sur la figure suivante, que constate-t-on ?

- C'est un quadrilatère, non, il a 5 côtés,
- les côtés sont parallèles,
- non, certains sont parallèles,
- ils sont parallèles lorsque les faces sont parallèles

Ce résultat est institutionnalisé dans la phrase suivante que tous écrivent :

Lorsque les faces opposées sont parallèles, les traits de scie ont des directions parallèles.

Essayez sur la figure suivante de tracer les traits de scie ? Combien au maximum en aurez vous ?

- 4, 5, 6 ...
- non, pas plus car il n'y a que 6 faces.

Sur ce dessin 3, 11 seulement ont fait un dessin et, systématiquement, ils ont tracé ou tenté de tracer un parallélogramme.

Pour aider, la situation avec le "petit point" et le "grand point" leur est proposée. En déplaçant successivement I et S les élèves repèrent que I, PP et GP sont alignés, sur la face du fond, que PP est dessus à l'intersection de (SC) et de l'arête du haut, au fond...

Résultats des constructions sur le dessin 4 :

- 2 continuent de représenter un parallélogramme,
- 4 s'arrêtent au repérage de PP et GP,
- 2 veulent tenir compte du parallélisme entre faces gauche et droite mais pensent que S est sur la face gauche,
- 4 tracent sur la base une parallèle à (SC) passant par GP et s'arrêtent là,
- 6 continuent mais rejoignent S au point d'intersection de la parallèle avec l'arête de la base à gauche,
- 4 construisent sur la base la parallèle à (SC) et tracent une parallèle à (CI) passant par S,
- 2 tracent sur la base des parallèles mais mal situées,
- 1 veut tenir compte des 3 parallélismes mais ne tient pas compte des arêtes,
- 2 ont des constructions justes.

Conclusion

Les erreurs commises mettent en évidence la difficulté de se repérer dans l'espace à partir d'une réprésentation en perpective cavalière. Les "traits" se coupent sur le dessin sans l'être dans la réalité. Les segments représentés sont souvent à "l'intérieur". Pour aider, il est recommandé d'utiliser dans ces classes des solides en carton ou en un autre matériel, voire même d'apporter des pavés en polystyrène afin de les scier devant les élèves.

Il est, dans la deuxième partie, très difficile pour des élèves de 5ème d'imaginer des points, des droites en dehors des faces d'un pavé. Il est possible devant eux d'associer un deuxième pavé en le collant au premier par une face commune afin de pouvoir matérialiser ce qui se passe au delà du premier pavé.

UN TETRAEDRE

Public : Classe de 4ème (ou Seconde).

Objectifs :

- intersection d'un plan et d'une droite,
- intersection de 2 plans, le plan ici est le plan de base de la pyramide.

Prérequis :

- l'intersection d'une droite et d'un plan est une droite,
- l'intersection de 2 plans non parallèles est une droite,
- un plan est défini par une droite et un point pris hors de la droite.

Place dans la progression : Après le dossier précédent sur le pavé.

Durée : 1h pour les phases I et II.

Déroulement

Matériel : Un PC avec tablette rétroprojetable.

Structure de la classe : Classe entière.

Etapes : Jeu de questions-réponses entre le professeur et les élèves sur la situation initiale présentée dans chacune des 3 phases.

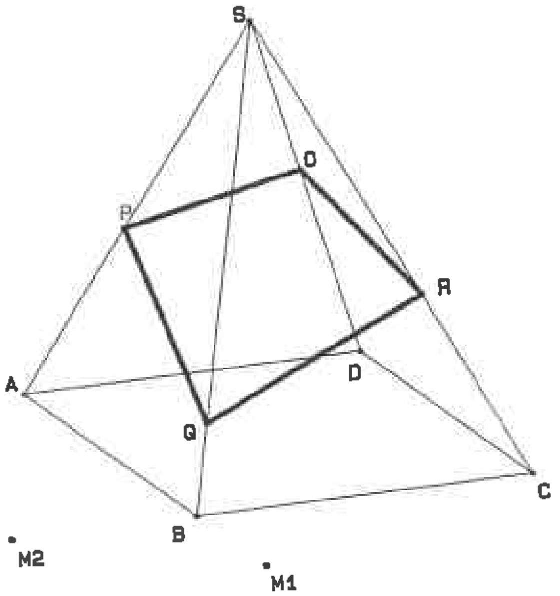
- phase I : intersection d'une droite et du plan de base,
- phase II : intersection d'un plan et du plan de base,
- phase III : intersection d'un plan défini par un point et une droite contenue dans le plan de base avec chacune des faces de la pyramide.

Après, les élèves traçaient sur des figures analogues les intersections demandées.

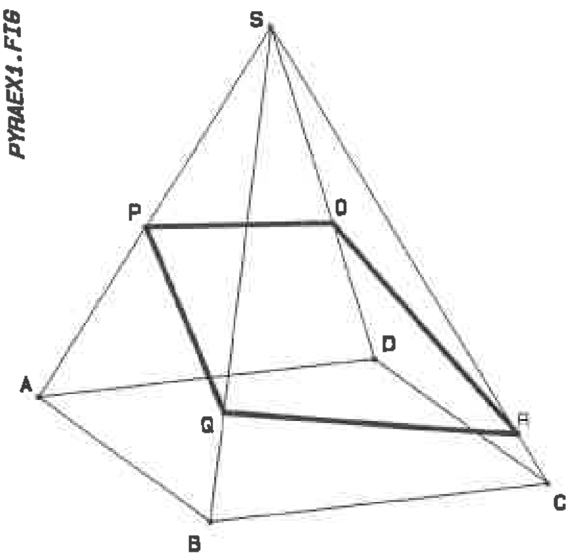
DU HAUT DE CES PYRAMIDES

Représentez sur chacune de ces figures les positions des points M1 et M2 correspondants :

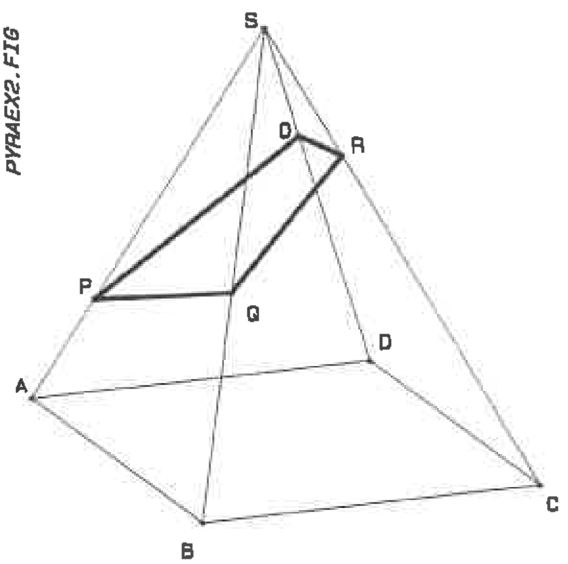
PYRAINT.FIG



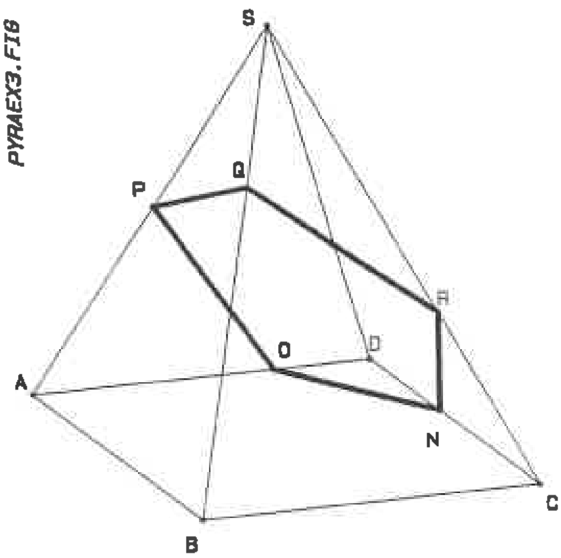
PYRAEX1.FIG



PYRAEX2.FIG

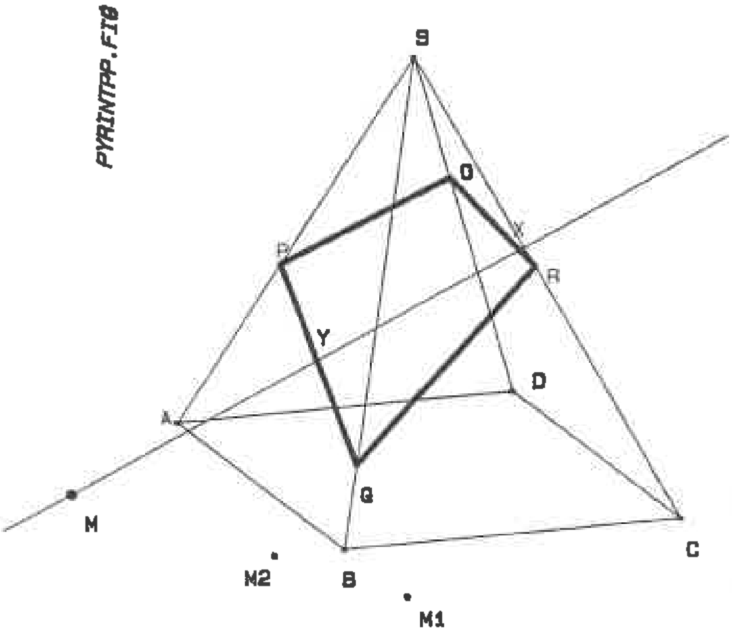


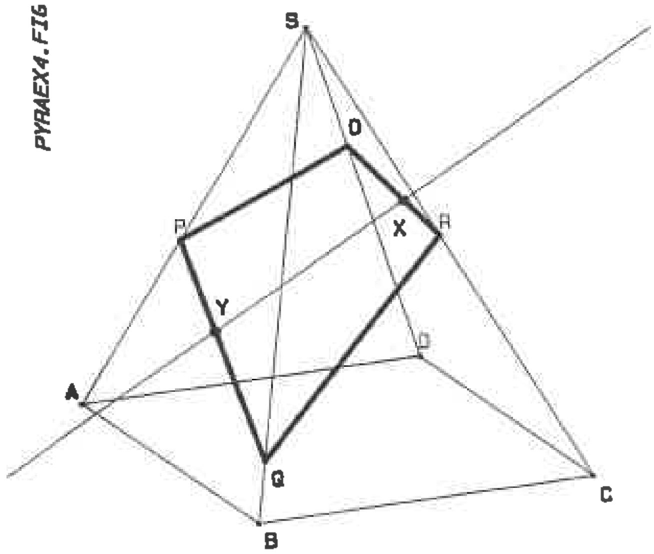
PYRAEX3.FIG

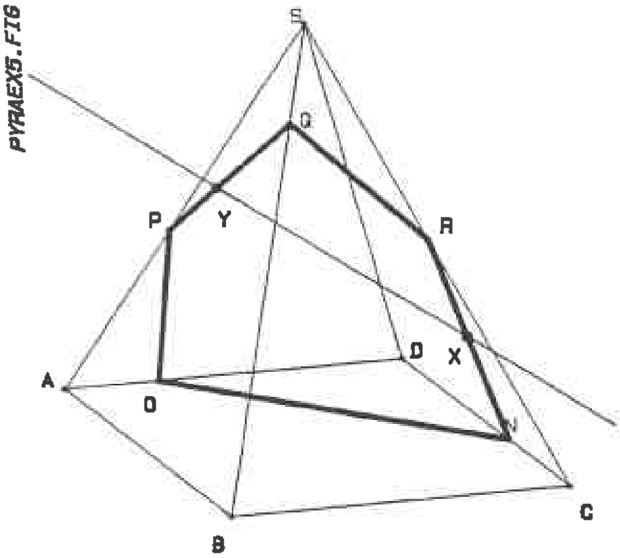


DU HAUT DE CES PYRAMIDES (suite)

Représentez l'intersection des plans (PQR) et (ABCD) :



