COMMISSION INTER IREM GÉOMÉTRIE

DOCUMENT DE TRAVAIL SUR LES CONIQUES

Novembre 2001

TEXTE DE PRÉSENTATION

Comment lire ce document ?

Le texte présente cinq leçons indépendantes. En conséquence la numérotation n'induit aucun ordre de priorité, ni de préférence.

Les définitions rencontrées sont équivalentes deux à deux. Les propriétés mises en évidence dans chaque leçon ne sont pas les mêmes : ces propriétés apparaissent plus ou moins naturellement selon la définition choisie.

Il en résulte l'importance du choix de la définition pour la résolution d'un problème.

En quoi et pourquoi ce document est inachevé.

Tout d'abord quelques remarques :

- Quand le travail de rédaction a commencé, la part de la géométrie dans l'enseignement au collège et au lycée était consistante
- Au départ, l'idée était d'élaborer des documents élémentaires destinés aux élèves, aussi à la formation des jeunes collègues en IUFM.

Ensuite, il y a eu dépassement des objectifs, approfondissement du sujet à partir d'idées originales de membres de la commission.
Une tendance à l'exhaustif a fait qu'il a été difficile de trouver une sorte d'achèvement.

Sur le contenu.

Dans le document, sont proposées cinq définitions des coniques (de L1 à L5).
Dans L6, est proposée la démonstration de l'équivalence de ces définitions.

Dans chaque leçon, le point de vue pris a été poussé assez loin (par exemple la notion de diamètres conjugués dans L.4).
Les outils utilisés pour les raisonnements et démonstrations dépassent rarement le niveau de Terminale (en aucun cas celui du DEUG).

Il est à noter que pour les leçons L1 et L2, il y a une perte d'information par rapport à la définition algébrique et la définition par les section coniques.

Pourquoi publier ce document dans le réseau des IREM ?

- Faire partager à d'autres le travail effectué et espérer un retour.
- « On a loupé un train il y a dix ans mais on espère avoir cinq ans d'avance sur le suivant ».

Petite bibliographie raisonnable

- BERGER M. :Géométrie T4,Formes quadratiques, quadriques et coniques.
  Cedic_Nathan (1978)
- CARREGA J.C. :'Constructions par coniques'
  Revue de Mathématiques Spéciales
- COXETER H.,GREITZER S. : Geometry revisited.
  The Mathematical Association of America (1967)
- COXETER H. : Introduction to geometry
  Wiley and sons (1961)
- DELTHEIL, CAIRE Géométrie, classe de Mathématiques et Préparation aux Grandes Ecoles
  Gabay (Réimpression)
- FRESNEL J. : Méthodes modernes en géométrie
  Hermann (1996)
- HILBERT D. :Geometry and Imagination
  Chelsea (1932
- LEBESGUE H. :Les coniques
  Red. Gabay
- LEBOSSE HEMERY : Géométrie (classes de mathématiques)
  Gabay (réimpression 1961)
- LEHMAN–BKOUCHE :Initiation a la géométrie.
  Puf (1988)
- POSTNIKOV M. :Géométrie analytique (1er semestre)
  Mir ;ed.fr. (1981)
- ROUCHE, DE COMBEROUSSE : Traité de géométrie
  Gauthier Villars (1891)
- SAMUEL P. : Géométrie projective
  Puf (1986)
- TISSERON C. : Géométries affine projective et euclidienne.
  Hermann (1988)
- SALMON G :Sections coniques
  Gauthier Villars (1884)

- VIDELA :On points constructible from Conics.

The mathematical intelligencer 1997vol 19/2
page 53-57.

14/02/2001

I - Définition bifocale de l'ellipse.

1. Etude d'un chemin minimal*.

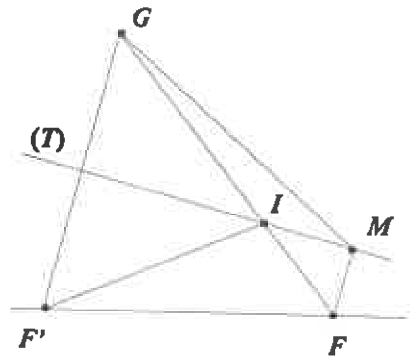
On définit, étant donnés une droite (T) et deux points distincts F et F' situés dans le même demi-plan de frontière (T), la fonction qui à tout point M du plan associe le chemin $MF+MF'$. On appelle f_T la restriction de cette fonction à la droite (T).

Remarquons d'abord que si G désigne l'image de F' par la réflexion d'axe (T), la fonction f_T admet un minimum absolu, pris pour le point I intersection des droites (FG) et (T).

En effet on peut écrire

$$f(M) = MF+MF' = MF+MG$$

et l'inégalité triangulaire appliquée dans le triangle MFG montre que cette quantité est minimale si et seulement si les points M, F, et G sont alignés.



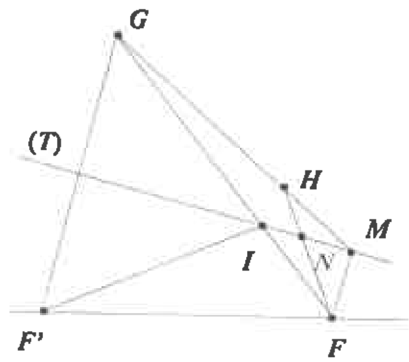
Prenons désormais un repère sur la droite (T) d'origine I, telle que la demi-droite définie par les points d'abscisses positives soit celle qui ne rencontre pas la droite (FF') si ces droites sont sécantes, ou soit de vecteur directeur $\vec{F'F}$ si ces droites sont parallèles. La fonction f_T permet de construire une nouvelle fonction g telle que $g(x) = f_T(M) = MF+MF'$ où M a pour affixe x.

Nous pouvons énoncer: étant donnés deux réels x et x' tels que $0 \leq x' < x$ et deux points M et N d'abscisses x et x', (N appartient donc au segment $]IM[$) alors $f_T(N) < f_T(M)$.

Les droites (FN) et (MG) ne sont pas parallèles.

Sinon, il y aurait une homothétie de centre I qui enverrait G sur F et M sur N; puisque G et F ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (T) le rapport de cette homothétie serait négatif, et donc I appartiendrait à $[MN]$ ce qui est exclu.

Appelons donc H l'intersection de (FN) avec (MG). Le point H appartient au segment $[MG]$ et par l'inégalité triangulaire dans NGH on a



$$NG \leq NH + HG$$

-1

et donc, puisque le point N appartient à $[FH]$,

$$f(N) = NF+NG \leq HF+HG$$

L'inégalité triangulaire appliquée dans le triangle FHM donne finalement

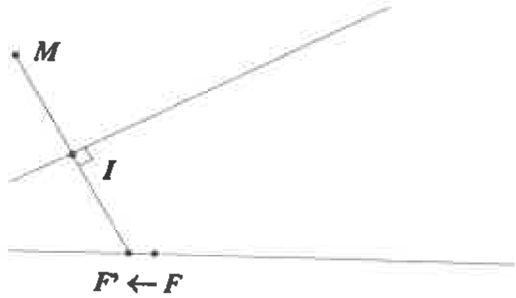
$$HF+HG \leq HM+MF+HG = MF+MG$$

donc $f(N) \leq f(M)$

On remarque enfin que $f(M)=f(N)$ forcerait les deux inégalités triangulaires à être des égalités, les points NGH et donc NGF seraient alignés, tout comme les points FHM et les points FGM. Les points M et N coïncideraient en I ce qui est exclu.

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On démontrerait de même qu'elle est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$.

Remarque: si le point F se rapproche du point F', $\vec{GF}$ tend vers un vecteur normal à (T), le réel $f_T(M)$ devient $2MF'$ et l'étude précédente reste valable à condition de remplacer le point I par la projection de F' sur la droite (T).



2. Lignes de niveau de la fonction f.

Etant donnés deux points F et F' distincts, on appelle ellipse de foyers F et F' toute ligne de niveau de la fonction précédente f.

Si l'on note (Γ) la ligne de niveau associée au réel $2a$, l'ellipse (Γ) est défine par l'équivalence

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow f(M) = 2a$$
$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF+MF' = 2a$$

Une ellipse est donc définie par la donnée de deux points F et F' et d'un réel a strictement supérieur à $\frac{FF'}{2} = c$.

Dans le cas où $c = a$, la ligne de niveau est le segment $[FF']$, nous dirons que nous avons une ellipse aplatie.

Remarquons que l'ellipse de foyers F et F' et de paramètre a est contenue dans le disque de centre F et de rayon a, elle est donc bornée.

a. Symétries.

Si l'on appelle (δ) la droite (FF'), (δ') la médiatrice du segment $[FF']$, et O l'intersection de (δ) et (δ'), et si l'on désigne par S_δ la réflexion d'axe (δ), et par S_O la symétrie centrale de centre O, on a facilement que

$$\forall \phi \in \{\mathrm{Id}, S_\delta, S_{\delta'}, S_O\} \ f \circ \phi = f.$$

Toute ellipse admet donc deux axes de symétrie orthogonaux et un centre de symétrie, en d'autres termes toute ellipse est invariante par le groupe (de ***Klein***) $\{\mathrm{Id}, S_\delta, S_{\delta'}, S_O\}$.

Remarque: Si l'ellipse de foyers F et F' et de paramètre a possédait un troisième foyer F'' elle présenterait deux centres de symétrie O et O' distincts, et serait donc invariante par la composée $S_{O'} \circ S_O$ c'est-à-dire par la translation de vecteur $\vec{OO'}$ et ne serait pas bornée.

Conclusion: Une ellipse est donc entièrement déterminée par la donnée de deux points F et F' et d'un réel a strictement supérieur à $\frac{FF'}{2} = c$. L'ellipse possède donc seulement 2 foyers.

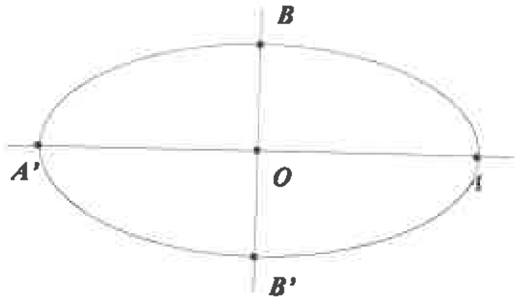
b. Sommets.

Recherchons les points M d'une ellipse Γ non aplatie définie par F, F' et le réel $2a$ situés sur l'axe (δ). Le point M ne peut appartenir au segment $[FF']$ puisque $MF+MF'>FF'$, on a donc :

$M \in \delta \cap \Gamma \Leftrightarrow f(M) = 2\,OM.$

Ainsi M est à l'intersection du cercle de centre O et de rayon a et de la droite δ.

Il existe donc deux points A et A' à l'intersection de l'ellipse et de son ***axe focal*** (FF'). Appelons A celui de ces points qui est le plus près de F

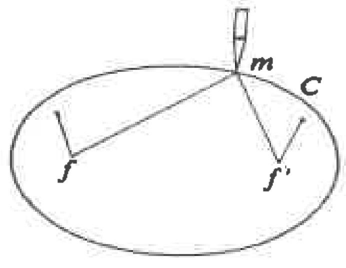


Pour les points M situés sur l'axe (δ') et sur l'ellipse on a $f(M)= 2FM$ et donc l'équation

$$\sqrt{c^2+ OM^2} = 2a$$

On trouve donc deux points B et B' définis sur (δ') par $OB=OB'= b = \sqrt{a^2-c^2}$.

On appelle ***méthode du jardinier*** la construction[1] d'une ellipse à partir d'un cordeau de longueur $2a$ tendu à partir de deux piquets f et f'.



c. intersection avec un cercle.

On prend Γ l'ellipse de foyers F et F' ($FF'=2c$), ligne de niveau de f pour le réel $2a$ ($a>c$).

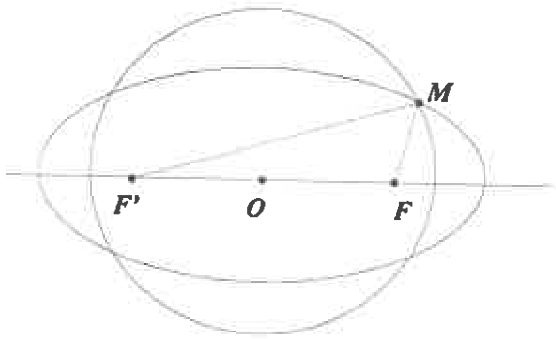
Soit C le cercle de centre O et de rayon ρ ($\rho>0$). On cherche les intersections des deux courbes.

Si on suppose qu'un point d'intersection, M, existe, en appliquant l'égalité de la médiane dans le triangle MFF' on trouve

$$MF^2+ MF'^2 = 2\,OM^2 +2c^2$$

et donc

$$MF.\,MF' = \frac{1}{2}\,[(MF+MF')^2-MF^2-MF'^2\,]$$
$$= 2\,a^2- \rho^2 - c^2$$



Comme de plus $MF + MF'= 2\,a$, on remarque que les distances MF et MF' sont les racines de l'équation

$$(*)\quad X^2 - 2\,aX +2\,a^2- \rho^2 - c^2 = 0.$$

Réciproquement les solutions positives de l'équation précédente permettront de trouver deux réels α et α' tels que $\alpha + \alpha'= 2\,a$ et $\alpha.\alpha'= 2\,a^2- \rho^2 + c^2$ donc tels que $MF+MF'= 2\,a$ et $MF^2+ MF'^2 = 2\,OM^2 +2c^2$ et ainsi recomposer le problème à condition que le cercle de centre F et de rayon α soit sécant au cercle de centre F' et de rayon α' et donc qu'on puisse poser $MF=\alpha$ et $MF'=\alpha'$.

---

[1] Il faut noter que le cordeau du jardinier ne trace en réalité qu'une demi-ellipse.

$$(*) \Leftrightarrow (X-a)^2 + b^2 - \rho^2 = 0$$

Cette équation a des racines positives si et seulement si (i_1): $b^2 - \rho^2 \leq 0$ et (i_2): $2\,a^2 - \rho^2 - c^2 \geq 0$

Les cercles précédents seront sécants si et seulement si (i_3): $|\,\alpha - \alpha'| \leq FF' \leq \alpha + \alpha'$

Comme $(\alpha - \alpha')^2 = (\alpha + \alpha')^2 - 4\,\alpha\,\alpha' = 4\,a^2 - 4(2\,a^2 - \rho^2 - c^2) = 4\,(\rho^2 - b^2)$

$$(i_3) \Leftrightarrow \rho^2 \leq a^2$$

L'inéquation (i_2) est donc satisfaite dès que (i_3) est vérifiée. Le problème a des solutions si et seulement si $b \leq \rho \leq a$.

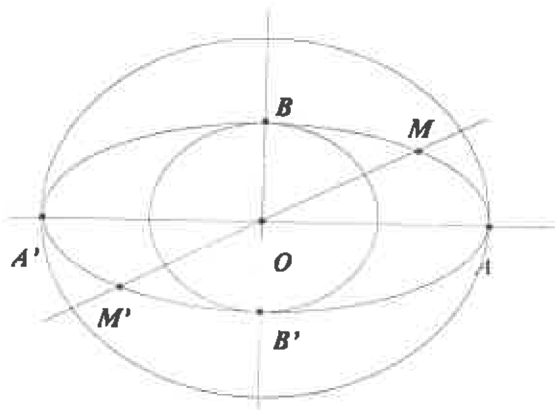
Pour chaque valeur de ρ vérifiant la condition précédente on trouve en général quatre solutions (puisqu'on peut associer le couple (α, α') au couple (F, F') de deux façons).

Pour les cas limites on dira que l'ellipse est tangente au cercle de centre O et de rayon b et au cercle de centre O et de rayon a. On remarque que les points qui correspondent à ces cas limites, obtenus pour des valeurs minimales ou maximales de ρ sont les points trouvés au paragraphe précédent.

d. Résumé: Les points d'une ellipse non aplatie qui appartiennent aussi aux axes de symétrie sont les points qui rendent la distance à l'origine extrêmale. On appelle **diamètre** d'une ellipse la donnée de deux points de l'ellipse symétrique par rapport à l'origine. Le diamètre le plus grand est formé par les points de l'axe focal, A et A' appelés **les sommets** du grand axe, on a ***AA'=2a et a est appelé le demi-grand axe;*** le diamètre le moins grand est constitué par les points B et B' situés sur la médiatrice de l'axe focal, appelés **sommets** du petit axe, on a ***BB'=2b et b est appelé le demi-grand axe*** . On a la relation fondamentale

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Le cercle de rayon a (resp b) qui touche l'ellipse en deux points s'appelle le cercle **principal** (resp **secondaire**) de l'ellipse.



3. Intersection de la famille des lignes de niveau et d'une droite.

Reprenons le problème introductif d'une droite (T) et de deux points F et F' distincts ($FF'=2c$) situés dans un même demi-plan de frontière (T) et l'ensemble des lignes de niveau d'équations $f(M) = 2a$ lorsque a décrit $]c,+\infty[$. La fonction f_T admet une valeur minimale obtenue pour le point I intersection des droites $(F'G)$ et (T) (G désigne l'image de F par la réflexion d'axe (T)).

Les lignes de niveau de demi-grand axe a avec $2\,a < f(I)$ ont une intersection vide avec (T).

D'autre part la fonction g définie à partir de f_T par $g(x) = f_T(M)$ est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $]-\infty,0[$ et strictement croissante et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Toute ellipse de demi grand axe a avec $2\,a > f(I)$ rencontre donc (T) en deux points.

L'ellipse de demi grand axe a avec $2\,a = f(I)$ rencontre (T) en un unique point, I.

Définition: Etant donnée une famille d'ellipses de mêmes foyers distincts F et F' et une droite (T) ne coupant pas $[FF']$, il existe une et une seule ellipse (Γ) qui touche (T) en un unique point I. Cette droite (T) sera appelée tangente à l'ellipse (Γ) en I. Le point I est obtenu à l'intersection des droites $(F'G)$ et (T) (avec $G= S_{(T)}(F)$). Le demi-grand axe de (Γ) est $\frac{f(I)}{2}$.

Théorème: Soit M un point fixé d'une ellipse (Γ) de foyers distincts F et F' et de demi-grand axe a, il existe en M une unique tangente à (Γ). Elle est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.

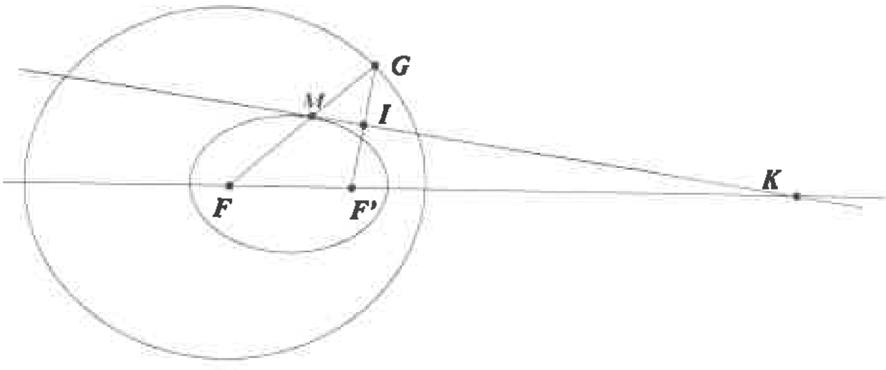
Démonstration:

Appelons (T) la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$. et (γ) l'ellipse de foyers F et F' qui d'après la définition précédente est tangente à (T) en I. Le point I est à l'intersection des droites $(F'G)$ et (T) (avec $G= S_{(T)}(F)$). Or le point G appartient à $(F'M)$ car cette droite est la symétrique de (FM) par rapport à (T), donc $(F'M) = (F'G)$ et les points M et I coïncident. Comme toute ellipse est entièrement déterminée par la donnée des foyers et d'un point, l'ellipse Γ est égale à l'ellipse (γ).

4. Ellipse et cercles directeurs.

Définition: Etant donnée une ellipse de foyers F et F'et de demi-grand axe a ,on appelle **cercles directeurs** les cercles $C(F,2a)$ et $C(F',2a)$ centrés au foyers F et F' et de rayons $2a$.

Proposition: Un point M appartient à l'ellipse (Γ) de foyers F et F'et de demi-grand axe a si et seulement si le symétrique de l'un des foyers par rapport à la tangente à (Γ) en M appartient au cercle directeur relatif à l'autre foyer.



Démonstration: Si M appartient à (Γ), appelons G le symétrique de F' par rapport à la tangente (T) en M à (Γ). Comme le point G n'est pas situé dans le même demi-plan que les foyers par rapport à (T), on peut écrire:

$$GF = GM + MF = F'M + MF = 2a$$

Le point G appartient donc au cercle directeur relatif au foyer F de (Γ).

Réciproquement, étant donné un point G du cercle $C(F,2a)$ supposons que la médiatrice (T) de $[F'G]$ rencontre le segment $[FF']$ en K.

On aurait $2c= FF' = FK + KF' = FK + KG \geq FG = 2a$, ce qui est exclu.

Il existe donc une unique ellipse de foyers F et F' qui touche (T). On montre facilement que son demi-grand axe est a et donc que cette ellipse coïncide avec (Γ). Tout le cercle directeur est donc atteint.

Proposition: Le cercle principal est l'image d'un des cercles directeurs par l'homothétie de centre l'autre foyer et de rapport $\frac{1}{2}$.

5

Exercice: Montrer que l'ensemble des projections orthogonales d'un des foyers sur la tangente en un point M variable d'une ellipse (Γ) est le cercle directeur de ce foyer.

Proposition: Pour qu'une droite (T) soit tangente à l'ellipse (Γ) de demi-grand axe a et de foyers F et F' (qui se projettent orthogonalement sur (T) en H et H'), il faut et il suffit que

$$\overline{FH}\,.\,\overline{F'H'} = b^2$$

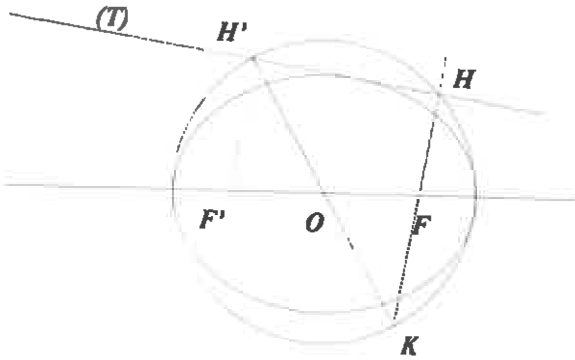
Démonstration :
Appelons O le milieu de $[FF']$ et K le symétrique de H' par rapport à O.
On a par symétrie

$$\overline{FH}\,.\,\overline{F'H'}= \overrightarrow{FH}\,.\,\overrightarrow{F'H'}= -\overrightarrow{FH}\,.\,\overrightarrow{FK}= -\overrightarrow{FH'}\,.\overrightarrow{FK}$$

(car $FH'H$ est rectangle en H).

Finalement

$$\overline{FH}\,.\,\overline{F'H'}= -(\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OH'})\,.(\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OK})$$
$$= -FO^2+ \overrightarrow{OH'}.\overrightarrow{OK} = OK^2 - c^2$$



La droite (T) est tangente à l'ellipse si et seulement si les points H et H' appartiennent au cercle principal (γ), donc si et seulement si K appartient à (γ).(le sens direct est évident, réciproquement si K est sur (γ), son symétrique H' aussi, et puisque le triangle $H'HK$ est rectangle en H, le point H également).

Et donc la droite (T) est tangente à l'ellipse

si et seulement si $OK = a$

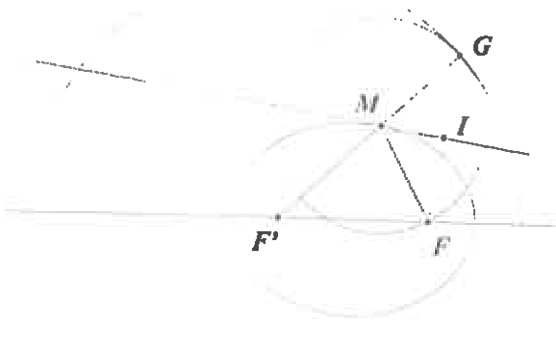
si et seulement si $\overline{FH}\,.\,\overline{F'H'}= a^2 - c^2$

si et seulement si $\overline{FH}\,.\,\overline{F'H'}= b^2$

Proposition:
Etant donné un cercle C de centre F', de rayon $2\,a$, et un point F tel que $2\,c = FF' < 2\,a$. L'ensemble des centres des cercles qui passent par F et qui sont tangents à C est l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a.

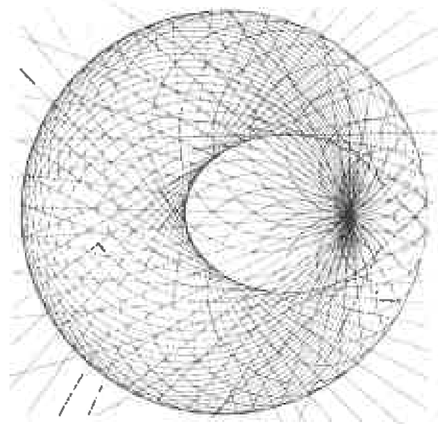
Un point M est centre d'un cercle qui passe par F et qui est tangent (intérieurement) à C en G si et seulement si $F'M+MG = 2a$ donc si et seulement si $F'M+MF = 2a$.

Le point M décrit donc l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a.



6

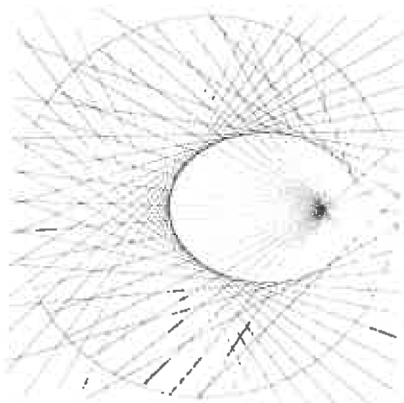
On a dessiné ci-contre la famille des cercles qui correspond à des angles $(\vec{F'F}, \vec{F'G}) = \frac{\pi k}{20}$ (pour $k \in \{0,1,\dots,39\}$.



Nous laissons le lecteur démontrer en exercice la proposition suivante:

Proposition: (définition tangentielle de l'ellipse).

Etant donné un cercle C de centre F', de rayon $2a$, et un point F tel que $2c = FF' < 2a$.
L'enveloppe de la médiatrice du segment $[FG]$ lorsque G décrit C est l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a.



On a dessiné ci-dessus la famille des médiatrices qui correspond à des angles $(\vec{F'F}, \vec{F'G}) = \frac{\pi k}{20}$
(pour $k \in \{0,1,\dots,39\}$.

II- Définition bifocale de l'hyperbole.

1. Extension du problème précédent.

Il n'est pas besoin d'être bien curieux pour penser à examiner ce qui se passe lorsque l'on choisit le point F à l'extérieur du cercle (C) du paragraphe précédent.

Définition

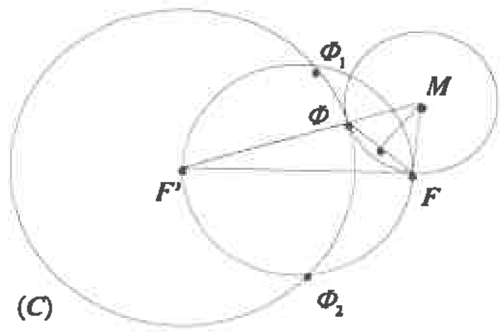
Etant donné un cercle (C) de centre F', de rayon $2a$, et un point F tel que $2c = FF' > 2a$. On appelle hyperbole de foyers F et F' (et par analogie de demi-diamètre a) l'ensemble des centres des cercles qui passent par F et qui sont tangents à (C).

7

a. construction de points, branches et directions asymptotiques

• Construction point par point.

Soit Φ un point donné du cercle *(C)* de centre *F'*, de rayon 2 *a*.
Pour chercher un cercle tangent en Φ à *(C)* et passant par *F* il faut construire les intersections de la droite $(F'\Phi)$ avec la médiatrice de $[\Phi F]$. Or ces deux droites sont parallèles si et seulement si le triangle $F'\Phi F$ est rectangle en Φ. Il existe donc deux points Φ_1 et Φ_2 pour lesquels la construction est impossible.

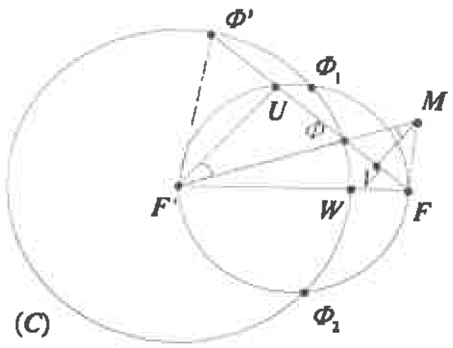


• Directions asymptotiques.

On note *V* le milieu de $[F\Phi]$ et θ l'angle $\widehat{\Phi MV}$. La droite $(F\Phi)$ recoupe le cercle (*C*) en Φ' éventuellement confondu avec Φ. Le point *U* désigne le milieu de $[\Phi\Phi']$. Les angles $\widehat{\Phi F'U}$ et $\widehat{\Phi MV}$ sont alternes internes puisque les droites (*FU*) et (*MV*) sont parallèles, on a donc

$$\widehat{\Phi MV} = \theta$$

Lorsque Φ se rapproche de Φ_1 la droite $(F\Phi)$ tend vers la tangente au cercle (*C*) menée par *F*, par conséquent le point Φ' tend aussi vers Φ_1 . Le milieu *U* de $[\Phi\Phi']$ tend aussi vers Φ_1 et l'angle θ tend vers 0.



On exprime le sinus de θ dans le triangle rectangle ΦMV pour trouver

$$\Phi M = \frac{\Phi V}{\sin\theta} = \frac{\Phi F}{2\sin\theta} \geq = \frac{FW}{2\sin\theta}$$

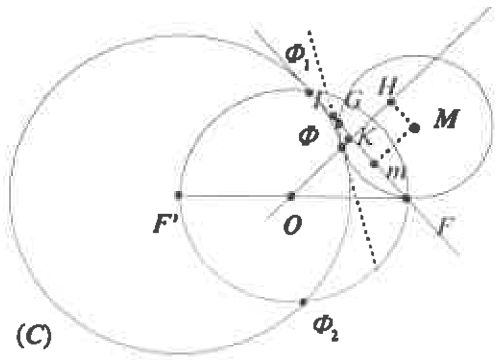
avec *W* l'intersection du segment $[FF']$ avec (*C*).
Lorque Φ se rapproche de Φ_1 la distance ΦM et la distance *F'M* tendent vers l'infini, le point *M* s'éloignant dans la direction de $(F'\Phi_1)$.
L'hyperbole n'est pas bornée et possède deux directions asymptotiques $(F'\Phi_1)$ et de $(F'\Phi_2)$.
Comme $F'\Phi_1F$ est rectangle en Φ_1, et comme $FF'= 2c$ et $F'\Phi_I= 2\,a$, en posant $F\Phi_I= 2\,b$ on trouve

$$b = \sqrt{c^2\text{-}a^2}.$$

Appelons *O* le milieu de $[FF']$ et considèrons le repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ orthonormé direct avec $\vec{i}=\frac{\vec{OF}}{OF}$

Dans ce repère, les pentes des directions asymptotiques sont donc $\pm\frac{b}{a}$.

• Asymptotes.



La parallèle à la direction asymptotique $(F'\Phi_1)$ menée par le milieu O de $[FF']$ est perpendiculaire à la droite $(F\Phi_1)$ en K. Le point M se projette orthogonalement sur cette droite en H , il se projette aussi sur $(F\Phi_1)$ en m. On note également G l'intersection de la demi-droite $[F\Phi_1)$ avec le cercle de centre M et de rayon $M\Phi_1$ et I l'intersection de $[F\Phi_1)$ avec la tangente commune aux deux cercles de centre F' et M.
Le point K est le milieu de $[F\Phi_1]$ (puisque la projection orthogonale de (FF') sur $(F\Phi_1)$ envoie O sur K et F' sur Φ_1. On a donc

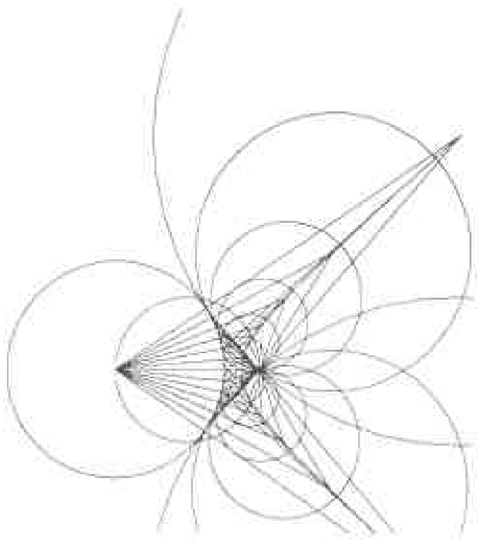
$$\vec{mK} = \frac{1}{2}(\vec{mF}+\vec{m\Phi_1}) = \frac{1}{2}(\vec{G\Phi_1})$$

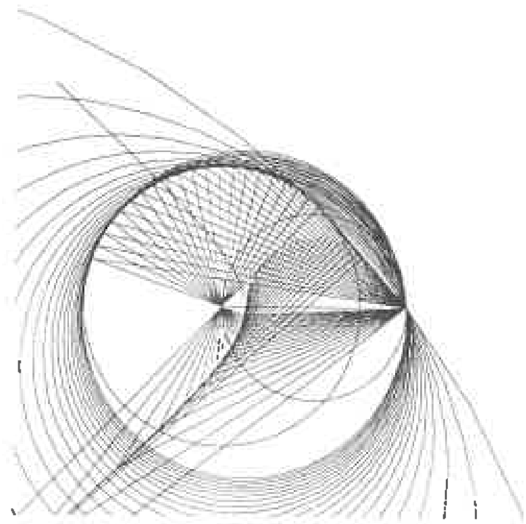
puisque le point m est au milieu de $[F\Phi_1]$.
Lorsque θ tend vers 0, la tangente menée par Φ au cercle (C) tend vers la droite $(F\Phi_1)$ et donc le point I tend vers Φ_1.
Le point I a même puissance par rapport aux trois cercles et donc

$$I\Phi_1^2 = \overline{IF}.\overline{IG}$$

Puisque le point I tend vers Φ_1 et que IF est borné, le point G tend aussi vers Φ_1 et la distance $MH=MK$ tend donc vers 0.
L'hyperbole possède donc deux asymptotes, passant par le milieu de $[FF']$ et de directions $(F'\Phi_1)$ et $(F'\Phi_2)$.

On a dessiné ci-dessous les points obtenus par la construction géométrique précédente, à droite (resp à gauche) lorsque Φ appartient (resp n'appartient pas) à l'arc $\Phi_1\Phi_2$ du cercle (C) qui contient W. On obtient ainsi empiriquement deux *branches* d'hyperbole.





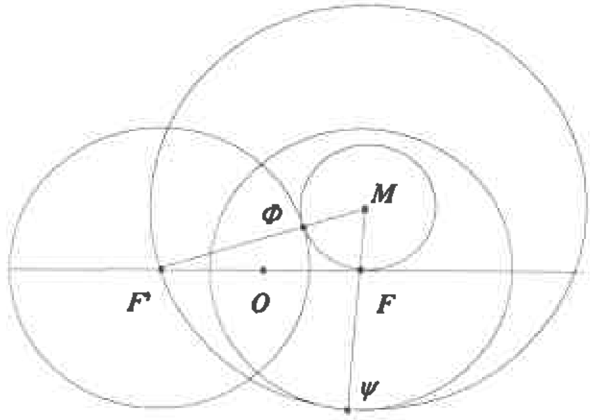
Exercice:
Calculer en fonction de $\alpha = (\vec{F'F}, \vec{F'\Phi})$ de a et de c ($FF'=2c$) les coordonnées du centre M du cercle tangent en Φ à (C).

Montrer que l'application $\alpha \to M$ est continue sur $]-\text{Arctan}\frac{b}{a}, -\text{Arctan}\frac{b}{a}[$ et sur $]\text{Arctan}\frac{b}{a}, 2\pi - \text{Arctan}\frac{b}{a}[$.

b. symétries.

La droite (FF'), qu'on appelle (δ) est clairement un axe de symétrie de l'hyperbole, puisqu'elle laisse invariant tous les éléments du problème.
Soit M un point de l'hyperbole. Supposons que le point de contact Φ du cercle $C(M, MF)$ appartienne au segment $[MF']$.
Comme $MF = M\Phi < MF'$, le point M est alors plus près de F que de F'. Traçons le cercle de centre M et de rayon MF' puis l'intersection ψ de la demi droite $[MF)$ avec ce cercle.
On a:

$$F\psi = M\psi - MF = MF' - M\Phi = 2a$$



Le cercle de centre M et de rayon MF' est donc tangent au cercle de centre F et de rayon $2a$.
En échangeant les rôles de F et de F', et de Φ et ψ il est facile de montrer que si F' appartient au segment $M\Phi$, on obtient une situation analogue, quoiqu'inversée.
Soit S_O la symétrie centrale de centre O. L'image par S_o de l'ensemble des centres des cercles tangents à $C(F',2a)$ et passant par F est l'ensemble des centres des cercles tangents à $C(F,2a)$ et passant par F'. D'après l'étude précédente les deux ensembles coïncident. Soit (δ') la médiatrice du segment $[FF']$, on a $S_{\delta'} = S_{\delta}\ o\ S_O$

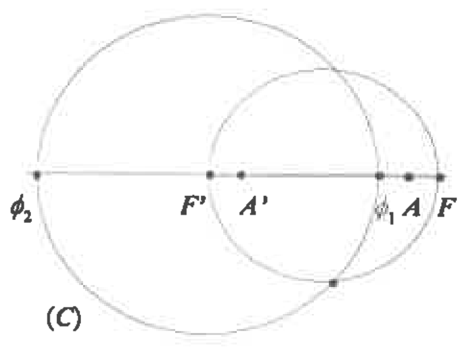
Définition: Etant donnée une hyperbole de foyers F et F' et de demi-diamètre a ,on appelle **cercles directeurs** les cercles $C(F,2a)$ et $C(F',2a)$ centrés au foyers F et F' et de rayons $2a$.

Toute hyperbole admet donc deux axes de symétrie orthogonaux et un centre de symétrie, en d'autres termes toute hyperbole est invariante par le groupe (de ***Klein***) $\{\mathrm{Id}, S_\delta, S_{\delta'}, S_O\}$.
Mieux, chacune des branches est globalement invariante par $S_{\delta'}$ et les branches sont échangées par S_δ et par S_O.

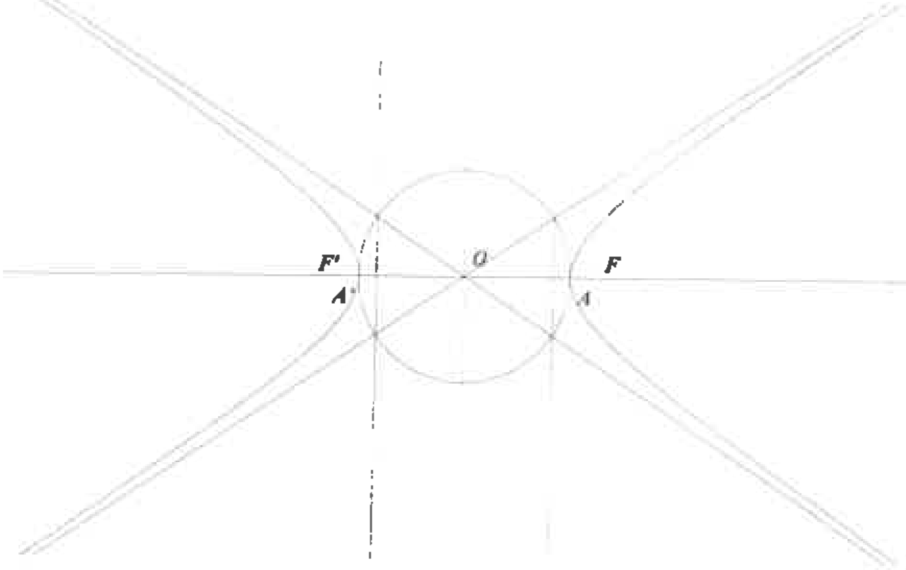
c. Sommets.

Recherchons les points d'une hyperbole situés sur l'axe (δ), le cercle directeur de centre F' étant de rayon $2a$. Soit ϕ_1 et ϕ_2 les intersections de (FF') avec C (ϕ_1 plus près de F). Le point A (resp A') est le milieu de $[F\phi_1]$, (resp $[F\phi_2]$).

Les abscisses des points F, ϕ_1, et ϕ_2 dans un repère normé d'origine F' sont $2c$, $2a$ et $-2a$ .Les abscisses de A' et de A sont donc $c- a$ et $c + a$ et AA' vaut $2a$. Cette remarque justifie ***a posteriori*** d'avoir appelé a le demi-diamètre. On constate qu'il n'existe pas de centre de cercle tangent au cercle directeur situé sur la médiatrice de $[FF']$ et donc que l'hyperbole ne possède pas d'autre diamètre réel.



Tracé de l'hyperbole:



2. Lignes de niveau de la fonction *f*.

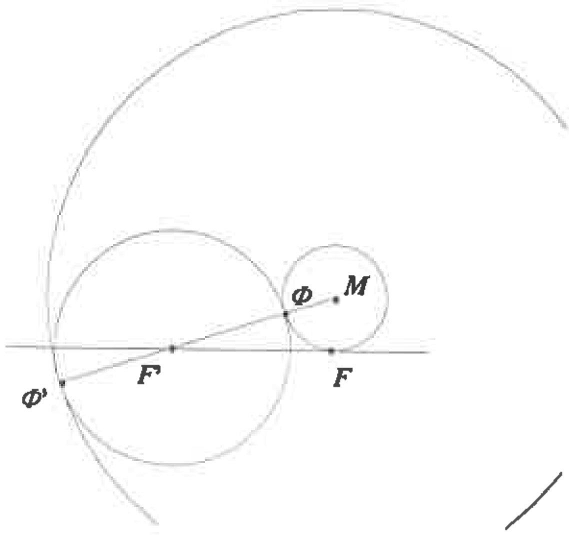
Pour tout point M d'une hyperbole de foyers F et F' distincts tels que $FF' = 2c$, et de rayon du cercle directeur $2a$ ($a < c$) on a

si le cercle de centre M est tangent extérieurement au cercle directeur de centre F' en Φ

$$MF'-MF= MF'-M\Phi= 2a$$

si le cercle de centre M est tangent intérieurement au cercle directeur de centre F' en Φ'

$$MF-MF'= M\Phi' -MF' = 2a$$



Réciproquement si un point N vérifie $NF'-NF= 2a$ (resp $NF-NF'= 2a$) le cercle de centre N et de rayon NF est tangent extérieurement (resp intérieurement) au cercle directeur de centre F' et de rayon $2a$ puisque $NF'=2\ a+NF$ la somme des rayons (resp $NF=2\ a+NF'$).

Si on introduit la fonction f qui à tout point M du plan associe le chemin $|MF-MF'|$ une hyperbole de foyers F et F' devient une ligne de niveau de la fonction f.
Si l'on appelle (Γ) la ligne de niveau associée au réel $2a$, l'hyperbole (Γ) est défine par l'équivalence

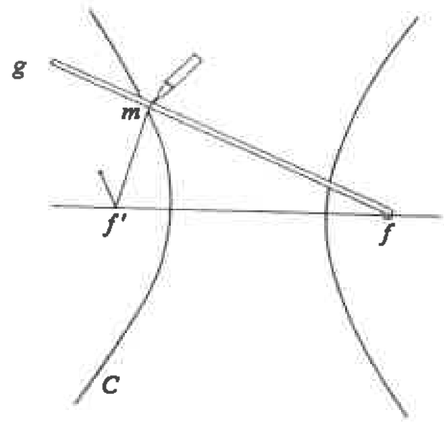
$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow f(M) = 2a$$
$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |MF-MF'| = 2a$$

Une hyperbole est donc ainsi entièrement déterminée par la donnée de ses foyers et d'un réel a strictement inférieur à $\frac{FF'}{2} = c$.

On peut donc tracer une hyperbole de foyers F et F' point par point en recherchant l'intersection des cercles $C(F', 2a+r)$ et $C(F, r)$ (avec $r > c-a$), puis en effectuant la symétrie centrale de centre O.

Remarques:

* Considérons une règle $[fg]$ qui pivote sans glisser autour du point f et un fil attaché d'une part en f' et de l'autre à l'extrémité g de la règle. Si l'on maintient le fil tendu à l'aide d'une pointe de crayon placée en m, cette pointe en se déplaçant décrira un arc de l'hyperbole de foyers f et f' dont la longueur $2a$ est la différence entre fg et la longueur du fil.



** Dans le cas où $c = a$, la ligne de niveau de la fonction f est la droite (FF') privé du segment $]FF'[$.

12

DEUXIEME LEÇON : Définition Monofocale des Coniques

I - Définitions.

Définition:

Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D, et un réel e strictement positif, on appelle *conique* de *foyer* F, de *directrice* D et d'*excentricité* e l'ensemble Γ des points M du plan P dont le rapport des distances à F et à D vaut e.

$$\Gamma(F,D,e) = \{M \in P \,/\, d(M,F) = e\, d(M,D)\}$$

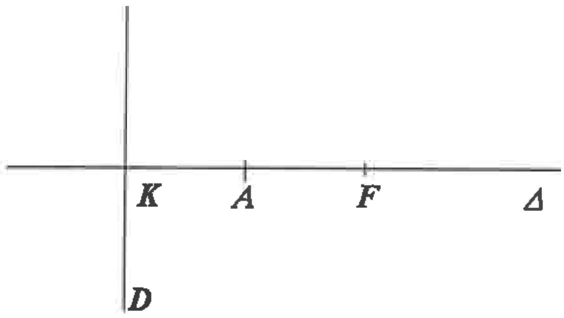
Remarque:
Soit K la projection orthogonale de F sur D. La droite (FK) est un axe de symétrie de la conique: en effet c'est un axe de symétrie des données, et la symétrie conserve les distances. C'est l'axe focal de la conique. Nous le noterons Δ.

II - Etude de la conique par construction points par points.

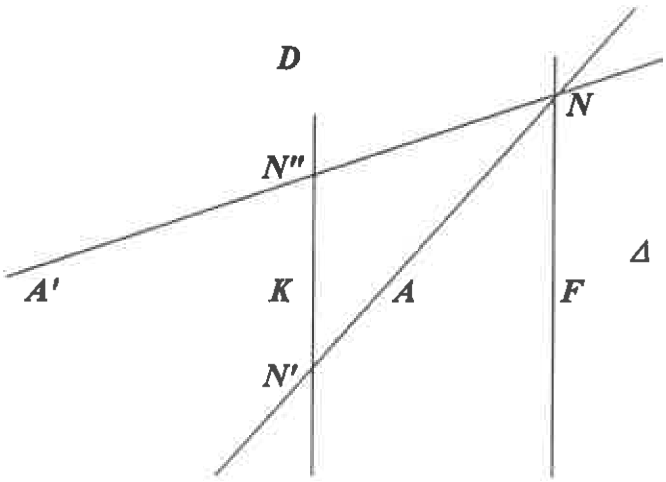
1°) Intersection de la conique Γ avec son axe focal : Sommets d'une conique.

Cherchons les points dont le rapport des distances à F et à K vaut e.

Si $e = 1$ on trouve une unique solution, le point A milieu de $[F,K]$.



Si $e \neq 1$, on trouve deux solutions A et A' vérifiant :



$$\overrightarrow{AK} = -e\,\overrightarrow{AF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'K} = e\,\overrightarrow{A'F}$$

Construire A revient à chercher le centre de l'homothétie de rapport $-e$ qui envoie F sur K; on prend un vecteur $\vec{u}$ quelconque non porté par Δ, on définit les points N et N' par :

$$\overrightarrow{FN} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KN'} = -e\,\vec{u}$$

A est à l'intersection de (FK) et (NN').

Ici on a choisi $\vec{u}$ vecteur directeur de D

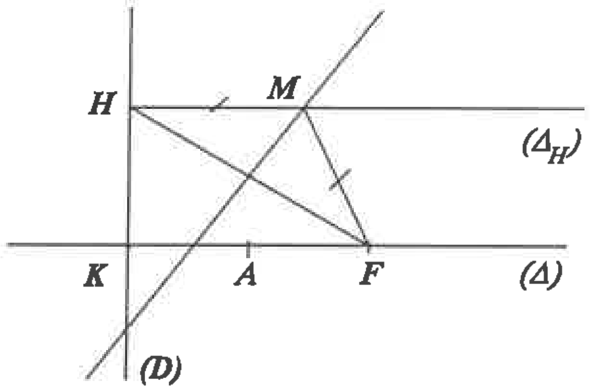
De même si $\overrightarrow{KN''} = e\,\vec{u}$, A' sera à l'intersection de (FK) et (NN'').

On remarque que A et A' sont barycentres des systémes $\{(F,1)\,(H,e)\}$ et $\{(F,1)\,(H,-e)\}$.

2°) Intersection de la conique Γ avec un droite parallèle à l'axe focal:

Soit H un point de D différent de K, on appelle Δ_H la parallèle à Δ passant par H.
On cherche à construire les points de $\Gamma \cap \Delta_H$, c'est-à-dire les points de Γ qui se projettent orthogonalement en H sur D. Un point M de Δ_H appartient à la conique Γ si et seulement si $MF = eMH$.

1er cas : si $e = 1$.



L'ensemble des points M tels que $MF = MH$ est la médiatrice de (HF). Elle n'est pas parallèle à Δ_H.
On trouve les points M solutions en construisant l'intersection des deux droites. Le problème possède donc une solution unique.
La courbe obtenue est appelée ***parabole***.
Elle n'est pas bornée puisque H peut s'éloigner autant que l'on veut de K.
Elle a un unique sommet A, milieu de $[FK]$.

TRACÉ DE LA PARABOLE

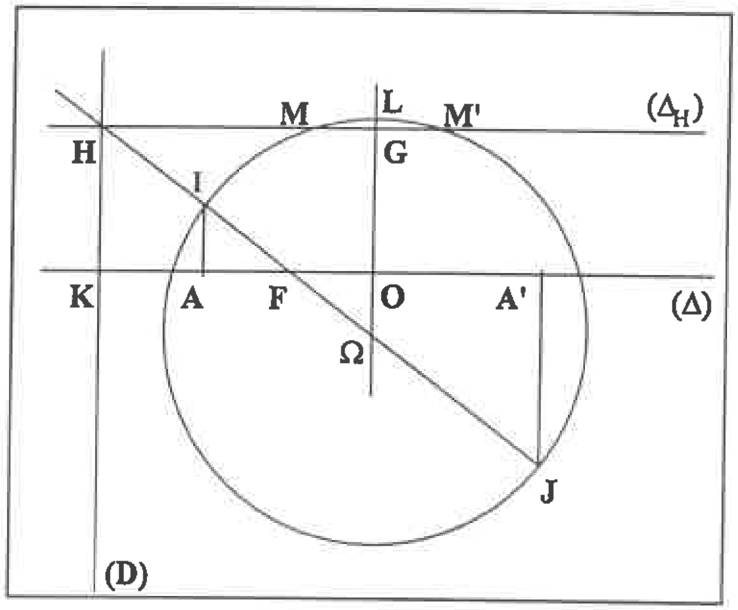
2ème cas : si $e \neq 1$.

L'ensemble γ des points M tels que $MF = eMH$ est le cercle[1] de diamétre $[IJ]$, I et J désignant les barycentres des systémes $\{(F,1)\,(H,e)\}$ et $\{(F,1)\,(H,-e)\}$.
En effet $\vec{MF}^2 - e^2\vec{MH}^2 = (\vec{MF} + e\,\vec{MH}).(\vec{MF} - e\,\vec{MH}) = (1-e^2)\,\vec{MI}\,.\vec{MJ}$
Les solutions si elles existent, (la discussion est au §4) sont à l'intersection de Δ_H et de γ.

Les points I et J s'obtiennent à partir des sommets A et A' de la conique par projection parallèle à la directrice (puisque la projection conserve les barycentres).

Le milieu O de $[AA']$ se projette au milieu Ω de $[IJ]$.

La droite $(O\Omega)$ qui est axe de symétrie de $\gamma \cap \Delta_H$ apparait comme deuxième axe de symétrie de la conique Γ.



Conclusion:

Dans le cas où e est différent de 1, la conique possède deux axes de symétrie orthogonaux et donc un centre de symétrie O.
On appelle les coniques de ce type ***coniques à centre***.
Pour chaque conique à centre il existe deux couples (F, D) et (F', D') de foyers-directrices, symétriques par rapport au centre O. Elles ont sur l'axe focal, deux sommets A et A' qui divisent le segment $[FK]$ dans le rapport e et $-e$.

---

[1] Un tel cercle est appelé cercle d'Apollonius, ligne de niveau de la fonction $M \to \frac{MA}{MB}$, i.e.: $\gamma = \{M \in P \,/\, MA = k\,MB\}$.

3 - Relations classiques.

Ecrivons les relations barycentriques caractérisant les points A et A'. Pour tout point N du plan, on a :

$$(1+e)\,\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NF} + e\,\overrightarrow{NK}$$

$$(1-e)\,\overrightarrow{NA'} = \overrightarrow{NF} - e\,\overrightarrow{NK}$$

On additionne ces deux relation et on les retranche en prenant N en O, il vient :

$$e\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA} = e\,\overrightarrow{OK} \qquad (*)$$

Et si l'on pose comme c'est l'usage $OA = a$ et $OF = c$, on obtient $e = \dfrac{c}{a}$ et $OK = \dfrac{a^2}{c}$

Remarque : on a $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AK}} = -\dfrac{\overline{A'F}}{\overline{A'K}}$, les quatre points $AA'FK$ forment une division harmonique[2], ce qui permettra de construire K si l'on connait AA' et F grâce à la relation : $\dfrac{\overline{KA'}}{\overline{KA}} = -\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}$

4 - Calcul du rayon R du cercle d'Apollonius. Existence des solutions (§II.2°).

Pour un point H donné, la construction des points M de la conique à centre qui se projettent orthogonalement en H est possible si et seulement si $\Omega G \leq R$ où R désigne le rayon du cercle γ.
Nous allons traduire $\Omega G^2 \leq R^2$ par une condition sur $KH = OG$ en fonction des données a et c.
Par projection parallèle à la directrice de la droite (OK) sur la doite (ΩH) les relations (*) deviennent

$$e\,\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{\Omega F} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega I} = e\,\overrightarrow{\Omega H}$$

En projetant la relation $\overrightarrow{\Omega F} = e^2\,\overrightarrow{\Omega H}$ sur $(O\Omega)$ parallèlement à l'axe focal, il vient:

$$\overrightarrow{\Omega O} = e^2\,\overrightarrow{\Omega G} \quad \text{d'où } \Omega G = \frac{1}{1-e^2}\,OG.$$

$$R^2 = \Omega I^2 = e^2\,\Omega H^2 = e^2(\Omega G^2 + GH^2) = e^2(\Omega G^2 + OK^2) = e^2\,\Omega G^2 + a^2$$

$$\Omega G^2 \leq R^2 \text{ se traduit par } (1-e^2)\,\Omega G^2 \leq a^2 \text{ soit } \frac{1}{1-e^2}\,OG^2 \leq a^2.$$

1^er^ cas[3] : si $e < 1$,
l'inégalité précédente est équivalente à $OG^2 \leq (1-e^2)a^2 = a^2 - c^2$.
La construction n'est possible que si la droite Δ_H coupe l'axe non focal à l'intérieur du segment $[B'B]$, où B et B' sont deux points symétriques par rapport à O et tels que $OB^2 = b^2 = a^2 - c^2$.
Les coniques de ce type, sont appelées ***ellipses***. Les points B et B' sont les sommets de l'axe non focal.

TRACÉ DE L'ELLIPSE

2^ème^ cas : si $e > 1$,
la construction est possible quelle que soit la position du point H.

---

[2] Cf l'annexe sur la division harmonique. Nous verrons plus tard (chapitre III) que la directrice est la polaire du foyer par rapport à la conique.

[3] On peut aussi retrouver une discussion similaire en utilisant l'angle $\theta = (\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FA})$ ($\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$).
Comme $R = \Omega I = \dfrac{OA}{\cos\theta} = \dfrac{a}{\cos\theta}$ et $\Omega G = HG \tan\theta = OK \tan\theta = \dfrac{a^2}{c}\tan\theta$, on a $R - \Omega G = \dfrac{a^2}{c\cos\theta}(e - \sin\theta)$.
Situer le point G sur OL revient donc à chercher le signe de $(e - \sin\theta)$.
pour $e>1$ dans le cas des hyperboles $R - \Omega G > 0$
pour $e<1$ dans le cas des ellipses $R - \Omega G \geq 0$ si et seulement si $\sin\theta \leq e$.
Le point B est obtenu lorsque $\sin\theta = e$ c'est-à-dire:

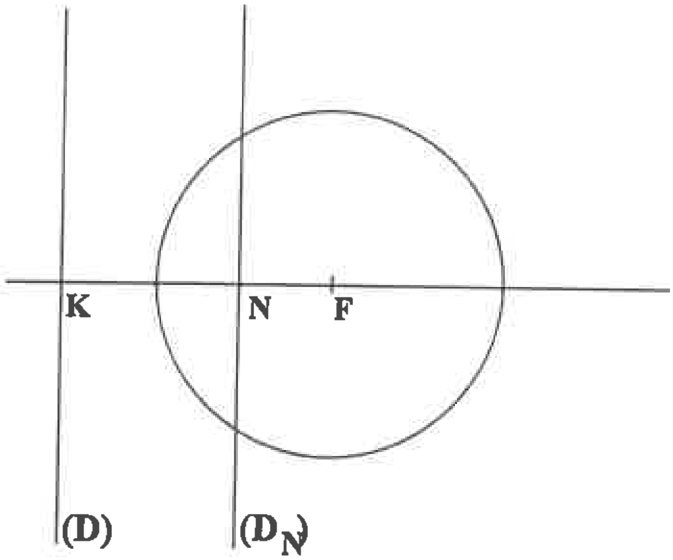
$$OB = \Omega B\,(1-e^2) = R\cos^2\theta = a\cos\theta = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{a^2-c^2} \quad \text{etc.}$$

Les coniques de ce type, non bornées, sont appelées ***hyperboles***. Par analogie on note $b^2 = c^2 - a^2$.

5 - Intersection de la conique Γ avec un droite parallèle à la directrice :

Soit une conique Γ d'axe focal Δ, un point N de Δ, et D_N la parallèle à D passant par N. Construire les points de $\Gamma \cap D_N$ c'est chercher les points de Γ qui se projettent orthogonalement sur Δ en N.

Pour tout point M de D_N on a $MH = NK$.
On construit M en cherchant l'intersection de la droite D_N avec le cercle de centre F et de rayon eNK.
Il existe donc deux solutions au plus, si et seulement si $NF \leq e\,NK$.



Si $e = 1$, dans le cas de la parabole il faut et il suffit donc de prendre le point N sur la demi droite $[AF)$, A désignant le sommet de la parabole, milieu de $[KF]$.

Si $e \neq 1$,

$$(NF \leq e\,NK) \Leftrightarrow (NF^2 - e^2 NK^2 \leq 0)$$

Or $NF^2 - e^2 NK^2 = (1 - e^2)\,\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NA'}$

(les calculs ont été effectués au §I.2).

Dans le cas de l'ellipse, $(1 - e^2) > 0$, et les solutions[4] existent si et seulement si le point N appartient au segment $[A'A]$.

L'ellipse est donc bornée.

Dans le cas de l'hyperbole $(1 - e^2) < 0$, et les solutions existent si et seulement si le point N est à l'extérieur du segment $]A'A[$.

Résultats :

Une droite perpendiculaire en N à l'axe focal coupe la conique en deux points si et seulement si :

- *N appartient à la demi droite $[AF)$ dans le cas de la parabole* ($e = 1$).
- *N appartient au segment $[A'A]$ dans le cas de l'ellipse* ($e < 1$).
- *N est à l'extérieur du segment $]A'A[$ dans le cas de l'hyperbole* ($e > 1$).

Ces deux points sont confondus aux extrémités de ces intervalles.

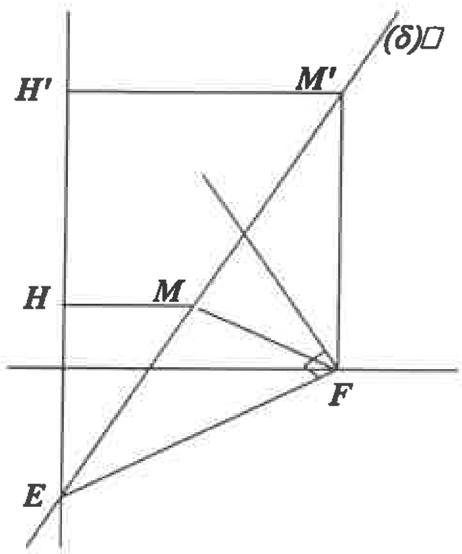
III. APPLICATIONS.

1 - Cordes et tangentes.[5]

[4] Le lecteur qui souhaiterait (par exemple avec des élèves de lycée) introduire de l'*A*nalyse pourrait faire le raisonnement suivant:
Compte tenu de la symétrie de la conique par rapport à (KF), on peut se borner à rechercher les points M dans un même demi plan de frontière (KF). Soit f la fonction numérique qui à NM associe le réel FM dans le cas où e est différent de 1. La fonction f est évidemment continue et strictement croissante sur les réels positifs. Elle possède un minimum absolu NF. Comme le point M appartient à G si et seulement si $MF=eMH=eNK$, le problème posé revient donc à rechercher les antécédents par f de eNK et il possède donc des solutions si et seulement si le minimum NF est inférieur ou égal à eNK.
On pourra, en exercice rechercher l'ordonnée y de M en fonction de son abscisse x dans un repère adapté (par exemple celui qui est centré en O: $\{(F,1)\ (K,-e^2)\}$) pour obtenir l'expression explicite de f:

$$f(x) = \sqrt{(e^2-1)x^2+a^2-c^2}$$

[5] Une étude plus complète se trouve au chapitre *III*.



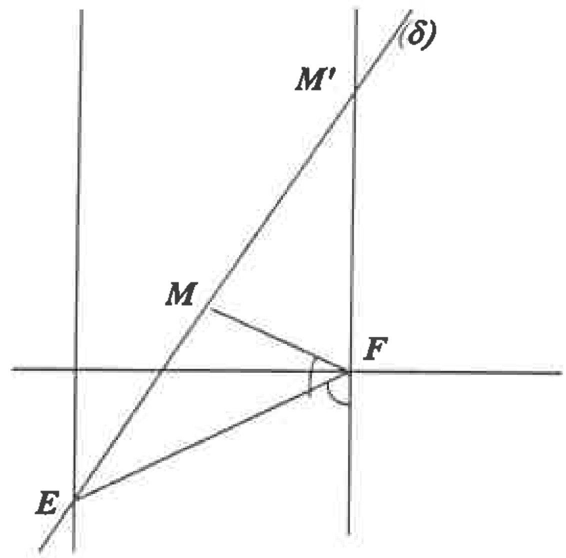
Proposition:
Si une corde (δ) coupe la directrice (D) en E, et la conique en M et M', alors (FE) est une bissectrice de l'angle MFM'.

Démonstration:
Soit *H* et *H '* les projections orthogonales de *M* et *M'* sur la directrice. L'homothétie de centre *E* qui envoie *M* sur *M'*, envoie *H* sur *H'*. La définition de la conique permet d'écrire

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{MH}{M'H'} = \frac{EM}{EM'}$$

Le point *E* qui divise le segment [*MM'*] dans le même rapport que les côtés du triangle *MFM'* est donc le pied d'une des bissectrices de l'angle *MFM'*.

Inversement
Etant donné un point *M* de la conique et une droite *δ* contenant *M*, comment construire les points d'intersections de *δ* avec la conique ?



Si la droite *δ* est parallèle à la directrice, nous avons étudié le problème au § II.5. Il y a deux points d'intersections de *δ* avec la conique, confondus si *M* est un sommet (*A* ou *A'*).

Si la droite *δ* n'est pas parallèle à la directrice, elle la coupe en *E*. La droite (*EF*) doit être bissectrice de l'angle *MFM'*.
On trace l'image de la droite (*MF*) dans la symétrie d'axe (*FE*) qui coupe *δ* en *M'* (qui peut être confondu avec *M*).
La droite *δ* recoupe en général la conique.

La droite image est paralléle à *δ* si et seulement si le triangle *FME* est isocéle en *M*,

i.e.

$$MF = ME = e\,MH$$

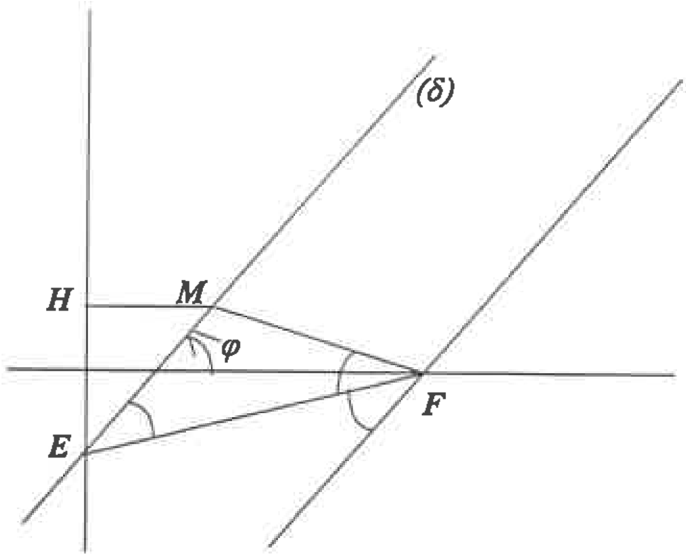
Comme *ME* est supérieur à *MH* cette configuration est exclue pour les ellipses.

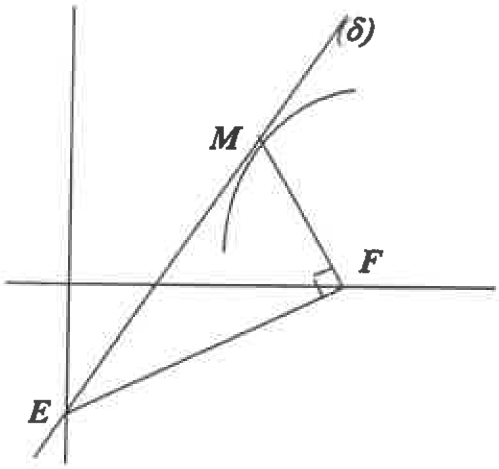
Pour la parabole, elle arrive si *H* = *E*, donc pour les droites *δ* paralléles à l'axe focal.

Pour les hyperboles, elle arrive si l'angle géométrique *φ* que fait *δ* avec l'axe focal est tel que

$$\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = e^2 - 1 = \frac{c^2-a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ceci met en évidences deux directions asymptotiques de l' hyperbole.





Conclusion :

Si l'on écarte les droites parallèles à l'axe des paraboles, et celui des droites de coefficients directeurs $\frac{b}{a}$ et $-\frac{b}{a}$ pour les hyperboles, la corde contenant *M* recoupe la conique en un autre point éventuellement confondu avec *M*.

La tangente en *M* à la conique[6] sera la droite *δ* correspondant au cas où les deux points *M* et *M'* sont confondus. On en déduit le résultat :

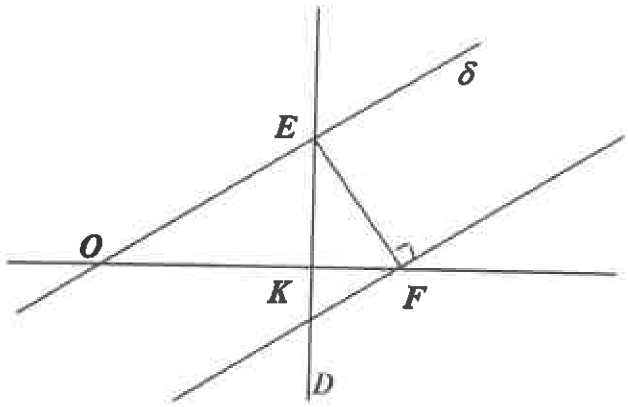
Corollaire :

La portion de tangente à une conique comprise entre le point de contact et la directrice est vue du foyer sous un angle droit.

Une asymptote est la position limite de la tangente quand le point *M* part à l'infini. Nous obtiendrons la position d'une asymptote en cherchant la droite parallèle à la direction asymptotique qui a la propriété des tangentes.

Un calcul élémentaire permet de montrer que chaque asymptote passe par le centre de la conique.

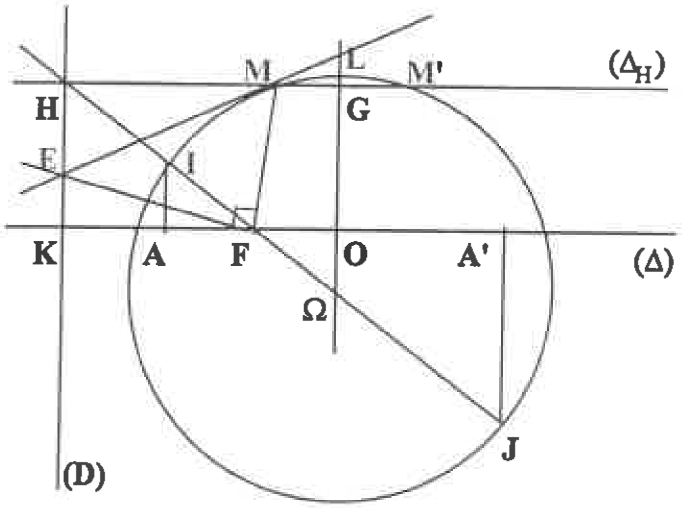
Est-il possible de le montrer sans calcul en utilisant la symétrie ?



TRACÉ DE L'HYPERBOLE

Remarque :

Si la tangente en *M* coupe la directrice en *E*, le cercle de diamètre [*EM*] passe par *F* et *H*.