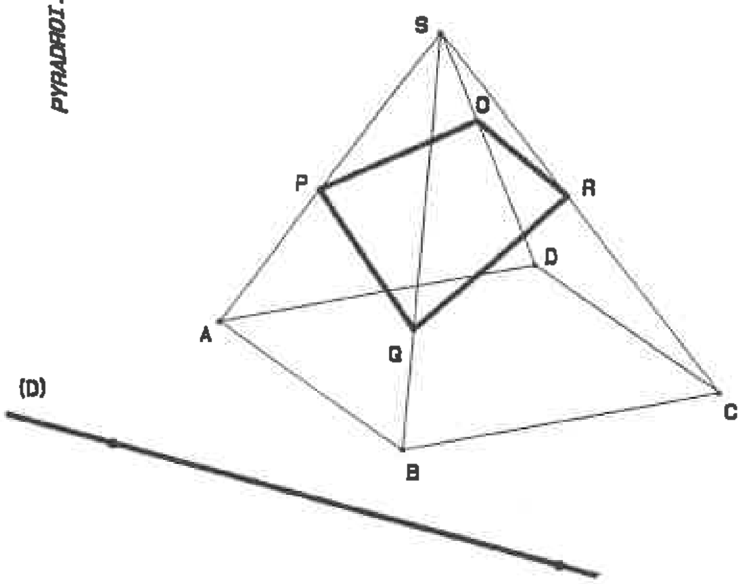




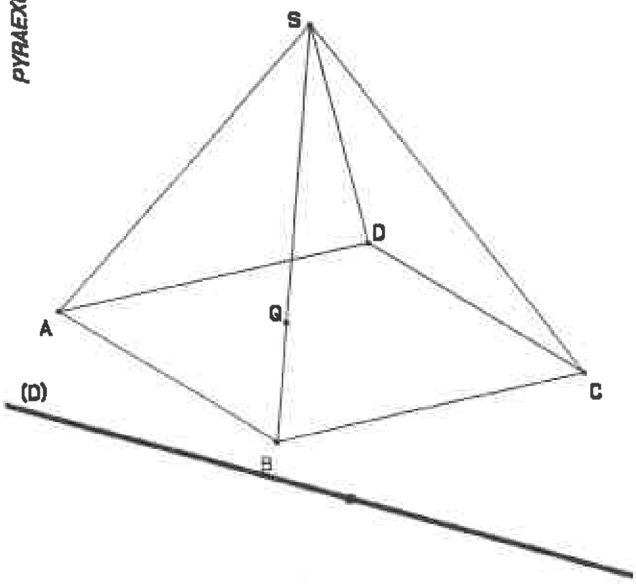
DU HAUT DE CES PYRAMIDES (fin)

Représentez l'intersection du plan passant par la droite et par Q avec chacune des faces du tétraèdre :

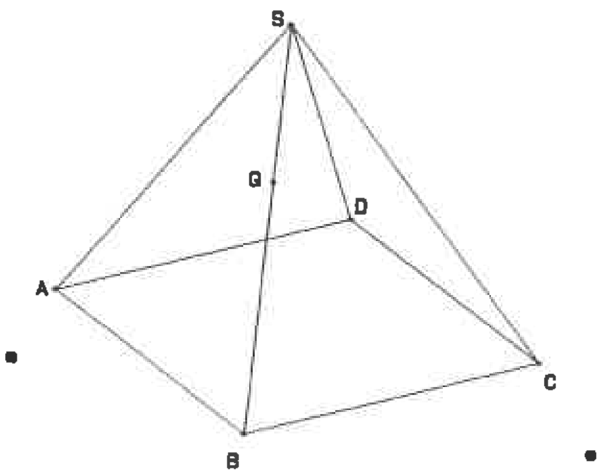
PYRADROI.FIG



PYRAEX6.FIG



PYRAEX7.FIG



Le vécu

Phase I

Sur le nombre de faces, certains en voient 5 mais d'autres 4. Avant de manipuler, certains voient M_1 comme le projeté orthogonal de S. D'autres voient bien M_2 (plutôt que M_1) dans le prolongement de [BC] et de [RQ].

Sur quelle face est située M_1 ?

- sur la face avant ...

D'autres font allusion aux distances dans leurs réponses du style "M_1 est à la même distance de B que Q". Il faut intervenir pour indiquer que dans cette séquence les distances n'interviennent pas, ce sont uniquement des intersections qui sont en jeu.

Phase II

En déplaçant Y certains voient M décrire :

- un arc de cercle,
- une droite qui passe par B,
- une droite parallèle à (PQ),
- une droite qui passe par C,
- une droite perpendiculaire à (SB)...

En fait, les élèves cherchent à raccrocher le lieu des points M à des éléments visibles de la figure :

Cette droite est-elle sur la base ?

- non, elle est en dehors de la figure !

Ce lieu n'est reconnu que lorsque M_1 et M_2 sont rendus visibles et le logiciel est nécessaire pour se convaincre que M se déplace sur cette droite (M_1M_2).

Ceci n'empêche pas des erreurs dans les constructions faites par les élèves dues aux erreurs de placement de M_1 et M_2

Conclusion

Il est difficile pour des élèves de "voir" des points, des intersections en "dehors" de la figure.

Les notions de géométrie plane, parallélisme, orthogonalité, distance sont utilisées par des élèves qui s'y raccrochent face à une situation mathématique qui les désoriente.

C'est difficile de "voir" l'intersection de 2 plans, de caractériser cette droite par 2 points, qui plus est 2 points en "dehors" de la figure. Trois types de difficulté qui s'accumulent. Une difficulté est due au logiciel qui n'est pas un vrai logiciel 3D. Les faces cachées ne sont pas représentées en pointillé. Pour pallier cette difficulté, il avait été demandé aux élèves de colorier sur leur figure, notamment dans la phase II, les plans (PQR) et (ABC).

LE COSINUS ET LE RAPPORT DE PROJECTION ORTHOGONALE

Public : Classe de 4ème d'un niveau moyen.

Objectif : Présentation du cosinus comme rapport de projection orthogonale.

Prérequis :

- savoir construire le projeté orthogonal d'un point,
- proportionnalité.

Place dans la progression : Après la projection orthogonale.

Durée : 2 h.

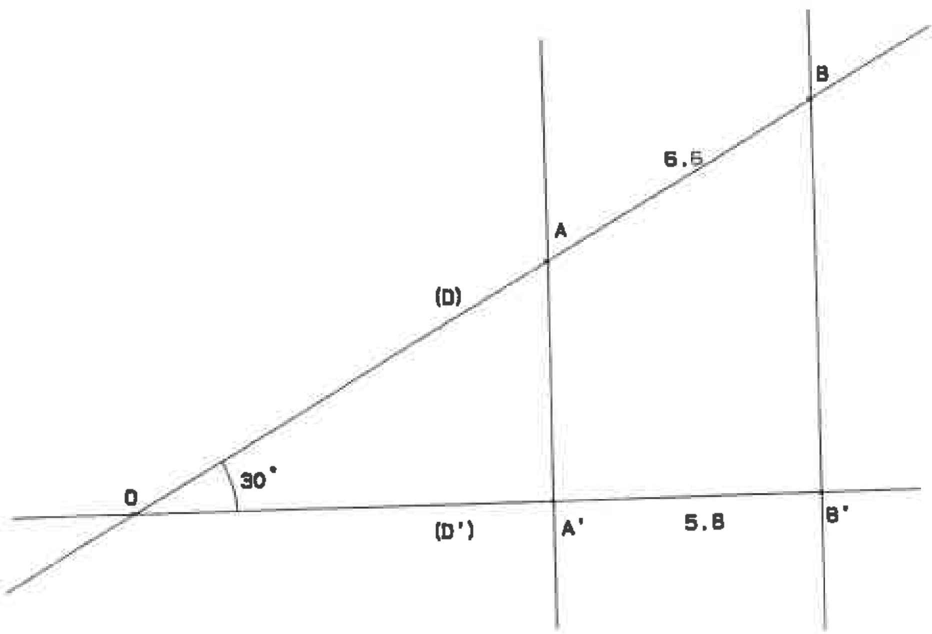
Déroulement

Matériel : Sept PC.

Structure de la classe : La classe a été partagée en deux demi-groupes.

Etapes : Par table de deux, les élèves appellent les fichiers, observent les figures et notent les mesures.

PROJ1.FIS

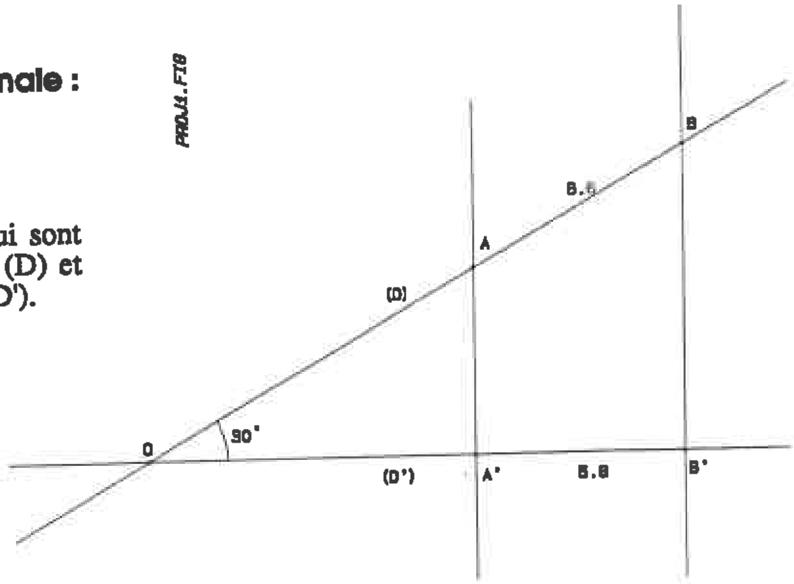


1°) Rapport de projection orthogonale :

a) Charger le fichier PROJ1 :

Nous avons deux droites (D) et (D') qui sont sécantes en O, deux points A et B sur (D) et leurs projetés orthogonaux A' et B' sur (D').

PROJ1.FIG



Noter dans la première colonne du tableau ci-dessous les mesures des segments [AB] et [A'B'] puis calculer A'B'/AB en utilisant la calculatrice (arrondir à 0,01 près).

AB							
A'B'							
A'B' / AB							

Déplacer le point B sur (D) et remplir les autres cases du tableau.

Que constatez vous ?

Qu'est-ce que cela signifie ?

Retenons : Le coefficient de proportionnalité s'appelle rapport de projection orthogonale de (D) sur (D').

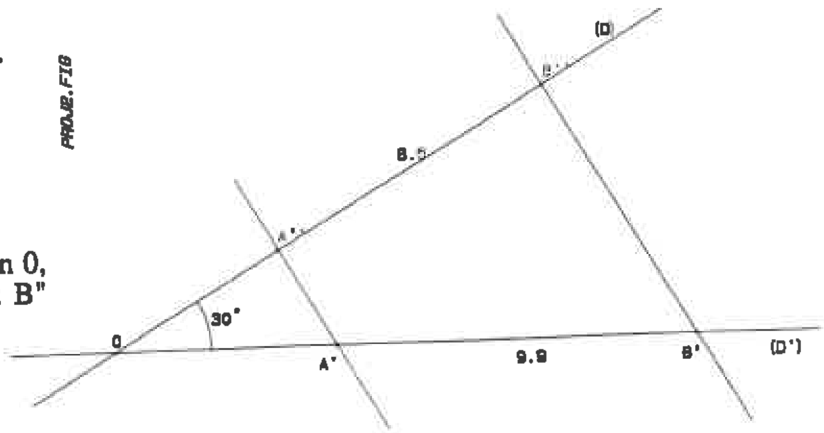
Noter également la mesure de l'angle $\widehat{AOA'}$.

$\widehat{AOA'}$ =

b) Charger le fichier PROJ2 :

Nous avons toujours (D) et (D') sécantes en 0, A' et B' sont des points de (D') et A" et B" leurs projetés orthogonaux sur (D).

PROJ2.FIG



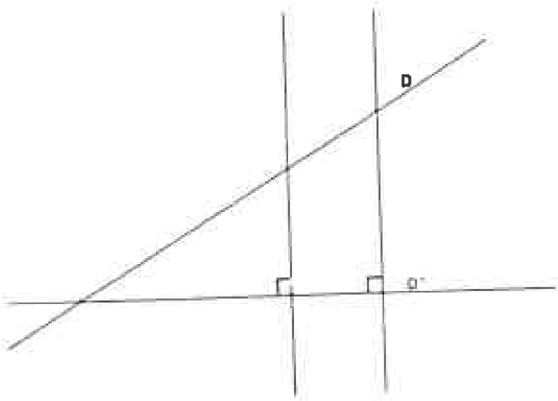
Noter dans la première colonne du tableau les mesures de [A'B'] et de [A"B"] puis calculer A"B"/A'B'.

A'B'							
A"B"							
A"B" ---- A'B'							

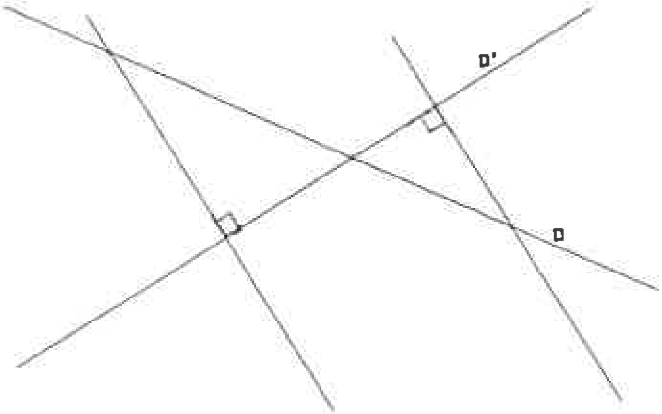
Que constate-t-on ?