Ce cercle est orthogonal au cercle d'Apollonius (§II.2°) car le diamètre [*IJ*] est divisé harmoniquement[7] par *F* et *H*
(par projection de la division harmonique (*A*,*A'*,*F*,*K*) parallèlement à la directrice).

Donc (*EM*) est perpendiculaire à (*ΩM*).

Par suite la conique à centre et le cercle d'Apollonius sont tangents au point *M*.

La conique est ainsi engendrée comme enveloppe des cercles d'Apollonius lorsque H décrit la directrice.

[6] Cf Les réflexions sur les tangentes au chapitre *III*.

[7] Cf l'étude des cercles orthogonaux dans l'annexe sur les faisceaux de cercles.

2. Equation polaire des coniques.

Soit la conique $\Gamma(F,D,e)$ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

Dans un système de coordonnées polaires, de pôle F, où l'axe polaire $(F,\vec{i})$ est porté par l'axe focal Δ de la conique, pour tout point M du plan, on note $\vec{j}_M$ un vecteur directeur de (FM), θ l'angle $(\vec{i},\vec{j}_M)$, $\rho = \overline{FM}$ et $h = \overline{FK}$

$$(M \in \Gamma) \Leftrightarrow (MF^2 = e^2MH^2)$$

Or

$e^2MH^2 = e^2(\overline{NK})^2 = e^2(\overline{NF} + \overline{FK})^2 = e^2(-\rho\cos\theta + h)^2$ $MF^2 = \rho^2$

Donc

$$(M \in \Gamma) \Leftrightarrow (\rho = e(-\rho\cos\theta + h)) \text{ ou } (\rho = e(\rho\cos\theta - h))$$

Dans le premier cas on trouve $\rho = \dfrac{eh}{1+e\cos\theta}$ et dans le second $\rho = \dfrac{-eh}{1-e\cos\theta}$

Mais il est facile de voir que si un point M de paramètres polaires (θ,ρ) vérifie la première équation alors le point M' de paramètre $(\theta+\pi,-\rho)$ vérifie la seconde, et vice versa. Or M et M' coïncident.

Une équation polaire de la conique Γ est donc $\rho = \dfrac{eh}{1+e\cos\theta}$.

La valeur absolue du réel $p = eh$ qui représente la valeur de ρ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ est appelé le paramétre de la conique.

Application 1 :

Chercher la nature des ensembles de points définis par les équations polaires

a) $\rho = \dfrac{h}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$

b) $\rho = \dfrac{D}{A+B\cos\theta + C\sin\theta}$

Application 2 :

a) Soit C un cercle de diamètre a contenant le pôle O.

Montrer qu'une équation polaire de C est alors $\rho = a\cos\theta$

b) On appelle inversion de pôle O et de puissance k $(k\neq 0)$, l'application qui à tout point M associe le point M' tel que OMM' sont alignés et $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = k$.

Chercher l'équation polaire de l'image de la conique $\Gamma(F,D,e)$ par l'inversion de pôle F et de puissance k.

c) Soit réel fixé. On appelle conchoïde du cercle C associée à ou encore Limaçon de Pascal, la courbe obtenue en associant à chaque point M du cercle les points M' de la droite (OM) tels que

$$\vec{OM} = \vec{OM'} \pm$$

Les points de la conchoïde vérifient donc l'une ou l'autre des deux équations

$$\rho = a\cos\theta + \quad \text{et} \quad \rho = a\cos\theta -$$

Montrer que ces deux équations représentent la même courbe.

Montrer que l'inverse de la conique $\Gamma(F,D,e)$ dans une inversion de pôle F est une conchoïde de cercle, dont on précisera les éléments.

IV. Prolongement:

Nous verrons dans un chapitre ultérieur que cette définition des coniques permettra de démontrer que la transformée d'un cercle par polaire réciproque par rapport à un cercle est une conique ; que toute conique peut-être obtenue ainsi et d'en déduire des propriétés intéressantes.

Bref historique sur les sections coniques

Les coniques ont été utilisées par les géomètres grecs pour résoudre les grands problèmes qu'ils se sont posés : duplication du cube, trisection de l'angle. C'est en tant que sections d'un cône que nous est connue la plus ancienne étude d'une "conique". Elles se présentent comme étude d'un cône de révolution coupé par un plan orthogonal à une génératrice. Selon que l'angle au sommet du cône est aigu, droit ou obtus on obtient ce qu'on appelle, maintenant, une ellipse, une parabole, une hyperbole. Tel était l'enseignement, vers -350, de MENECHME, disciple de PLATON.

On ne sait pas exactement ce qu'en connaissait EUCLIDE, vers -300, car l'ouvrage, "Les Porismes", dans lequel ses successeurs disent qu'il en traite a été perdu.

Les connaissances d'ARCHIMEDE, mort en -212, sur le sujet semblent importantes. C'est à lui qu'on doit, en particulier d'avoir calculé l'aire de la surface délimitée par un arc de parabole et sa corde - premier calcul d'une aire de surface curviligne.

APOLLONIUS, vers -230, a laissé un traité, "conica" dont on ne connaît qu'une partie. Les coniques sont alors étudiées comme sections d'un même cône mais par des plans de directions différentes. Il connaît les propriétés de distances associées aux foyers de l'ellipse et de l'hyperbole ainsi que les asymptotes de cette dernière. Les constructions d'APOLLONIUS permettent de donner une définition plane des coniques dont on sait ainsi écrire aujourd'hui les équations rapportées à un repère défini par un point de la conique, le diamètre de celle-ci passant le point et la tangente en ce point. Enfin APOLLONIUS traite de propriétés projectives et d'analogie entre ellipse et cercle.

Il faut attendre PAPPUS et ses "collections", vers 300 après Jésus-Christ, pour trouver ce qui a trait à la définition par foyer et directrice. Ce dernier donne également de nombreuses constructions géométriques dans lesquelles interviennent les coniques.

PROCLUS, vers 450, qui clôt en quelque sorte l'apport de la géométrie grecque, nous a laissé la construction de l'ellipse "à la bande de papier".

Les auteurs arabes et islamiques semblent n'avoir apporté que des commentaires à côté de leurs traductions des textes grecs. Certains pensent que l'ellipse était alors connue en Inde, voire en Chine. Par ailleurs on ne trouve pratiquement rien sur les coniques au Moyen-Age chez les Occidentaux. Il faut attendre leur redécouverte après la Renaissance et l'imprimerie.

Le traité d'APOLLONIUS, premier traité systématique connu, fut longtemps l'ouvrage de référence sur lequel se sont appuyés les travaux de DESCARTES et de FERMAT conduisant à la géometrie analytique ainsi que ceux de DESARGUES qui sont à l'origine de la géométrie projective.

Aux XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles les coniques offriront un terrain de prédilection à l'"application de l'algèbre à la géométrie" avec nombre de propriétés de celles-ci obtenues par calculs algébriques à partir de telles ou telles définitions. Les sections coniques de La Hire complétées par Maudhuit (1757) illustrent bien cette situation.

Pendant longtemps les trois coniques ont été enseignées de façon indépendante, ce contre quoi s'est élevé LEBESGUE qui a proposé plusieurs façons d'unifier leur enseignement, s'appuyant sur les travaux de QUETELET et DANDELIN pour introduire, d'une façon plus simple que la lourde machinerie d'APOLLONIUS, les coniques comme section de cônes. LEBESGUE a montré comment la définition par "foyer-directrice" permettait une étude unifiée s'appuyant sur les seules propriétés planes, utilisant pour cela la notion de "cercle (μ)" définie par LECONTE en 1935 et développée dans le "cours de géométrie de mathématiques élémentaires" de DELTHEIL ET CAIRE.

Eléments de bibliographie disponible :

- Sur la période grecque :

APOLLONIUS de Perge - Les coniques (traduction Ver Eecke) Blanchard - Paris 1979

PAPPUS d'Alexandrie - Collection mathématique (traduction Ver Eecke) Blanchard - Paris 1982

- Sur le rôle important joué par les coniques dans le développement des méthodes géométriques ouvrant autant vers le courant analytique que vers le courant projectif :

Michel CHASLES - Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie - Bruxelles 1837, Rééd. Gabay - Paris 1989

COOLIDGE - A history of geometrical methods. Doover - New York 1963

COOLIDGE - A history of conic sections and quadratic surfaces. Doover -1965

- XVIII^{ème} siècle :

B. LAMY - Géométrie - Paris 1731
En particulier : Introduction aux sections coniques
Reproduction fac-similé - I.R.E.M. Paris VII - 1997

DE LA CHAPELLE - Traité des sections coniques - Paris 1750
Reproduction fac-similé - I.R.E.M. Paris VII - 1994

et voir Annexe 1
On pourra également consulter les articles concernant les coniques dans : "Encyclopédie méthodique, Mathématiques" par d'ALEMBERT, BOSSUT ... - Paris 1784

- XIX^{ème} et XX^{ème} siècles :

H. LEBESGUE : Les coniques - Gauthier-Villars - Paris 1942 - Rééd. Gabay 1988

Sur QUETELET et DANDELIN voir Annexe 2

LECONTE : Sur la définition commune aux trois coniques au moyen d'un foyer et de sa directrice, dans "L'enseignement mathématique" 1935

R. DELTHEIL et D. CAIRE - Géométrie - Baillière et fils - Paris 3ème édition 1945

Rééd. Géométrie et compléments - Gabay - Paris 1989

et voir Annexe 3

Annexe 1

in *Elémens de Géométrie du Duc de Bourgogne*

(rééd.1723)

Article de Malézieu

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

Il n'y a gueres de sujet qui fasse mieux connoître les avantages de la Spécieuse sur la Geometrie ordinaire, que l'Ellipse considérée suivant la méthode de Monsieur Descartes, comme une ligne courbe, dont tous les points ont un rapport nécessaire à tous les points d'une ligne droite, lequel s'exprime par une même équation.

Soit, par exemple, la ligne courbe ALI, & soient joints les points AI, par la ligne AKI, que j'appellerai le grand axe. Je suppose cette ligne courbe de telle nature que si d'un point quelconque, comme D, l'on mene aux points de l'axe FC, les lignes DF, DC, la somme des deux lignes DF, DC, soit toujours égale à l'axe AI. Soit supposé l'axe divisé en deux parties égales au point K, & du point D soit mené sur l'axe la perpendiculaire BD.

Soit $AF = A$, $AC = B$, $AB = y$, $DB = x$, $AI = C$, $BF = A - y$ ou $y - A$. A cause du triangle rectangle DBF, le quarré de la ligne DF, est $AA - 2Ay + yy + xx$, & à cause du triangle rectangle DBC, le quarré de la ligne DC est $BD - 2By + yy + xx$; donc par la proprieté de la courbe $\sqrt{AA - 2Ay + yy + xx} + \sqrt{BB - 2By + yy + xx} = C$; donc $AA - 2Ay + yy + xx = CC + BB$

$- 2By + yy + xx - \sqrt{4BBCC - 8ByCC + 4yyCC + 4xxCC}$; donc réduisant l'équation vient enfin

$$xx = \frac{\left.\begin{matrix}+4BAA\\+4ABB\end{matrix}\right\} y - 4AByy}{BB + 2AB + AA}$$

Or la ligne AF + la ligne AC est égale à la ligne AI, c'est-à-dire, $BB + 2AB + AA = CC$, & de plus $BAA + ABB$, est la même chose que BAC, parce que $BAA + ABB$ est le produit de BA par $A + B$, qui est égal à C; donc

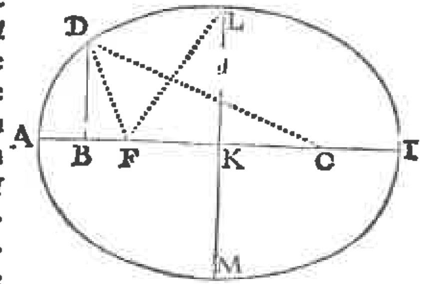
$$xx = \left.\frac{4AB}{C}\right\} y - 4\,\frac{AByy}{CC};$$

puis faisant comme C est à $2A$, :: $2B$, à une quatriéme ligne que j'appellerai R, j'aurai $xx = Ry - \frac{Ryy}{C}$, qui est la treiziéme Proposition du premier Livre des Coniques d'Apollonius.

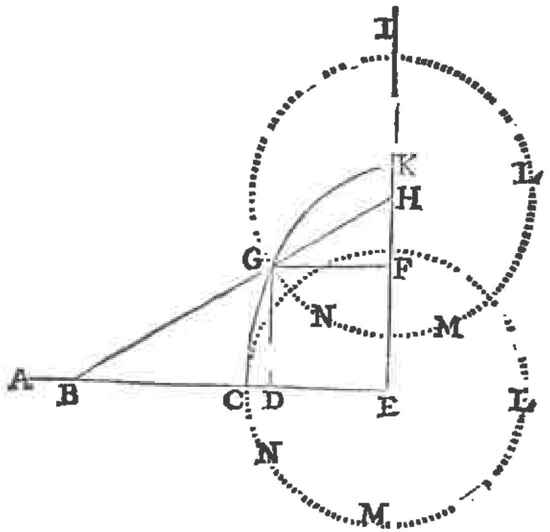
Il s'ensuit de là que pour trouver la ligne R, qui est le parametre de l'Ellipse, il faut trouver une quatriéme proportionelle à trois lignes, dont la premiere est l'axe, la seconde la somme des deux lignes comprises entre chaque extremité de l'axe, & le plus prochain foïer, & la troisiéme le double de la ligne comprise entre un foïer & l'extremité de l'axe qui en est la plus éloignée; de plus aïant mené sur le point K le petit axe LK, la ligne LF au foïer F, la ligne LF = à la ligne AK sera $\frac{C}{2}$, la ligne FK sera $\frac{C}{2} - A$; donc si du quarré de la ligne LF, j'ôte le quarré de la ligne FK, restera $CA - AA$ pour le quarré de la ligne LK, par consequent $4CA - 4AA$ sont visiblement égaux

52

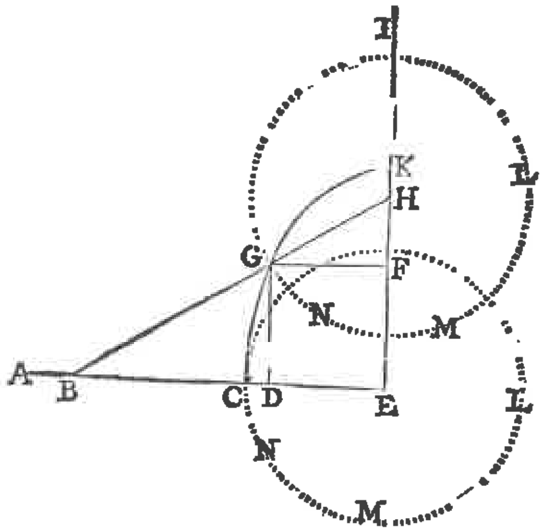
à $4BA$, parce que $C - A = B$; donc le quarré de l'axe LM est égal au rectangle du grand axe AI par le parametre, & il s'ensuit encore de



là sans aucune démonstration que le rectangle du grand axe par le parametre que l'on appelle la Figure, est quadruple du rectangle des lignes AF, FI.



Soient les deux lignes AE, EI, à angles droits au point E, & soit posé au même point E, le centre du cercle LNM, auquel centre soit attachée une regle mobile de la longueur de la ligne



EA, & couchée le long de cette ligne. Si l'on fait mouvoir le cercle le long de la ligne EI, en sorte que son centre ne la quittant point entraîne avec lui la regle qui y est attachée, & que l'autre extremité de cette regle coule le long de la ligne AE. Je dis que l'interfection de la regle & du cercle décrira la courbe DGK, qui sera une Ellipse dont le grand axe sera égal à la ligne AG, & le petit au raïon du cercle.

Soit supposé le centre E parvenu au point H, la regle parvenue au point B, coupera le cercle en G. Du point G soient menées les perpendiculaires GF, GD. Soit $BG = A$, $GH = B$, $CE = B$, $GD = y$, $CD = x$, A cause des triangles semblables $A, y :: B, \frac{yB}{A} =$ à la ligne FH, dont le quarré étant ôté du quarré de la ligne GH,

reste $\frac{BBAA - yyBB}{AA}$ pour le quarré de la ligne GF, qui sera par consequent $\sqrt{\frac{BBAA - yyBB}{AA}}$; donc

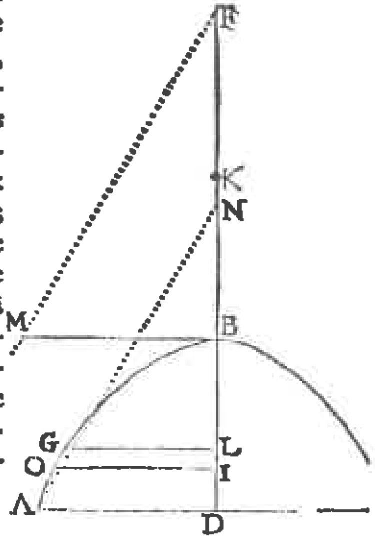
$CD = x = B - \sqrt{\frac{BBAA - yyBB}{AA}}$.

Donc $\frac{BBAA - yyBB}{AA} = \frac{BBAA - 2xBAA + xxAA}{AA}$, donc $yy = \frac{2xAA}{B} - \frac{xxAA}{BB}$.

Puis faisant comme B, $2A :: A$, à un quatriéme, ou doublant les antecedens, comme $2B$, $2A :: 2A$, à une quatriéme que j'appellerai R, j'aurai $yy = Rx - \frac{xxAA}{BB}$, ensuite de quoi considerant que BB, $AA :: 2B$, R, j'ai enfin $yy = Rx - \frac{xxR}{2B}$, qui est la proprieté qu'Apollonius démontre de l'Ellipse en la treiziéme Proposition du premier Livre des Coniques.

Cela fournit une maniere fort simple de décrire organiquement l'Ellipse sur le plan : il n'y a qu'à supposer une pointe ou un craïon en un point quelconque de la regle AE, comme par exemple au point C, puis faire couler la regle, en sorte que ses deux extremitez soient toujours dans les lignes AE, EI, la pointe donnera parfaitement une Ellipse.

Dans la Parabole ABC, dont l'axe est BD, étant données trois ordonnées à l'axe continuellement proportionelles comme AD, OI, GL, si l'on prend dans l'axe prolongé la ligne BN, égale à la ligne BI, interceptée par la moienne des trois appliquées, & qu'aïant joint les points NA, par la ligne NA, l'on fasse dans le même axe prolongé BF, égale aux deux extrêmes des trois appliquées, c'est-à-dire, aux deux lignes AD, GL; je dis que la ligne FM, tirée par le point F parallele à la ligne NA, passera par l'extremité du parametre BM, & par consequent le determinera.



$AD = x$
$OI = y$ donc
$GL = \frac{yy}{x}$
$BD = u$
$BI = s$
$MB = r$.

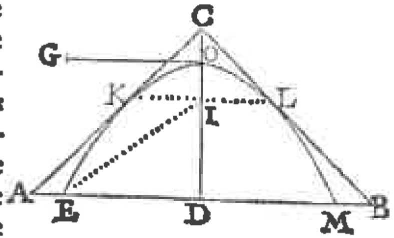
Par la nature de la Parabole $xx = ru$, $yy = rs$, donc $xx + yy = ru + rs$. Ce qui étant réduit en proportion, vient :

$$x,\ u+s,\ ::\ r,\ x + \frac{yy}{x}.$$

c'est-à-dire, que la ligne AD, est à la ligne DN, comme le parametre est à la ligne BF. Or les deux triangles MBF, ADN étant semblables, la ligne AD est à DN, comme BM est à BF; donc le parametre est égal à la ligne MB.

Dans le triangle rectangle isoscele ACB; soit menée la perpendiculaire CD, qui coupe la base en deux parties égales au point D, & qui par consequent est égale à la ligne AD. Si l'on prend un point comme O dans cette perpendiculaire, &

qu'aïant fait $OI = CO$, l'on mene du point I la ligne IE égale à la ligne AD. Je dis que le point E sera un point d'une Parabole comme EOM qui aura le point O pour sommet & le point I pour foïer.



Il n'y a qu'à démontrer que le quarré de la ligne ED, est égal au rectangle de la ligne OD par le quadruple de la ligne OI, c'est-à-dire, par le parametre OG.

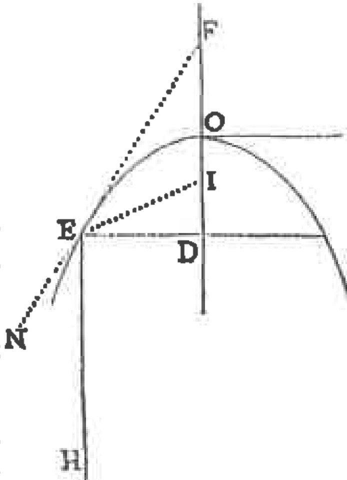
$CO = A$.
$OI = A$.
$ID = x$.
$OD = A + x$.
$CD = 2A + x$.
$AD = 2A + x$.
$EI = 2A + x$.
$OG = A$.

A cause du triangle rectangle IDE, si du quarré de IE qui est $4AA + 4Ax + xx$, j'ôte le quarré de ID, qui est xx, restera le quarré de la ligne ED, qui sera $4AA + 4Ax$. Or le rectangle de la ligne OD, par la ligne OG, c'est-à-dire, $A + x$ multiplié par $4A$, est aussi $4AA + 4Ax$; donc le quarré de la ligne ED est égal au rectangle de l'interceptée par le parametre, & ainsi de tout autre point.

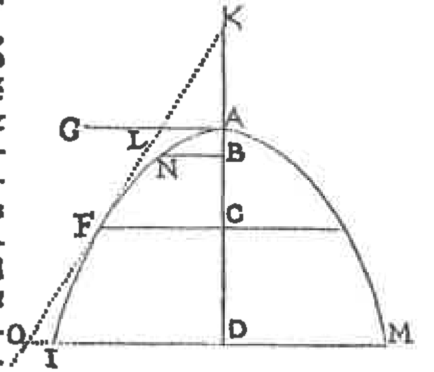
Il s'ensuit de là, sans autre démonstration, que si du foïer I, l'on mene à la Parabole une ligne comme IE, elle sera toujours égale à l'interceptée plus la ligne OI, comprise entre le sommet & le foïer; d'où l'on peut aisément déduire cette proprieté si celebre de la Parabole. Tous les raïons paralleles à l'axe, se réunissent au foïer.

Car soit un raïon quelconque HE, par le point E, soit menée la tangente FEN, & l'on sçait qu'il n'y a pour cela qu'à faire FO égale à OD; pour dé-

montrer que le raïon HE, doit aller au point I, il n'y a qu'à prouver que l'angle FEI est égal à l'angle HEN, c'est-à-dire, l'angle de reflexion égal à celui d'incidence: or l'angle HEN, ou son égal DFE, est égal à l'angle FEI, si le triangle EIF est isoscele, comme il l'est en effet, parce que la ligne IE est égale à la ligne DO, plus la ligne OI, & que la ligne FI, est égale a la ligne IO, plus la ligne OI, & que d'ailleurs les lignes DO, FO, sont prises égales.



Soit dans la Parabole IAM, le diametre AD avec son côté droit AG, & soit FC ordonnée à ce diametre, si dans le diametre prolongé l'on prend du sommet A la ligne AK égale à l'interceptée AC; je dis que la ligne KF, touchera la Parabole



Parabole au point *F*. Il n'y a qu'à démontrer que la ligne *KF*, quoique prolongée, & la Parabole, ne peuvent avoir de point commun que le point *F*.

Soit $AC = z$,
$KC = 2z$,
$AG = r$,
Soit $CD = y$,
KD sera $2z + y$,

Je dis 1°. Que le point *O*, pris dans la ligne *KF*, au-dessous du point *F*, ne peut être de la Parabole.

Car par ce point *O*, soit menée *OD*, parallele à l'ordonnée, elle coupera necessairement le diametre au-dessous du point *C*, en un point comme *D*.

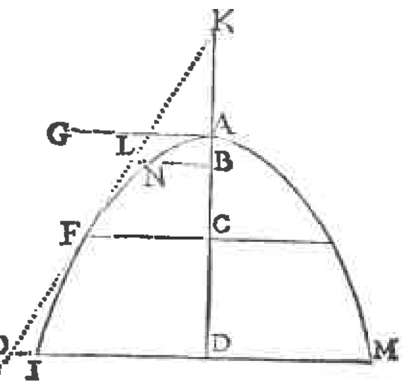
Or à cause des deux triangles semblables *KCF*, *KDO*, le quarré de *KC*, est au quarré de *CF*, qui est égal à zr, comme le quarré de *KD*, est au quarré de *DO*, c'est-à-dire, $4zz, zr :: 4zz + 4zy + yy$, à un quatriéme; donc $\frac{4rz^3 + 4yrzz + zryy}{4zz}$ est égal au quarré de *OD*; il n'y a qu'à faire voir que le quarré de l'appliquée *ID*, est moindre que ce quarré de *OD*, le quarré de *ID*, est égal au rectangle des lignes *KD*, *AG*; c'est-à-dire, $zr + yr$: or $zr + yr$, est moindre que $\frac{4rz^3 + 4yrzz + zryy}{4zz}$.

Puisque multipliant l'un & l'autre par $4zz$, viendra d'un côté $4rz^3 + 4yrzz$, & de l'autre $4rz^3 + 4yrzz + zryy$ qui surpasse le premier produit de la quantité de $+ zryy$; donc le quarré *OD*, est plus grand que le quarre de *ID*; donc la ligne *OD*, est plus grande que l'appliquée *ID*, donc le point *O* n'appartient point à la Parabole.

Je dis en second lieu que le point *L* pris dans la ligne *KF*, au-dessus du point *F*, ne peut être de la Parabole.

Par ce point *L* soit menée *LB*, parallele à l'ordonnée, elle coupera le diametre au-dessus du

point *O* en un point comme *B*,



Soit $CB = y$.
KB sera $= 2z - y$.

A cause des triangles semblables *KCF*, *KBL*, on démontrera comme ci-dessus, que le quarré de *BL* est $\frac{4rz^3 - 4yrzz + zryy}{4zz}$, & le quarré de *NB*, qui est égal au rectangle des lignes *GA*, *BA*, c'est-à-dire, $zr - yr$ se trouvera par le même raisonnement plus petit que le quarré de *BL* & par consequent la ligne *LB*, plus grande que l'appliquée *NB*; donc le point *L*, n'est point de la Parabole : *Ce qu'il falloit démontrer.*

Annexe 2

Une des premières redactions des théorèmes de Dandelin in "Géométrie" de Liagre élève de celui-ci.

Génération des sections coniques.

I. « Deux sphères o, o' sont tangentes au cône SMN : menons « un plan AEB tangent aux deux sphères en F et F'; il coupera la surface du cône suivant une courbe telle que la *somme* « des distances de l'un quelconque de ses points aux deux « points F et F' sera *constante* [1]. Cette courbe a reçu le nom « d'ellipse. »

Soit E un point quelconque de la courbe; menons la *génératrice* SE du cône, et rappelons-nous :

1° Que toutes les tangentes à une sphère, issues d'un même point, sont égales (220);

2° Que, par suite, les portions de génératrices comprises entre les deux *cercles de contact* tq, uo, sont aussi égales.

Cela posé, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} AF &= Au \\ AF' &= At \end{aligned}\right\} \text{d'où } AF + AF' = tu,$$

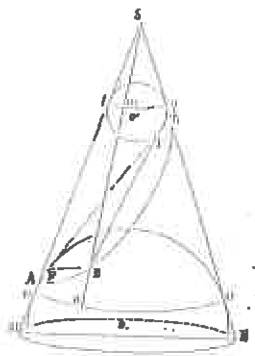
$$\left.\begin{aligned} BF' &= Bq \\ BF &= Bo \end{aligned}\right\} \text{d'où } BF + BF' = qo = tu.$$

On déduit de là :

$$AF + AF' = BF + BF'.$$

et par suite

$$AF = BF'; \quad AB = tu.$$



Les points de contact F et F' sont donc également éloignés des *sommets* A et B de la courbe; et la distance de ces deux sommets, ou le *grand axe*, est égale à la portion de génératrice comprise entre les deux cercles de contact.

De plus, puisque les droites EF, EF', sont situées dans le plan tangent aux deux sphères, et qu'elles passent par les points de contact, elles sont *tangentes* aux sphères, et l'on a :

$$EF = En$$

donc

$$EF' = Em$$

$$EF + EF' = mn = tu = AB.$$

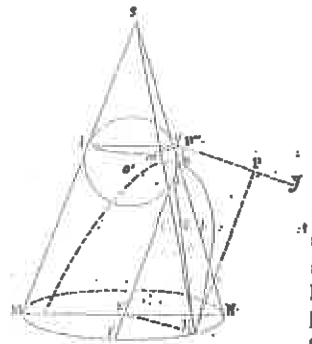
Les points F et F' ont reçu le nom de *foyers* de l'ellipse, et ce dernier résultat peut se traduire ainsi :

« La somme des distances d'un point quelconque de l'ellipse « aux deux foyers est constante, et égale au grand axe. »

II. Laissons immobile la petite sphère dont le centre est en o', et diminuons par la pensée le rayon de la seconde : celle-ci, pour rester tangente au cône, devra se rapprocher de la première, et

les deux foyers marcheront l'un vers l'autre et vers l'axe du cône. Lorsque enfin les deux sphères *se toucheront*, les deux foyers se réuniront en un seul point, et la section produite dans le cône par le plan tangent commun aux deux sphères deviendra un *cercle*. Le cercle n'est donc qu'un cas particulier de l'ellipse, dans lequel la distance des deux foyers est réduite à zéro.

III. Si nous augmentons le rayon de la seconde sphère, o, le point de contact, F, s'éloignera de plus en plus; lorsque ce rayon sera infini, le second foyer passera lui-même à l'infini, et le plan tangent sera parallèle à la génératrice SM. Dans ce cas, soit E un point de la courbe d'intersection, et menons par ce point un plan MEN perpendiculaire à l'axe du cône. La tangente EF' est égale à la tangente Em, ou à la portion de génératrice Mt. Abaissons EE' perpendiculaire sur l'*axe* BE', parallèle à Mt; prolongeons les droites BE', tq, jusqu'à leur



rencontre en F'' : la figure Mt F''E' sera un parallélogramme; donc

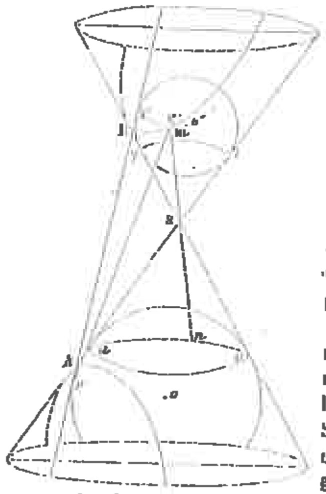
$$EF' = E'F''.$$

Mais BF' = Bq, comme tangentes, et Bq = BF'', parce que le triangle BqF'', semblable à SMN, est isocèle. Si donc par le point F'', situé sur le prolongement de l'axe, et à même distance du sommet que le foyer, on élève F''y perpendiculaire à l'axe, et qu'ensuite on tire EP parallèle à cet axe on aura

$$EF' = EP.$$

Cette relation indique que « la distance d'un point quelconque « de la courbe au *foyer unique*, F', est égale à la distance de ce « même point à la droite F''y que l'on nomme *directrice*. » Il est évident d'ailleurs que la courbe s'étend à l'infini, comme le cône, dans le sens de l'ouverture de celui-ci. Elle a reçu le nom de *parabole*.

IV. Au lieu d'augmenter le rayon de la sphère o, en laissant invariable la sphère o', agissons maintenant d'une manière opposée ; autrement dit, ne touchons pas à la sphère o, et diminuons progressivement le rayon de la sphère o'. Les ellipses que nous obtiendrons ainsi se rétréciront de plus en plus, et lorsque la sphère o', réduite à un point, se confondra avec le sommet du cône, l'ellipse sera réduite à une ligne droite qui sera la génératrice Su.



Passé le sommet, la sphère mobile va augmenter de rayon pour rester tangente à la *seconde nappe* du cône. Soit o' une de ses positions et AB la trace du plan tangent aux deux sphères : il coupera les deux nappes suivant deux courbes illimitées dans le sens des ouvertures du double cône, et qui sont des branches d'*hyperbole*.

Soit E un des points de la courbe ; ESu la génératrice passant par ce point. On aura, en suivant une marche entièrement analogue à celle du n° 1,

$$\left.\begin{aligned} AF &= Au \\ AF' &= At \end{aligned}\right\} \text{ d'où } AF' - AF = tu,$$

$$\left.\begin{aligned} BF' &= Bq \\ BF &= Bv \end{aligned}\right\} \text{ d'où } BF - BF' = qv = tu.$$

On déduit de là :

$$AF' - AF = BF - BF'$$

et par suite $AF = BF'$; $AB = tu$.

Les points de contact, F et F', également éloignés des *som-*

mets A et B de l'hyperbole, sont les *foyers* de cette courbe ; et l'on voit que l'*axe transverse*, AB, est égal à la portion de génératrice comprise entre les deux cercles de contact. — On a en outre

$$EF = En$$
$$EF' = Em ;$$

donc $$EF - EF' = mn = AB,$$

propriété caractéristique de l'hyperbole, qui s'énonce de la manière suivante : « La *différence* des distances d'un point quelconque de l'hyperbole aux deux foyers est constante et égale « à l'axe transverse. »[1]

[1] Ce théorème élégant appartient, quant au fond, à M. Quetelet, qui l'a démontré dans sa dissertation inaugurale *de quibusdam locis geometricis nec non de curvâ focali*, imprimée à Gand en 1819 ; quant à la forme, la démonstration que nous donnons ici est due au colonel Dandelin (*Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique*, avril 1822). Voy. tome II des *Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles*.

Annexe 3

M. Géométrie
Classe de Mathématiques élémentaires

Deltheil et Caire

"Les cercles (μ)"

22e Leçon. — INTERSECTION D'UNE CONIQUE AVEC UNE DROITE. PROBLÈMES SIMPLES SUR LES TANGENTES

I. Intersection d'une conique avec une droite.

182. **Sur une famille remarquable de cercles du plan attachés à une conique donnée.** — Considérons dans le plan la conique (Γ) définie par son foyer F, la directrice correspondante (D) et son excentricité e.

Dé nombreuses propriétés de cette courbe sont liées à celles de la famille des cercles qui passent par le foyer et ont leurs centres sur la conique. *Tout cercle de cette famille a pour rayon le produit par* e *de la distance de son centre à la directrice* (*D*).

Nous appellerons d'une manière plus générale cercles (μ) *tous les cercles du plan possédant cette dernière propriété.*

En particulier, si (Γ) est une parabole, les cercles (μ) sont tous les cercles du plan tangents à la directrice ; si (Γ) est une hyperbole, les cercles (μ) sont tous les cercles du plan qui coupent la directrice sous l'angle constant θ défini par la relation $\cos\theta = \frac{d}{R} = \frac{1}{e}$; les droites joignant le centre d'un cercle (μ) quelconque à ses points d'intersection avec la directrice sont alors parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Deux cercles (μ) *quelconques du plan ont nécessairement le point d'intersection de leur ligne des centres avec la droite* (*D*) *pour centre d'homothétie directe ou inverse.* C'est là une propriété très importante par laquelle l'étude de ces cercles, et par conséquent celle de la conique (Γ), lieu des centres des cercles (μ) qui passent par F, est étroitement rattachée à l'idée générale de similitude.