Retenons : Le rapport de projection orthogonale de (D) sur (D') est égal au rapport de projection de (D') sur (D).

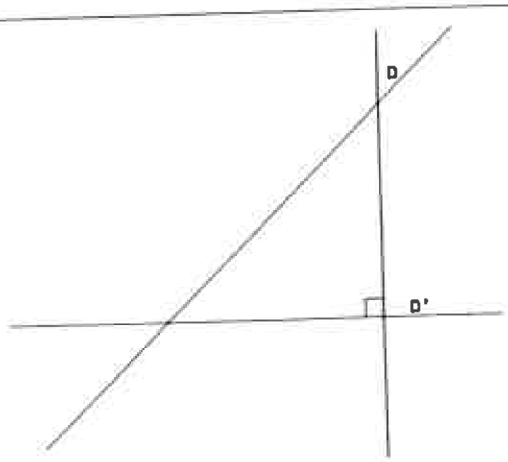
Pour chacune des figures suivantes, calculer le rapport de projection orthogonale k de (D) sur (D'). (on arrondira à 0,01 près).



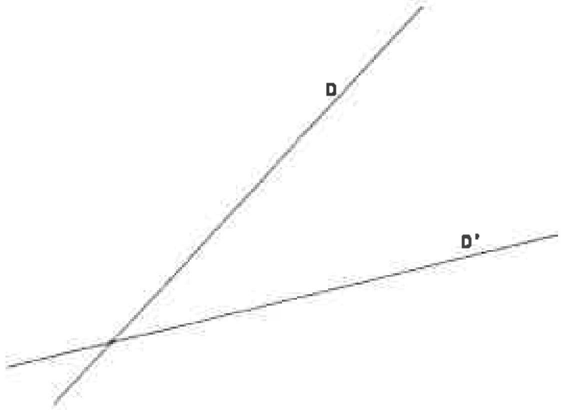
k = ---



k = ---



k = ---



k = ---

2°) Cosinus :

Charger PROJ1

Noter dans la première colonne du tableau la valeur de l'angle $\widehat{AOA'}$ ainsi que celle du rapport de projection orthogonale k de (D) sur (D') calculée dans la première partie.

$\widehat{AOA'}$							
k							

Faire ensuite varier l'angle en bougeant le point X et calculer chaque fois le rapport de projection orthogonale pour remplir les autres cases du tableau (à 0,01 près).

On constate alors que le rapport de projection orthogonale dépend uniquement de l'angle formé par les 2 droites.

Retenons : le rapport de projection orthogonale de (D) sur (D') est appelé aussi cosinus de l'angle formé par les deux droites.

$$\cos \widehat{AOA'} = \frac{A'B'}{AB}$$

Sur les calculatrices scientifiques, la touche COS affiche avec la précision habituelle le cosinus d'un angle. A l'aide d'une calculatrice, remplir le tableau suivant (arrondir le cosinus à 0,01 près).

Mesure de l'angle	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Cosinus de l'angle										

Faites ensuite un graphique avec les mesures des angles en abscisses (2 cm pour 10°) et les cosinus en ordonnées (1 cm pour 0,1).

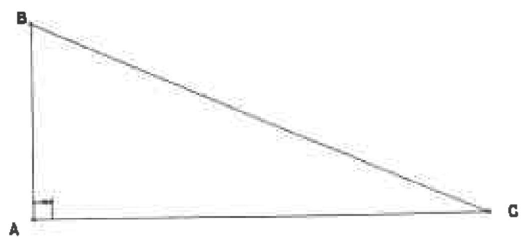
Calcul du cosinus dans un triangle rectangle :

$$\cos a = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Mesurer les longueurs des 3 côtés du triangle rectangle (ABC) et claculer cos $\widehat{ABC}$ et cos $\widehat{ACB}$:

$\dfrac{AB}{BC}$ = ---

$\dfrac{AC}{BC}$ = ---

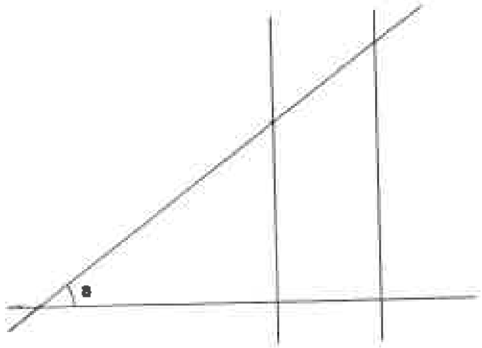


Mesurer ensuite les 2 angles avec le rapporteur et vérifier avec la calculatrice les valeurs des 2 cosinus.

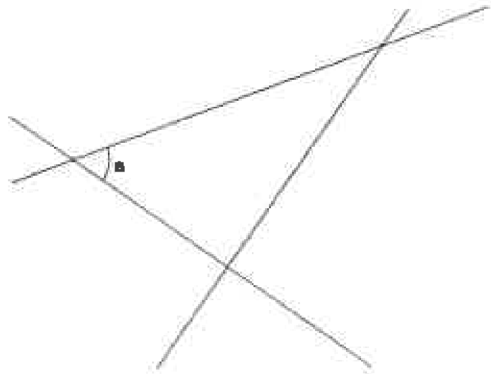
$\widehat{ABC} =$ $\cos \widehat{ABC} =$

$\widehat{ACB} =$ $\cos \widehat{ACB} =$

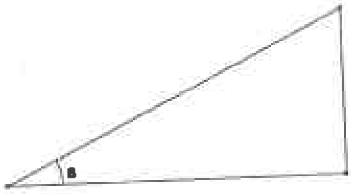
Pour chacune des figures suivantes, calculer de deux façons le cosinus de l'angle marqué :



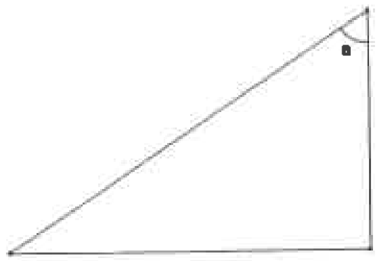
cos a =



cos a =



cos a =



cos a =

Le vécu

Séquence 1

Fiche élève 1 : La moitié des élèves a des difficultés pour arrondir. Ils n'arrivent pas à trouver le mot proportionnalité pour conclure l'étude du premier tableau. Pour 2 groupes, le concept est encore présent, ils se souviennent des exemples vus en 5 ème.

Problème : Quand ils prennent des points trop rapprochés, les écarts sont trop importants.

Fiche élève 2 : Ils quittent les ordinateurs et travaillent sur table. 3 groupes démarrent tout de suite, 4 élèves ne savent plus dans quel sens faire la division. Le 2ème exercice leur paraît plus difficile.

Séquence 2

Fiche élève 3 : Pas de problème pour remplir les 2 tableaux, 2 élèves toutefois commencent à remplir le premier tableau comme un tableau de proportionnalité.

Pour la deuxième partie, il faut rappeler ce qu'est l'hypoténuse et leur expliquer ce qu'on appelle côté adjacent. Le graphique, qui sert à montrer que l'on n'obtient pas toujours une droite, est donné à faire à la maison.

Fiche élève 4 : La moitié des groupes ne pense qu'à une seule méthode, celle du rapport de projection orthogonale mais quand ils voient leurs camarades utiliser le rapporteur, cela leur donne des idées et la fiche est faite très rapidement.

Conclusion

Les élèves étaient ravis et en redemandaient. Quand les élèves manipulent le logiciel pour la première fois, il faut prendre un petit groupe à la fois car il y a toujours des problèmes à régler : un point qui sort de l'écran et qu'on ne peut pas récupérer, un fichier dont les modifications ont été validées malgré les recommandations...

ANGLES INSCRITS, ANGLES AU CENTRE

Public : Classe de 3ème de 27 élèves d'un niveau moyen avec quelques éléments moteurs.

Objectifs : Découvrir et énoncer :

- la propriété des angles inscrits,
- la relation entre angles inscrits et angles au centre.

Prérequis :

- trigonométrie,
- propriétés du triangle isocèle,
- cercle circonscrit.

Place dans la progression : Aussitôt après la trigonométrie.

Durée : 1h (1h 30 serait préférable).

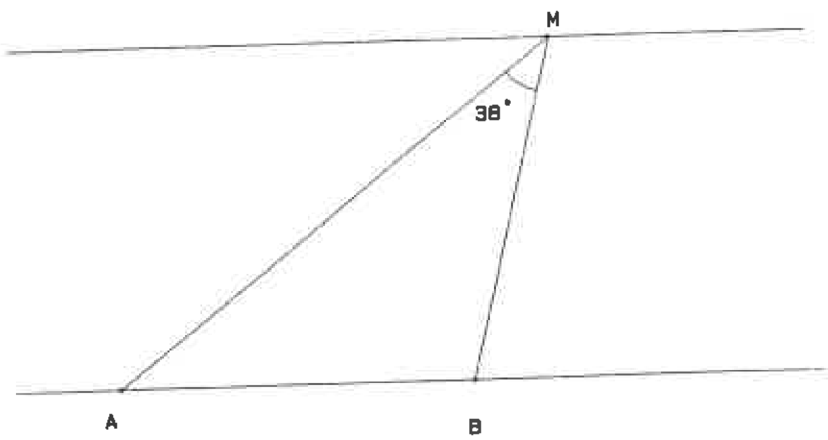
Déroulement

Matériel : Quatre PC.

Structure de la classe : Les 27 élèves sont répartis en 4 groupes de 6 à 7 élèves.

Etapes : Au début de la séance, je leur explique les commandes utiles du Géomètre. A chaque fois qu'un groupe appelle un fichier, il retourne sur table pour reproduire le dessin vu à l'écran puis ils exécutent les consignes.

EXO.FIG



ANGLES ET CERCLES

1°) CHARGER LE FICHIER EXO :

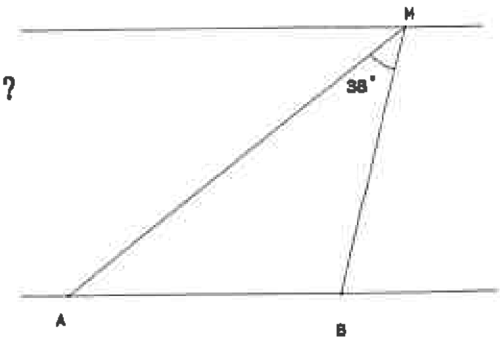
Faire bouger lentement le point M sur la droite (D) et observer la valeur de l'angle $\widehat{AMB}$.

Y a-t-il une valeur maximale de cet angle ?

Pouvez-vous indiquer précisément la position du point M dans ce cas ?

Quelle est alors la nature du triangle AMB ?

Voir l'exercice 1



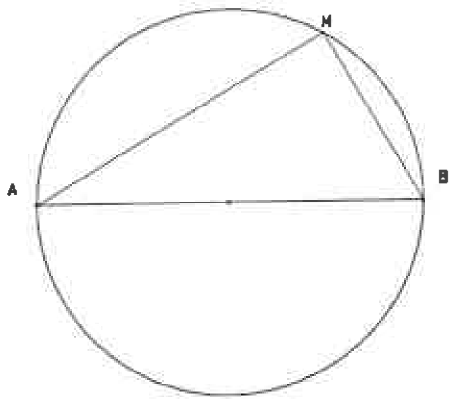
2°) CHARGER LE FICHIER DIA :

Qu'est-ce que [AB] pour ce cercle ?

Pouvez-vous donner la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$?

Si on déplace M sur le cercle, que devient la mesure de $\widehat{AMB}$?

Citez la propriété déjà apprise qui correspond à ce dessin.



3°) CHARGER LE FICHIER INS :

Qu'est-ce que [AB] pour le cercle ?

L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit dans le cercle car son sommet est sur le cercle et ses deux côtés coupent le cercle. On dit qu'il intercepte l'arc AB (il y a deux arcs AB ; celui intercepté par l'angle est celui contenu dans l'angle). Déplacez lentement le point M sur le grand arc AB, que constatez-vous ?

Déplacez maintenant M sur le petit arc AB, que constatez-vous ?

Bougez maintenant le point B pour avoir une corde différente puis déplacez le point M comme précédemment, la propriété est-elle encore vraie ?

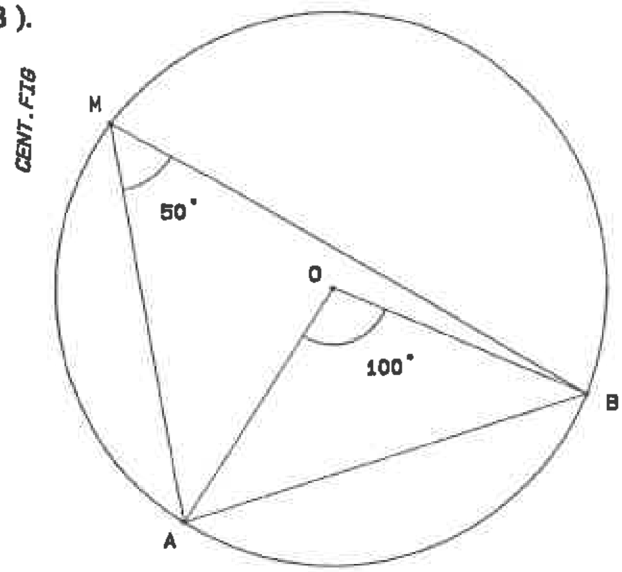
Pouvez-vous citer la propriété des angles inscrits ?

4°) CHARGER LE FICHIER CENT :

L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre car son sommet est le centre du cercle ; on dit aussi qu'il intercepte l'arc AB (celui qui est contenu dans l'angle $\widehat{AOB}$).

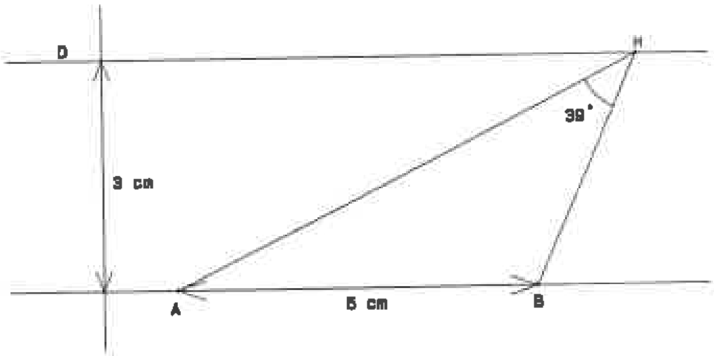
Y a-t-il une relation entre les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$?

Faites bouger le point M, la propriété est-elle toujours vérifiée ? Citez cette propriété.



Exercice 1

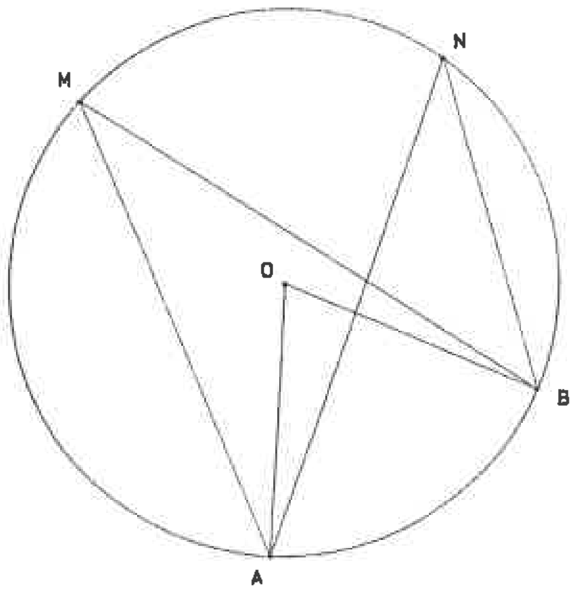
Calculez la valeur maximale de l'angle $\widehat{AMB}$ quand M parcourt la droite (D). (On construira M1, la position du point M qui correspond à cette valeur)



Exercice 2

1) On donne $\widehat{AMB}$ = 35°. Calculez $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AOB}$.

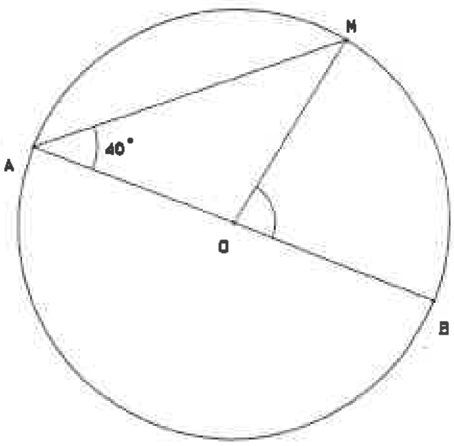
2) On donne $\widehat{AOB}$ = 110°. Calculez $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.



Exercice 3

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{MOB}$, $\widehat{AMB}$, $\widehat{MBO}$, $\widehat{AMO}$, $\widehat{OMB}$?

EX3.FIG



Exercice 4

Construisez un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 5 cm et $\widehat{BAC} = 40°$. Construire son cercle circonscrit (O est le centre). Calculer $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$.

Exercice 5

Revenons à notre première activité :

(D) est une droite strictement parallèle à [AB]. La médiatrice de [AB] coupe (D) en M_1.

M est un point quelconque de (D) (autre que M_1).

(C) le cercle circonscrit au triangle ABM_1 coupe le segment [AM] en K.

a) Démontrez que $\widehat{AKB}$ est égal à $\widehat{KMB} + \widehat{KBM}$.

b) Que pouvez-vous dire des angles $\widehat{AM_1B}$ et $\widehat{AKB}$?

c) En déduire que l'angle $\widehat{AM_1B}$ est toujours supérieur à l'angle $\widehat{AMB}$ (ce que nous avions trouvé expérimentalement).

Le vécu

1) La position du point M est vite trouvée. Dans l'exercice 1, il faut aider les élèves à découvrir le triangle rectangle et pourtant la trigonométrie n'est pas loin.

2) Les réponses sont données très vite mais pour la propriété la majorité cite "un triangle rectangle est inscrit dans un cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse".

3) Les élèves voient très bien ce qui se passe mais n'arrivent pas à formuler la propriété.

4) Dans ce cas, la propriété est énoncée "l'angle au centre est le double de l'angle inscrit... "

Les exercices 2 et 3 sont réussis rapidement. Les propriétés ont été assimilées. Les exercices 4 et 5 sont donnés à faire à la maison.

Quelques réactions à la sortie de la salle : "*c'était très clair*", "*on a tout compris*".

THALES

Public : Classe de 3ème de niveau faible (28 élèves).

Objectif : Découverte de la propriété de Thalès

Prérequis : Connaissance de la proportionnalité.

Place dans la progression : Après un dossier intitulé "proportionnalité, applications linéaires".

Durée : 1 h 30 min

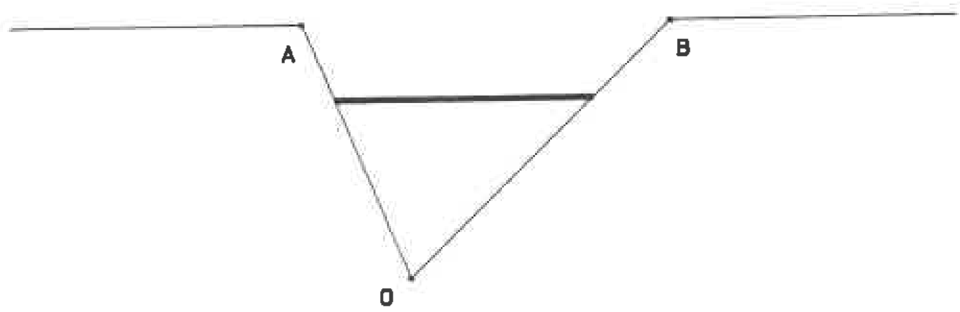
Déroulement

Matériel : Un PC avec tablette rétroprojetable.

Structure de la classe : Classe entière.

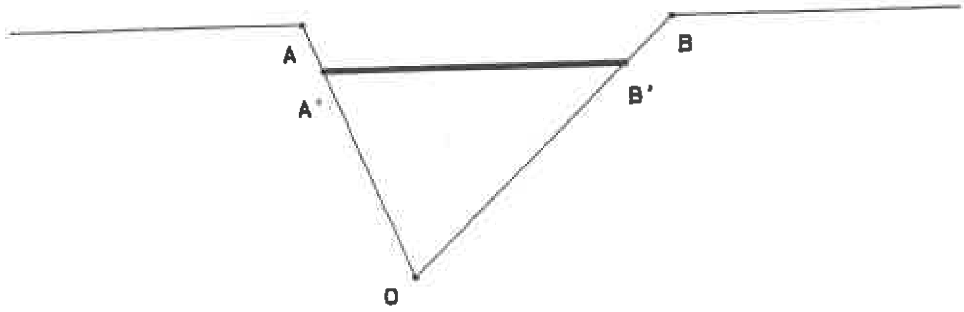
Etapes : Une phase de 25 minutes ne nécessitant pas l'utilisation du matériel informatique puis une séquence entière avec la tablette rétroprojetable. Les élèves peuvent au choix, travailler d'une manière isolée ou en groupe de deux.

TH.FIG



VERS THALES

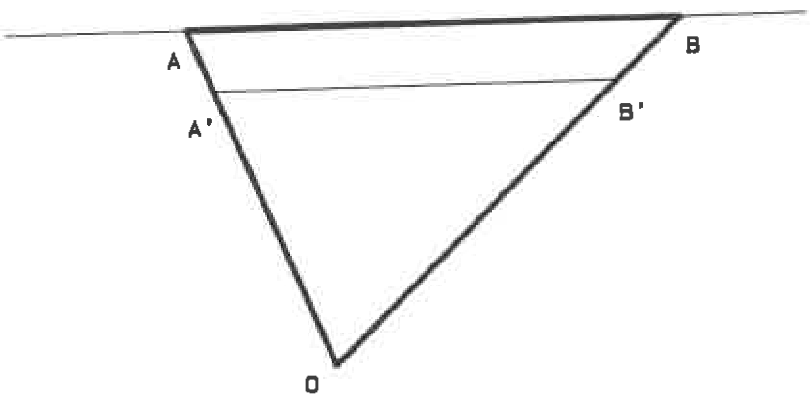
1) Voici une coupe du canal qui amène l'eau dans un barrage-réservoir.



On met de l'eau dans le canal sans le remplir complètement ; complètez le dessin... Vous appellerez A' et B' les points situés à la surface de l'eau et situés respectivement sur [OA] et [OB].

Vous avez sur la figure deux triangles : ..... et ......

Après les avoir observé et mesuré, que pouvez-vous dire de leurs côtés, de leurs angles ? Pouvez-vous justifier certains de ces résultats avec des théorèmes ou résultats vus en cinquième et quatrième ?

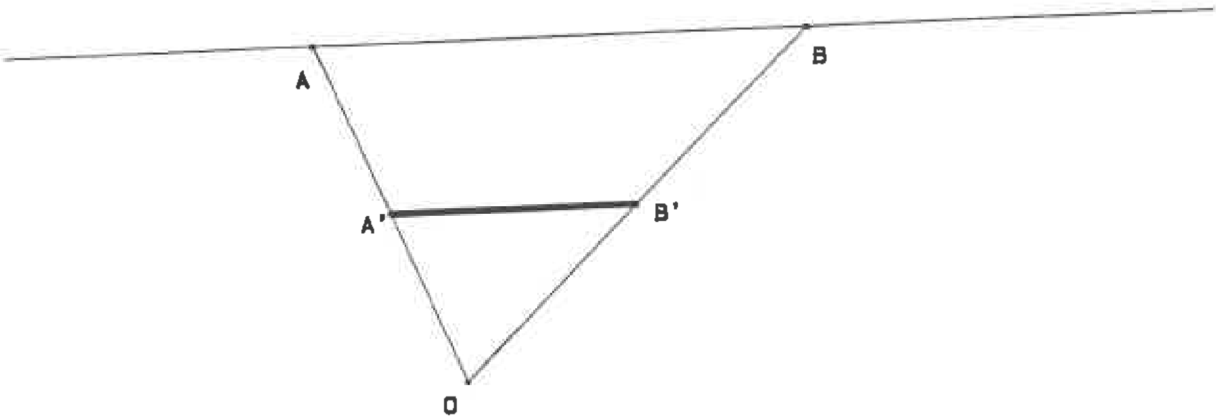


2) Nous avons chargé le fichier TH1. Regardez-bien l'écran, A' occupe une position particulière :

....

a) Faites une figure correspondant à ce cas.

TH1.FIG



b) Rappelez les propriétés vues en quatrième correspondant à ce cas.

Que pouvez-vous dire des deux triangles ?

3) Modifions le niveau de l'eau, c'est à dire la position de A'.

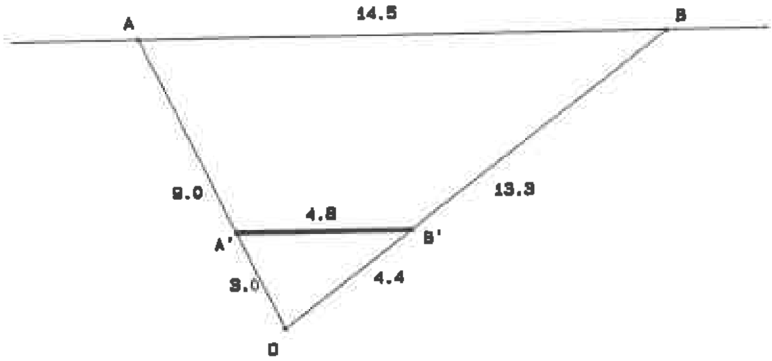
Le fichier Th2 est chargé.