Nous utiliserons cette propriété pour l'étude, à partir de la seule définition générale des coniques par un foyer et la directrice correspondante, de l'intersection d'une conique avec une droite et pour la détermination des tangentes aux coniques ; nous laisserons de côté, en principe, le cas de la parabole, qui doit faire l'objet de la 23e Leçon.

Observons que, dans le cas de l'ellipse et celui de l'hyperbole, le calcul des segments $\overline{FA}$, $\overline{FA'}$, $\overline{FO}$ montre immédiatement que *le cercle de diamètre AA' est un cercle* (μ) *particulier*, car le rapport $\frac{OA}{OH}$ a pour valeur e.

183. Intersection d'une conique avec une droite. — Soit à déterminer les points où une sécante (Δ) quelconque rencontre la conique (Γ). Nous pouvons supposer (Δ) non parallèle à la directrice, car le cas particulier ainsi écarté a été examiné au § 174.

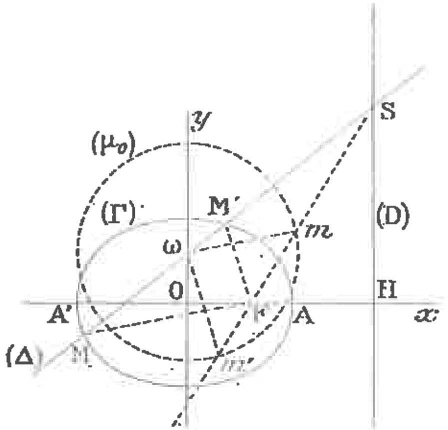


Fig. 172.

Tout point M de (Γ) étant centre d'un cercle (μ) passant par F, le problème revient à déterminer les cercles (μ) passant par F et centrés sur (Δ). Or nous pouvons toujours construire un cercle (μ) centré sur (Δ), *par exemple* le cercle (μ_0) centré au point ω où (Δ) coupe l'axe non focal de la conique, et dont le rayon a pour valeur $\frac{1}{2}$ AA′.

Un cercle (μ) centré sur (Δ) et passant par F et le cercle (μ_0) admettent le point S où (Δ) coupe la directrice pour l'un de leurs centres d'homothétie ; et l'homologue dans cette homothétie du point F considéré comme un point du cercle (μ) cherché est nécessairement sur le cercle (μ_0) et sur la droite FS joignant F au centre d'homothétie. Cette droite coupant (μ_0) en deux points *m* et *m′*, les centres M et M′ des cercles (μ) à déterminer, c'est-à-dire les points d'intersection cherchés, s'obtiennent en menant par F les parallèles à ω*m* et ω*m′*. La figure 172 représente le tracé ainsi obtenu pour le cas elliptique, la figure 173 pour le cas hyperbolique.

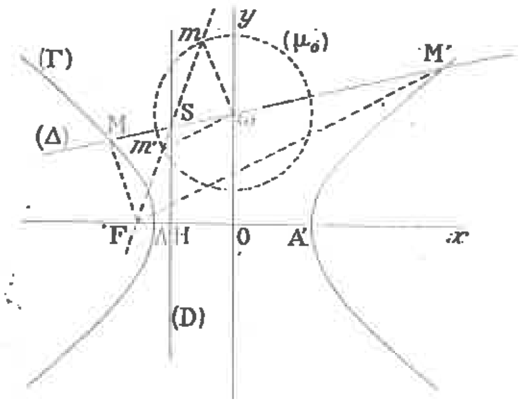


Fig. 173.

La construction *est en défaut* lorsque (Δ) passe par F; les triangles directement semblables Sω*m*, SMF et Sω*m′*, SM′F sont alors réduits à des ***divisions semblables*** de points alignés, et le problème revient à la construction d'une ***quatrième proportionnelle***.

Soulignons bien pour terminer que le cercle (μ_0) centré sur O*y* et de rayon $\frac{1}{2}$ AA′ peut, dans ce qui précède, être remplacé par un cercle (μ) ***arbitraire*** de centre situé sur (Δ) ; la construction peut donc se faire indépendamment de toute détermination préalable des sommets A et A′.

184. Cas d'une sécante perpendiculaire à la directrice. — Examinons spécialement le cas particulier où la sécante (Δ) est perpendiculaire à la directrice : la figure 174 qui s'y rapporte est relative au cas où (Γ) est une ellipse, mais ce qui suit reste parfaitement valable dans le cas d'une hyperbole.

Faisons subir au cercle (μ_0) de la figure 172 la translation $\overrightarrow{PO}$ qui le transforme en le cercle principal (C) ; F est alors transformé en un point φ et les points communs au cercle (μ_0) et à la droite FS en les points *m*, *m′* communs au cercle (C) et à la droite φH ; les rayons vecteurs FM, FM′ des points d'intersection obtenus sont donc respectivement parallèles à O*m*, O*m′*.

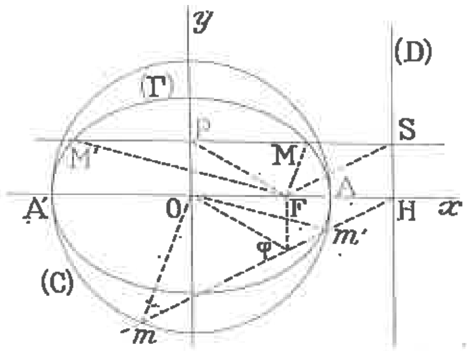


Fig. 174.

Ceci posé, observons que la division *mm′*Hφ est harmonique puisque A et A′ sont conjugués par rapport F et H, donc que Fφ est la polaire de H par rapport à (C). Dans ces conditions, les quatre droites O*m*, O*m′*, Oφ, OH forment un faisceau harmonique, et il en est de même de leurs parallèles respectives FM, FM′, FP, FH. Coupons ce dernier faisceau harmonique par (Δ) qui est parallèle au quatrième rayon : nous voyons que ***P est le milieu de MM′*** (Cf. § 118).

Ainsi est mis en évidence par une méthode géométrique directe le deuxième axe de symétrie obtenu au § 178 en faisant intervenir l'équation cartésienne de la conique (Γ). (***Voir aussi Ex. 227 et 236.***)

Quatrième leçon

- Construction des coniques par affinités -

I Coniques à centre obtenues par une affinité orthogonale.

1. Les ellipses.

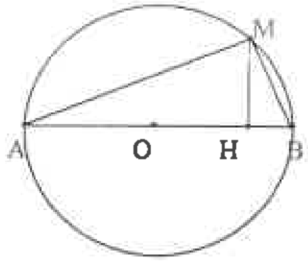
1. a caractérisation du cercle*.

Proposition : Etant donnés A et B deux points distincts, le cercle de diamètre $[AB]$ est le lieu des points M tels que, si H désigne la projection orthogonale du point M sur la droite (AB) on ait

$$MH^2 = -\overline{HA}.\overline{HB}$$

On a

$$\begin{aligned}\vec{MA}.\vec{MB} &= (\vec{MH} + \vec{HA}).(\vec{MH} + \vec{HB}) \\ &= MH^2 + \vec{HA}.\vec{HB}\end{aligned}$$



Remarque : Si l'on prend A et B confondus dans la proposition précédente, on trouve un cercle point.
Exercice : Connaissant a et l'unité, construire à la règle et au compas le réel $\sqrt{a}$.

1. b Etude des ellipses.

Dans un premier temps on va définir l'ensemble des ellipses en introduisant un coefficient strictement négatif dans l'équation de définition du cercle.

Définition : Soient A et B deux points distincts, O le milieu de $[AB]$, δ la direction orthogonale à (AB) et λ un réel strictement négatif. Pour tout point M du plan on note H la projection de M sur (AB) parallèlement à δ.
On appelle ellipse de centre O et de diamètre $[AB]$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$MH^2 = \lambda\, \overline{HA}.\overline{HB}.$$

Si l'on note α l'affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$, M' l'antécédent du point M, et ε le signe de λ, on a $MH^2 = |\lambda|\, M'H^2$ et donc

$$MH^2 = \lambda\, \overline{HA}.\overline{HB}. \Leftrightarrow M'H^2 = -\square\, \overline{HA}.\overline{HB}$$

On peut donc énoncer :

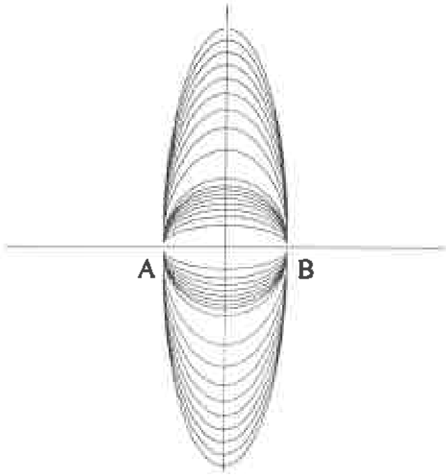
---

*

32

Proposition : Toute ellipse de diamètre $[AB]$ est l'image du cercle de diamètre $[AB]$ par une affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $(\sqrt{|\lambda|})^{-1}$. Cette conique affine du cercle de diamètre $[AB]$ est bornée.

On a tracé ci-contre les ellipses obtenues pour des valeurs de $|\lambda|$ dans $\{1,2,\ldots,10\} \cup \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}\}$.



Cercle principal et cercle secondaire d'une ellipse.

On suppose donc $\lambda<0$ et $\lambda\neq-1$; on appelle Γ l'ellipse définie, selon la méthode précédente, par ce réel λ et son diamètre $[AB]$ à partir du cercle γ de diamètre $[AB]$.
Appelons $[cd]$ le diamètre du cercle, orthogonal à $[AB]$, et $[CD]$ son image par l'affinité α.
Il est facile de montrer que Γ possèdeux axes de symétrie (AB) et (CD) et donc un centre de symétrie O.
Si $\lambda<-1$, $CD > AB$, le diamètre $[CD]$ est le grand axe de l'ellipse et le cercle γ s'appelle le cercle secondaire de l'ellipse. Si $\lambda>-1$, $CD < AB$, le diamètre $[AB]$ est le grand axe de l'ellipse et le cercle γ s'appelle le cercle principal de l'ellipse.
Comme la composée de l'affinité orthogonale α de base $[AB]$ et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$ et de l'affinité orthogonale α' de base $[CD]$ et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$
on peut écrire (si γ' désigne le cercle de diamètre $[CD]$)

$$\alpha' \circ \alpha(\gamma) = \gamma'$$

ou encore

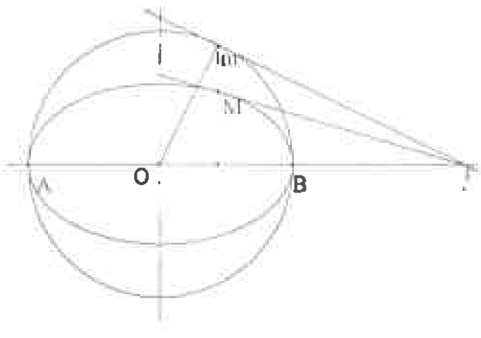
$$\Gamma = \alpha'^{-1}(\gamma')$$

L'ellipse Γ peut donc être obtenue à partir du diamètre $[CD]$ en utilisant une affinité orthogonale dont l'axe est perpendiculaire à celui de α et le rapport est l'inverse de celui de α.
Toute ellipse possède donc un cercle principal de rayon a et un cercle secondaire de rayon b dont elle peut se déduire par deux affinités orthogonales d'axes perpendiculaires et de rapports positifs inverses.

Exercice : trouver l'aire du domaine délimité par une ellipse d'axes $[AB]$ et $[CD]$.

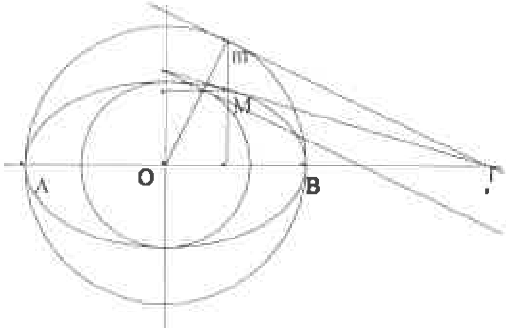
Application1 :

Toute ellipse de diamètre $[AB]$ possède des tangentes en tout point. Pour construire la tangente en un point M fixé, on construit l'image m de M par α. La perpendiculaire à (Om) passant par O, coupe (AB) en I qui est invariant par α . La tangente recherchée est donc la droite (IM).

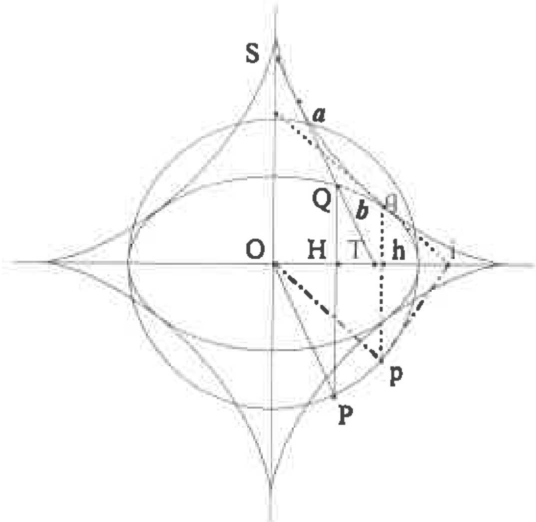


33

On peut aussi utiliser le cercle secondaire *cf* figure ci-contre, ce qui fournit une vérification de la construction.



Application2 (construction de l'ellipse par la méthode dite « de la bande de papier ») :
Si les deux points S et T sont assujettis à décrire deux droites orthogonales Δ et Δ' (sécantes en O), alors tout point fixé Q sur $]ST[$ (avec $SQ= a$ et $QT=b$) décrit une ellipse d'axes Δ et Δ' et de paramètres a et b.
En effet le point P, troisième sommet du parallélogramme $SQPO$ décrit le cercle de centre O et de rayon SQ. De plus si H est la projection de Q sur Δ, on a $\frac{HP}{HQ} = \frac{PO}{QT} = \frac{SQ}{QT} = \frac{a}{b}$. Le point Q est donc bien l'image de P par l'affinité orthogonale de base Δ et de rapport $\frac{b}{a}$.



Exercice : Si l'on dessine ***l'enveloppe*** de la famille des droites (ST) (dans les conditions précédentes), c'est-à-dire une courbe qui en tout point possède une tangente qui est l'une des droites de la famille, sans en oublier aucune, on obtient la courbe dessinée sur la figure précédente et appelée ***astroïde***. Montrer que l'ellipse obtenue par la méthode de la bande de papier est tangente en un unique point du premier quadrant à cette astroïde. (On pourra montrer que le problème revient à trouver dans le quatrième quadrant un point p du cercle de centre O et de rayon OP, vérifiant les données précédentes tel que le triangle Opi soit rectangle en p).

2. Les Hyperboles.

Pour ramener toutes les courbes correspondant à l'équation $MH^2 = \lambda\ \overline{HA}\,.\overline{HB}$ avec $\lambda>0$ à une courbe canonique (comme l'était le cercle pour les ellipses dans le cas $\lambda<0$) nous allons commencer par étudier la courbe obtenue pour $\lambda = 1$, c'est bien sûr la démarche la plus naturelle.

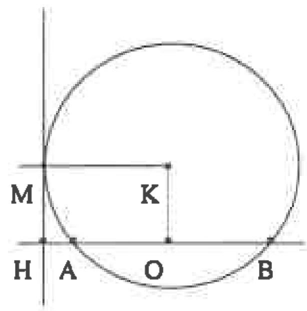
2. a Etude de l'hyperbole équilatère.

Définition : Soient A et B deux points distincts. Pour tout point M du plan on note H la projection orthogonale de M sur (AB). On appelle hyperbole **équilatère** l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$MH^2 = \overline{HA}\,.\overline{HB}.$$

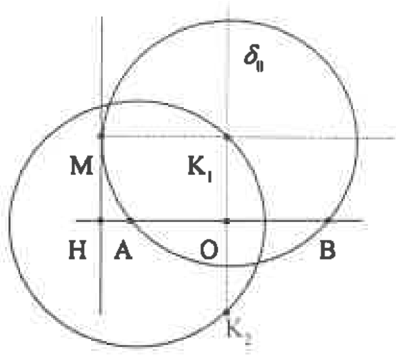
Remarquons d'abord que l'ensemble Γ est non vide et plus précisément que l'intersection de Γ avec (AB) se réduit aux points A et B. La droite (AB) et sa médiatrice sont axes de symétrie.

Soit M un point de Γ non situé sur (AB) et H sa projection orthogonale sur (AB). Appelons O le milieu de $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle ABM, γ, a pour centre K et pour rayon r. Puisque $MH^2 = \overline{HA}\,.\overline{HB}$, la puissance du point H par rapport au cercle γ est MH^2 et la droite (HM) est tangente en M au cercle γ.
On a donc r = $HO = MK = AK$.



Réciproquement, étant donné un point $H \in (AB) \setminus]AB[$ on obtient les points de Γ dont la projection orthogonale est H par la construction suivante. On appelle K_1 et K_2 les intersections de la médiatrice de $[AB]$, δ_0 , avec le cercle de centre A et de rayon HO ($OH \geq OA$). Les cercles de centre K_i et de rayon $r=HO$ sont tangents à la perpendiculaire en H à (AB) en deux points M_1 et M_2 solutions.

L'ensemble Γ admet donc, comme prévu, (AB) comme axe de symétrie.

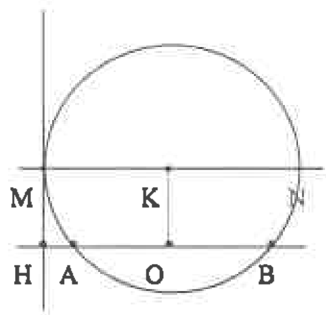


Exercice1 : Montrer que l'on peut retrouver le point M ainsi : on mène par H les tangentes au cercle de diamètre $[AB]$; si l'on note T l'un des points de contact, M est à l'intersection de la perpendiculaire menée par H à (AB) avec le cercle de centre H et de rayon HT.

Exercice2 : Reprendre le même exercice en utilisant le cercle de diamètre HB et une autre relation classique dans le triangle rectangle HTB.

Pour trouver les points de Γ dont les projections orthogonales sur δ_0 sont un point K quelconque fixé on trace l'intersection du cercle de centre K et de rayon KA avec la parallèle à (AB) passant par K. On trouve ainsi deux solutions symétriques par rapport à δ_0.

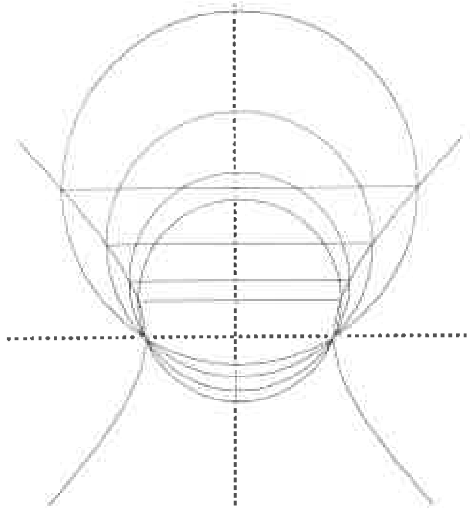
L'ensemble Γ admet donc δ_0 comme axe de symétrie.



En résumé, l'hyperbole équilatère possède deux axes de symétrie δ_0 et (AB), et donc un centre de symétrie O. L'ensemble de ses projections orthogonales des points de l'hyperbole équilatère sur (AB) est la droite (AB) privé du segment $]AB[$, l'ensemble des projections orthogonales de l'hyperbole équilatère sur δ_0 est la droite δ_0.

Remarque : Nous venons de voir que $OK \leq AK$ et $AK=HO$, dans un repère orthonormal R $=(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{\| \vec{AB} \|}$, l'hyperbole équilatère est entièrement située dans les secteurs angulaires définis par les bissectrices du repère et contenant les points A et B.

On peut ainsi construire quelques points de l'hyperbole pour en obtenir l'allure.



Remarque dans le repère R les points A, B, et M sont de coordonnées $(-a, 0)$, $(a, 0)$ et (x,y) (avec $a>0$) on a

$$MH^2 = \overline{HA}\,.\overline{HB} \Leftrightarrow y^2=(x+a)(x-a)$$

Une équation de l'hyperbole équilatère dans ce repère est donc $x^2 - y^2 = a^2$

Exercice :

1°) Montrer qu'un point M du plan appartient à l'hyperbole équilatère Γ si et seulement si il existe une similitude indirecte s telle que

$$\begin{aligned} s : H &\to H \\ M &\to A \\ B &\to M \end{aligned}$$

2°) En déduire[1] que

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{AB}) + (\vec{MB}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2} \qquad [\pi]$$

Indications pour une solution :

1°) Montrer que si M appartient à Γ alors $\frac{HM}{HA} = \frac{HB}{HM}$ et remarquer que par la position du point H la similitude s est nécessairement indirecte.

---

[1] On obtient ainsi une caractérisation angulaire de l'hyperbole qui ressemble beaucoup à celle du cercle. Cette dualité suscita, en 1852, cet échange de lettres entre le mathématicien anglais De Morgan et l'irlandais Hamilton.

> *" Je peux comprendre votre dernière perspective imaginaire. Ce qui se cache derrière est une substitution du cercle par l'hyperbole équilatère. ...J'ai toujours regretté que l'hyperbole équilatère n'ait pas eu quelque propriété remarquable, comme le cercle en a, qui aurait permis à Euclide de les introduire conjointement"*

Et la réponse de Hamilton:

> *"A propos d'Euclide et de l'hyperbole équilatère, on pourrait penser presque aussi naturel de considérer le cas d'un triangle de base donnée, dont la différence, à la place de la somme, des angles de la base serait un angle droit".*

Correspondance entre Sir William Rowan Hamilton et Augustus De Morgan, dans le livre de Robert Graves *Life of Sir William Rowan Hamilton* tome 3 pp.337-339 (Arno Press New York 1975).

La notion d'affinité de rapport complexe i (*cf* annexe) peut en effet expliquer cette propriété:
Soit a l'affinité de base (AB) et de rapport i; elle transforme les points réels du cercle d'équation $x^2+y^2= a^2$ en des points imaginaires de l'hyperbole équilatère d'équation $x^2-y^2=a^2$. On sait de plus que l'affinité a transforme deux droites réelles orthogonales en deux droites imaginaires qui ont les mêmes bissectrices que R .

2°) On montre l'équivalence en remarquant que pour tout point M de projection orthogonale H sur (AB) on a

$$(\vec{MA}, \vec{AB}) + (\vec{MB}, \vec{AB}) = (\vec{MA}, \vec{HA}) + (\vec{MB}, \vec{HB}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et l'on conclut par une méthode de fausse position.

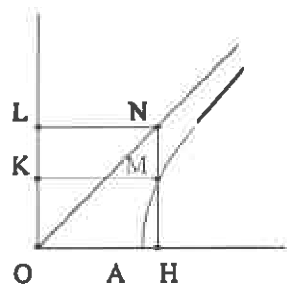
Application :
Lorsque M s'éloigne infiniment de O, le milieu de $[AB]$, l'angle $\alpha = (\vec{MA}, \vec{MB})$ tend vers 0.

La relation de l'exercice précédent permet donc de noter que l'angle $(\vec{MA}, \vec{AB})$ tend vers $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$ près. L'hyperbole Γ possède donc deux directions asymptotiques de pentes 1 et -1.

Etude des branches infinies :
Soit maintenant un point K pris aussi éloigné de O que l'on veut sur δ_O, un point M sur Γ de projections orthogonales K sur δ_O et H sur (AB). On construit dans le rectangle $MKOH$ un carré $NLOH$ avec le point N situé sur la demi-droite $[HM)$ (ce qui est justifié par la position de la courbe par rapport aux bissectrices du repère).

On a

$$\begin{aligned} HN\text{-}HM &= HO - KO \\ &= KA - KO = \sqrt{KO^2+AO^2} - KO \\ &= KO\left(\sqrt{1+\frac{AO^2}{KO^2}} - 1\right) \sim \frac{AO^2}{2KO} \end{aligned}$$

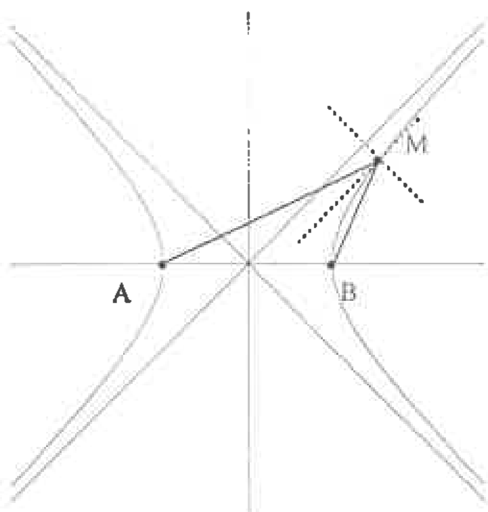


Le réel $HN\text{-}HM$ tend donc vers 0, lorsque l'abscisse de K sur l'axe (O,δ_O), convenablement orienté, tend vers l'infini, puisque AO est borné.

L'hyperbole équilatère possède donc deux asymptotes orthogonales qui sont les bissectrices du couples de droites $((AB),\delta_O)$.

Remarque : Si l'on fait tendre (après avoir fixé $(O, \vec{i})$) B vers A dans la définition de l'hyperbole équilatère, Γ se réduit justement aux bissectrices précédentes.

Exercice : Montrer que pour tout point M non situé sur (AB), les bissectrices de l'angle de droites (MA,MB) sont parallèles aux asymptotes.



37

Nous avons vu que dans le repère orthonormal R $=(O, \vec{i}, \vec{j})$tel que les points *A*, *B*, et *M* sont de coordonnées $(-a, 0)$, $(a, 0)$ et (x,y) (avec $a>0$) l'équation cartésienne de l'hyperbole équilatère était $x^2 - y^2 = a^2$.

En posant $X=x-y$ et $Y=x+y$, la matrice du changement de repère est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs définissant le nouveau repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont donc $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ et

$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$, qui dirigent les asymptotes de l'hyperbole équilatère.

Une équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est donc $X\,Y = \frac{a^2}{2}$.

Remarque : une hyperbole équilatère est entièrement déterminée par la donnée d'un point et des deux asymptotes.

2. b Intersection d'une hyperbole équilatère Γ et d'une droite (*d*) (*d* n'ayant pas la direction des asymptotes).

Proposition[2] : Soit δ une direction de droite distincte de celles des asymptotes et soit *P* un point de la droite (*AB*). La droite passant par *P* et de direction δ coupe l'hyperbole Γ équilatère (éventuellement réduite à deux droites) en deux points *M* et *M'* (éventuellement imaginaires). Alors le rapport $\frac{\overline{PM}.\overline{PM'}}{\overline{PA}.\overline{PB}}$ ne dépend que de la direction δ.

Démonstration (dans le plan complexe rapporté à R) :
Désignons par p l'affixe du point *P* et par $p+\rho e^{i\theta}$ celle d'un point *M* de la droite passant par *P* et de direction δ.
Le complexe $e^{i\theta}$ désigne l'affixe d'un vecteur normé directeur de δ

($\theta \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ et ρ peut être négatif).
Un point d'affixe z appartient à l'hyperbole Γ si et seulement si $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = a^2$.
Donc le point *M* appartient à Γ si et seulement si $\mathrm{Re}((p+\rho e^{i\theta})^2) = a^2$.

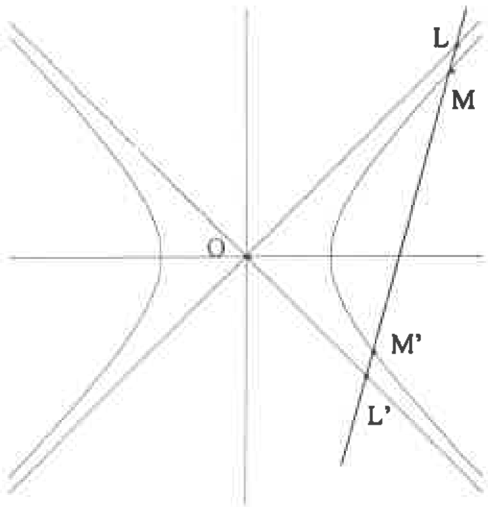
$$M(z) \in \Gamma \iff \cos(2\theta)\,\rho^2 + 2\,p\rho\cos(\theta) + p^2 - a^2 = 0.$$

On a $\overline{PM}.\overline{PM'} = \frac{p^2 - a^2}{\cos(2\theta)} = \frac{\overline{PA}.\overline{PB}}{\cos(2\theta)}$ (produit des racines) et donc le rapport $\frac{\overline{PM}.\overline{PM'}}{\overline{PA}.\overline{PB}}$ ne dépend que de la direction δ.

Corollaire :

Pour toute corde (*MM'*) de l'hyperbole Γ, coupant les asymptotes en *L* et *L'*, alors les segments [*MM'*] et [*LL'*] ont même milieu.
De plus si la corde garde une direction constante alors le réel $\overline{LM}.\overline{L'M}$ est constant.

[2] Newton utilise ce théorème (après Apollonius et ses successeurs) pour étudier les coniques dans les ***Principia***.



Démonstration : Les points L et L' (toujours réels) ont leurs affixes[3] définies par l'équation

$$\cos(2\theta)\,\rho^2+2\,p\rho\cos(\theta)+p^2=0.$$

alors que les points M et M' (réels ou imaginaires) ont leurs affixes définies par

$$\cos(2\theta)\,\rho^2+2\,p\rho\cos(\theta)+p^2-a^2=0.$$

Le milieu de $[MM']$ (qui est toujours réel) a pour affixe $-\dfrac{p\cos(\theta)}{\cos(2\theta)}\,e^{i\theta}$ (moyenne de la somme des racines), et coïncide avec celui de $[LL']$.

Si nous écrivons ensuite les affixes de L et L' sous la forme $p+\lambda\,e^{i\theta}$ et $p+\lambda' e^{i\theta}$, on a pour tout point N d'affixe $p+\varpi\,e^{i\theta}$

$$\cos(2\theta)\,\overline{LN}.\,\overline{L'N}=\cos(2\theta)(\varpi-\lambda)\,(\varpi-\lambda')=\cos(2\theta)\,\varpi^2+2\,p\varpi\cos(\theta)+p^2$$

en utilisant la somme et le produit des racines dans la première équation.

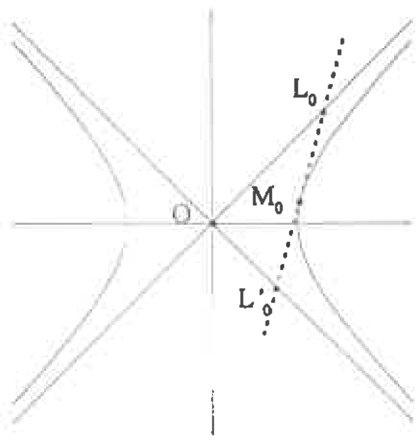
Le réel $\overline{LN}.\,\overline{L'N}$ est donc constant si la direction reste fixe. Plus précisément le point N appartient à l'hyperbole si et seulement si $\cos(2\theta)\,\overline{LN}.\,\overline{L'N}=a^2$.

Exercice : Retrouver l'équation $\cos(2\theta)\,\lambda^2+2\,p\lambda\cos(\theta)+p^2=0$, en utilisant

$$\arg(p+\lambda\,e^{i\theta})\equiv\frac{\pi}{4}\;\left[\frac{\pi}{2}\right].$$

c. Propriétés des tangentes.

Corollaire :
L'hyperbole équilatère Γ possède des tangentes en tout point. Si la tangente en un point M_0 à Γ rencontre les asymptotes en deux points L_0 et L_0', alors M_0 est le milieu de $[L_0,L_0']$.



[3]Puisque θ est fixé, ces équations déterminent p.

Soit M_0 un point fixé de l'hyperbole et P un point donné de (AB). Nous dirons que la droite (PM_0) est tangente en M_0 à la conique si et seulement si le discriminant de l'équation (E)

$$\cos(2\theta)\,\rho^2+2\,p\rho\cos(\theta)+p^2-a^2=0.$$

s'annule.

Analyse : supposons que la droite (PM_0) soit tangente à l'hyperbole.

On a donc à la fois

$\Delta' = p^2\sin^2\theta + a^2\cos 2\theta = 0$ et

$$\cos(2\theta)\,\overline{PM}^2 = p^2 - a^2.$$

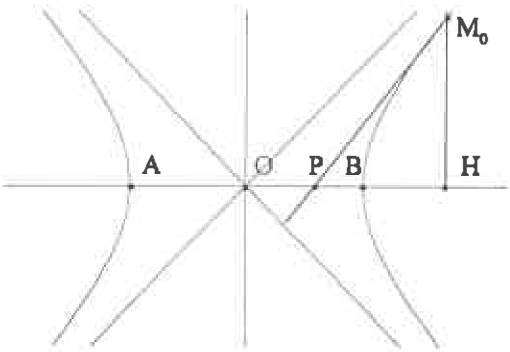
On appelle H le projeté orthogonal de M_0 sur (AB). On a

$$\overline{OP}\,\overline{OH} = p(p+\rho\cos(\theta)) = p^2\left(1-\frac{\cos^2(\theta)}{\cos(2\theta)}\right)$$

(car ρ est racine double)

Ainsi en utilisant la nullité du discriminant on trouve

$$\overline{OP}\,\overline{OH} = -p^2\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(2\theta)} = a^2 = OA^2.$$



Nous en déduisons[4] que le point P est solution de notre problème si et seulement si les quatre points $[A, B, P, H]$ forment une division harmonique.

Réciproquement si l'on considère le point M_0 de la courbe qui se projette orthogonalement sur (AB) en H tel que $[A, B, P, H] = -1$, c'est-à-dire si $\overline{OP}\,\overline{OH} = OA^2$, on a

$$p(p+\rho\cos(\theta)) = a^2.$$

L'équation (E) devient alors

$$\cos 2\theta\,\rho^2 + a^2 - p^2 = 0.$$

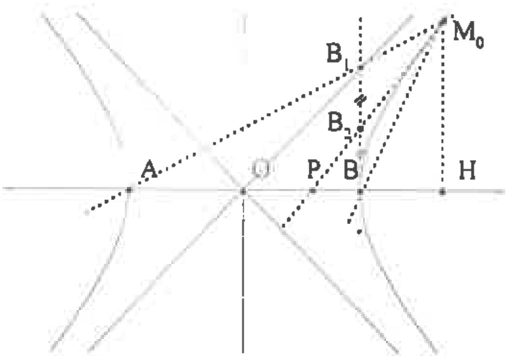
La droite (M_0P) recoupe l'hyperbole en M' tel que $\overline{PM_0}\,\overline{PM'} = \dfrac{p^2-a^2}{\cos(2\theta)} = \overline{PM_0}^2$.

La droite (M_0P) est donc tangente à la courbe en M_0.

Application :

Pour construire la tangente à l'hyperbole contenant M_0, il suffit donc de construire le projeté orthogonal H de M_0 sur (AB).