Remplissez le tableau suivant avec les longueurs lues à l'écran.

OA	OB	AB
OA'	OB'	A'B'

Que remarquez-vous ? ....

4) Recommencez le même travail en faisant varier la hauteur de l'eau ou les dimensions du canal (lecture sur l'écran ou mesure sur la figure)



5) Le fichier TH3 est chargé ; la position de A' est modifiée.

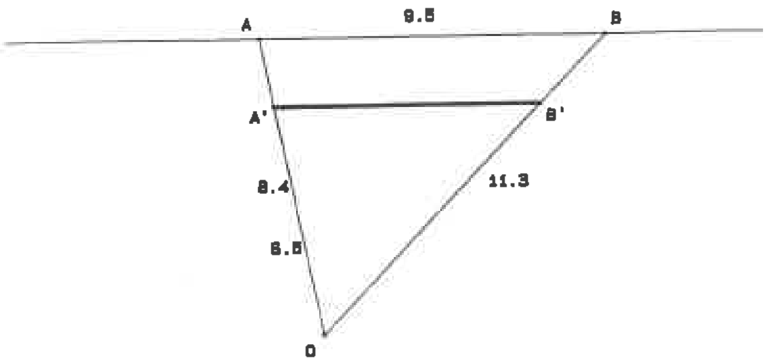
A l'écran, nous avons les mesures suivantes :

OA = ..., OB = ..., AB = ...   OA' = ...

Etes-vous capable de calculer OB' et A'B' ?

Si oui, faites-le.

Vous pourrez ensuite vérifier le résultat à l'aide du logiciel ou en faisant une figure.



Le vécu : 1ère séquence

Résultats :

Angles :

angle $\widehat{AOB}$ commun	46%
$\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$ et $\widehat{OBA} = \widehat{OB'A'}$	50%

Remarques : Un seul élève a fait une tentative de validation. "*C'est à cause des droites parallèles.*"
Les angles correspondants (5ème) sont bien loin...

Côtés :

proportionnalité sentie :	54%
Propriété bien écrite :	25%

Remarques : Les mesures des côtés sont écrites mais ne sont pas organisées. Malgré la proximité du dossier proportionnalité étudié la semaine précédente, beaucoup d'élèves n'ont pas essayé de faire un tableau.
Certains élèves ont calculé des quotients, mais la légère différence due aux mesures les a perturbés. D'autres ont étudié les différences.

La première feuille a été examinée par le professeur et ensuite rendue sans correction au début de la deuxième séquence.

Le vécu : Deuxième séquence

3) Triangle et droite des milieux :

deux propriétés correctement écrites :	20%
une propriété correctement écrite :	50%
$\widehat{OA'B'}$ est "la moitié" de $\widehat{OAB}$:	20%

Remarque : Difficulté d'écrire une propriété en français...

4) On utilise la tablette :

On modifie lentement la hauteur de l'eau, les élèves pouvant voir les mesures à l'écran puis on s'arrête en un point quelconque. On indique aux élèves que les nombres qui sont à l'écran, comme les mesures qu'ils avaient faites dans la première séquence, sont des valeurs approchées.
96% des élèves ont vu la proportionnalité. Un élève a encore été gêné par les valeurs approchées.
Remarque : La vue du tableau implique pour eux l'existence possible de la proportionnalité.
On étudie d'autres cas en variant la position de A' ou celle de O.

5) La position de A' est modifiée :

100% de réussite dans ce dernier exercice, les élèves préférant la tablette au dessin pour valider leurs résultats.

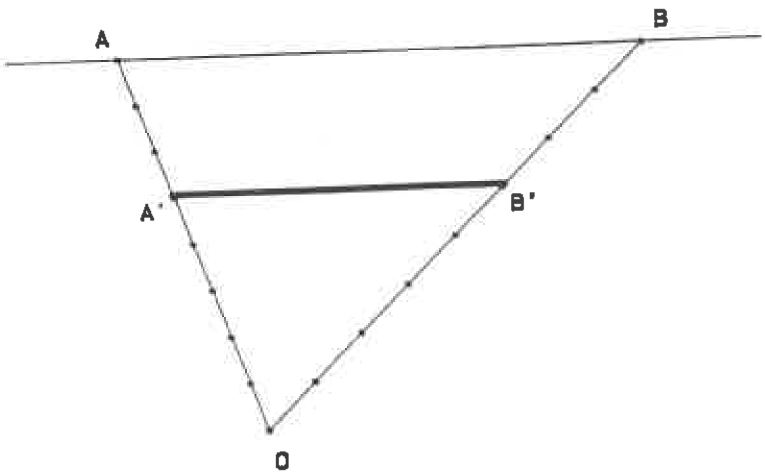
Conclusion

On peut noter l'excellent comportement des élèves notamment pendant la deuxième séquence certainement dû à :

- l'attrait du support,
- le fait d'avoir trouvé quelque chose (pour les plus faibles),
- la possibilité de modifier à leur guise la figure et de faire de nombreux exercices pour les plus rapides,
- la validation immédiate.

Un exercice classique donné à la maison, dans une configuration non croisée, avec des lettres et une orientation différente, (la vérification par un dessin étant demandée), a été très bien réussi.

TH4.FIG



COMPOSITION DE DEUX SYMETRIES ORTHOGONALES

Public : Classe de 3ème de 28 élèves, de niveau assez faible.

Objectifs : Etude de la composition de deux symétries orthogonales.

Prérequis : Transformations étudiées dans les classes précédentes, c'est-à-dire symétries, translation et rotation.

Place dans la progression : Aucune importance.

Durée : 3 h.

Déroulement

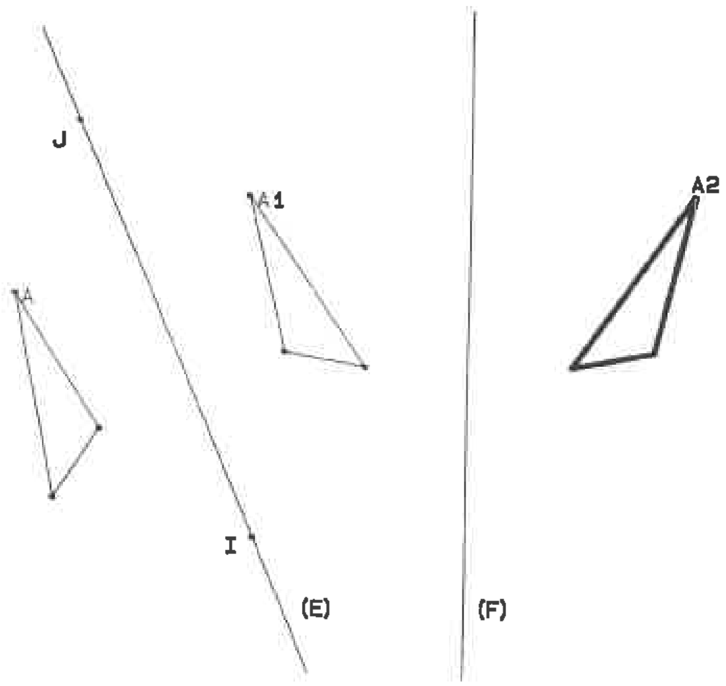
Matériel utilisé : Un ordinateur relié à une tablette rétroprojetable pour les deux dernières séquences.

Structure de la classe : Classe entière.

Etapes :

- tracé de l'image d'une figure pour les transformations connues,
- reconnaissance d'une figure à partir d'une figure et de son image,
- reconnaissance de la transformation pouvant remplacer deux symétries orthogonales successives.

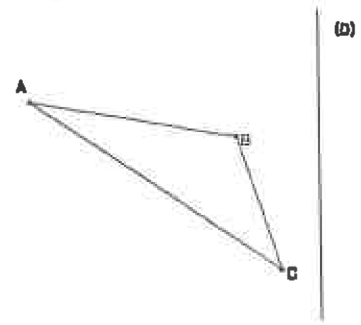
COSYM1.FIG



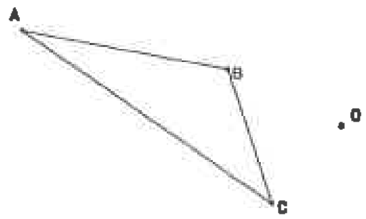
SYMETRIES, TRANSLATIONS, ROTATIONS...

1) Construisez l'image du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

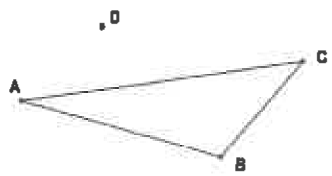
a) Symétrie orthogonale par rapport à (D) :



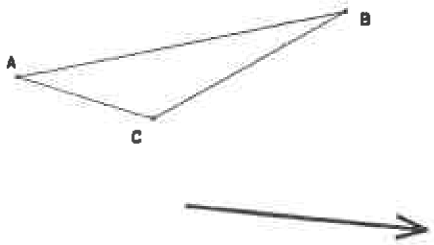
b) Symétrie par rapport à O :



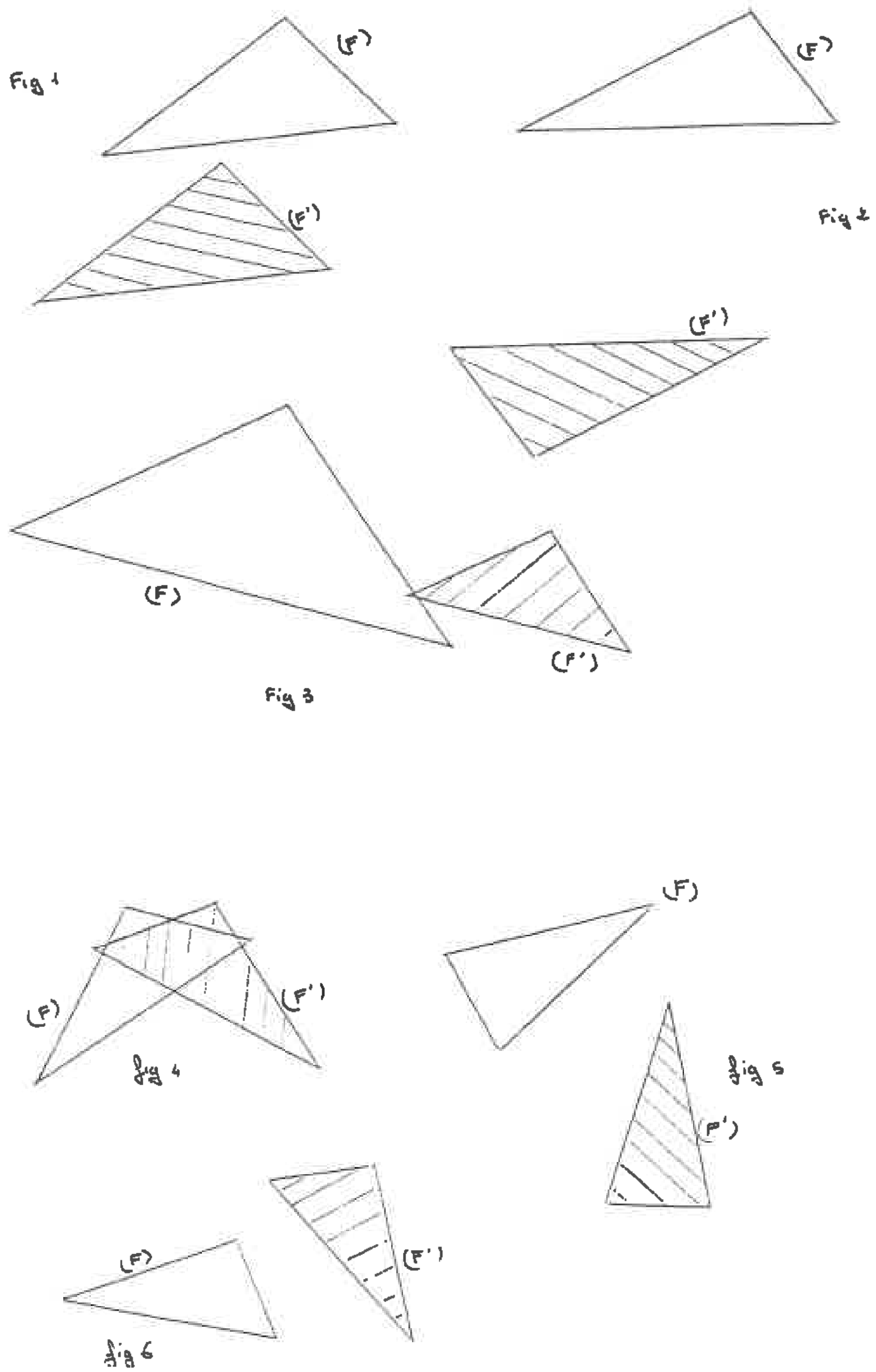
c) Rotation de centre O et d'angle 50° dans le sens des aiguilles d'une montre.



d) Translation de vecteur $\vec{V}$:



2) Dans quatre des cas suivants (F') est l'image de (F) dans l'une des quatre transformations. Déterminez cette transformation :



Maintenant nous allons effectuer deux symétries orthogonales successives. Pouvons-nous les remplacer par une seule des transformations connues ?