Nous avons vu que le point P est l'intersection de la tangente en un point M_0 à l'hyperbole équilatère et de (AB) si et seulement si les quatre points $[A, B, P, H]$ forment une division harmonique, c'est-à-dire si et seulement si le faisceau de droites $((M_0A), (M_0B), (M_0P), (M_0H))$ est harmonique. Appelons B_1 et B_2 les intersections de la parallèle à (M_0H) passant par B avec (M_0A) et (M_0P). La droite (M_0P) est tangente en M_0 à l'hyperbole équilatère si et seulement si B_2 est le milieu de $[B\,B_1]$. Ceci fournit un moyen pratique de construction de la tangente quand on connait les sommets de l'hyperbole équilatère.



Exercice : Montrer que P est l'intersection de la polaire de M_0 par rapport au cercle de diamère $[AB]$ avec (AB).

[4] *Cf* l'annexe sur la division harmonique.

Le corollaire du paragraphe précédent prend alors la forme suivante puisque nous avions vu au cours de sa démonstration qu'il s'agissait d'une équivalence.

Corollaire :
Soit Γ une hyperbole équilatère d'asymptotes Δ et Δ'. La tangente au point C coupe l'une des asymptotes en T. A tout point M du plan on associe L (resp L') son image par la projection sur Δ (resp Δ') parallèment à (CT).

Alors pour tout point M on a $M \in \Gamma \Leftrightarrow (*)\ \overline{LM}.\ \overline{L'M} = -CT^2$.

Exercice : montrer que le produit des longueurs des segments $[O,L]$ et $[O,L']$ découpés par une tangente sur les asymptotes est constant.

2. c Etude des Hyperboles.

Définition : Soient A et B deux points distincts, O le milieu de $[AB]$, δ la direction orthogonale à (AB) et λ un réel strictement positif. Pour tout point M du plan on note H la projection de M sur (AB) parallèlement à δ.
On appelle hyperbole de centre O et de diamètre $[AB]$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$MH^2 = \lambda\ \overline{HA}\ .\overline{HB}.$$

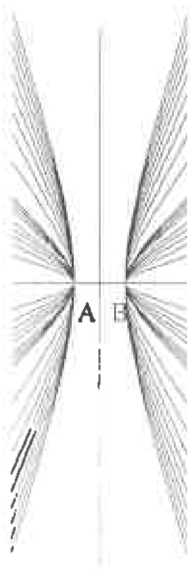
Il est facile de montrer que Γ possède deux axes de symétrie (AB) et (CD) et donc un centre de symétrie O.

Si l'on note α l'affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $\sqrt{\lambda}$, M' l'antécédent du point M, et ε le signe de λ, on a $MH^2 = \lambda M'H^2$ et donc

$$MH^2 = \lambda\ \overline{HA}\ .\overline{HB}. \Leftrightarrow M'H^2 = \overline{HA}\ .\overline{HB}$$

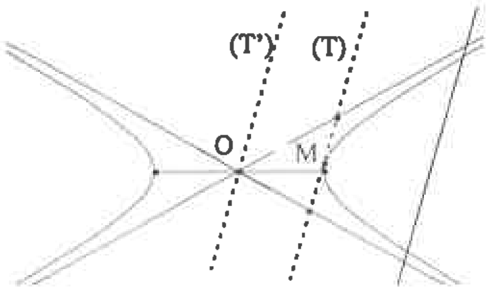
On peut donc énoncer :

Proposition : Toute hyperbole de diamètre $[AB]$ est l'image de l'hyperbole équilatère de diamètre $[AB]$ par une affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$. L'hyperbole Γ possède deux asymptotes, images des deux droites passant par le milieu de $[AB]$ et de pentes 1 et -1 par l'affinité α^{-1}.

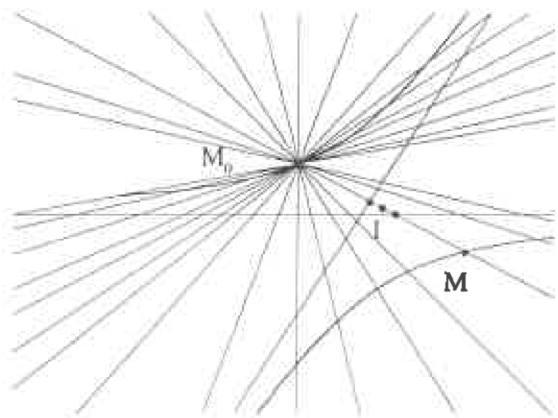


On a tracé ci-contre les ellipses obtenues pour des valeurs de λ dans $\{1,2,\ldots,10\} \cup \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}\}$.

Application1 : Toute hyperbole de diamètre $[AB]$ possède des tangentes en tout point. Le point de contact M d'une tangente à une hyperbole est le milieu du segment déterminé par cette tangente sur ses asymptotes. Le faisceau de droites déterminé par tout diamètre (OM) la parallèle (T') à la tangente (T) en M menée par O et les deux asymptotes est donc un faisceau harmonique[5]. Mieux, dans le cas de l'hyperbole équilatère, les deux asymptotes sont les bissectrices du couple $((OM), (T'))$, et l'on obtient la direction de la tangente en M par symétrie par rapport à l'une quelconque des asymptotes.



Application2 Pour toute corde (MM') de l'hyperbole Γ, coupant les asymptotes en L et L', alors les segments $[MM']$ et $[LL']$ ont même milieu (conservation de la propriété du milieu par affinité). Cette propriété donne une méthode de construction rapide de l'hyperbole dont on connaît un point M_0 et les deux asymptotes. On fait tourner autour du point M_0 une droite variable qui rencontre les asymptotes en L et L'. On obtient un nouveau point de l'hyperbole en construisant le symétrique de M_0 par rapport au milieu de $[LL']$.



2. d Exercice : étude de la Parabole.

Définition : Soient A et U deux points distincts. Pour tout point M du plan on note H la projection orthogonale de M sur (AU).
On appelle parabole de sommet A l'ensemble des points M du plan tels que

$$MH^2 = \overline{AH}.\overline{AU}$$

a) Chercher les symétries éventuelles de la courbe, son allure, et tracer la tangente en A.

b) Etant donnés un réel λ non nul, on considère l'ensemble Γ_λ des points M tels que $MH^2 = \lambda\square\overline{AH}\,\overline{AU}$ (avec les mêmes notations). Montrer que Γ_λ est l'image de Γ_1 par une homothétie h.

2. e Conclusion.

Nous avons donc réussi à ramener l'ensemble des courbes définies par l'équation $MH^2 = \lambda\,\overline{HA}\,.\overline{HB}$. à deux courbes canoniques le cercle et l'hyperbole équilatère (dont les propriétés géométriques sont duales). On peut d'ailleurs, grâce à un rapport imaginaire, tout déduire du cercle[6].. Nous allons appeler conique à centre l'ensemble de ces courbes. Nous prouverons dans la deuxième partie de cette leçon que le choix du diamètre associé à une direction de projection convenable est arbitraire.

Définition : Soient A et B deux points distincts, O le milieu de $[AB]$, δ la direction orthogonale à (AB) et λ un réel non nul. Pour tout point M du plan on note H la projection de M sur (AB) parallèlement à δ.
On appelle conique de centre O et de diamètre $[AB]$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$MH^2 = \lambda\,\overline{HA}\,.\overline{HB}.$$

---

[5] ***Cf l'annexe sur la division harmonique.***

[6] *Nous d'ailleurs au chapitre 2 que toute conique définie par foyer directrice et possédant un centre de symétrie possède une définition de ce type.*

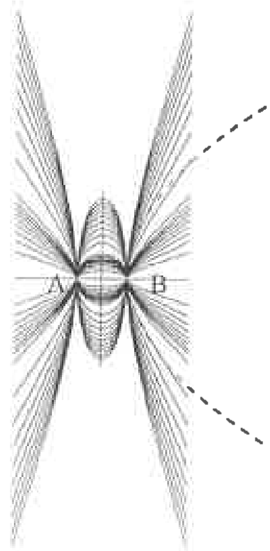
42

Si l'on appelle α l'affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $\sqrt{|\lambda|}$, M' l'antécédent du point M, et ε le signe de λ, on a $MH^2 = |\lambda| M'H^2$ et donc

$$MH^2 = \lambda\, \overline{HA}\,.\overline{HB}. \Leftrightarrow M'H^2 = \varepsilon\, \overline{HA}\,.\overline{HB}$$

On peut donc énoncer :

Proposition : Toute conique à centre de diamètre $[AB]$ est l'image du cercle de diamètre $[AB]$ ou de l'hyperbole équilatère de diamètre $[AB]$ par une affinité orthogonale de base (AB) et de rapport $(\sqrt{|\lambda|})^{-1}$.



On a tracé ci-contre les coniques à centre obtenues pour des valeurs de $|\lambda|$ dans $\{1,2,...,10\} \cup \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ... \frac{9}{10}\}$ et l'on a ajouté en pointillé la parabole d'équation

$$MH^2 = \overline{BH}.\, \overline{OB}.$$

3) Exercice : (un théorème de ***Poncelet***) :

Soit F un point de l'axe (AB) de coordonnées $(c,0)$ et soit M un point d'une conique Γ de coordonnées (x,y); calculer la distance FM en fonction de x.

Déterminer les points F tels que la distance FM soit une expression rationnelle en x. Un tel point est appelé un foyer de la courbe.

Plusieurs cas se présentent :

a) Si Γ est une ellipse, on distinguera trois cas suivant que les foyers sont réels, imaginaires ou confondus. Que peut-on dire lorsque les foyers sont confondus?

Lorsque les foyers sont réels, montrer que la courbe Γ est le lieu des points M tel que la somme $MF+MF'$ est constante. Que peut-on dire lorsque les foyers sont imaginaires?

b) Si Γ est une hyperbole, montrer que les deux foyers sont réels et que la courbe Γ est le lieu des points M tel que la différence $|MF-MF'|$ est constante.

c) Si Γ est une parabole, montrer qu'il n'y a qu'un seul foyer.

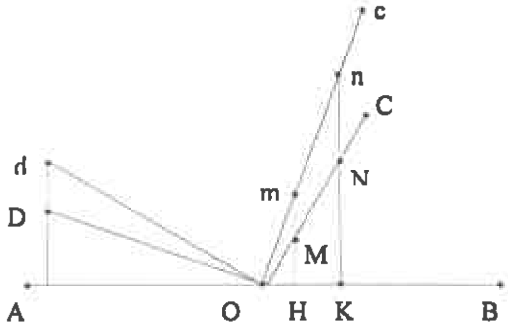
43

II Coniques à centre obtenues par une affinité oblique.

1. Le cas de l'ellipse.

a. Une propriété de l'affinité orthogonale.

Par une affinité orthogonale α d'axe (AB) et de rapport k le point c est transformé en C. La pente de la droite (OC) est donc la pente de la droite (Oc) multipliée par k.
Pour tout couple de points m et n pris sur (Oc) d'images M et N, le rapport $\dfrac{MN}{mn}$ est indépendant du choix de M et N.



Exercice : Montrer que si l'on appelle θ l'angle $((AB),(Oc))$ (à π près) le rapport précédent vaut $\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}$

Si maintenant c et d sont pris sur un cercle de centre O, on aura pour tout couple de points m et n pris sur (Oc) d'images M et N, $k_1 = \dfrac{MN}{mn} = \dfrac{OC}{Oc}$, et pour tout couple de points m' et n' pris sur (Od) d'images M et N, le rapport $k_2 = \dfrac{M'N'}{m'n'} = \dfrac{OD}{Od}$. Le rapport $\dfrac{k_1}{k_2}$ est donc égal à $\dfrac{OC}{OD}$.

b. Applications.

Soit Γ une ellipse de grand axe $[AB]$. Cette ellipse est l'image par l'affinité orthogonale de rapport $\dfrac{b}{a}$, α, du cercle γ de diamètre $[AB]$. Soit $[CD]$ un diamètre quelconque fixé de Γ non perpendiculaire à $[AB]$.
Les points C et D ont pour antécédents c et d par α. Un point M du plan quelconque a pour antécédent par α, m qui se projette orthogonalement en h sur $[cd]$.

Soit δ_0 la direction orthogonale à $[cd]$ et δ l'image de cette direction par l'affinité vectorielle associée à α.
Le cercle γ est aussi le lieu des points m de projection orthogonale h sur $[cd]$ tels que

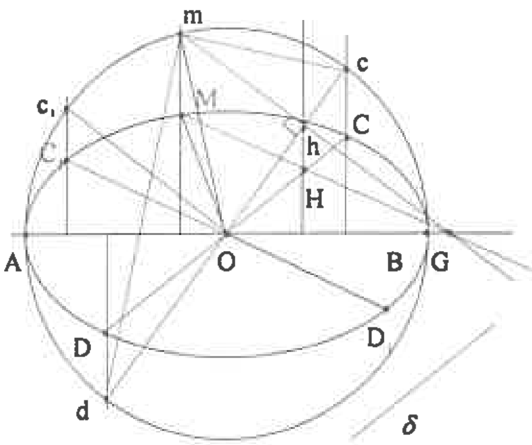
$$mh^2 = -\overline{hc}.\overline{hd}$$

La droite (hm) qui ne peut être parallèle à (AB), coupe (AB) en G. Par l'affinité α la droite (Gm) a pour image (GM) et la droite (cd), (CD). Le point h intersection de (Gm) et (cd) a donc pour image H intersection de (GM) et (CD).
On a en appliquant le résultat du paragraphe précédent à la droite (hm),

$$HM = k_2\, hm$$

et de même dans la direction orthogonale

$$HD = k_1\, hd \text{ et } HC = k_1\, hc$$



Finalement

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow m \in \gamma$$

$$\Leftrightarrow mh^2 = -\overline{hc}.\overline{hd}$$

$$\Leftrightarrow k_1^2\ HM^2 = -k_2^2\ \overline{HC}.\overline{HD}$$

$$\Leftrightarrow HM^2 = -\lambda\, \overline{HC}.\overline{HD}$$

avec λ un réel strictement positif qui vaut d'après la remarque du paragraphe précédent

$$\lambda = \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{OC_1^2}{OC^2}$$

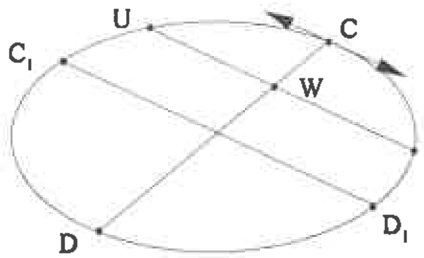
Proposition : Etant donnée une ellipse Γ fixée; pour tout diamètre $[CD]$ de Γ il existe une direction δ et un réel strictement postif λ qui font de Γ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ, on a

$$HM^2 = -\lambda \overline{HC}.\overline{HD}$$

La direction δ associée au diamètre $[CD]$ est définie grâce à l'affinité α de façon unique. De plus la direction associée au diamètre $[C_1D_1]$ (avec (C_1D_1) de direction δ) est l'image par α de la direction orthogonale à $[\alpha^{-1}(C_1), \alpha^{-1}(D_1)]$, c'est-à-dire la direction de (CD). On peut donc parler de directions **conjuguées** ou encore de diamètres **conjugués.**

On peut donc énoncer les propriétés suivantes qui sont obtenues grâce à l'affinité en lisant des relations évidentes dans le cercle γ.

Proposition : Soit (T) une droite contenant C extrémité du diamètre $[CD]$ un point d'une ellipse Γ. La droite (T) est tangente à l'ellipse, si et seulement si elle est parallèle au diamètre conjuguée



Proposition : Etant donné un diamètre $[CD]$ d'une ellipse Γ. Une direction δ est conjuguée à ce diamètre si et seulement si on a la propriété suivante. Si une droite de direction δ est sécante à l'ellipse en U et V et sécante à (CD) en W alors W est le milieu de $[UV]$.

Si on choisit un repère centré au milieu du diamètre $[CD]$ et comme direction des axes les deux directions conguguées, (CD) et (C_1D_1) on aura en appelant $a' = OC$ et $b' = OC_1$,

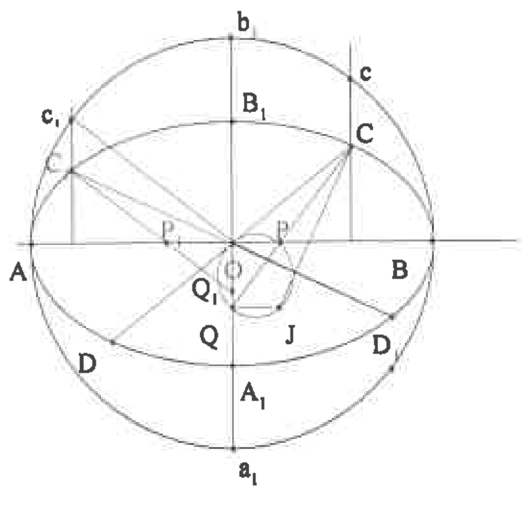
puisque $\lambda = \dfrac{k_2^2}{k_1^2} = \dfrac{OC_1^2}{OC^2} = \dfrac{b'^2}{a'^2}$

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow HM^2 &= -\lambda \overline{HC}.\overline{HD} \\ \Leftrightarrow y^2 &= -\lambda (x-a')(x+a') \\ \Leftrightarrow y^2 &= -\frac{b'^2}{a'^2}(x-a')(x+a') \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a'^2} &+ \frac{y^2}{b'^2} = 1 \end{aligned}$$

Problème : Comment retrouver les directions conjuguées orthogonales, à partir d'un couple de diamètres conjugués quelconques?

Tout en conservant les notations du paragraphe précédent on construit la parallèle à (Oc) passant par C qui rencontre les axes principaux en P et Q. Le quadrilatère $OcCQ$ est ainsi un parallélogramme. On note J le point dont les projections sur les axes sont P et Q. De la même façon on construit les points P_1 et Q_1 intersections avec les axes de la parallèle à (Oc_1) passant par C_1.

Les points Q et C sont transformés par la translation t de vecteur $\overrightarrow{QO}$ en O et c, qui par le quart de tour direct de centre O, r, deviennent O et c_1. La translation t' de vecteur $\overrightarrow{OQ_1}$ envoie finalement ces deux points sur Q_1 et C_1.



45

On a $QC = a$ et puisque les droites (PC) et (Oc) sont parallèles le rapport $\frac{PC}{Oc}$ est le même que celui de l'affinité. On a donc $PC = b$. On démontrerait de la même façon que $Q_1 C_1 = a$ et $P_1 C_1 = b$.
Le point P est le barycentre du système de points pondérés (C, b) $(Q, a - b)$. Son image par notre isométrie est donc barycentre du système (C_1, b) $(Q_1, a - b)$, c'est-à-dire le point P_1. Le point J est à l'intersection de la parallèle à (AB) passant par Q et de la perpendiculaire à (AB) passant par P, son image sera à l'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par Q_1 et de la parallèle à (AB) passant par P_1, O.

Finalement le vecteur $\overrightarrow{OC_1}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{JC}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, si l'on connaît les diamètres conjugués, $[CD]$ et $[C_1 D_1]$ on construira le point J tel que $\overrightarrow{JC}$ soit obtenu à partir de $\overrightarrow{OC_1}$ par la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Appelons ω Le milieu de $[OJ]$, les intersections du cercle de diamètre $[OJ]$ avec (ωC) sont (si J est différent de O, c'est-à-dire si les diamètres conjugués ne sont pas perpendiculaires) deux points P et Q, et les axes de l'ellipse sont (OP) et (OQ).

Théorème : Etant donnés deux points distincts C et D, un réel λ strictement positif et δ une direction distincte de celle de (CD) on note $\Gamma(C,D,\delta)$ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ, on a

$$HM^2 = -\lambda \overline{HC}.\overline{HD} \; *.$$

Alors l'ensemble des courbes $\Gamma(C,D,\delta)$ coïncide avec l'ensemble des ellipses.

Démonstration : le sens direct correspond une proposition déjà vue.
Considérons maintenant la courbe $\Gamma(C,D,\delta)$ définie par la relation *. Dans le repère centré au milieu de $[CD]$, défini par les directions (CD) et δ, une équation de $\Gamma(C,D,\delta)$ est, en appelant $a' = OC$ et $b' = OC$, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$. On peut construire par la méthode précédente une ellipse de centre O dont les directions conjuguées sont celles de (CD) et δ. D'après notre analyse cette ellipse aura, dans le même repère la même équation, et coïncidera donc avec $\Gamma(C,D,\delta)$.

2. Le cas de l'hyperbole.

Théorème : Etant donnée une hyperbole Γ équilatère de centre O et de diamètre $[AB]$, Δ et Δ' ses asymptotes, et $[CD]$ un diamètre quelconque, il existe une direction δ qui permet d'énoncer la propriété suivante :
Γ est le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ, on a

$$HM^2 = \overline{HC}.\overline{HD}$$

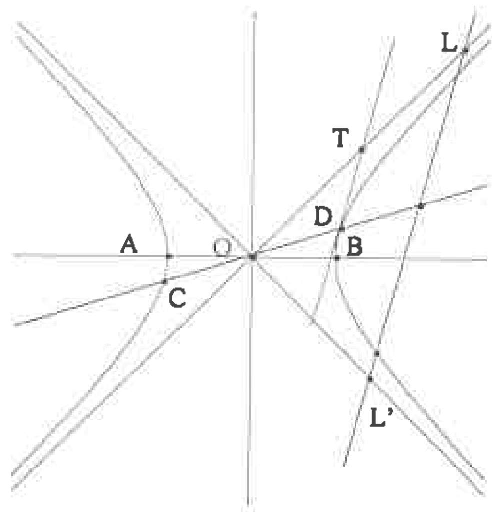
Démonstration : Soit δ la direction de la tangente en D à Γ qui coupe Δ en T. Par tout point M du plan on construit la parallèle à δ passant par M qui coupe les asymptotes en L et L'.

H

Nous avons vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de Γ est

$$(*) \; \overline{LM}.\overline{L'M} = -DT^2.$$

46



Nous savons que si H désigne le milieu de $[LL']$

$$(*) \Leftrightarrow (\overline{LH}+\overline{HM})(\overline{L'H}+\overline{HM}) = -DT^2.$$
$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = HL^2 - DT^2.$$
$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = HO^2 - DO^2.$$

(car les triangles OTD et OHL sont isocèles puisque δ a été choisie symétrique du diamètre par rapport à Δ *cf* A 3 Application 1)
Finalement

$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = (\overline{HO}+\overline{OC})(\overline{HO}+\overline{OD})$$
$$(*) \Leftrightarrow MH^2 = \overline{HC}.\overline{HD}$$

Puisque les hyperboles ont été définies comme image par affinité de l'hyperbole équilatère, on a, en adaptant la démonstration déjà donnée pour les ellipses, la proposition suivante :

Proposition : Etant donnée une hyperbole Γ fixée; pour tout diamètre $[CD]$ de Γ il existe une direction δ et un réel strictement postif λ qui font de Γ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ, on a

$$HM^2 = \lambda \overline{HC}.\overline{HD}$$

La direction δ associée au diamètre $[CD]$ est définie grâce à l'affinité α de façon unique.
On appelera pour l'hyperbole équilatère, diamètre conjugué d'un diamètre $[CD]$, le segment obtenu par symétrie par rapport à l'une des asymptotes. On étendra ensuite cette définition à toutes les hyperboles en utilisant l'affinité α.

Remarque : pour tout couple de demi-diamètres conjugués $[OC]$ $[OC']$ le milieu du segment $[CC']$ appartient à l'une des asymptotes de l'hyperbole.
Mais contrairement au cas de l'ellipse, les deux diamètres conjugués ne jouent pas des rôles symétriques. En inversant leurs rôles on obtient deux hyperboles que l'on appelle conjuguées.

Exercice : énoncer et démontrer pour les hyperboles, des propriétés des diamètres conjugués semblables à celles énoncées pour les ellipses. Montrer que dans un repère convenable, l'équation cartésienne de toute hyperbole est

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

Il est beaucoup plus simple de retrouver les directions conjuguées orthogonales, à partir d'un couple de diamètres conjugués quelconques dans le cas de l'hyperbole. On construit d'abord les asymptotes, puisqu'elles contiennent les milieux des segments qui joignent les sommets des demi-diamètres conjugués. Les axes recherchés sont alors les bissectrices des asymptotes.

Cette construction permet d'obtenir, comme pour les ellipses, la proposition réciproque de la proposition précédente, et donc d'énoncer le théorème suivant :

Théorème : Etant donnés deux points distincts C et D, un réel λ strictement positif et δ une direction distincte de celle de (CD) on note $\Gamma(C,D,\delta,\lambda)$ le lieu des points M tels que si l'on note H la projection de M sur (CD) parallèlement à δ, on a

$$HM^2 = \lambda \overline{HC}.\overline{HD} *.$$

Alors l'ensemble des courbes $\Gamma(C,D,\delta)$ coïncide avec l'ensemble des hyperboles.

3. Conclusion.

Corollaire1 : L'image d'une hyperbole ou d'une ellipse par une affinité de direction quelconque et de rapport k est une conique du même type.

Si l'on sait que toute bijection affine se décompose en produit d'affinités (*cf* annexe) on peut enfin énoncer:

Corollaire2 : L'image d'une hyperbole ou d'une ellipse par une bijection affine est une conique du même type.

I Préambule:

On se place dans un plan affine P réel, rapporté à un repère $R_0 = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère parallèlement l'ensemble, noté $\mathbf{R}_2[x,y]$ pour l'occasion[1], des polynômes à coefficients réels, à deux variables, et de degré deux, c'est-à-dire les applications:

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$
$$(x;y) \to f(x,y)$$

avec $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r$, où a,b,c,p,q,r sont des réels tels que: $(a;b;c)$ différent de $(0;0;0)$.

On construit l'application[2] Ψ qui, à tout élément de $\mathbf{R}_2[x,y]$, fait correspondre la partie du plan (Γ_f) définie par l'équivalence suivante:

$$(M \in \Gamma_f,\ M(x;y)_{R_0}) \Leftrightarrow (f(x,y) = 0)$$

On appelle ***conique du plan P*** un élément de l'ensemble image de l'application précédente Ψ, ***i-e*** un élément de $\Psi(\mathbf{R}_2[x,y])$, donc une partie du plan P. On dira que $f(x,y) = 0$ est une équation de la conique (Γ_f) relativement au repère R_0.

Remarques :

(1) Quelques précisions sur l'application Ψ:
Une conique admet une infinité d'équations, puisque, pour tout réel λ non nul:

$$(*) \quad (\Gamma_{\lambda f}) = (\Gamma_f).$$

Cela suffit à prouver que l'application Ψ n'est pas injective. On pourrait penser qu'elle le devient si on quotiente par l'équivalence définie par (*) mais il n'en est rien; tous les polynômes du type:

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + 1 \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels strictement positifs}$$

ont la même image par Ψ, à savoir le vide, et ne sont pas équivalents au sens de (*). De même pour les polynômes définis par:

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels strictement positifs}$$

ont tous pour image l'origine du repère R_0.

Toutefois, on démontre que si deux coniques ont deux points distints du plan en commun, elle vérifient nécessairement la relation (*).

Bien sûr, il en irait différemment si les polynômes étaient à coefficients complexes et si on considérait P comme un plan affine sur $\mathbf{C}$!

Insistons enfin sur le fait que l'équation d'une conique est à l'évidence, relative à un repère et que c'est précisément l'objet du paragraphe II de rechercher les « bons » repères dans lesquels l'équation de la conique est simple et caractérisque d'une certaine forme géométrique.

(2)L'équation $f(x,y) = 0$ de la conique (Γ_f) peut s'écrire matriciellement:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - r = 0.$$

de la forme:

$${}^tU.S.U + 2.N.U + r = 0.$$

Effectuer, dans le plan P, un changement de base revient à écrire:

$$U = Q.V \text{ avec } Q \text{ une matrice (2,2) inversible, et } U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

L'équation précedente peut alors s'écrire:

[1] Habituellement, cette notation est plutôt réservée à l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

[2] On pourrait l'appeler Γ tout simplement.

$${}^tV.({}^tQ.S.Q).V + 2.(N.Q).V + r = 0$$

toujours de la forme:

$${}^tV.S'.V + 2.N'.V + r = 0,$$

avec S' matrice symétrique caractérisant la partie quadratique de l'équation, et N' matrice de dimension 1×2 caractérisant sa partie linéaire.

Puisque : dét(S') = (dét(Q))^2.dét(S), le signe du discriminant de la partie quadratique de l'équation est invariant par tout changement de base dans le plan P. Si, de plus le changement de repère est orthogonal, c'est le discriminant lui-même qui reste inchangé!

(3) A propos de changement orthogonal...

P est *a priori* un plan affine, rapporté à un repère affine $R_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, mais on peut le rendre euclidien en utilisant la forme:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : P^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (M,M') & \rightarrow & xx' + yy' \end{array}$$

effectivement bilinéaire, symétrique et définie positive. Pour ce produit scalaire, la base initiale est évidemment orthonormale, et on peut alors sans ambiguïté parler du groupe orthogonal du plan P.

Si, au contraire, P est ***a priori***, considéré comme euclidien et si le repère $R_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, n'est pas orthogonal, on peut en utilisant le procédé classique de Schmidt, c'est-à-dire grâce à une affinité bien choisie, se placer dans un repère orthogonal. On se rend aisément à l'évidence -il suffit de se mettre dans le cadre matriciel du (2) précédent- que les équations des coniques du plan P conservent leur forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r = 0$$

Autrement dit, l'ensemble des coniques du plan P ne change pas globalement quand on fait varier sa structure euclidienne; aussi, n'a-t'on aucun intérêt particulier à se restreindre à un plan affine.

On pourra par conséquent utiliser les matrices de changement de base de la forme:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

en les voyant comme des matrices de rotations pour la forme φ

Ceci nous conduit au paragraphe suivant...

II. Classification des coniques du plan P.

Considérons un point M du plan P et ses coordonnées:

(x,y) dans le repère initial $R_0 = (O; \vec{i}, \vec{j})$

(X,Y) dans le nouveau repère $R_1 = (O; \vec{u}, \vec{v})$, ce dernier étant obtenu, après une rotation du premier d'un angle θ.

De façon précise, on a:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

et, M est sur la conique (Γ_f) si et seulement si:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2PX + 2QY + R = 0.$$

avec:

$$\begin{aligned} A &= a\cos^2\theta + c\sin^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta \\ B &= 2b\cos 2\theta + (c - a)\sin 2\theta \\ C &= a\sin^2\theta + c\cos^2\theta - 2b\cos\theta\sin\theta \\ P &= p\cos\theta + q\sin\theta \\ Q &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ R &= r \end{aligned}$$

On observe que l'on peut toujours choisir l'angle θ (***de quatre façons différentes...***) de sorte que le coefficient B s'annule.

- ou bien, on a $b = 0$ et « on ne fait rien »*(on choisit $\theta = 0$ ou π ou $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$..)*.

- ou bien b est non nul: on détermine alors le vecteur $\vec{u}$, unitaire et orthogonal au vecteur non nul de coordonnées (a-c , b) (*deux choix possibles*), puis on choisit l'une des bissectrices de l'angle ($\vec{i}$, $\vec{u}$) (*deux autres choix possibles*). Numériquement, dans ce cas-là, il suffit de constater qu'annuler B revient à écrire:

$$\tan 2\theta = \frac{2b}{a-c}$$

$$\text{i-e} \qquad 2\theta = \arctan\left(\frac{2b}{a-c}\right) \bmod[\pi] \qquad \text{ou} \qquad \theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2b}{a-c}\right) \bmod[\pi/2]$$

où l'on retrouve bien quatre solutions!

Conclusion: quelle que soit la conique (Γ_f), il existe un repère $R_1 = (O; \vec{u}, \vec{v})$, dans lequel la conique a pour équation peut se mettre sous la forme:

$$(**) \quad A X^2 + C Y^2 + 2P X + 2Q Y + R = 0.$$

De plus (*cf préliminaires* (*2*)):

$$AC = ac - b^2 = \Delta.$$

c'est-à-dire pour être tout à fait exact:

$$\text{dét}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\text{dét}(Q))^2.\text{dét}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Arrivé à ce point, la discussion de l'allure de la conique (Γ_f) devient élémentaire:

1. $A = 0$ (et par conséquent, $C \neq 0$)[3]

1.1. $P = 0$: dans ce cas, (**) se réduit à:

$$CY^2 + 2QY + R = 0$$

donc:

- (Γ_f) = $\varnothing$ dès que $Q^2 - CR < 0$
- (Γ_f) = une droite parallèle à l'axe des abscisses du repère R_1 ,d'équation $Y = -Q/C$. dès que $Q^2 - CR = 0$
- (Γ_f) = un ensemble de deux droites parallèles à l'axe des abscisses du repère R_1,dès que $Q^2 - CR > 0$

Bien sûr, on peut après une translation appropriée, ramener l'équation (**) à la forme:

$$CY^2 + R' = 0$$

avec $R' = (CR - Q^2)/C$.

1.2. $P \neq 0$: dans ce cas, l'équation (**) se réduit à:

$$X = (-C/2P)\, Y^2 + (-Q/P)\, Y + (-R/2P)$$

on « reconnaît » une ***parabole***[4].

Ici aussi, on ramènera si besoin est, l'équation (**) à la forme:

$$CY^2 + 2PX = 0$$

après translation

[3] A et C ne peuvent être simultanément nuls. En effet, on peut vérifier que $A + C = a + c$; donc, si $A = C = 0$, on a alors $a = -c$ puis $0 = AC = ac - b^2 = -a^2 - b^2$ et finalement $a = b = c = 0$!!

[4] On peut estimer que les courbes représentatives des fonctions h: $x \to h(x) = ux^2 + vx + w$ sont connues!

51

1bis. $C = 0$ (et $A \neq 0$). La discussion est évidemment rigoureusement analogue à la précédente après symétrie par rapport à la première bissectrice, autrement dit après le changement de base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

2. A **et** C **non nuls** (*i-e* $AC \neq 0$)
On peut alors écrire (**) sous la forme:

$$A\,(X + P/A)^2 + C\,(Y + Q/C)^2 + R' = 0$$

avec $R' = R - P^2/A - Q^2/C$.

On effectue la bonne translation pour se placer finalement dans le repère $R_2 = (\Omega; \vec{u}, \vec{v})$, où Ω est la point de coordonnées ($-P/A$;$-Q/C$) dans le repère R_1, de sorte à pouvoir écrire l'équation (**) sous la forme:[5]:

$$\alpha X^2 \pm \beta Y^2 = \varepsilon$$

où α et β sont deux réels strictement positifs (égaux respectivement à $|A/R'|$ et à $|C/R'|$ si $R' \neq 0$, et à $|A|$ et à $|C|$ si $R' = 0$) et ε dans $\{-1,0,1\}$

2.1. $AC > 0$
Dans ce cas, les deux réels A et C sont de même signe ce qui nous permet d'avancer que la conique (Γ_f) est caractérisée dans le repère R_2 par l'équation:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \varepsilon$$

avec α et β strictement positifs.

d'où:

- $(\Gamma_f) = \varnothing$ si $\varepsilon = -1$.
- $(\Gamma_f) =$ le singleton $\{\Omega\}$ si $\varepsilon = 0$
- $(\Gamma_f) =$ une ***ellipse*** si $\varepsilon = 1$

2.2. $AC < 0$
Ici, les deux réels A et C sont de signe contraire; on peut donc affirmer que la conique (Γ_f) est caractérisée dans le repère R_2 par l'équation:

$$\alpha X^2 - \beta Y^2 = \varepsilon$$

d'où:

- $(\Gamma_f) =$ deux droites sécantes d'équations: $\sqrt{\alpha}.X \pm \sqrt{\beta}.Y = 0$, si $\varepsilon = 0$.
- $(\Gamma_f) =$ une ***hyperbole*** si $\varepsilon = \pm 1$

*****

Récapitulons:
Une conique est caractérisée par une équation du type:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r = 0$$

[5] Bien sûr, on devrait écrire X' et Y' à la place de X et Y. Il s'agit là d'une simplification d'écriture qui n'entrave en rien la classification en cours.

Cette équation peut s'écrire dans un repère convenablement choisi

$$(^{**})\ A X^2 + C Y^2 + 2 P X + 2 Q Y + R = 0$$

<table>
<tr><td colspan="5">$A C \neq 0$
(**) devient :
$A X^2 + C Y^2 = \varepsilon$ où $\varepsilon \in \{-1,0,1\}$</td><td colspan="4">$A C = 0$
(**) devient :
$C Y^2 + 2 P X + R = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$A C > 0$
($A > 0$ et $C > 0$)</td><td colspan="2">$A C < 0$</td><td colspan="3">$P = 0$</td><td>$P \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\varepsilon = 0$
1 point</td><td>$\varepsilon = -1$
$\varnothing$</td><td>$\varepsilon = 1$
ellipse</td><td>$\varepsilon = 0$
deux droites sécantes</td><td>$\varepsilon \pm 1$
hyperbole</td><td>$R > 0$
$\varnothing$</td><td>$R < 0$
deux droites parallèles</td><td>$R = 0$
une droite</td><td>parabole</td></tr>
</table>

III. Une autre récapitulation plus imagée:

On peut plonger le plan affine P dans $\mathbf{R}^3$ à l'aide de l'injection (***non canonique!***):

$$\begin{array}{rcl} \phi : P & \rightarrow & \mathbf{R}^3 \\ M(x;y)_{R*} & \rightarrow & (x;y;0) \end{array}$$

On pourra alors envisager une conique (Γ_f) comme l'intersection de la surface de $\mathbf{R}^3$ caractérisée par l'équation:

$$z = f(x,y)$$

où f est, rappelons-le, un polynôme de degré 2, avec le plan $z = 0$ identifiable au plan P par l'injection ϕ définie ci-dessus.

Remarquons que les polynômes f sont constitués:

- d'une ***partie quadratique*** $f_2 : (x,y) \rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2$.
  dont le discriminant $\Delta = b^2 - ac$ joue le rôle qu'on a vu précédemment.
- d'une ***partie linéaire*** $f_1 : (x,y) \rightarrow 2px + 2qy$.
- d'une ***partie....constante***: $f_0 : (x,y) \rightarrow r$.

Evidemment, on peut écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) = 2(a\alpha + b\beta + p)\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) = 2(b\alpha - c\beta + q)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta) = 2a;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,\beta) = 2b;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta) = 2c.$$

et constater que les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent simultanément quand le système:

$$\begin{array}{l} a\alpha + b\beta + p = 0 \\ b\alpha + c\beta + q = 0 \end{array}$$

admet un déterminant non nul ***(condition suffisante)*** et on reconnaît en la personne du déterminant, le discriminant Δ! ***(au signe près)***

Au voisinage d'un point solution du dit-système, naturellement:

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(\alpha . \beta) + ah^2 + 2bhk + ck^2$$

où on voit que f admettra un extrêmum selon le signe du discriminant de la forme quadratique f_2 cela va de soit!

Ceci nous conduit au point de vue récapitulatif suivant:

1.1 $A \neq 0$ **,** $C = 0$ **,** $Q = 0$**:** la surface $z = f(x,y)$ est un cylindre parabolique, disons « horizontal » ou parallèle au plan $z = 0$. (*cf figure 1*). On peut aussi « voir » la parabole [6] $z = f(x,0)$ glisser sur une droite parallèle au plan $z = 0$. Ce cylindre peut être totalement au-dessous ou totalement au-dessus de ce plan (***cas où*** $(\Gamma_f) = \varnothing$), il peut être tangent à ce plan (***cas où*** (Γ_f) ***= une droite***), il peut être sécant à ce plan (***cas où*** (Γ_f) ***est constituée de deux droites parallèles***)
On peut encore remarquer que ce cas correspond au fait que le système:

$$a\alpha + b\beta + p = 0$$
$$b\alpha + c\beta + q = 0$$

admet une infinité de solutions (***une infinité de points où*** $f(x,y)$ ***atteint son extrêmum***)

1.2 $A \neq 0$ **,** $C = 0$ **,** $Q \neq 0$**:** la surface $z = f(x,y)$ est un cylindre parabolique, disons « oblique »et coupe le plan $z = 0$ selon une ***parabole*** (***cf figure 2***).Ici, on peut voir la parabole $z = f(x,0)$ glisser sur la droite $z = 2qy + r$. On observe que dans ce cas l'application f n'a pas d'extrêmum et pour être exact le système:

$$a\alpha + b\beta + p = 0$$
$$b\alpha + c\beta + q = 0$$

n'admet aucune solution.

2.1 $A \neq 0$ **,** $C \neq 0$**,** $AC > 0$ **:** la surface $z = f(x,y)$ est une « paraboloïde » (***cf figure 3***). Disons qu'ici, la parabole $z = f(x,0)$ glisse le long de la parabole $z = f(0,y)$, ces deux paraboles tournant leur concavité dans le même sens.. Le dit-paraboloïde coupe le plan $z = 0$, lui est tangent ou est totalement au-dess(o)us selon la position de l'extrêmum de f (***on sait que cet extrêmum existe puisque le discriminant de la la forme quadratique associée à f est AC > 0..c'est le sens de la remarque ci-dessus***).

2.2 $A \neq 0$ **,** $C \neq 0$**,** $AC < 0$ **:** la surface $z = f(x,y)$ est une « selle de cheval »; la parabole :
$z = f(x,0)$ glisse le long de la parabole $z = f(0,y)$ mais cette fois-ci les deux paraboles ont des concavités opposées. La « selle de cheval » coupe le plan $z = 0$ selon une ***hyperbole*** qui peut, à la limite dégénérer en deux droites sécantes.

[6] Là encore, je suppose que l'on reconnaît en tant que parabole, une représentation graphique de fonction du type:
$h: x \to h(x) = ux^2 + vx + w$.

I

Equivalence des définitions monofocale et bifocale.

Pour tout couple de points (F,K) distincts*, et tout réel e strictement positif, on note $\Gamma_e(F,K)$ la conique définie par l'équivalence suivante (correspondant à la leçon 2 du premier chapitre)

$$M \in \Gamma_e(F,K) \Leftrightarrow MF = e\,MH$$

(H désignant la projection orthogonale de M sur la perpendiculaire en K à (KF)).

Pour tout couple de points (F,F') distincts, et tout réel a strictement positif, on note de même en référence à la leçon 1 du premier chapitre, $\Gamma^a(F,F')$ la conique définie bifocalement par ses foyers F et F', et son diamètre focal $2a$.

Théorème :

Etant donnés trois points F, F', K distincts (avec $FF'=2c>0$), si l'on prend les réels e et a de façon telle que $\frac{\overline{FK}}{a} = \frac{1}{e} - e$ alors $\Gamma^a(F,F') = \Gamma_e(F,K)$. L'ensemble des courbes obtenues dans la leçon 1, lorsque a décrit $]0,+\infty[$ correspond donc à l'ensemble des courbes obtenues dans la leçon 2 lorsque e décrit $]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$. Plus précisément on obtient les ellipses pour $a \in]c,+\infty[$ et $e \in]0,1[$ et les hyperboles pour $a \in]0,c[$ et $e \in]1,+\infty[$.

Le premier paragraphe présente la démonstration du théorème dans le cas des ellipses. Le sens définition monofocale implique définition bifocale est très facile à établir, on démontre ensuite le sens réciproque en observant que les intersections des courbes $\Gamma_e(F,K)$ et $\Gamma^a(F,F')$ avec une famille de cercles concentriques de centre F coïncident.
Le second paragraphe utilise le résultat du premier pour alléger la rédaction de la réciproque. Plusieurs autres méthodes sont indiquées en exercice.

On commence donc, dans le cas des ellipses, par étudier l'intersection d'une ellipse $\Gamma_e(F,K)$ et d'un cercle centré en F.

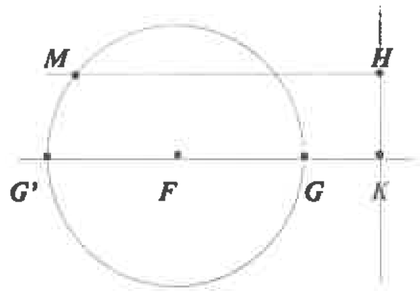
1. Le cas de l'ellipse.

a) Intersection d'une ellipse $\Gamma_e(F,K)$ et d'un cercle centré en F.
Soit (γ) le cercle de centre F et de rayon r, $r>0$.
On se rappelle qu'à la leçon 2, nous avons vu qu'en appelant a la longueur du demi-diamètre focal de $(\Gamma) = \Gamma_e(F,K)$ on a $FK = \frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c}$.

Ainsi

$$M \in (\Gamma) \cap (\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} MF = r \\ MF = e.MH \end{cases}$$

$$M \in (\Gamma) \cap (\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} MF = r \\ MH = \frac{r}{e} = \frac{r.a}{c} \end{cases}$$



Pour construire les points M solutions, on trace l'image de la directrice par la translation de vecteur $\frac{r.a}{c} \frac{\overrightarrow{KF}}{\left\|\overrightarrow{KF}\right\|}$

Le problème a des solutions si et seulement si (T) $\frac{b^2}{c} - r = KG \leq \frac{r.a}{c} \leq KG' = \frac{b^2}{c} + r$

Or (T) $\Leftrightarrow b^2 - r.c \leq r.a \leq b^2 + r.c$

55

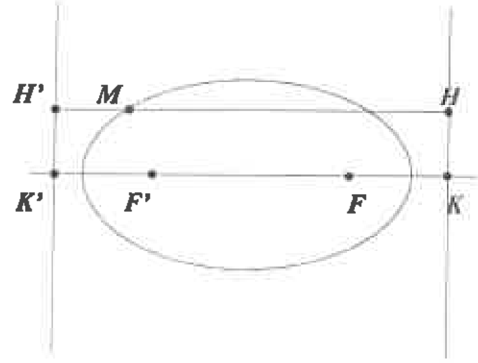
$$(\mathrm{T}) \Leftrightarrow r(a-c) \leq b^2 \leq r(a+c)$$

Conclusion : Le problème a deux solutions si et seulement si $(a-c) \leq r \leq (a+c)$.
Γ et (γ) sont tangents si et seulement si $r = a - c$ ou $r = a + c$.
Dans les autres cas, l'intersection est vide.

b) Equivalence des définitions mono et bifocales de l'ellipse.

Sens direct :

Si la conique $\Gamma_e(F,K)$ est définie par son foyer F et sa directrice D, conformément à la leçon 2, il existe deux couples (F,D) (F',D') de foyers directrices, symétriques par rapport au centre O si son excentricité e est différente de 1. Nous avons vu qu'alors les pieds K et K' des directrices appartenaient (resp n'appartenaient pas) au diamètre focal $[AA']$ dans le cas de l'hyperbole (resp dans celui de l'ellipse).



On peut écrire pour tout point M de $\Gamma_e(F,K)$ $\quad MF + MF' = e(MH + MH') = 2\dfrac{c}{a}\dfrac{a^2}{c} = 2a$

Sens réciproque :

On va appeler (Γ') l'ensemble $\Gamma^a(F,F')$ des points M du plan tel que:

$$M \in (\Gamma') \Leftrightarrow MF + MF' = 2a .$$

Evidemment, grâce à l'étude directe, on sait déjà que tous les points de l'ellipse (Γ) ont cette propriété si bien que $(\Gamma) \subset (\Gamma')$. Pour montrer l'égalité complète, on va couper (Γ') par une série de cercles concentriques de centre F.

Soit (γ) un cercle de centre F et de rayon r, r>0 donné.

$$M \in (\Gamma') \cap (\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} MF = r \\ MF + MF' = 2a \end{cases}$$

$$M \in (\Gamma') \cap (\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} MF = r \\ MF' = 2a - r \end{cases}$$

Les solutions s'obtiennent par intersection des cercles de centre F et de rayon r et de centre F' et de rayon $2a$-r (d'où nécessairement r<$2a$).

Le problème a des solutions si et seulement si $(**)$ $\quad |r-(2a-r)| \leq FF' \leq r + (2a - r)$

Or $\qquad (**) \Leftrightarrow 2|r-a| \leq 2c \leq 2a$

et la première inéquation donne

$$(**) \quad \Leftrightarrow a - c \leq r \leq a + c$$

Conclusion : L'intersection de (Γ') et (γ) a deux solutions si et seulement si $a - c < r < a + c$.
Elle est réduite à un point si et seulement si $r = a - c$ ou $r = a + c$.
Dans les autres cas l'intersection est vide.

Et par conséquent $(\Gamma)= (\Gamma')$.

Exercice:

1°) Déterminer les intersections d'une ellipse $(\Gamma)= \Gamma_e(F,K)$ d'excentricité e, avec une droite (Δ) parallèle à la directrice dont l'intersection avec l'axe focal est E.

2°) Etant donnés un réel a et deux points distincts F et F' tels que $FF'<2a$, on pose comme précédemment $(\Gamma')=\Gamma^a(F,F')$.

Choisissons un repère orthonormé centré au milieu O de $[FF']$ tel que $\vec{j}$ dirige la directrice (D), $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (Δ) une droite fixée parallèle à (D). On note y l'ordonnée d'un point M quelconque de (Δ).

a) Etudier le minimum de la fonction $g: y \to MF + MF'$.

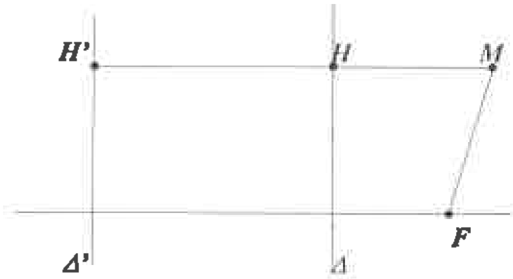
b) Recomposer la réciproque précédente en dénombrant les intersections possibles de (Δ) avec (Γ').

2. Le cas de l'hyperbole.

Equivalence des définitions mono et bifocales de l'hyperbole.

Sens direct :

On peut écrire que pour tout point M de l'hyperbole $\Gamma_e(F,K)$ $\quad |MF - MF'| = e|MH - MH'| = 2\dfrac{c}{a}\dfrac{a^2}{c} = 2a$

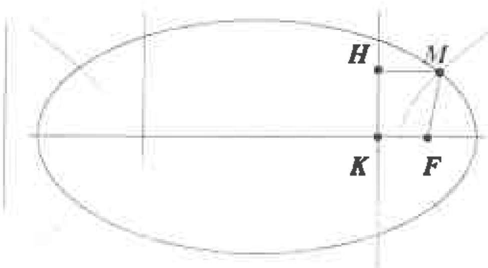


Sens réciproque :

On va appeler $(\Gamma')=\Gamma_a(F,F')$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$M \in (\Gamma') \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a$$

Grâce à l'étude directe, on sait déjà que tous les points de l'hyperbole (Γ) ont cette propriété si bien que $(\Gamma) \subset (\Gamma')$. Puisque (Γ') est symétrique par rapport à la médiatrice (δ) de $[FF']$, il nous suffit de démontrer que l'intersection de (Γ') avec le demi plan (Π) de frontière (δ) qui contient F est $(\Gamma)\cap(\Pi)$.



Soit M un point fixé de $(\Gamma')\cap(\Pi)$.

Il existe une unique ellipse[1] de foyers F,F' qui contient M. Son paramètre m est déterminé par la relation $m = \dfrac{MF+MF'}{2} \geq \dfrac{FF'}{2} = c$

Puisque $MF+MF'=2m$ et $MF'-MF=2a$ on a $MF=m-a$.

On appelle H le projeté orthogonal de M sur la droite d'équation $x=\dfrac{a^2}{c}$

Comme

$$2\vec{MO} \cdot \vec{FF'} = MF'^2 - MF^2 = 4am$$

On a

$$\vec{OM} \cdot \vec{i} = \frac{am}{c}$$

[1] Les deux coniques sont alors appelées *homofocales*. Qu'observe-t-on sur l'angle des tangentes aux points d'intersection ?

et donc $MH = |\overline{MH}| = |\overrightarrow{KM}.\ \vec{i}\,| = |(\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OM}).\ \vec{i}| = |\frac{a}{c}(-a+m)|$

Conclusion $MF = \frac{c}{a}MH$. Le point M appartient donc à (Γ) et la réciproque est établie.

Dans chacun des deux cas précédents on peut écrire $\overline{FK} = \overline{OK} - \overline{OF} = \frac{a^2}{c} - c = a(\frac{1}{e} - e)$.

Si $\overline{FK} > 0$, alors $e \in]0,1[$ et $a \in]c,+\infty[$

Si $\overline{FK} < 0$, alors $e \in]1,+\infty[$ et $a \in]0,c[$

et il est facile de réaliser une bijection entre chacun de ces intervalles.

Exercice:

1°) Déterminer les intersections d'une hyperbole $(\Gamma) = \Gamma_e(F,K)$ d'excentricité e avec un cercle (γ) de rayon variable r et de centre F le foyer.
(On trouvera que le problème a quatre solutions quand $r > c + a$, trois solutions quand $r = c + a$, deux solutions quand $c - a < r < c + a$, une solution quand $r = c - a$ et que dans les autres cas, l'intersection est vide).

2°) Etant donnés un réel a et deux points distincts F et F' tels que $FF' < 2a$, on pose comme précédemment $(\Gamma') = \Gamma^a(F,F')$.

a) Dénombrer les intersections de(Γ') avec un cercle de rayon variable r et de centre F

b) En déduire une nouvelle exposition possible de la réciproque de la proposition précédente dans le cas d'une hyperbole.

Exercice:

Reprendre l'exercice précédent en remplaçant la famille de cercles de centre F par une famille d'ellipses de foyers F et F' et de paramètre variable m ($m>c>a$).

58

II.

Equivalence de la définition monofocale et de celle d'Apollonius*.

Cette partie est rédigée sous forme d'exercice.

Etant donnés deux points A et A' distincts, et λ un réel fixé, on note $L_\lambda(A,A')$ l'ensemble des points du plan défini par l'équivalence suivante (correspondant à la leçon 4 du premier chapitre)

$$M \in L_\lambda(A,A') \Leftrightarrow mM^2 = \lambda \overrightarrow{mA} \,.\, \overrightarrow{mA'}$$

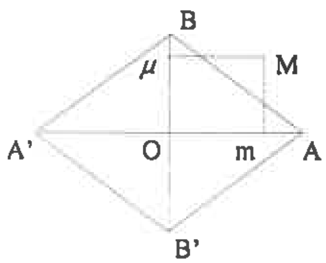
(m désignant la projection orthogonale de M sur (AA')).

Etant donnés deux points F et K distincts, et e un réel strictement positif donné, on note $\Gamma_e(F,K)$ l'ensemble des points du plan défini par l'équivalence suivante (correspondant à la leçon 2 du premier chapitre)

$$M \in \Gamma_e(F,K) \Leftrightarrow MF = e\, MH$$

(H désignant la projection orthogonale de M sur la perpendiculaire en K à (KF)).

Exercice 1:



Etant donné un losange $ABA'B'$ de centre O ($2b=BB' \leq AA'=2a$), montrer qu'il existe un réel λ de $]-1, 0[$ tel que

$$L_\lambda(A,A') = L_{1/\lambda}(B,B')$$

(on pourra commencer par démontrer l'équivalence

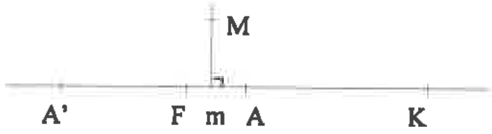
$$mM^2 = \lambda\, \overrightarrow{mA} \,.\, \overrightarrow{mA'} \;\Leftrightarrow\; \mu M^2 = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{\mu B} \,.\, \overrightarrow{\mu B'} + a^2 + \frac{b^2}{\lambda}$$

dans laquelle m et μ désignent les projections orthogonales de M sur les droites (AA') et (BB')).

* SINEGRE Luc, HAMEL Thierry (IREM Rouen), DOCUMENT DE TRAVAIL pour la publication sur les coniques (commission de Géométrie) le 23/01/1996 équivalence (sous forme d'exercice des définition 2 et 4), texte relu par Pierre BONNET, puis ensuite par J.P CORTIER.

Exercice 2:

Etant donnée une division harmonique[1] (A,A',F,K) d'une droite (Δ) on appelle e le réel tel que $\overline{A'F}=e\overline{A'K}$ avec $e \in]0,1[\cup]1,+\infty[$



1°) Montrer que pour tout point M de projection m sur (Δ) on a

$$(1-e^2)\,\overrightarrow{mA}\cdot\overrightarrow{mA'} = MF^2 - e^2\, mK^2 - mM^2$$

2°) En déduire qu'il existe un réel $\lambda \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ tel que

$$(\forall M \in P) \qquad M \in \Gamma_e(F,K) \Leftrightarrow M \in L_\lambda(A,A')$$

Exercice 3:

Montrer que pour toute conique Γ définie par foyer directrice (sauf la parabole) il existe deux points A et A' et un réel $\lambda \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ tels que $\Gamma = L_\lambda(A,A')$.

Montrer réciproquement que pour toute conique Γ définie par l'identité d'Apollonius (sauf le cercle) il existe deux points F et K et un réel $e \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ tels que $\Gamma = \Gamma_e(F,K)$ (on précisera soigneusement la position de (FK)).

[1] Il n'est pas artificiel d'introduire ici une division harmonique (*cf annexe*) qui permet d'exprimer de *façon symétrique* que A et A' divisent le segment $[FK]$ selon le même rapport, comme nous l'avons vu à la leçon 2.

Éc

Equivalence 2 $\Leftrightarrow$ 5

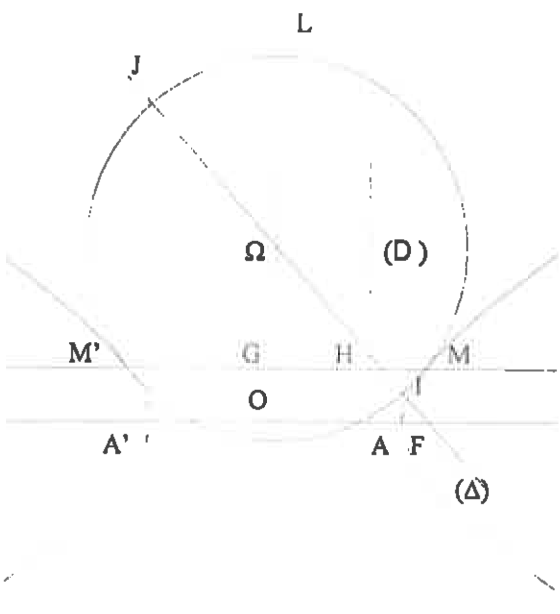
I. De la leçon 2 à la leçon 5.*

On suppose la conique Γ définie par son foyer F, sa directrice D, et son excentricité e, conformément à la leçon 2. On appelle A un sommet de l'axe focal. Si le sommet A est associé, quand e est différent de 1, à un second sommet A', on choisit comme centre du repère le point O, milieu de $[AA']$, sinon on remplace O par A. Dans tous les cas la base $(\vec{i}, \vec{j})$ du repère est orthonormée, le vecteur $\vec{j}$ dirigeant la droite D.

Appelons H le projeté orthogonal d'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quelconque du plan sur la directrice D, et I le barycentre de $(F, 1)$ (H, e). Nous avons vu que I se projette orthogonalement sur (FK) en A, ses coordonnées sont donc

$$x_I = x_A \text{ et } y_I = \frac{ey}{1+e} = \frac{cy}{a+c}.$$

1er cas: $e \neq 1$. On pose $x_A = a$ et l'on introduit aussi le point $J\begin{pmatrix} -a \\ \frac{-cy}{a-c} \end{pmatrix}$ point de (IH) dont la projection orthogonale sur (FK) est A'.



$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow (*)\ \vec{MI}.\vec{MJ} = 0$$

$$(*) \Leftrightarrow (x^2-a^2) + (y - \frac{cy}{a+c})(y + \frac{cy}{a-c}) = 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \quad (**)$$

Réciproquement, tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dont les coordonnées vérifient l'équation (**) appartient au cercle de diamètre $[IJ]$ et donc à la conique Γ d'après la leçon 2.

Une équation cartésienne de Γ est donc

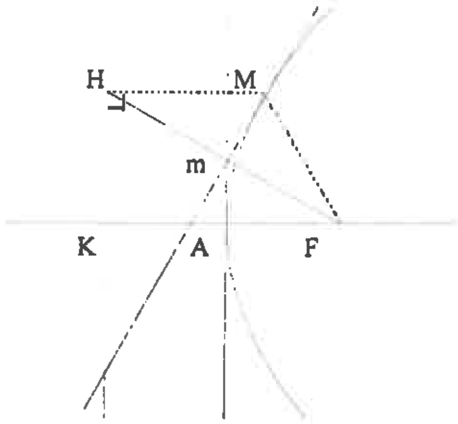
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

$2^{ème}$ cas: $e = 1$. Le point A est au milieu de $[FK]$. Dans ce cas on appelle $\frac{p}{2}$, l'abscisse de F. Le milieu m de $[FH]$ a pour coordonnées

$$x_m=0 \text{ et } y_m=\frac{y}{2}.$$

$$M\binom{x}{y} \in \Gamma \Leftrightarrow (*)\ \vec{mM}.\vec{FH}=0$$

$$(*) \Leftrightarrow (**)\ y^2=2p\,x$$



Réciproquement, tout point $M\binom{x}{y}$ dont les coordonnées vérifient l'équation (**) appartient à la médiatrice de $[FH]$ et donc à la parabole Γ d'après la leçon 2.
Une équation cartésienne de Γ est donc

$$y^2=2p\,x.$$

II. De la leçon 5 à la leçon 2.

Nous avons montré au paragraphe 7 de la leçon 5 que toute conique Γ non dégénérée, possédait, dans un repère orthonormé tel que $(O, \vec{i})$ soit un axe de symétrie, une équation de la forme $y^2 -px^2 -2qx-r = 0$. Dans la suite nous supposerons que Γ n'est pas un cercle, c'est-à-dire que p est différent de -1.

Nous avons cherché le point $F(c,0)$ (sur l'axe des abscisses), pour que la distance MF s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées de M un point de Γ.
Nous avons trouvé l'équation (E)

$$pc^2+2qc+pr-q^2+r = 0$$

en annulant le discriminant du trinôme en x,

$$FM^2 = (x-c)^2+px^2+2qx+r = (1+p)x^2+2(q-c)x+c^2+r.$$

Si $p=0$ (E) possède une racine réelle (cas de la parabole), si $p \neq 0$ (E) possède deux racines réelles ou complexes conjuguées[1] (en effet son discriminant qui vaut $(1+p)(q^2-rp)$ ne peut s'annuler sans que la conique Γ dégénère en un couple de droites).

Dans chacun de ces cas on a $FM^2 = (1+p)\,(x-\frac{c-q}{1+p})^2$. Si l'on introduit D la droite d'équation

[1] Si $p \neq 0$, Γ possède toujours un centre de symétrie. Placer le centre de la conique à l'origine du repère revient donc à supposer $q=0$. Dans le cas où les points F sont imaginaires on choisit comme nouveau repère $(O,\vec{j},\vec{i})$.. L'équation de Γ devient $y^2 -p'x^2 -r'= 0$ avec $p'=\frac{1}{p}$ et $r'=\frac{-r}{p}$. Le discriminant correspondant à ces nouveaux paramètres vaut $(1+p')(-r'p') = (1+p)(\frac{-r}{p^3})$ dont le signe est opposé à celui du discriminant précédent. Quitte à permuter les rôles de x et y, il y a donc toujours un repère qui permet d'obtenir des racines réelles.

$x = \dfrac{c-q}{1+p}$, et si, après avoir remarqué que $1+p>0$, on pose $e=\sqrt{1+p}$,

on a $MF = e\ d(M, D)$.

La conique définie par son équation $y^2 -px^2 -2qx-r = 0$ est donc incluse dans la conique définie par son foyer F, sa directrice D et son excentricité e.

Remarque: {*Cette remarque devrait peut-être être replacée dans la leçon 5.*}
Nous avons vu au paragraphe 4 de la leçon 5 qu'une équation de la tangente en un point $M_0(x_0,y_0)$ de la courbe Γ est $g(x_0,y_0)\ (x - x_0) + h(x_0,y_0)\ (y-y_0) = 0$.
Si nous étendons cette définition au cas d'un point $M_0(x_0,y_0)$ quelconque du plan (éventuellement différent du centre de symétrie de la conique), nous appelons polaire du point M_0 par rapport à Γ la droite $(M_0)^*$ d'équation

$$g(x_0,y_0)\ (x -x_0) + h(x_0,y_0)\ (y-y_0) + f(x_0,y_0) = 0.$$

En effet g et h ne peuvent s'annuler en même temps au point $M_0(x_0,y_0)$. Sinon M_0 serait le milieu de toute corde découpée sur Γ et donc serait centre de symétrie.

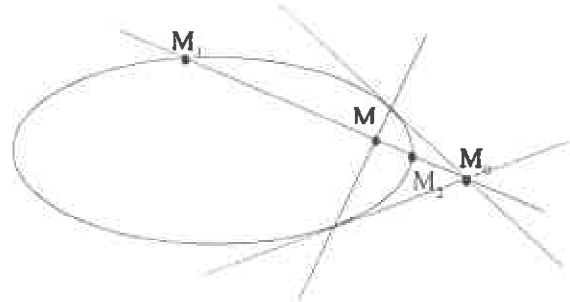
Soit maintenant deux points distincts du plan fixés $M_0(x_0,y_0)$ et $M(x,y)$. Chercher les intersections de la droite (M_0M) avec la conique Γ revient à résoudre l'équation (cf leçon 5 §5)

$$f_2(u,v)t^2 + 2((g(x_0,y_0)u + h(x_0,y_0)v)t + f(x_0,y_0) = 0$$

où (u,v) désignent les composantes d'un vecteur directeur de $(M_0\ M)$, par exemple ici $(x-x_0;y-y_0)$.
On introduit l'équation paramétrique de la droite (M_0M) passant par M_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{M_0M}$. Les paramètres (éventuellement complexes) des intersections de Γ et de (M_0M) sont t_1 et t_2. Ceux de M_0 et M sont 0 et 1.

Proposition: Etant donné un point $M_0(x_0,y_0)$ du plan.
Le point $M(x , y)$ (distinct de M_0) appartient à $(M_0)^*$ si et seulement si

$$\frac{\overline{M_0M_2}}{\overline{M_0M_1}} : \frac{\overline{MM_2}}{\overline{MM_1}} = -1$$



Démonstration:
Comme (avec les notations précédentes)

$$\frac{\overline{M_0M_2}}{\overline{M_0M_1}} : \frac{\overline{MM_2}}{\overline{MM_1}} = \frac{t_2}{t_1} : \frac{t_2-1}{t_1-1}$$

la proposition sera vraie si et seulement si

$$2\, t_1\, t_2 - (t_1+t_2) = 0.$$

On retrouve donc la somme et le produit des racines de l'équation en t.
La proposition sera vraie si et seulement si

$$2\,\frac{f(x_0,y_0)}{f_2(x- x_0,\ y- y_0)} + \frac{2(g(x_0,y_0)(x- x_0)+h(x_0,y_0)\ (y- y_0))}{f_2(x- x_0,\ y- y_0)} = 0$$

donc si et seulement si

$$g(x_0,y_0)\ (x -x_0) + h(x_0,y_0)\ (y-y_0) + f(x_0,y_0) = 0$$

donc si et seulement si le point M appartient à $(M_0)^*$.

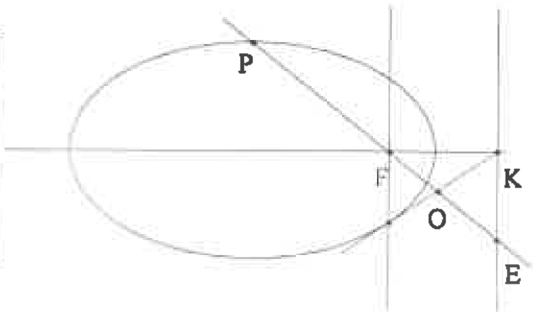
Toute sécante à la conique menée par un point M_0 définit un quadruplet $(M_0;M;M_1;M_2)$ qui forme ce qu'on appelle une **division harmonique** (cf annexe). Ceci prouve que la définition de la droite $(M_0)^*$ est intrinsèque à la conique et indépendante du choix des équations qui la représentent.
On en déduit en outre la symétrie: $M \in (M_0)^*$ si et seulement si $M_0 \in (M)^*$.

Exercice: Montrer qu'un point M_0 appartient à la courbe Γ si et seulement si sa polaire par rapport à Γ est tangente à Γ.

Le sens direct est évident d'après ce qui précède. Pour établir la réciproque, on suppose que la polaire de M_0 est tangente à la courbe en M, la polaire de M (qui est donc $(M_0)^*$ d'après le sens direct) contient donc M_0 et, en remplaçant les coordonnées M_0 dans l'équation de sa polaire on trouve $f(x_0,,y_0)=0$; le point M_0 appartient donc à la courbe. Si la polaire d'un point M_0 rencontre la conique en un point T la droite (TM) est une tangente contenant M.
fin de la remarque..

Application au foyer.
Si nous choisissons l'équation $y^2 -px^2 -2qx-r = 0$ comme équation de départ, il est facile d'obtenir $yy_0 -pxx_0 -qx-qx_0 -r = 0$ comme équation de la polaire d'un point $M_0.(x_0,y_0)$ quelconque du plan.
L'équation de la polaire $(F)^*$ d'un point F défini précédemment est donc $(pc+q)x = qc+r$.
Le point K intersection de $(F)^*$ avec l'axe des abscisses a pour abscisse $x_K = \dfrac{qc+r}{pc+q}$ ou encore, compte tenu de l'équation (E), $x_K = \dfrac{c-q}{1+p}$. La directrice D trouvée est donc la polaire $(F)^*$ du point F. On obtient comme conséquence de la proposition précédente l'énoncé suivant:

Corollaire: Soit (PQ) une corde de la conique contenant un foyer F. On appelle E l'intersection de (PQ) avec la directrice D associée au foyer F alors $(P\ Q\ F\ E) = -1$ (c'est-à-dire que les quatre points forment une division harmonique).



Nous avons donc pu exhiber un foyer et une directrice d'une conique (différente d'un cercle) définie analytiquement sans repasser par le détail des équations spécifiques. Le foyer est un point d'un des axes de symétrie qui permet d'exprimer FM rationnellement, et la directrice associée est la polaire de ce point.