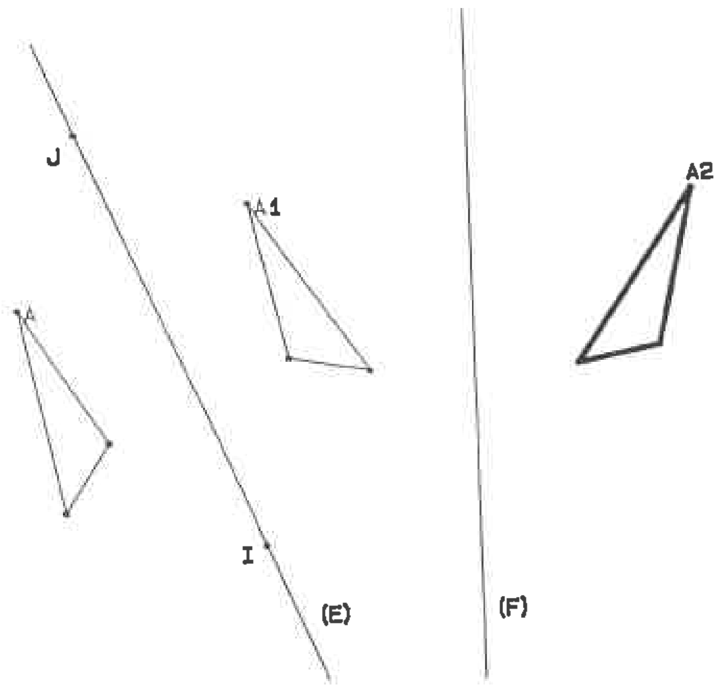
3) Chargeons le fichier COSYM1.

Nous avons deux droites (E) et (F).
Nous pouvons déplacer (F), mais elle garde la même direction.
Nous pouvons déplacer (E) en déplaçant les points I et J.
Le triangle ABC a pour image $A_1B_1C_1$ par $S_{(E)}$
Celui-ci a pour image $A_2B_2C_2$ par $S_{(F)}$

Déplacez (E) et (F) et observez bien les positions relatives de ABC et $A_2B_2C_2$.

Positions relatives de (E) et (F)	Transformations semblant remplacer $S_{(E)}$ suivie de $S_{(F)}$

COSYM1.FIG



4) Chargeons le fichier COSYM3. (E) et (F) sont parallèles.

a) Faites une figure correspondant à ce cas.

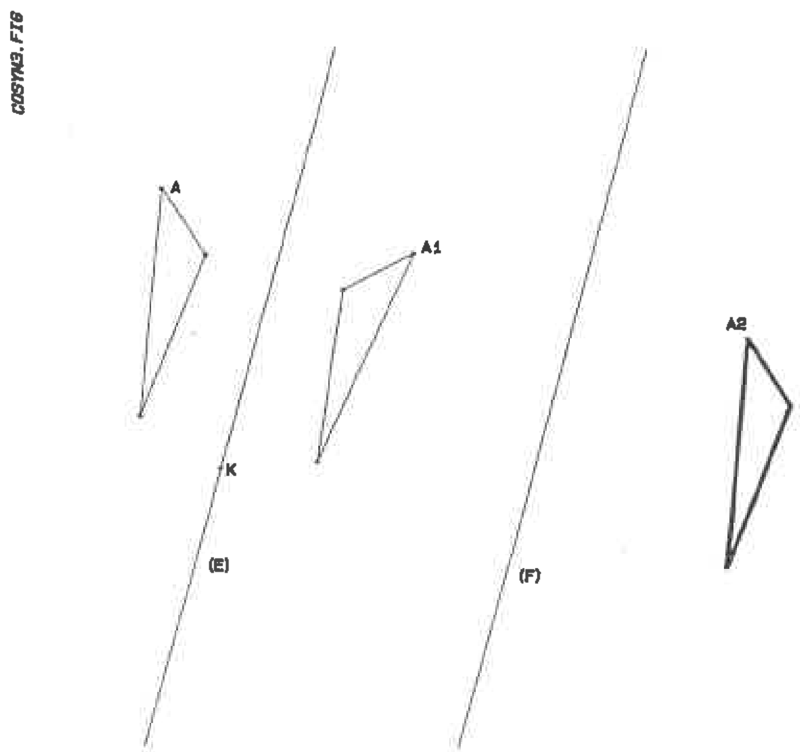
b) Nous allons déplacer (F) ; observez ABC et $A_2B_2C_2$.

c) A votre avis, quelle est la transformation simple qui à ABC ferait correspondre directement $A_2B_2C_2$?

Avec le logiciel, nous pouvons faire des constructions et des mesures. Quelles sont celles qui vous semblent intéressantes pour étayer votre conjecture ?
Faites le même travail sur votre figure.

d) Après cette étude, vous devez être capables de terminer la phrase suivante :
Lorsque (E) et (F) sont parallèles, je peux remplacer $S_{(E)}$ suivie de $S_{(F)}$ par ....

e) Dernière étape : Pouvez-vous démontrer ce résultat ?



5) Chargeons le fichier COSYM2. (E) et (F) passent par un même point :

a) Faites une figure correspondant à ce cas.

b) Nous allons déplacer (F) ; observez ABC et $A_2B_2C_2$.
Il existe une position de (F) pour laquelle, on passe de ABC à $A_2B_2C_2$ à l'aide d'une symétrie ? laquelle ?

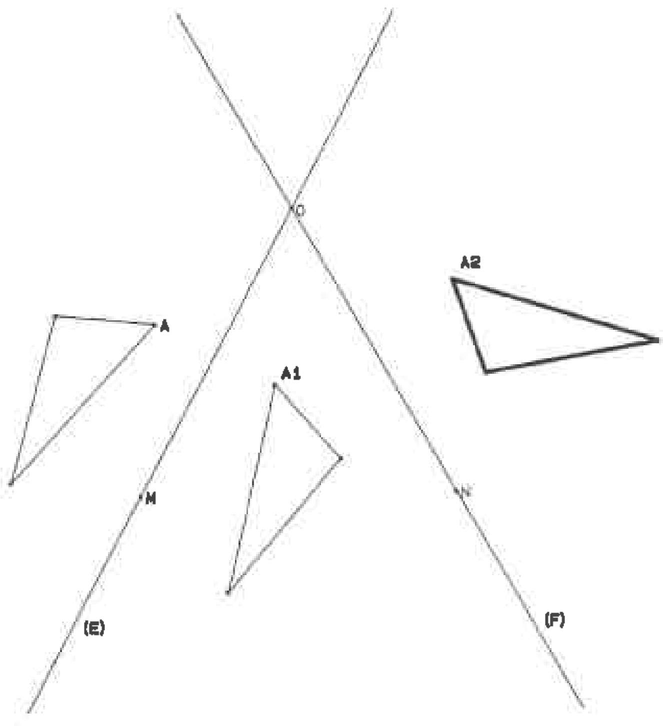
Existe-t-il une autre position remarquable de (F) ?

c) A votre avis, dans les autres positions de (F), quelle est la transformation simple qui à ABC ferait correspondre directement $A_2B_2C_2$?
Avec le logiciel, quelles sont les constructions et les mesures qui vous semblent intéressantes pour étayer votre conjecture ?

d) Après cette étude, vous devez être capables de terminer la phrase suivante :
Lorsque (E) et (F) ont un point commun, je peux remplacer $S_{(E)}$ suivie de $S_{(F)}$ par ....

e) Dernière étape : Pouvez-vous démontrer ce résultat ?

COSYM2.FIG



Le vécu

Première séquence, sans tablette :

Elle dure plus longtemps que prévu, une bonne partie des élèves n'ayant étudié ni la translation, ni la rotation...
Le rétroprojecteur est alors utilisé pour leur donner les bases nécessaires.
La partie n°2 est à faire à la maison.

Deuxième séquence, avec tablette :

La correction de la partie n°2 ne pose pas de problèmes ; un peu de curiosité pour la figure n°3, ce qui permet de parler de Thalès et de la Seconde.
La tablette est ensuite mise en service avec un élève aux commandes, prêt à suivre les consignes données par la classe.
J'étais assez pessimiste pour le n°3, mais les élèves en procédant par élimination sont arrivés assez rapidement à mettre en évidence les deux cas.
Au n°4, les élèves voient bien la direction du vecteur de la translation, mais ils ont eu du mal à trouver les autres caractéristiques du vecteur, notamment sa "longueur". Ils ont pourtant beaucoup modifié la position des axes pendant leur recherche. Nous avons utilisé la possibilité de mesurer les segments pour vérifier la conjecture émise par quelques élèves.
La démonstration, dans un seul cas de figure, est demandée à la maison.

Troisième séquence, avec tablette.

La démonstration demandée à la maison n'a pas été faite correctement.
Le n°5 est traité plus rapidement que le n°4, car les élèves pensent immédiatement à un lien possible entre les deux angles (analogie avec le n°4). Nous avons mesuré les angles intéressants avec le logiciel et fait varier le point A ainsi que la position des axes.
La démonstration, toujours dans un seul cas de figure, a été faite à la maison et traitée correctement par une bonne partie des élèves.

Conclusion

Dans ces séquences, le logiciel a permis de modifier rapidement la position des axes et de mettre en valeur les différents cas possibles. La possibilité de mesurer a permis aux élèves d'établir eux-mêmes des conjectures et surtout de les vérifier expérimentalement dans un grand nombre de cas et en peu de temps.

La difficulté pour le professeur est la gestion de la classe. Il doit rester le plus discret possible pour laisser les élèves effectuer eux-mêmes la recherche tout en intervenant par rapport à des notions mal cernées comme celles du sens et de la norme d'un vecteur de translation.

L'ESSUIE-GLACE EN CLASSE DE SECONDE DANS DES PROBLEMES DE RECHERCHE DE LIEUX DE POINTS

Public : Classe de Seconde.

Objectifs : Utiliser des transformations, ici des translations et des symétries axiales, pour résoudre deux types de problème de géométrie :

- détermination d'un lieu de points.
- existence d'un point fixe.

Prérequis : Les transformations vues en collège.

Place dans la progression : Après un rappel des propriétés des transformations connues.

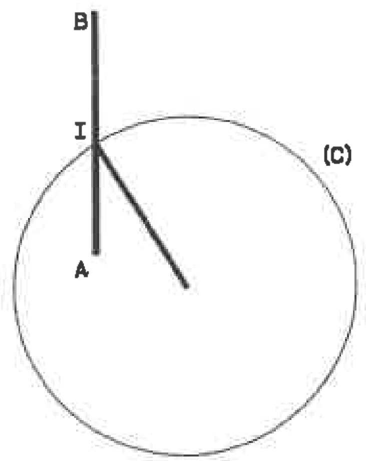
Durée : 2h.

Déroulement

1°) Matériel utilisé : Un PC relié à une tablette rétroprojetable.

2°) Structure de la classe : Une classe entière de 35 élèves pour la première séquence, une demi classe en travaux dirigés pour la deuxième séquence.

3°) Les étapes : Après un premier travail sur feuille, pour reconnaître et représenter les éléments de la transformation permettant d'obtenir le triangle (F') à partir du triangle (F), la classe ou le groupe réagissait aux différentes animations rendues possibles par le logiciel manipulé par un élève.



L'ESSUIE-GLACE

LIEU 1 :

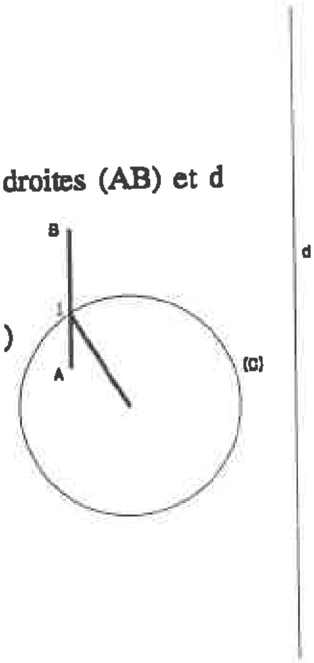
On donne:

- un cercle (C) de centre O et de rayon R.
- une droite d,
- un point mobile I du cercle (C),
- un segment [AB] de longueur fixe contenant le point I et tel que les droites (AB) et d restent parallèles.

1°) Lorsque le point I se déplace sur le cercle (C), quelle figure décrit le point A ?

(On dira : quel est le lieu géométrique des points A lorsque I décrit le cercle (C) ?)

2°) Même question avec le point B.