Exercice: redémontrer l'implication **5** $\Rightarrow$ **2** en utilisant les équations réduites des trois types de coniques non dégénérées établies en **5**.

III
(6)

Equivalence 2 $\Leftrightarrow$ 5

I. De la leçon 2 à la leçon 5.*

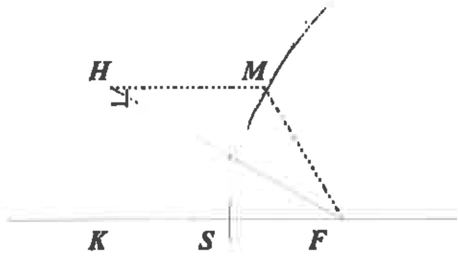
On suppose la conique (Γ) définie par son foyer F, sa directrice D, et son excentricité e, conformément à la leçon 2. On appelle K le projeté orthogonal de F sur D et on pose $KF = p$.
On choisit un repère orthonormal $(K, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'origine K, $\vec{\imath}$ étant un vecteur directeur de (KF) et $\vec{\jmath}$ un vecteur directeur de D.
Un point M du plan appartient à (Γ) si et seulement si $MF = e\, MH$, avec H le projeté orthogonal de M sur la directrice D.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ((\Gamma) \Leftrightarrow (*)\ MF^2 = e^2\, MH^2$$

$$(*) \Leftrightarrow (x^2 - p^2) + y^2 = e^2x^2$$

$$(*) \Leftrightarrow (1-e^2)\, x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$$

1[er] cas: $e = 1$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 = 2p(x - \frac{p}{2})$.



Prenons comme nouvelle origine le point $S\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, S est le milieu de $[FK]$. Dans ce nouveau repère:

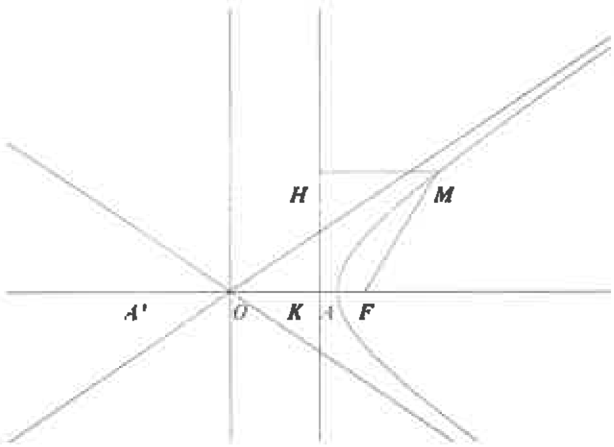
$$M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in (\Gamma) \Leftrightarrow Y^2 = 2pX.$$

Une équation cartésienne de (Γ) est :

$$Y^2 = 2pX$$

2[ème] cas: $e \neq 1$,

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Gamma) \Leftrightarrow (1-e^2)\,[\,x - \frac{p}{(1-e^2)}]^2 + y^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)}.$$



Prenons comme nouvelle origine le point $O\begin{pmatrix} \frac{p}{(1-e^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ est strictement positif la conique (Γ) possède deux points A et A' situés sur (FK) symétriques par rapport à O.

Dans ce nouveau repère:

$$M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)}} = 1$$

*

65

On a $e = \frac{c}{a}$, $\frac{ep}{(1-e^2)} = OA = a$, et donc $\frac{e^2p^2}{(1-e^2)} = a^2 - c^2$. Alors

$$M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Une équation cartésienne de *(Γ)* est :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

II. De la leçon 5 à la leçon 2.

Nous avons montré au paragraphe 7 de la leçon 5 que toute conique *(Γ)* non dégénérée, possédait, dans un repère orthonormé tel que $(O, \vec{i})$ soit un axe de symétrie, une équation de la forme $y^2 - px^2 - 2qx - r = 0$. Dans la suite nous supposerons que *(Γ)* n'est pas un cercle, c'est-à-dire que p est différent de -1.

Nous avons cherché le point $F(c,0)$ (sur l'axe des abscisses), pour que la distance MF s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées de M un point de *(Γ)*.
Nous avons trouvé l'équation (E)

$$pc^2 + 2qc + pr - q^2 + r = 0$$

en annulant le discriminant du trinôme en x,

$$FM^2 = (x-c)^2 + px^2 + 2qx + r = (1+p)x^2 + 2(q-c)x + c^2 + r.$$

Si $p=0$ (E) possède une racine réelle (cas de la parabole), si $p \neq 0$ (E) possède deux racines réelles ou complexes conjuguées[1] (en effet son discriminant qui vaut $(1+p)(q^2-rp)$ ne peut s'annuler sans que la conique *(Γ)* dégénère en un couple de droites).

Dans chacun de ces cas on a $FM^2 = (1+p)\left(x - \frac{c-q}{1+p}\right)^2$. Si l'on introduit D la droite d'équation

$x = \frac{c-q}{1+p}$, et si, après avoir remarqué que $1+p>0$, on pose $e = \sqrt{1+p}$, on a $MF = e\, d(M,D)$.

La conique définie par son équation $y^2 - px^2 - 2qx - r = 0$ est donc incluse dans la conique définie par son foyer F, sa directrice D et son excentricité e.

Remarque: {*Cette remarque devrait peut-être être replacée dans la leçon 5.*}
Nous avons vu au paragraphe 4 de la leçon 5 qu'une équation de la tangente en un point $M_0(x_0,y_0)$ de la courbe *(Γ)* est $g(x_0,y_0)(x - x_0) + h(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$.
Si nous étendons cette définition au cas d'un point $M_0(x_0,y_0)$ quelconque du plan (éventuellement différent du centre de symétrie de la conique), nous appelons polaire du point M_0 par rapport à *(Γ)* la droite $(M_0)^*$ d'équation

$$g(x_0,y_0)(x - x_0) + h(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0) = 0.$$

En effet g et h ne peuvent s'annuler en même temps au point $M_0(x_0,y_0)$. Sinon M_0 serait le milieu de <u>toute</u> corde découpée sur *(Γ)* et donc serait centre de symétrie.

Soit maintenant deux points distincts du plan fixés $M_0(x_0,y_0)$ et $M(x,y)$. Chercher les intersections de la droite $(M_0 M)$ avec la conique *(Γ)* revient à résoudre l'équation (cf leçon 5 §5)

$$f_2(u,v)t^2 + 2((g(x_0,y_0)u + h(x_0,y_0)v)t + f(x_0,y_0) = 0$$

où (u,v) désignent les composantes d'un vecteur directeur de $(M_0 M)$, par exemple ici $(x-x_0;y-y_0)$.
On introduit l'équation paramétrique de la droite $(M_0 M)$ d'origine M_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{M_0M}$. Les paramètres (éventuellement complexes) des intersections de *(Γ)* et de $(M_0 M)$ sont t_1 et t_2. Ceux de M_0 et M sont 0 et 1.

[1] Si $p \neq 0$, *(Γ)* possède toujours un centre de symétrie. Placer le centre de la conique à l'origine du repère revient donc à supposer $q=0$. Dans le cas où les points F sont imaginaires on choisit comme nouveau repère $(O, \vec{j}, \vec{i})$.. L'équation de *(Γ)* devient $y^2 - p'x^2 - r' = 0$ avec $p' = \frac{1}{p}$ et $r' = \frac{-r}{p}$. Le discriminant correspondant à ces nouveaux paramètres vaut $(1+p')(-r'p') = (1+p)(\frac{-r}{p^3})$ dont le signe est opposé à celui du discriminant précédent. Quitte à permuter les rôles de x et y, il y a donc toujours un repère qui permet d'obtenir des racines réelles.

Proposition: Etant donné un point $M_0(x_0,y_0)$ du plan. Le point $M(x,y)$ (distinct de M_0) appartient à $(M_0)^*$ si et seulement si

$$\frac{\overline{M_0 M_2}}{\overline{M_0 M_1}} : \frac{\overline{M M_2}}{\overline{M M_1}} = -1$$

Démonstration:
Comme (avec les notations précédentes)

$$\frac{\overline{M_0 M_2}}{\overline{M_0 M_1}} : \frac{\overline{M M_2}}{\overline{M M_1}} = \frac{t_2}{t_1} : \frac{t_2-1}{t_1-1}$$

la proposition sera vraie si et seulement si

$$2\, t_1\, t_2 - (t_1+t_2) = 0.$$

On retrouve donc la somme et le produit des racines de l'équation en t.
La proposition sera vraie si et seulement si

$$2\,\frac{f(x_0,y_0)}{f_2(x-x_0,\,y-y_0)} + \frac{2(g(x_0,y_0)(x-x_0)+h(x_0,y_0)\,(y-y_0))}{f_2(x-x_0,\,y-y_0)} = 0$$

donc si et seulement si

$$g(x_0,y_0)\,(x-x_0) + h(x_0,y_0)\,(y-y_0) + f(x_0,y_0) = 0$$

donc si et seulement si le point M appartient à $(M_0)^*$.

Toute sécante à la conique menée par un point M_0 définit un quadruplet $(M_0;M;M_1;M_2)$ qui forme ce qu'on appelle une **division harmonique** (cf annexe). Ceci prouve que la définition de la droite $(M_0)^*$ est intrinsèque à la conique et indépendante du choix des équations qui la représentent.
On en déduit en outre la symétrie: $M \in (M_0)^*$ si et seulement si $M_0 \in (M)^*$.

Exercice: Montrer qu'un point M_0 appartient à la courbe (Γ) si et seulement si sa polaire par rapport à (Γ) est tangente à (Γ).

Le sens direct est évident d'après ce qui précède. Pour établir la réciproque, on suppose que la polaire de M_0 est tangente à la courbe en M, la polaire de M (qui est donc $(M_0)^*$ d'après le sens direct) contient donc M_0 et, en remplaçant les coordonnées M_0 dans l'équation de sa polaire on trouve $f(x_0,y_0)=0$; le point M_0 appartient donc à la courbe. Si la polaire d'un point M_0 rencontre la conique en un point T la droite (TM) est une tangente contenant M.
fin de la remarque..

Application au foyer.
Si nous choisissons l'équation $y^2 - px^2 - 2qx - r = 0$ comme équation de départ, il est facile d'obtenir $yy_0 - pxx_0 - qx - qx_0 - r = 0$ comme équation de la polaire d'un point $M_0.(x_0y_0)$ quelconque du plan.
L'équation de la polaire $(F)^*$ d'un point F défini précédemment est donc $(pc+q)x = qc+r$.
Le point K intersection de $(F)^*$ avec l'axe des abscisses a pour abscisse $x_K = \dfrac{qc+r}{pc+q}$ ou encore, compte tenu de l'équation (E), $x_K = \dfrac{c-q}{1+p}$. La directrice D trouvée est donc la polaire $(F)^*$ du point F. On obtient comme conséquence de la proposition précédente l'énoncé suivant:

Corollaire: Soit (PQ) une corde de la conique contenant un foyer F. On appelle E l'intersection de (PQ) avec la directrice D associée au foyer F alors $(P\ Q\ F\ E) = -1$ (c'est-à-dire que les quatre points forment une division harmonique).

Nous avons donc pu exhiber un foyer et une directrice d'une conique (différente d'un cercle) définie analytiquement sans repasser par le détail des équations spécifiques. Le foyer est un point d'un des axes de symétrie qui permet d'exprimer FM rationnellement, et la directrice est la polaire de ce point.

Exercice: redémontrer l'implication **5** $\Rightarrow$ **2** en utilisant les équations réduites des trois types de coniques non dégénérées établies en **5**.

Equivalence 3 ⇔ 4

Il peut être intéressant de voir , comment, au 18 ᵉ siècle, était établi le lien entre la section plane (Γ_3) d'un cône de révolution et la définition d'une conique selon Apollonius (Γ_4). Nous l'emprunterons aux

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE, D'ALGÉBRE ET DE GÉOMÉTRIE,

Avec une Introduction aux Sections Coniques.

Ouvrage utile pour faire entrer dans l'esprit de ces Sciences & pour disposer à l'étude de la Physique & des Sciences Physico-Mathématiques.

Par J. M. MAZÉAS, *ancien Professeur de Philosophie en l'Université de Paris, au Collége Royal de Navarre.*

– Paris 1758 –

Les résultats y sont énoncés sous forme de deux théorèmes :

943. *Dans l'Ellipse les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Rectangles des Abscisses correspondantes* (fig. 2.).

944. *Dans l'Hyperbole les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Rectangles des Abscisses correspondantes* (fig. 3.).

Cas de l'ellipse

Usons pour la suite d'une écriture plus en rapport avec nos usages. Dans le cercle de diamètre [HG] nous avons $PM^2 = PH.PG$.

En utilisant les rapports obtenus dans les triangles SPH et SpF d'une part et spE et sPG d'autre part il vient :

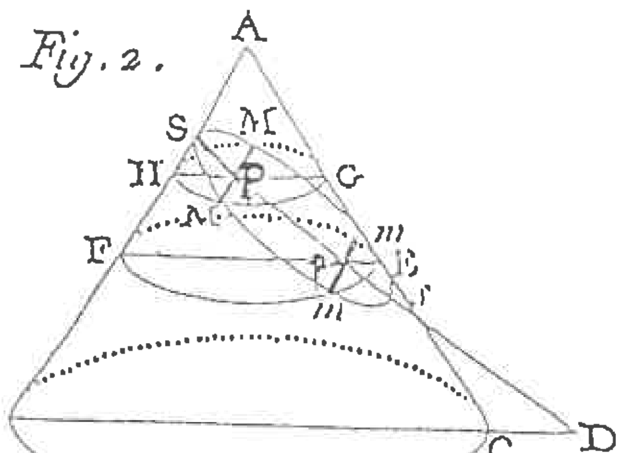
$$PH = pF\,\frac{SP}{Sp} \quad \text{et} \quad PG = pE\,\frac{sP}{sp}$$

$$\text{Donc : } PH.PG = pF\,.\,pE\,.\,\frac{SP.sP}{Sp\,.\,sp}$$

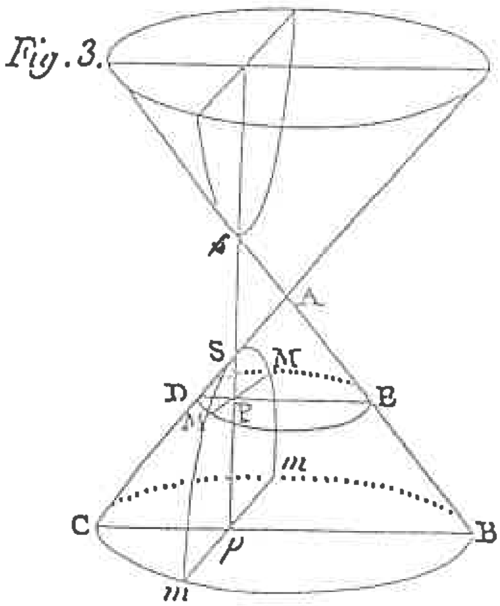
$$\text{or } pF.pE = pm^2$$

$$\text{Par suite} \quad : \frac{PM^2}{PS\,.\,Ps} = \frac{pm^2}{pS\,.\,ps}$$

Les segments PS, Ps, pS et ps sont nommés les abscisses des points M et m de la conique ; PM et pm étant les ordonnées.



Cas de l'hyperbole



Le raisonnement est le même. On usera de cette autre figure où il y a bien les deux branches de la section.

En utilisant des mesures algébriques on aura une unicité de démonstration dans les deux cas.

$$PM^2 = k\,\overline{PS}.\,\overline{Ps}$$

k négatif pour le genre ellipse,
k positif pour le genre hyperbole.

Avec k = – 1 apparait la propriété caractéristique du cercle. il s'établit alors un lien de géométrie plane entre cercle et ellipse.

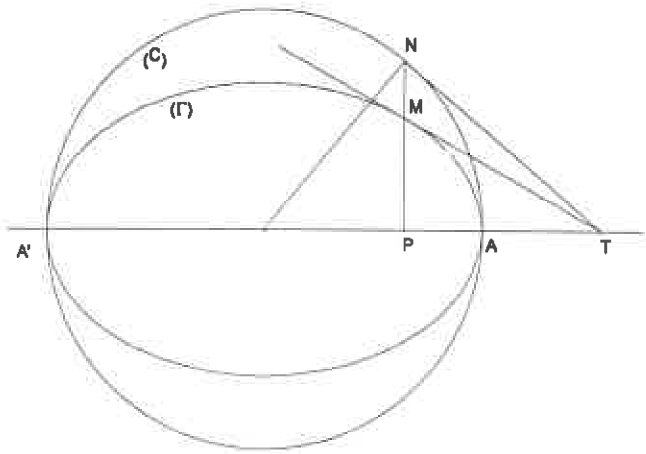
Soit le cercle (C) de diamètre [AA']. Tout point N de ce cercle se projetant en P sur [AA'] vérifie

$$PN^2 = -\,\overline{PA}.\overline{PA'}.$$

Le point M d'une ellipse (Γ) de grand axe [AA'] se projetant également en P vérifie, lui :

$$PM^2 = -\lambda^2\,\overline{PA}.\overline{PA'}$$

$$\text{alors : } \overline{PM} = \lambda\,\overline{PN}$$



On dit que l'ellipse (Γ) se déduit du cercle (C) par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport λ.

Cette transformation est intéressante pour étudier la tangente en M à (Γ) qui n'est autre que la transformée de la tangente (NT) à (C) laquelle recoupe l'axe (AA') en T conjugué harmonique de P par rapport à A et A' (voir annexe...).

2c

Dans le cas de l'hyperbole

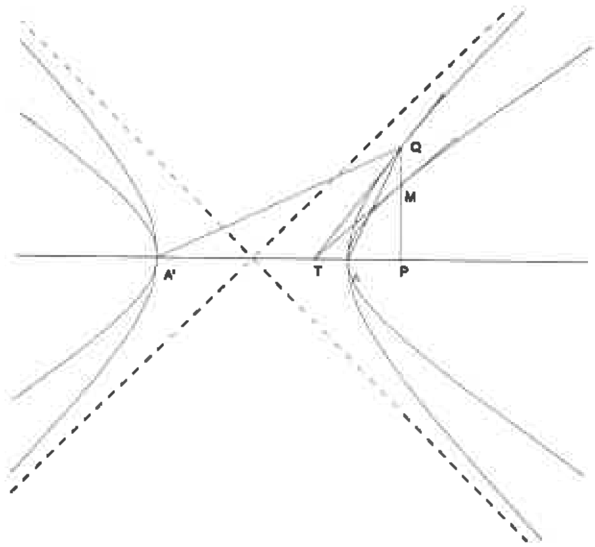
$$PM^2 = \lambda^2\ \overline{PA}.\overline{PA'}$$

on notera que la même affinité présente toute hyperbole comme transformée de l'hyperbole définie par

$$PQ^2 = \overline{PA}.\overline{PA'}$$

qui n'est autre que l'hyperbole équilatère de grand axe [AA'].

Les tangentes en M et Q recoupent également l'axe (AA') en T conjugué harmonique de P par rapport à A et A'.



Il n'est pas inutile, ici de souligner les liens entre le cercle (C) de diamètre [AA'] et l'hyperbole équilatère (Γ) de grand axe [AA']. Soient N ∈ (C) et Q ∈ (Γ) se projetant orthogonalement en n et q sur [AA'].
On a :

1. $nN^2 = -\ \overline{nA'}.\overline{nA}$ et $qQ^2 = \overline{qA'}.\overline{qA}$.

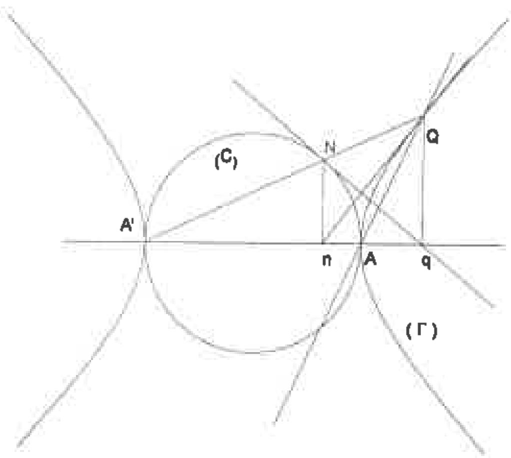
2. $\widehat{NAA'} + \widehat{AA'N} = 1$ droit
   et $|\widehat{QAA'} - \widehat{AA'Q}| = 1$ droit.

Si, de plus, nous prenons N et Q alignés avec A' :

3. Les droites (AN) et (AQ) sont symétriques par rapport à (AA').

4. n et q sont conjugués harmoniques par rapport à A et A'.

5. (nQ) est tangente en Q à (Γ) et (qN) tangente à (C) en N. Ces droites se coupent sur la tangente commune en A à (C) et (Γ).



AFFINITE

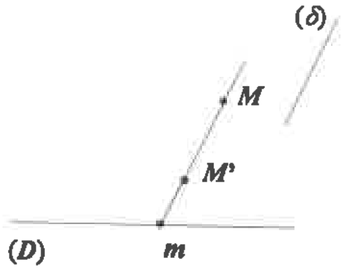
I. Etude en dimension 2.*

1. Définitions.

Définition: Etant donnés une droite (D) du plan P, un scalaire λ non nul, et une direction (δ) non parallèle à (D), on considère l'application ponctuelle qui à tout point M de (D) associe le point M' telle que

$$\overrightarrow{mM'} = \lambda\overrightarrow{mM}$$

où m désigne le projeté de M sur (D) parallèlement à (δ).
Cette application est appelée affinité de base (D), de direction (δ) et de rapport λ. On la note $a((D),(\delta),\lambda)$.



Remarques:
L'ensemble des points fixes de l'affinité qui est l'ensemble des points invariants par la projection sur (D) coïncide donc avec (D). Si la direction (δ) est orthogonale à (D) on parle d'affinité orthogonale. Les symétries axiales et les réflexions sont donc des cas particuliers d'affinités.

Théorème: Toute affinité est une application affine. L'application linéaire associée à $a((D),(\delta),\lambda)$ est de la forme $p+\lambda q$ avec p la projection sur (d) la direction de (d) parallèlement à (δ) et q la projection sur (δ) parallèlement à (d). On appelle de telles applications des affinités vectorielles de base (D) et de direction (δ).

Démonstration:
Soit O un point fixé sur (D).
Pour tout point M du plan d'image M' par a, et m par la projection sur (D) parallèlement à (δ) on a:

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM'} = \overrightarrow{Om}+\lambda\overrightarrow{mM} = (1-\lambda)\ \overrightarrow{Om}+\lambda\overrightarrow{OM} = ((1-\lambda)\ p+\lambda\mathrm{Id})\ (\overrightarrow{OM}) = (p+\lambda q\ )\overrightarrow{OM}$$

(puisque $p+q=\mathrm{Id}$)

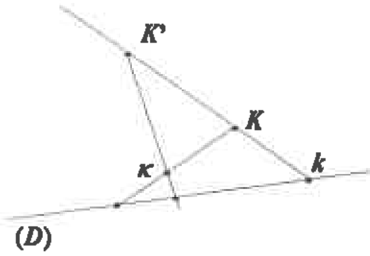
Conséquences:
- On a $\det(p+\lambda q)=\lambda$ non nul donc les affinités sont des bijections affines.
- L'ensemble des affinités est un sous ensemble du groupe affine. En particulier, l'ensemble des affinités de base donnée et de direction donnée est un groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{R}^*$.
- Les affinités transforment donc les droites en droites, conservent le parallélisme et les barycentres. Plus exactement l'image par $a((D),(\delta),\lambda)$ d'une droite sécante en N à (D) est une droite sécante en N à (D). L'image d'une droite parallèle à (D) est une droite parallèle à (D).
- Dans une base bien choisie (le premier vecteur étant pris dans la direction de (D) et l'autre dirigeant (δ) la matrice de l'affinité vectorielle est: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
- La première des opérations élémentaires qui permettent de résoudre un système de 2 équations linéaires par la méthode dite du *pivot de Gauss*, $L_i \leftarrow \lambda\ L_i$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$) correspond à multiplier à gauche la matrice du système par une matrice d'une affinité vectorielle de rapport λ.

72

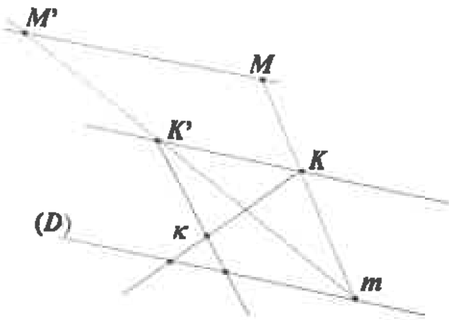
2. Composition.

Les affinités faisant partie du groupe affine, on peut s'interroger sur la nature de la composée de deux affinités, en particulier lorsqu'elles ont la même base.
Etant données a et a' deux affinités de même base (D) et de directions respectives (δ) et (δ') et de rapports λ et λ' l'application affine aoa' est entièrement déterminée par l'image d'un vrai triangle.
Comme la droite (D) contient déjà 2 points fixes, on détermine entièrement aoa'en l'appliquant à un point fixé K non situé sur (D). Soit K' l'image de K par cette application.
Si $K'=K$, le points K son image par a' κ, son projeté sur (D) parallèlement à (δ) sont alignés; les directions (δ) et (δ') sont donc égales et donc nécessairement[1] $\lambda'=\lambda^{-1}$.

Si K est différent de K' et si (KK') coupe (D) en k l'affinité de base (D) de direction (KK') et de rapport $\frac{\overline{kK'}}{\overline{kK}}$ coïncide avec aoa' sur le repère affine. La composée des deux affinités est donc encore une affinité de même base dans ce cas.



Si K est différent de K' et si (KK') est parallèle à (D) alors la composée des deux affinités n'est pas une affinité (cette situation se produit lorsque $\lambda\lambda'=1$). On peut toutefois tracer facilement l'image d'un point M quelconque de E. Si le point M n'appartient pas à la parallèle à (D) passant par K, on trace (KM) qui coupe (D) en m. L'image de M est alors à l'intersection de la parallèle à (D) passant par M et de (mK'). Cette nouvelle application affine s'appelle une transvection de base (D).



L'application linéaire t associée à cette transvection porte le nom de transvection vectorielle. Sa restriction à (D) est bien sûr l'identité. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de (δ), alors si $\vec{u}=\vec{AB}$ (avec $A \in (D)$) $t(\vec{u}) = \vec{AB'} = \vec{u}+\vec{v}$ (avec $\vec{v} \in (\delta)$). En choisissant une base de E qui contient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la matrice de t dans cette base prendra la forme suivante $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On verifie réciproquement que toute application affine ayant un point fixe et de matrice associée $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une transvection.

Remarque :
Nous avons vu au paragraphe 1 que l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (avec $\lambda \in$ ✪) correspondait à multiplier à gauche la matrice du système par une matrice d'affinité. La seconde opération élémentaire $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ correspond donc à la multiplication par la matrice d'une transvection. Si une matrice est inversible, on sait que l'on peut la réduire, par la méthode de Gauss Jordan, à l'identité en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes. Toute matrice inversible est donc le produit de matrices d'affinités et de transvections (qu'on appelle matrices élémentaires).

[1] On peut en exercice démontrer directement ce résultat par l'algèbre linéaire.

Exercice: Montrer que l'ensemble des applications affines qui fixent point par point une droite (D) est l'ensemble des affinités et des transvections de base (D).

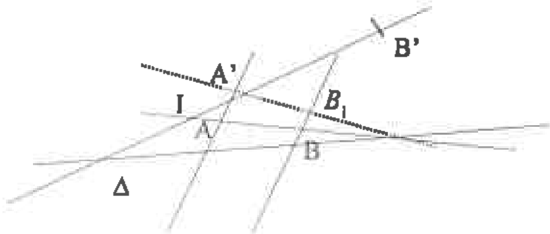
3. Composition.

Théorème : Toute application affine du plan $\mathcal{P}$ bijective est le produit d'au plus trois affinités.

Démonstration:
Soit f une bijection affine qui transforme le vrai triangle A, B, C en le vrai triangle A', B', C'.

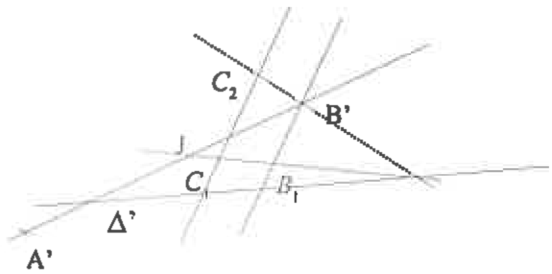
Premier point: Il existe une affinité a par laquelle $\begin{array}{l} A \to A' \\ B \to B_1 \\ C \to C_1 \end{array}$ et que l'on peut choisir de sorte que les points A' B' et B_1 ne soient pas alignés.

En effet, si $(A'B')$ et (AB) sont sécantes en I, choisissons une droite (Δ) ne contenant pas I et sécante à (AA') (si $(A'B')$ et (AB) sont parallèles, on choisit (Δ) de direction différente). Soit a l'affinité de base (Δ) qui transforme A en A'; l'image de B par a est le point B_1 et les points A' B' et B_1 ne sont pas alignés.



Deuxième point: Il existe une affinité b par laquelle $\begin{array}{l} A' \to A' \\ B_1 \to B' \\ C_1 \to C_2 \end{array}$ et que l'on peut choisir de sorte que les droites ($A'B'$) et $(C_2 C')$ ne soient pas parallèles.

En effet, si $(A'B')$ et $(B_1\ C_1)$ sont sécantes en J, choisissons une droite (Δ') ne contenant pas J et sécante à $(B_1\ B')$ (si elles sont strictement parallèles, on choisit (Δ') de direction différente). Soit b l'affinité de base (Δ') qui transforme B_1 en B'; l'image de C_1 par b est le point C_2 et les droites ($A'B'$) et $(C_2\ C')$ ne sont pas parallèles.



Dernier point: l'affinité c de base ($A'B'$) qui transforme C_2 en C' est bien définie puisque les droites ($A'B'$) et $(C_2\ C')$ ne soient pas parallèles. L'application affine coboa transforme bien le vrai triangle A, B, C en le vrai triangle A', B', C' et coïncide donc avec f.

Remarque: La méthode de Gauss Jordan prouve que toute matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}$ se décompose en produit de transvections et d'affinités. Le théorème précédent permet de préciser qu'il existe une décomposition qui n'utilise que trois matrices d'affinités[2].

[2] Il faut noter une différence importante entre les deux méthodes. La méthode algébrique n'utilise que des affinités et des transvections dont les matrices sont élémentaires (obtenues à partir de l'identité par une opération élémentaire) alors que les trois matrices de notre théorème ne représentent des affinités que dans des bases bien adaptées.

Exercice: Montrer qu'une matrice carrée A admet deux valeurs propres distinctes et non nulles si et seulement si A est semblable au produit de deux matrices d'affinités vectorielles de bases et de directions réciproques.

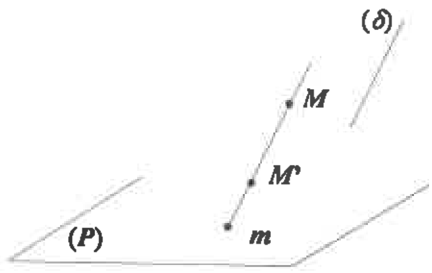
II. Affinité en dimension 3.

1. Définition.

Définition: Etant donnés un plan (P) de l'espace E, un scalaire λ non nul, et une direction (δ) non parallèle à (P), on considère l'application ponctuelle qui à tout point M de E associe le point M' telle que

$$\vec{mM'} = \lambda \vec{mM}$$

où m désigne le projeté de M sur le plan (P) parallèlement à (δ).
Cette application est appelée affinité de base (P), de direction (δ) et de rapport λ. On la note $a((P),(\delta),\lambda)$.



Remarques:
L'ensemble des points fixes de l'affinité coïncide avec (P).
Si la direction (δ) est orthogonale à (P) on parle, comme dans le plan, d'affinité orthogonale. Les symétries axiales et les réflexions sont donc des cas particuliers d'affinités.

Théorème: Toute affinité est une application affine. L'application linéaire associée à $a((P),(\delta),\lambda)$ est de la forme $p+\lambda q$ avec p la projection sur (Π) la direction de (P) parallèlement à (δ) et q la projection sur (δ) parallèlement à (Π). On appelle de telles applications des affinités vectorielles de base (Π) et de direction (δ).

La démonstration de ce théorème est semblable à celle qu'on a effectuée dans le plan et l'énumération des conséquences de ce théorème sont laissées au lecteur.
Comme dans le plan on démontre que la composée de deux affinités de même base n'est pas toujours une affinité mais aussi une *transvection* lorsque la droite définie par un point et son image par cette composée n'est pas sécante avec la base de l'affinité.

Exercice: Toute bijection affine de l'espace est la composée d'au plus quatre affinités.

2. Affinité et projection.

Théorème: Etant donné un dièdre formé de deux plans (P) et (Π), l'angle $(P,Q) \equiv \alpha$ $[\pi]$ et O un point quelconque de (P), il existe un repère orthonormé R, $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de (P) et un repère un repère orthonormé R', $(O', \vec{i}, \vec{j}')$, de (Π) (O' désignant la projection orthogonale de O sur (Π))tel que si les coordonnées d'un point quelconque M sont (x,y) dans R les coordonnées de sa projection orthogonale M' sur (Π) seront (x, y') tels que

$$y' = \cos\alpha\, y$$

Autrement dit on obtient alors les coordonnées de la projection orthogonale M' de M sur (Π) en effectuant une affinité vectorielle a de rapport $\cos\alpha$ sur les coordonnées de M.

Démonstration:
Choisissons $\vec{i}$ dans la direction de l'intersection des deux plans (P) et (Π) et O un point fixé de (P), O'sa projection orthogonale sur (Π). Soit donc un repère orthonormé R, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de (P) et un point M de ce repère de coordonnées (x, y), M' son projeté orthogonal sur (Π). La projection orthogonale étant une application affine d'application linéaire associée ϕ, on a

$$\vec{O'M'} = \phi(\vec{OM}) = \phi(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\,\phi(\vec{i}) + y\phi(\vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j_1}.$$

Le vecteur $\vec{j}-\vec{j_1}$ est orthogonal à (Π) donc $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{j_1} = 0$.

On a donc $(\vec{j}, \vec{j_1}) = \alpha$ $[\pi]$ (en choisissant par exemple $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$).

Prenons $\vec{j}'$ unitaire et directement colinéaire à $\vec{j}$, on aura finalement $\vec{j_1} = \cos\alpha\,\vec{j}'$ et les coordonnées de M' seront $(x, y\cos\alpha)$ dans R', $(O', \vec{i}, \vec{j}')$.

15

Application: La projection orthogonale sur (Π) d'un cercle tracé sur (*P*) est une ellipse dont le grand axe appartient à la direction de (Π) ∩ (*P*). Réciproquement toute ellipse dont le grand axe appartient à la direction de (Π) ∩ (*P*) est la projection orthogonale d'un cercle de (*P*).