ESSUIGLA.FIG

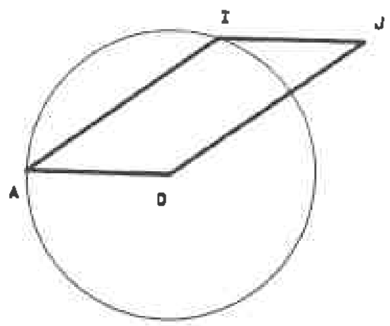
LIEU 2 :

On donne :

- un cercle (C) de centre O et de rayon R,
- un point fixe A du cercle,
- un point mobile I du cercle.

On construit le point J tel que le quadrilatère OAIJ soit un parallélogramme.

Quel est le lieu géométrique des points J lorsque I décrit le cercle (C) ?



OAIJ.FIG

LIEU 3 :

On donne :

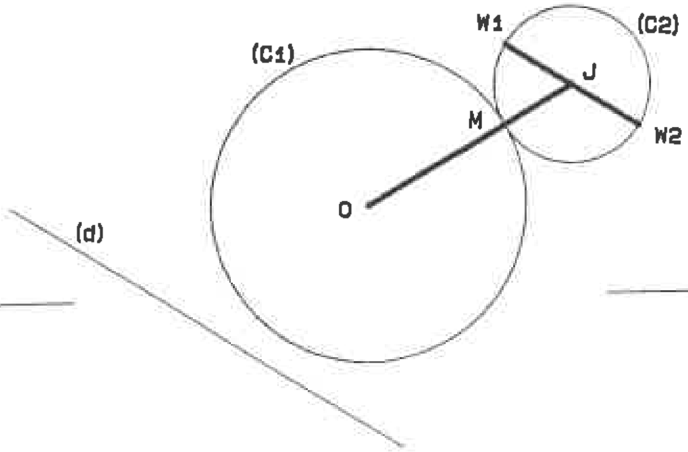
- un cercle (C1) de centre O et de rayon R,
- un point mobile M du cercle,
- une droite d.

On construit le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = 3/2\ \overrightarrow{OM}$ puis le cercle (C2) de centre J passant par M.

La droite passant par J et parallèle à d coupe (C2) en deux points W1 et W2.

Quel est le lieu géométrique des points W1 lorsque le point M décrit le cercle (C1) ?

BILLE.FIG



Le vécu

1°) Reconnaissance des transformations (document p 43) :

Figure 1 (translation) : Pas de problème. L'élève au tableau "voit" la figure dans l'espace. Il faut intervenir pour préciser que toutes les figures sont représentées dans un même plan.

Figure 2 (symétrie centrale) : Pas de remarque.

Figure 3 (homothétie, transformation non connue) : Des élèves ont joint par des segments les sommets des triangles. Certains affirment que c'est une translation. Une élève remarque que c'est impossible car si on prolonge les segments ils sont concourants en un même point.

Figure 4 (symétrie axiale) : De façon surprenante, la symétrie n'a pas été reconnue par plusieurs élèves. La raison vient peut-être de ce que les triangles se chevauchent.

Figure 5 (rotation) : Le centre apparaissant sur le dessin, la transformation est reconnue.

2°) Détermination d'un lieu de points :

Lieu 1 : M parcourt le cercle à l'aide du logiciel. Quel est le lieu des points A ?

Réponses successives des élèves :

- c'est un cercle de rayon OA,
- c'est un ovale,
- c'est un losange.

L'option lieu de points met tout le monde d'accord. C'est un cercle.

Pourquoi ? Quelle est la transformation permettant d'obtenir les points A à partir des points M ?

- c'est une translation,
- c'est une rotation.

Lieu 2 : La réponse est rapide. La translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ est reconnue (ce cas semble plus simple que le précédent).

Lieu 3 : La situation est présentée avec le logiciel. Par l'option lieu de points, l'ensemble des points W1 est caractérisé mais la translation n'est pas reconnue. Le travail est à faire à la maison. De fait peu ont mis en évidence la transformation. Ce n'est qu'après plusieurs essais avec le logiciel, en insistant sur ce qui était invariant et ce qui ne l'était pas, que le vecteur $\overrightarrow{JW1}$ est reconnu comme invariant en direction, en norme, et en sens. Ces trois notions interviennent l'une après l'autre, la dernière est la moins naturelle.

Conclusion

La notion d'invariant est liée naturellement aux points ou aux longueurs qui sont fixes. A travers l'essuie-glace et ses réinvestissements se met en place la notion de vecteur en tant qu'invariant. Nous verrons plus tard qu'en ce qui concerne l'homothétie, à travers le pantographe, la notion de colinéarité en tant qu'invariant n'est pas une démarche immédiate. **De façon plus générale, cette recherche de transformations utiles dans la résolution de problèmes à travers la recherche d'invariants tels que points, longueurs et rapports, colinéarité, vecteurs est à mettre en place et à conforter.**

LE PANTOGRAPHE ET L'HOMOTHETIE

Public : Classe de Seconde.

Objectif : Découverte de l'homothétie et de ses propriétés.

Prérequis : Calcul vectoriel (Chasles) ou Thalès.

Place dans la progression : Après l'étude des transformations.

Durée : 1 h 30 min.

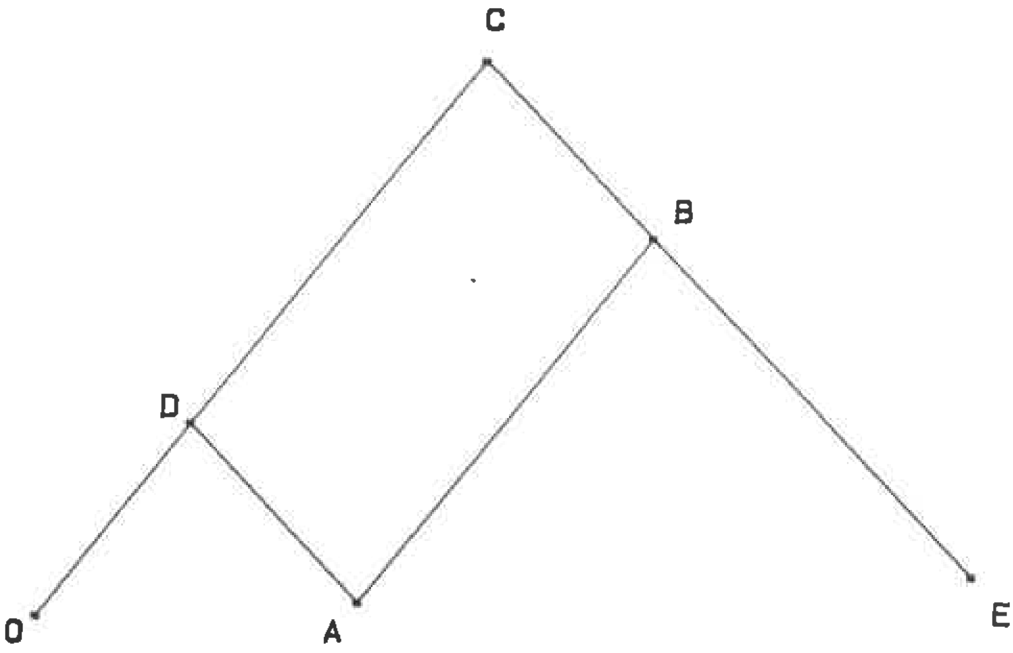
Déroulement

Matériel utilisé : Un PC avec tablette rétroprojetable.

Structure de la classe : Le groupe de Travaux Dirigés.

Etapes :

- alignement des points O, A, E. ($\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{OA}$),
- point fixe,
- images de figures : segments, cercles,
- utilité du pantographe.



LE PANTOGRAPHE

I) Description de la machine.

C'est un instrument inventé au XVIème siècle par Georges de Dillingen et amélioré par LANGLOIS. Cet instrument ancien est actuellement utilisé par les artisans thaïlandais dans la reproduction des célèbres pin's.

Il est constitué de 4 segments [OC], [CE], [AB] et [DA] articulés en A, B, C, D sommets d'un parallélogramme. On a de plus OC = CE = 9 et OD = DA = 3. Faire un dessin.

Figure n°1

II) Exploration.

Chargez Panto.fig.

a) Déplacez le point A, puis le point O, à l'aide de la souris et observez les propriétés invariantes de la figure.

...

Justifiez mathématiquement ces observations!

...

...

b) Placez un point M sur la figure N°1. Si le point A est en M tracez la position du point E correspondant.

Nous allons utiliser maintenant le pantographe pour transformer des objets géométriques.

III) Image d'un segment.

1°) Chargez Pantseg1.fig.

Le point O est fixe et le point A est lié au segment [MN].

a) Déplacez le point A à l'aide de la souris. Sur quelle figure semble se déplacer le point E ?

...

...

(Le mathématicien dira : " Quel est le lieu géométrique des points E lorsque le point A décrit le segment [MN] ? ")

b) Le géomètre permet de dessiner ce lieu ; pour cela utilisez la fonction "lieux de points" dans le menu "Divers". Désignez d'abord le point E, puis à l'aide de la souris déplacez le point A.

c) En appelant h_1 la transformation qui transforme A en E (à l'aide du pantographe), on définit les points M' et N' par : $h_1(M)=M'$ et $h_1(N)=N'$. Comparez les vecteurs $\overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{MN}$.

...

Justifiez mathématiquement vos affirmations.

...

...

...

...

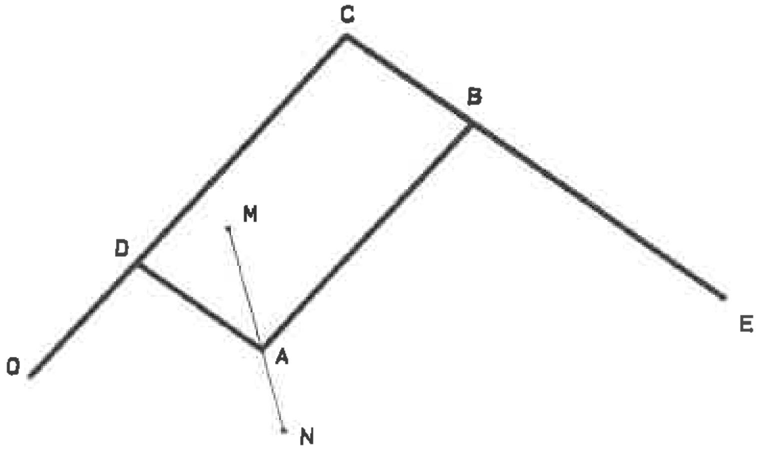
d) Conclusion : quelle est l'image du segment [MN] par la transformation h_1 ?

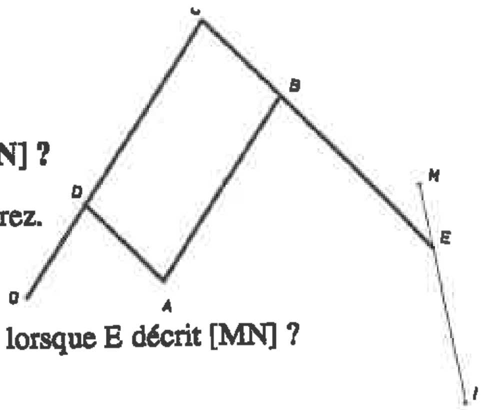
...

...

e) Connaissant uniquement O un point A et son image E par h_1, construire à la règle et au compas l'image d'un segment [MN] par h_1.

PANTSEG1.FIG





2°) Chargez Pantseg2.fig.

Le point O étant fixe, quel est le lieu des points A lorsque E décrit [MN] ?

a) Utilisez la fonction "lieux de points" dans le menu "Divers" et conjecturez.

...

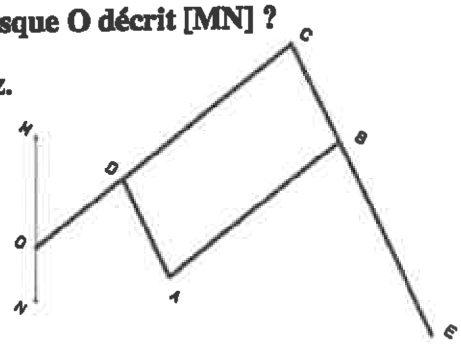
b) On modifie les longueurs du pantographe. Quel est le lieu des points A lorsque E décrit [MN] ?

...

3°) Chargez Pantseg3.fig.

Désormais c'est le point A qui est fixe. Quel est le lieu des points E lorsque O décrit [MN] ?

Utilisez la fonction "lieux de points" dans le menu "Divers" et conjecturez.



...

...

IV) Image d'un cercle : Chargez Pantocer.fig.

Quel est le lieu des points E lorsque A décrit le cercle (C) de centre I de rayon 2 ?

a) Utilisez la fonction "lieux de points" dans le menu "Divers" et conjecturez.

...

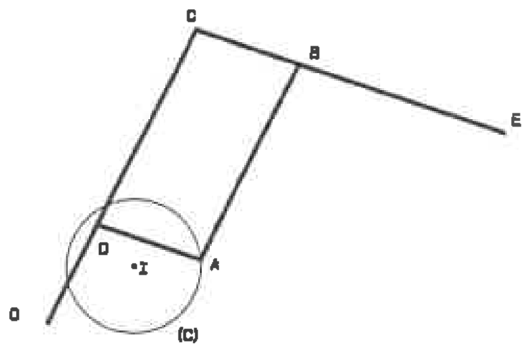
b) En appelant h la transformation qui transforme A en E (à l'aide du pantographe), exprimez mathématiquement l'image par h du cercle (C). Précisez et justifiez !

...

...

V) Conclusions.

A quoi semble servir le pantographe ?



...

...

...

Le vécu

L'alignement des points O, A et E n'est pas évident pour certains élèves.

Pour construire le point M', ils n'utilisent pas forcément la relation $\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{OA}$. Certains construisent M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AE}$ (translation).

Images de segments : sans l'aide du logiciel certains élèves n'ont aucune idée du résultat.

Quant à la caractérisation de la transformation, les termes d'agrandissement et de réduction sont très vite énoncés.

Question subsidiaire du professeur : *"Comment faire pour avoir un rapport de -1/2 ? "*

Les élèves trouvent, seulement après explication par le professeur, du passage de 3 à 1/3.

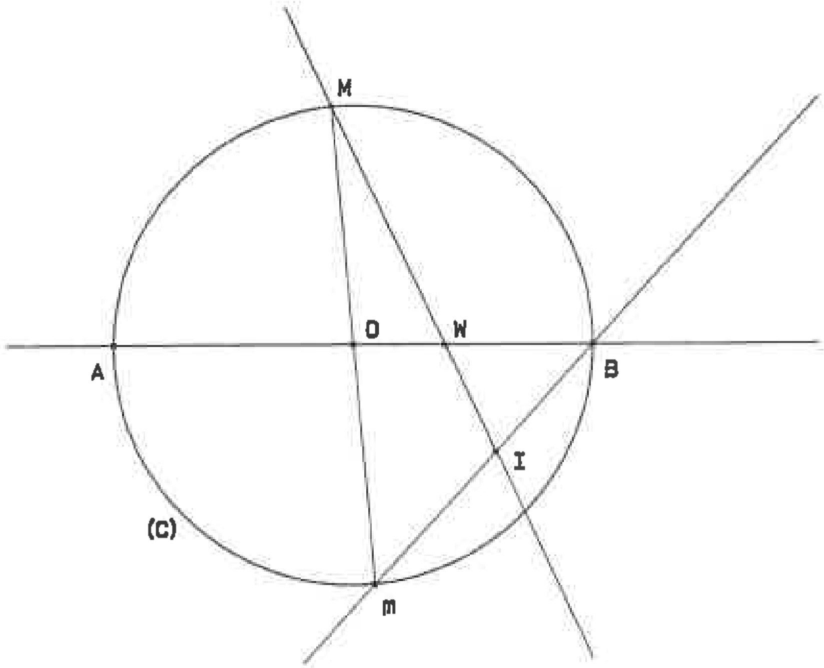
Conclusion

Après avoir éprouvé quelques difficultés à distinguer les constantes de la figure (longueurs) et l'invariance de l'alignement lors du déplacement, les élèves semblent avoir assimilé le principe mécanique du pantographe. Le logiciel est apparu comme une aide à la conceptualisation de la situation.

Au cours des déformations successives de la figure le point fixe, "centre de l'homothétie", est apparu très vite comme un point important pour caractériser cette nouvelle transformation, ce qui donna tout son sens au concept mathématique de l'homothétie, de son centre, le rapport apparaissant comme le résultat de la réduction et de l'agrandissement souhaité suivant la position du point fixe.

ENCORE UN PROBLEME DE LIEUX DE POINTS

T56P300.FIG



On se donne une droite (AB) et on construit le cercle (C) de diamètre [AB] (soit O son centre). Soit W un point de (AB).

A tout point M de (C) distinct des points A et B, on associe le point m diamétralement opposé à M sur (C) et le point I intersection des droites (WM) et (mB)

Le but du problème est d'étudier le lieu des points I lorsque le point M décrit le cercle (C) ?

1°) Construisez la figure à l'aide du Géomètre.

2°) Etudiez le lieu des points I lorsque M décrit le cercle (C).

3°) Justifiez mathématiquement vos observations. (On pourra préciser les cas particuliers éventuels suivants la position du point W sur la droite (AB).)

LE SEAU

1°) Au départ, le seau est au fond :

Amenez la souris sur PERS et la déplacer.

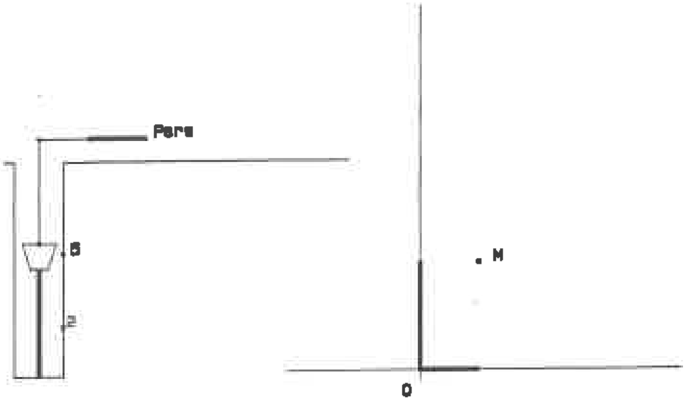
Que constate-t-on sur le dessin à gauche ?

Que constate-t-on sur le repère à droite ?

Que représente l'abscisse du point M ?

Que représente l'ordonnée du point M ?

Déterminez f tel que y = f(x). Représentez f.



2°) Le seau est à 2m du fond :

Quelle va être la position initiale de M ?

Comment se déplace M lorsque la personne se déplace ?

Représentez ce déplacement sur le même graphique que précédemment.

Déterminez g tel que y = g(x).

3°) Le seau est à 5m du fond :

Quelle va être la position initiale de M ?

Comment se déplace M lorsque la personne se déplace ?

Représentez ce déplacement sur le même graphique que précédemment.

Déterminez h tel que y = h(x).

4°) La poulie est maintenant à 5m au dessus du puits et le seau est au fond de ce puits :

Quelle va être la position initiale de M ?

Comment se déplace M lorsque la personne se déplace ?

Représentez ce déplacement sur le même graphique que précédemment.

Déterminez j tel que y = j(x).

CERCLES TANGENTS A UNE DROITE ET A UN CERCLE

Public : Classe de TC de 21 élèves.

Objectif : Discuter des différents cas possibles dans un problème de construction.

Prérequis : Connaissances antérieures.

Place dans la progression :

Durée : 2h 30min.

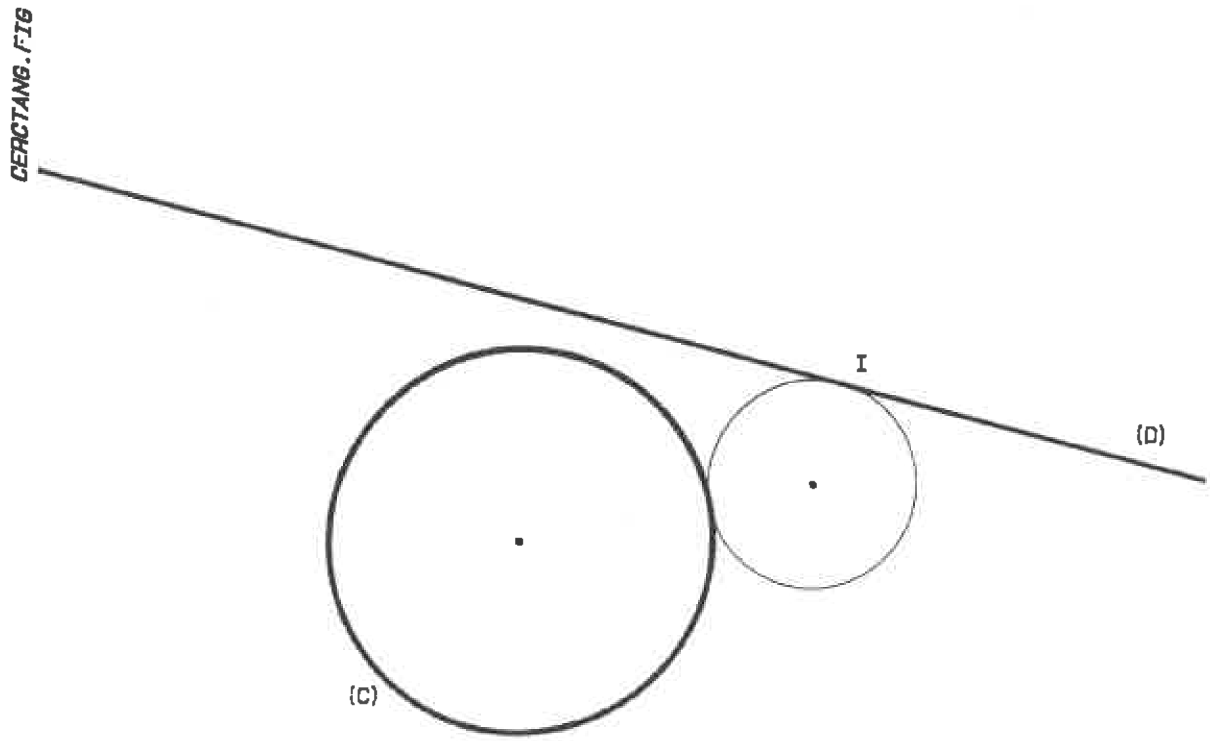
Déroulement

Matériel : Une salle de PC.

Structure de la classe : Deux élèves par poste.

Etapes :

- le problème avait été donné à faire à la maison,
- correction du problème au tableau,
- étude des cas particuliers avec le logiciel.



Le vécu

Enoncé du problème : Etant donné un cercle (C), une droite (D) et un point I de (D), tracer les cercles qui sont à la fois tangents au cercle (C) et à la droite (D) en I.

Dans le devoir, la plupart des élèves ont construit le ou les cercles répondant à la question mais sans justification réelle. La construction était correcte dans l'ensemble :

- 2 groupes ont résolu le problème analytiquement, prouvant l'existence d'un cercle. La construction n'est pas décrite,
- un élève a résolu le problème en utilisant les angles,
- 2 groupes ont utilisé Thalès,
- Un seul groupe (précisant qu'il s'était aidé d'un TP de 1ère S) a résolu correctement le problème, en utilisant les homothéties et en étudiant tous les cas particuliers.

1ère séance au tableau (30 min)

Analyse, synthèse permettant de mettre en évidence les 2 cercles répondant à la question posée dans le cas le plus général.

Questions : Ces constructions sont-elles toujours possibles ? Quels sont les cas particuliers ? Existe-t-il toujours 2 cercles répondant à la question posée ?

2ème séance avec le logiciel

A l'aide de l'écran rétroprojetable, les élèves voient comment il est possible avec le logiciel de construire des droites, des cercles, des perpendiculaires...

Ils mettent en pratique en réalisant la construction du problème. En passant auprès de chaque groupe pour vérifier l'exactitude de celle-ci, en faisant varier I ou (D) des erreurs apparaissent dues au logiciel. Lorsque l'un des cercles solutions a été construit en utilisant des points, en fait ce sont des points parasites qui ont été pris. Dès lors, lorsqu'on déplace I, les cercles ne sont plus tangents.

Lorsque toutes les constructions sont exactes, la question est reposée : quels sont les cas particuliers ?

Par déplacement de I et de (D), les élèves trouvent très rapidement tous les cas particuliers.

Difficultés dues au logiciel :

- si (D) n'a pas été définie par 2 points, on ne peut la faire varier que parallèlement à elle-même. Il faut donc refaire la figure, ce que les élèves font sans "râler".
- un cas particulier ne peut pas être mis en évidence celui avec une infinité de solutions lorsque (D) est tangente à (C) en I.

Question : Pour le prochain cours, reprenez la construction et retrouvez les cas particuliers en les justifiant.

Prolongement : Lorsque I varie sur (D), quel est le lieu des centres des cercles ?

TITRE : LE GEOMETRE, HISTOIRES VECUES DU COLLEGE AU LYCEE

AUTEURS : M.C. BALLAND, J.L. BOURDENET, J.C. FENICE, A. FINET, J.L. GERARD.

NIVEAU : COLLEGE, LYCEE

DATE : DECEMBRE 1992

MOTS-CLE : spécialité : MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

autres : LE GEOMETRE

SEQUENCES PEDAGOGIQUES

RESUME : Compte-rendu d'expérimentation de l'utilisation du Géomètre dans des classes. Présentation de la méthode de travail et des réactions des élèves.

Sur chaque thème abordé, les fiches élèves sont jointes. Une disquette contenant les fichiers de travail est jointe au document.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM Numéro
A4	63	50 F	Re28