III. Géométrie complexe.,

Nous n'avons pas encore utilisé la possibilité de prendre ℂ *comme corps de base. Pour pouvoir y parvenir nous nous autoriserons à prendre des points de coordonnées imaginaires. Par exemples le cercle d'équation* $x^2 + y^2=1$ *sera dit sécant à la droite d'équation* $x=2$ *en deux points dont les ordonnées sont deux complexes conjugués. Remarquons enfin que le milieu de ces deux points peut être placé sur le dessin. Les affinités de rapport complexe opèrent ainsi dans l'ensemble des points de coordonnées réelles ou complexes.*

Lemme[3]: Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont orthogonales si et seulement si le birapport $[m,m',i,-i]=-1$ (*le* dans ☼ ☎$(m, m', i, -i)$ forment une division harmonique[4]).

En effet par définition $[m,m',i,-i] = \dfrac{m-i}{m+i} : \dfrac{m'-i}{m'+i} = \dfrac{mm'+i(m-m')+1}{mm'-i(m-m')+1}$

Et donc $[m,m',i,-i]=-1$ si et seulement si $mm'=-1$

Proposition: Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont les bissectrices sont (b) et (b'). L'affinité a(D ,(d), i).transforme deux droites réelles orthogonales en deux droites imaginaires dont les bissectrices sont (b) et (b').

Démonstration: On vérifie que l'affinité a(D ,(d), i) transforme deux droites réelles d et d' de coefficients directeurs m et m'en deux droites imaginaires (Δ) et (Δ') de pentes $\mu= im$ et $\mu=im'$.
Comme $[m,m',i,-i]= [\mu ,\mu',-1,1]$, les deux droites d et d' sont orthogonales si et seulement si la division $(\mu ,\mu',-1,1)$ est harmonique, donc si et seulement si le faisceau $((\Delta)$, (Δ'), (b), $(b'))$ est harmonique. D'après la relation de *Newton* on a donc $\mu\mu'=1$ et donc les droites (Δ) et (Δ') sont symétriques par rapport aux droites (b) et (b').

3 La formule de *Laguerre*

$$[m,m',i,-i] = e^{2it}$$

explicitée en termes des coefficients directeurs m et m' de deux droites, permet d'exprimer t l'angle de droites comme un birapport (l'orientation du plan étant opérée par le choix du couple $(i,-i)$ en place de $(-i,i)$).

On peut la démontrer facilement en remarquant que $\dfrac{mm'+i(m-m')+1}{mm'-i(m-m')+1} = \dfrac{1+i \tan t}{1-i \tan t} = \dfrac{\cos t+i \sin t}{\cos t-i \sin t}$

4 Cf l'annexe consacrée à la division harmonique.

DIVISION HARMONIQUE

Dans tout ce qui suit E désigne un espace affine de dimension 2 sur le corps ☼ (section **I** et **II**) ou ♨ (au cours de la section **III**).

I. Définitions. Vocabulaire.*

a. Définition

Définition: Quatre points alignés A, B, C, D donnés dans cet ordre forment une division harmonique si et seulement si

$$\overline{CA}.\overline{DB} + \overline{CB}.\overline{DA} = 0.$$

Cette définition équivaut, quand les points sont distincts à l'égalité

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

(on dit alors que C et D divisent [AB] dans des rapports opposés)

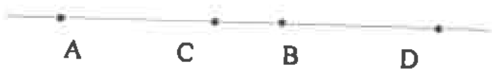
soit encore à

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$$

(le scalaire $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ *est appelé le rapport anharmonique du quadruplet* (A,B,C,D))

Remarques:

1. La définition ne dépend pas du repère affine choisi pour définir les mesures algébriques.



2. La relation de définition peut s'écrire $\overline{AC}.\overline{BD} + \overline{BC}.\overline{AD} = 0$, donc A, B, C, D forment une division harmonique si et seulement si C, D, A, B en forment une autre (les birapports (A,B,C,D) et (C,D,A,B) sont égaux). On écrit aussi que (A,B,C,D) est une division harmonique, ou encore que les couples (A,B) et (C,D) se divisent harmoniquement l'un l'autre.
On dit aussi encore que C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B.

Exercice: Exhiber toutes les permutations des quatre lettres qui laissent invariant la division harmonique (A,B,C,D).

3. Si a, b, c, d sont les abscisses des points A, B, C, D d'origine O:

77

$$(A,B,C,D) = \frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d} = \frac{a-c}{b-c}\times\frac{b-d}{a-d}.$$

Si A, B, C désignent trois points distincts fixés d'une droite muni d'un repère affine, l'application qui à tout réel x abscisse d'un point M courant de (AB) associe le rapport anharmonique (A,B,C,M) est une application *homographique* du corps $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application ϕ: $x \to \frac{mx+n}{px+q}$ telle que $mq-np \neq 0$. En effet si $mq-np$ était nul, l'application homographique serait constante (effectuez par exemple une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle) ce qui est exclu.

4. On déduit de 3 que la division (A,B,C,D) est harmonique si et seulement si

$$(a+b)(c+d) = 2\,(ab+cd)$$

(*Relation dite de Mersenne*).

b. Formules classiques.

Si l'on s'en tient aux seules longueurs on a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, dans ce cas, comme l'écrit par exemple Poncelet[1], "la ligne AB est divisée en segments proportionnels par le point C ou le point D". Mais pourquoi utiliser le mot "harmonique"? Parce que la distance CD est la moyenne harmonique des distances DA et DB.

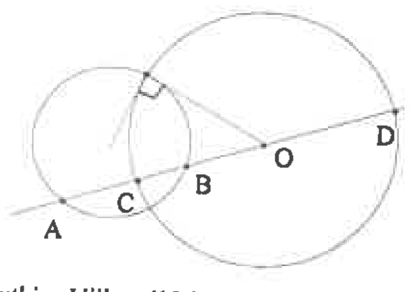
En effet d'après la remarque du paragraphe précédent on a $\frac{a-c}{b-c}\times\frac{b}{a} = -1$ si l'on choisit D au centre du repère, et donc

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

(*Relation dite de Descartes*[2]).

On obtient une relation classique en introduisant le point O milieu du segment $[CD]$. Dans ce cas la relation principale devient $\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b+c}{a+c} = -1$ ou encore $c^2 = ab$. Cette relation dite de *Newton* est utilisée en optique géométrique.

Le rapport (A,B,C,D) est donc anharmonique si et seulement si $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = OC^2 = OD^2$, c'est-à-dire si et seulement si tout cercle contenant



[1] Traité des propriétés projectives des figures Tome 1 p.12. Paris Gauthier-Villars (1865).

[2] Cette relation était bien connue dès l'Antiquité. On la retrouve dans l'étude d'une harmonie en musique; a, b, c désignant les longueurs des cordes. On appelait c la *médiété harmonique* de a et b.

Elle était définie ainsi: l'excès de c sur a est à l'excès de b sur c comme a est à b, soit $\frac{c-a}{a} = \frac{b-c}{b}$. Cette relation était jadis notée c-a : b-c :: a : b; elle équivaut à la relation de Descartes.

A et B est orthogonal[3] au cercle de diamètre CD.

c. La division harmonique dans nos classes.

Etant donnés (A,B,C,D) quatre points alignés, il est toujours possible de considérer et que C et D, quand ils sont différents de A, sont barycentres de A et B affectés des coefficients respectifs u et -1 et u' et -1.

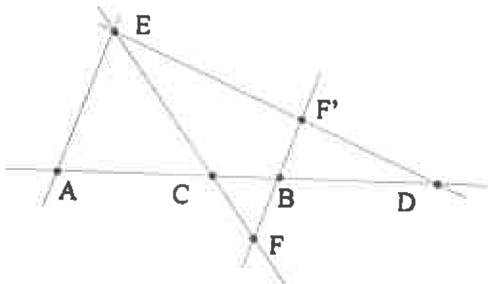
Dans ce cas $$(A,B,C,D) = u' \div u.$$

On obtient alors les énoncés suivants:

Proposition:
Quatre points alignés et distincts, A, B, C, D forment une division harmonique si et seulement si les systèmes de coefficients qui permettent d'exprimer C et D comme barycentres de A et B sont les mêmes à un signe près.
Autrement dit A, B, C, D forment une division harmonique si et seulement si les homothéties de centre C et D qui envoient A sur B ont des rapports opposés.

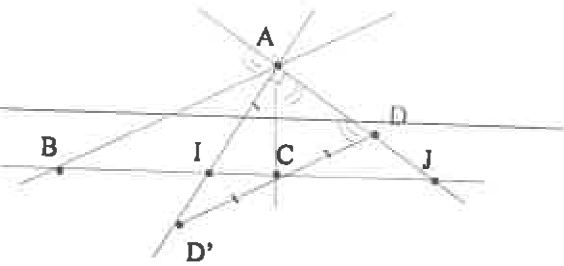
Le problème classique de la détermination du quatrième point d'une division harmonique (les trois premiers points A, B, C étant donnés distincts) revient donc à construire un point de la droite (AB) qui a les mêmes coefficients (à un signe près) qu'un point C déjà fixé.

On construit l'image F d'un point E par l'homothétie de centre C qui envoie A sur B.
Le point F se trouve à l'intersection de la droite (CE) avec la parallèle à (AE) menée par B.
Le point D est solution du problème si et seulement si l'image par l'homothétie de centre D qui envoie A sur B est le symétrique F' de F par rapport à B.
Le point D est donc construit à l'intersection des droites (EF') et (AB) lorsqu'elles sont sécantes, c'est-à-dire lorsque C est distinct du milieu de $[AB]$.



Application1: un exemple de division harmonique.
On construit dans un triangle non isocèle en A, les pieds I et J des bissectrices intérieure et extérieure relatives à l'angle en A.

Si le triangle ABC est non aplati, la droite (AB) n'est perpendiculaire ni à la bissectrice



[3] *Cf l'annexe sur les faisceaux de cercles.*

79

(AI) ni à la bissectrice (AJ). On mène par C la parallèle à (AB) qui coupe (AJ) en D et (AI) en D'. Le triangle ACD est isocèle en C (regarder de près les angles à la base...) Le point C est donc le pied de la médiane issue de A dans le triangle rectangle DAD'. On reconnaît la configuration de l'exemple précédent et l'on peut conclure:

La division (B,C, I,J) est harmonique et les points I et J divisent le segment $[BC]$ dans le rapport des côtés du triangle. On a

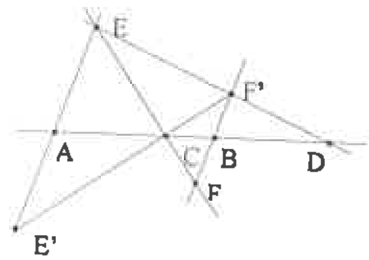
$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}} = -\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{AB}{AC}$$

Exercice:

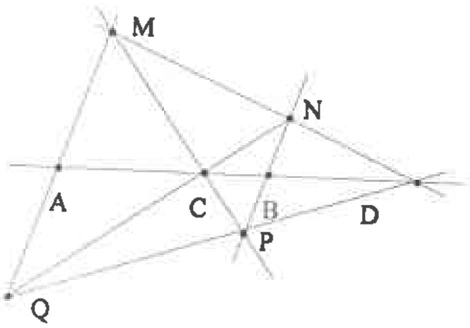
Montrer que l'ensemble des points M tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$ qu'on appelle cercle d'*Apollonius* relatif au sommet A; en appliquant la relation de *Newton* montrer que ce cercle est orthogonal au cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les centres des trois cercles d'*Apollonius* du triangle sont alignés.

Application2: Le trapèze complet.

Si dans la construction du quatrième point de la division harmonique (A,B,C,D) on ajoute le point E' symétrique de E par rapport à A, alors les trois points D, F E' sont alignés (l'homothétie de cenre D qui envoie B sur A, envoie F' sur E et donc le symétrique de F' par rapport à B sur le symétrique de E par rapport à A). Le quadrilatère $FF'EE'$ est donc un trapèze. Les points C et D sont les intersections des diagonales. La configuration $FF'EE'CD$ prend le nom de *trapèze complet.*



Réciproquement étant donné un trapèze complet $MNPQCD$, alors la composée de l'homothétie de de centre D qui envoie P sur Q (*resp* Q sur P) et de l'homothétie de centre C qui envoie Q sur N (*resp* P sur M) est une symétrie centrale (le produit des rapports fait -1) de centre B (*resp* A). Les homothéties de centre C et D qui envoient A sur B ayant des rapports opposés on peut énoncer:



Dans un trapèze complet $MNPQCD$ les côtés non parallèles d'une part et les diagonales d'autre part se coupent en des points conjugués harmoniques par rapport aux milieux des côtés parallèles et sont donc alignés avec eux.

d. Compléter la droite.

Etant donnés trois points alignés A, B, C le quatrième point D tel que la division (A,B,C,D) soit harmonique est déterminé si et seulement si C n'est pas le milieu de $[AB]$. On remarque toutefois que lorsque C se rapproche du milieu de $[AB]$ la droite (EF') tend à devenir parallèle à (AB). On convient par conséquent de rajouter à la droite (AB) un point $\infty_{(AB)}$ appelé point à l'infini de la droite (AB) et défini comme le conjugué harmonique du milieu de $[AB]$.
Si Ω désigne le milieu de $[AB]$, on a donc $(A,B,\Omega, \infty_{(AB)}) = -1$.
On a par définition, si l'on note a, b, ω les abscisses de A, B, Ω et symboliquement par ∞ l'abcisse de ∞_{AB}

$$\frac{\infty - a}{\infty - b} = -\frac{c-a}{c-b} = 1$$

Le point $\infty_{(AB)}$ est aussi considéré comme le barycentre de A et B affectés de coefficients opposés.

Remarque:

L'application homographique ϕ de **1.a** réalise une bijection de ☼ $\setminus \{-\frac{p}{q}\}$ dans ☼ $\setminus\{\frac{m}{n}\}$. On peut donc prolonger ϕ en une bijection Φ de ☼ $\cup$ ⊛"$\{\infty\}$ en posant $\Phi(\infty) = \frac{c-a}{c-b}$ et $\Phi(a) = \infty$.

e. Homographies.

Définition: On appelle homographie d'une droite Δ (complétée par un point à l'infini) toute application H de Δ dans Δ, telle que si R désigne un repère de Δ, l'application qui à x abscisse de M associe l'abscisse de H (M) soit une application homographique de ☼ dans ☼.

On remarque que cette définition ne dépend pas du choix du repère puisque après un changement de repère affine, une homographie reste une homographie.

Proposition:
Toute homographie de la droite Δ complétée, conserve les birapports sur Δ. Plus exactement, une application de Δ dans Δ est une homographie si et seulement si elle conserve les birapports.

Pour montrer le sens direct, il suffit de remarquer qu'une homographie est la composée de similitudes $x \to ax+b$ et de l'application $x \to \frac{1}{x}$. Les similitudes conservent les rapports et donc le birapport. Un simple calcul (laissé au lecteur) montre que la seconde application conserve les birapports.

Pour montrer le sens réciproque on désigne ABC trois points distincts de la droite Δ et leurs images $A'B'C'$ par une application ponctuelle T qui conserve les biraports. Nous avons vu en **1.a** que dans ce cas les application ϕ_{ABC} et $\phi_{A'B'C'}$ qui associaient aux abscisses de M et M' les birapports (A,B,C,M) et (A',B',C',M') étaient deux homographies de ☼∞.
L'application $\phi^{-1}_{A'B'C'} \circ \phi_{ABC}$ est donc une homographie de ☼ et par suite T est donc une homographie de Δ.

f. Point de vue moderne.
A chaque point de la droite (AB) correspond un système de coordonnées barycentriques (x,y) défini à un facteur de proportionnalité près non nul. Réciproquement à tout couple de réels (différent de $(0,0)$) correspond un point de la droite (AB) si l'on convient de lui associer $\infty_{(AB)}$ lorsque les coefficients sont opposés. On représente ainsi les points de la droite par les droites vectorielles de ☼².
Définissons dans le ☼ espace vectoriel ☼² la forme $\langle (x,y);(x',y') \rangle = xy'+x'y$. Il est facile de démontrer que cette forme est une forme bilinéaire symétrique non dégénée. Si en effet un vecteur (a,b) était orthogonal à tout vecteur, il serait en particulier orthogonal à $(1,0)$ donc b serait nul, et à $(0,1)$ donc a le serait également. On ne peut appliquer cette forme sur la droite (AB), puisque les systèmes de coordonnées ne sont pas uniques. Toutefois, si un vecteur (x,y) est orthogonal à un vecteur (x',y'), tout vecteur $\lambda(x,y)$ le restera. On peut donc définir une orthogonalité sur la droite (AB) induite par celle de ☼². Il faut prendre garde au fait que la forme n'est pas définie. En effet les vecteurs isotropes sont donnés par l'équation $2xy=0$. Les points A et B sont donc les représentants, sur la droite (AB) des deux droites isotropes. Le point $C(u,-1)$ sera orthogonal au point $D(u',-1)$ si et seulement si $-u'-u=0$, soit $(A,B,C,D) = u' \div u. = -1$.

En termes modernes, les propriétés de l'anharmonisme se ramènent à la simple orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire...

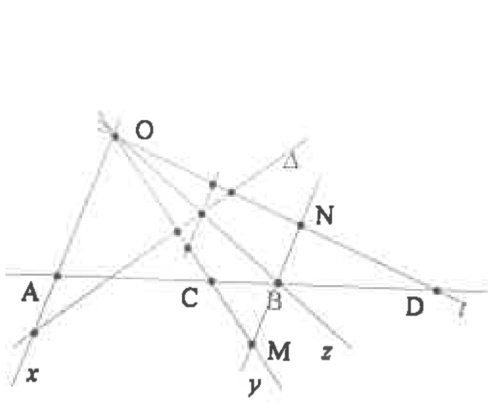
II. Faisceau harmonique.

La notion de division harmonique trouve son prolongement dans celle de *faisceau harmonique*.

a. Définitions.

Définition: Soit O un point extérieur à la droite qui est le support de la division harmonique (A,B,C,D). Le faisceau $((OA), (OB), (OC), (OD))$ est alors dit *faisceau harmonique*.
On appelle aussi *faisceau harmonique* un faisceau de quatre droites parallèles qui contiennent respectivement A, B, C, D.

Soit un faisceau (Ox, Oy, Oz, Ot) déterminé sur une sécante par quatre points (A,B,C,D). La parallèle à (Ox) menée par B coupe (Oz) et (Ot) en M et N.



L'homothétie de centre C qui envoie B sur A,

82

transforme M en O, donc

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}.$$

De même en utilisant l'homothétie de centre D qui envoie B sur A transforme N en O.

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

Le point B est donc le milieu de $[MN]$ si et seulement si la division (A,B,C,D) est harmonique.

Conséquences:

1. Un faisceau de droites concourantes est harmonique si et seulement si trois des droites déterminent sur une sécante parallèle à la quatrième deux segments égaux.

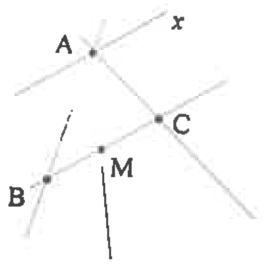
2. Par suite toute droite Δ est coupée par le faisceau harmonique selon une division harmonique.

Pour démontrer le deuxième point, il suffit de retrouver la construction du conjugué harmonique en appliquant le premier résultat à une sécante Δ.

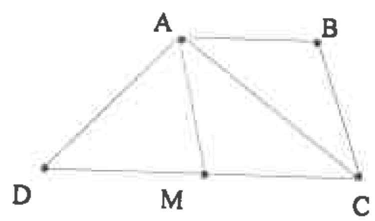
Remarque: L'introduction d'un point à l'infini sur la sécante permet d'interpréter le premier énoncé comme un cas particulier du second.

Exemples:

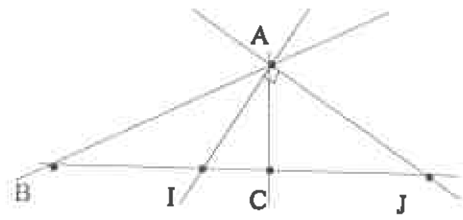
Dans un triangle ABC, les droites (AB), (AC) la médiane (AM) et la parallèle (Ax) à (BC) forment un faisceau harmonique.



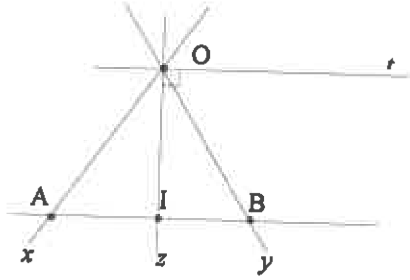
Dans un trapèze $ABCD$ où M est le milieu de $[CD]$, les droites (AB), (AC), (AM) et (AD) forment un faisceau harmonique.



Avec les bissectrices de l'angle $\hat{A}$, les côtés (AB) et (AC) d'un triangle ABC forment un faisceau harmonique. Dans ce cas deux des rayons conjugués sont orthogonaux.



Réciproquement si dans un faisceau harmonique deux rayons conjugués sont orthogonaux, alors ils sont les bissectrices des angles formés par les autres rayons.
En effet si dans un faisceau (Ox, Oy, Oz, Ot) les deux rayons Oz et Ot sont orthogonaux. Une parallèle à Ot coupe Ox et Oy en A et B, et Oz en I. Le point I qui est le milieu de $[AB]$ d'après le premier énoncé, est aussi le pied de la hauteur associée au sommet O dans le triangle OAB qui est donc isocèle. Les droites Oz et Ot sont donc deux axes de symétrie.



Exercice1: Etant donnés quatre droites concourantes en O, centre d'un repère R affine du plan.

Montrer que le birapport (m_1, m_2, m_3, m_4) de leur pentes ne dépend pas des directions du repère R choisi.

Montrer que le faisceau des quatre droites est harmonique si et seulement si ce birapport vaut -1.[4]

Exercice2: Montrer en utilisant l'exercice 1 que le birapport[5] de quatre droites concourantes en O, peut être défini en utilisant n'importe qu'elle transversale.

---

[4] En associant à chaque droite contenant O son coefficient directeur dans un repère fixé (on associe à la verticale ∞) on identifie le faisceau de droite à une nouvelle droite. Seule une étude algébrique plus poussée (et hors de ce propos) pourrait traduire correctement cette dualité en définissant une nouvelle orthogonalité. Toutefois Cayley au début du mémoire *A sixth memoir upon Quantic* aborde ce problème de dualité par un balancement sémantique:

> *« En employant la géométrie d'une dimension en référence à la géométrie de deux dimensions considérée comme une géométrie de points et de droites dans un plan, il est nécessaire de considérer*
>
> *1°) que le mot point peut signifier point et le mot droite, droite.*
>
> *2°) que le mot point peut signifier droite et le mot droite, point. »*

Ainsi la droite d'équation $ux+vy+w=0$ correspond à notre droite ordinaire (*ie* un lieu de points qui définit une droite) si l'on a fixé (u,v,w), mais en revanche elle correspond à un faisceau (*ie* un lieu de droites qui définit un point) si l'on fixe (x,y,z).

[5] Cette propriété est connue depuis longtemps, comme le rappelle Chasles puisqu'elle apparaît à la 129ème proposition du septième livre de Pappus:
"Quand quatre droites sont issues d'un même point, toute transversale les rencontre en quatre points dont le rapport anharmonique a toujours la même valeur, quelle que soit la transversale".
(Aperçu Historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, p.302, Paris Gauthier-Villars 1889). La notion de birapport est donc une propriété projective, puisqu'elle est conservée par toute projection centrale.

Exercice3: Soient *a, b, c, d* quatre droites d'un faisceau, et *d, e, f ,g* quatre autres droites d'un second faisceau. On suppose que les droites *a* et *e*, *b* et *f*, *c* et *g* sont sécantes en *X, Y , Z.* Alors les points *X, Y, Z* sont alignés si et seulement si les birapports *(a,b,c,d)* et *(e,f,g,d)* sont égaux.

III. Prolongements.

1. Extension du corps de base.

On peut étendre la notion de division harmonique au plan complexe considéré comme un espace affine de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ et appelé la droite complexe.
On vérifiera facilement que restent alors valides les relations fondamentales du paragraphe 1, relation de Descartes, de Mersenne à condition de remplacer les abscisses *a, b* des points *A, B* etc par les affixes z_A, z_B. On peut également compléter cette droite par un ***point à l'infini*** ∞.

Proposition:
Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points *(A,B,C,D)* soient cocycliques ou alignés est que le birapport $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}$ soit réel.

Démonstration:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \arg\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=0 \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\vec{CA},\vec{CB})=(\vec{DA},\vec{DB}) \quad [\pi]$$

Remarque: si le lieu des points *z* tels que $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z}{z_A-z}$ contient ∞, nous savons que

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-\infty}{z_A-\infty}=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}.\text{est réel.}$$

Il s'agit donc d'une droite. Ceci correspond bien avec l'idée selon laquelle une droite est la limite d'un cercle qui est astreint à contenir un point de plus en plus éloigné.

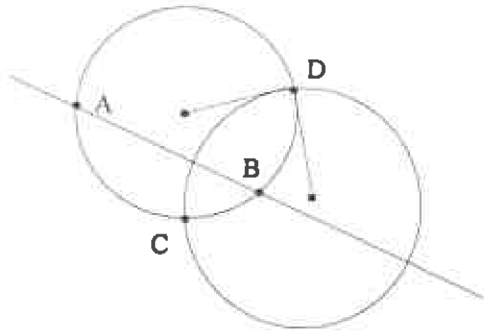
La proposition suivante vient de manière presque évidente.

Proposition:
Etant donnés *(A,B)* distincts le point *C* et le point *D* appartient au même cercle d'Apollonius relativement à *A* et *B* si et seulement si $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}:\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\right|=1.$

85

Définition: On appelle quadrangle harmonique, quatre points dont les affixes forment une division harmonique.

On sait que si par exemple A,B,C ne sont pas alignés les quatre poitns (A,B,C,D) seront cocycliques sur un cercle C et que C et D seront les intersections avec C d'un cercle d'Apollonius de base AB donc orthogonal à C



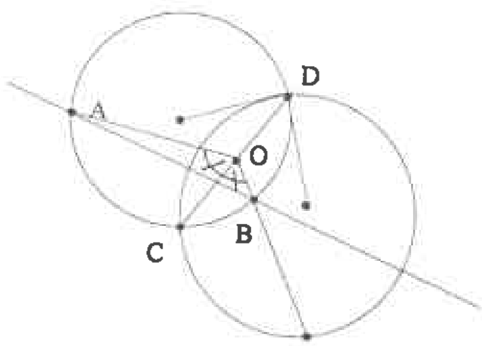
Réciproquement: Si l'on considère un cercle C contenant A et B et un cercle γ d'Apollonius de base AB. Si l'on appelle C et D les intersections de C et γ le quadrangle (A,B,C,D) sera harmonique.

Si nous prenons un repère centré en O au milieu de $[CD]$. La relation de Newton

$$z_C^2 = z_A\, z_B$$

indique que (CD) est une bissectrice de $(\vec{OA},\vec{OB})$

(de plus $OC^2 = OA.OB$).



2. Involutions.

Si ϕ désigne une homographie $x \to \frac{mx+n}{px+q}$, la relation définie par ϕ peut prendre la forme suivante:

$$y=\phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad pxy + qy - mx - n = 0$$

L'application ϕ sera involutive si et seulement si cette relation est *symétrique* c'est-à-dire si et seulement si pour tout x et y réels $qy - mx = qx - my$, soit si et seulement si $m+q = 0$.

Définition et proposition:

Une homographie $x \to \frac{mx+n}{px+q}$ est appelée une involution lorsqu'elle est involutive, c'est-à-dire lorsque $m+q = 0$.

En algèbre on dira que deux scalaires x et y vérifient une *relation involutive* s'il existe trois constantes m, n, p telles que $pxy - m(x+y) - n = 0$.

On dira aussi que deux points M et M' d'une droite Δ décrivent des *divisions en involution* si l'application qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de M' est une *involution* , autrement dit si les abscisses de M et de M' vérifient une relation involutive.

On fixe désormais p, m, n trois réels tels que $m^2+np \neq 0$.
Soit $pxy - m(x+y) - n = 0$ la relation involutive reliant deux points M et M' d'abscisse x et y.

Si $p=0$ (et donc $m\neq 0$) les points M et M' sont symétriques par rapport au point I d'abscisse $\frac{-2n}{m}$.
Si $p\neq 0$, on peut interpréter la relation précédente comme une relation de *Mersenne*:

$$2(xy-\frac{m}{p}) = \frac{-2m}{p}(x+y)$$

et donc en posant A et B d'abscisses a et b telles que $\begin{cases} a+b = \frac{-2m}{p} \\ ab = -\frac{n}{p} \end{cases}$

la relation devient $(A,B,M,M') = -1$

Il faut remarquer que les points A et B ne sont pas nécessairement réels; en revanche leur milieu I (image de l'infini par l'involution) est toujours réel, son abscisse est $\frac{-m}{p}$, on l'appelle le *point central* de l'involution.

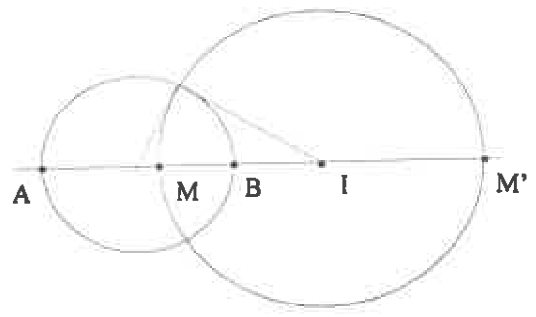
On obtient en effet grâce à la relation de *Newton*, si X, Y et Z désignent les abscisses de M, de M' et de A dans le nouveau repère

$$XY = Z^2$$

Or puisque Z est une racine du trinôme $\xi^2 + \frac{2m}{p}\xi - \frac{n}{p}$, on a $Z^2 = \frac{m^2+np}{p^2}$.

1ercas le discriminant du trinôme m^2+np est strictement positif. L'équation précédente devient

$$\overline{IM}\,.\,\overline{IM'} = IA^2.$$

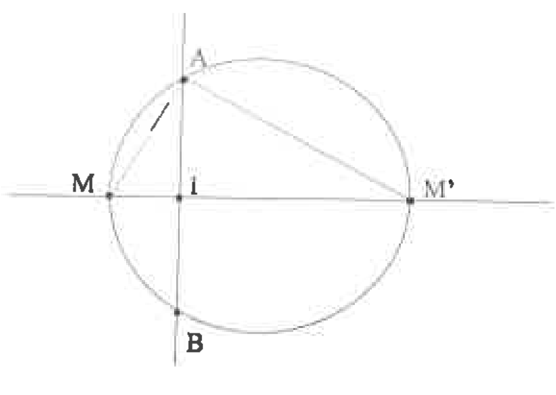


Le cercle de diamètre $[MM']$ reste orthogonal au cercle de diamètre $[AB]$.

2èmecas le discriminant du trinôme m^2+np est strictement négatif.

Soit A le point d'affixe $i\frac{\sqrt{-m^2-np}}{p}$, B le point d'affixe conjugué (le centre du repère étant le point I).
La relation précédente devient

$$z_M . z_{M'} = z_A^{\ 2},$$



donc la division (A,B,M,M') est encore harmonique mais dans ♁ .
Le points (A,B,M,M') sont donc cocycliques sur un cercle de diamètre [M,M'].

Exercices

Exercices sur la leçon 1

1. On donne un trapèze (*ABCD*) (les côtés parallèles étant (*AB*) et (*CD*)) tel que la base [*AB*] est fixe, tel que la base [*CD*] garde une longueur fixe *l* et que la somme des longueurs des côtés non parallèles *AD*+*BC* garde une longueur constante 2*a*.

a) Quel est l'ensemble des points *C* et *D*? (on pourra introduire le point *B* tel que *CD* =*BB'*).

b) Donner les coefficients qui permettent d'exprimer *G* intersection de (*BD*) et (*CA*) comme barycentre de *B* et *D*. En déduire le lieu des points *G*.

2. Soit *A*, *B* ,*C* trois points d'une droite (*D*), (Γ) un cercle variable tangent en *A* à (*D*) et *M* d'intersection des deux tangentes à (Γ) menées par *B* et *C* qui sont disctinctes de (*D*). Déterminer le lieu des points *M* :

a) Lorsque *A* est extérieur à [*BC*].

b) Lorque *A* est sur [*BC*].

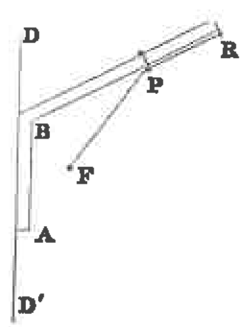
3. Construire une parabole connaissant la directrice (*D*) et deux tangentes (*T*) et (*T'*).

4. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés ?

5. On considère sur une droite (Δ) du plan trois points *A*, *B*, *C* dans cet ordre et la famille F des cercles (Γ) tangents en *B* à Δ. Les deux «autres» tangentes issues de *A* et *C* à (Γ) se coupent en *M*. Quel est l'ensemble des points *M* lorsque (Γ) décrit F ?

Exercices sur la leçon 2

6. Soit un point *M* de l'hyperbole de foyer *F* de directrice (*D*) et d'excentricité *e* (*e*>1). Montrer que si la parallèle à l'une des asymptotes coupe la directrice en *G* alors *MG*=*MF*. En déduire la justification du fonctionnement de l'appareil traceur ci-contre. Une règle coudée glisse sur une réglette (*D'D*). Une corde d'extrémités fixes *F* et *R* a pour longueur *BR*. Le point *P* coulisse sur la partie [*BR*] de manière à plaquer la partie [*PR*] de la corde sur la tige [*BR*].



7. Soit (*C*) le cercle de centre *O* de rayon *a* et un point *A* de (*C*). Un point *M* décrit la tangente à (*C*) en *A*, (*D*). Le cercle de diamètre [*MO*] coupe (*C*) en *A* et *T*. On note *P* le point commun de la droite (*OT*) et de la droite orthogonale à (*D*) en *M*. Déterminer le lieu décrit par le point *P* (On pourra remarquer que le triangle (*POM*) est isocèle).

8. On se propose d'étudier l'ensemble noté (Γ) des points équidistants de deux droites non coplanaires et orthogonales (*D*) et (*D'*).

A)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réflexion *S* laisse invariante une droite donnée. En déduire qu'il existe deux réflexions et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (*D*) et (*D'*).

2. Chercher l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque de ses plans de symétrie.

B) Dans cette partie l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La droite (*D*) passe par le point *A* de coordonnées (0,0, 1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. La droite (*D'*) passe par le point *B* de coordonnées (0,0,-1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$.

1. Vérifier que (*D*) et (*D'*) sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point *O* appartient à (Γ). Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est : $xy + 2z = 0$.

2. Déduire de ces relations :

• que les intersections de (Γ) avec des plans orthogonaux à la droite (*AB*) sont en général des coniques. Préciser les cas d'exception et donner le cas échéant les équations des asymptotes dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• la nature des intersections de (Γ) avec des plans orthogonaux à l'axe des x ou des y.

9. On considère dans le plan une droit (D) et un point A n'appartenant pas à (D).
 a) Quel est l'ensemble des foyers des paraboles passant par A et ayant pour directrice (D) ?
 b) Quel est l'ensemble des sommets des paraboles passant par A et ayant pour directrice (D) ?

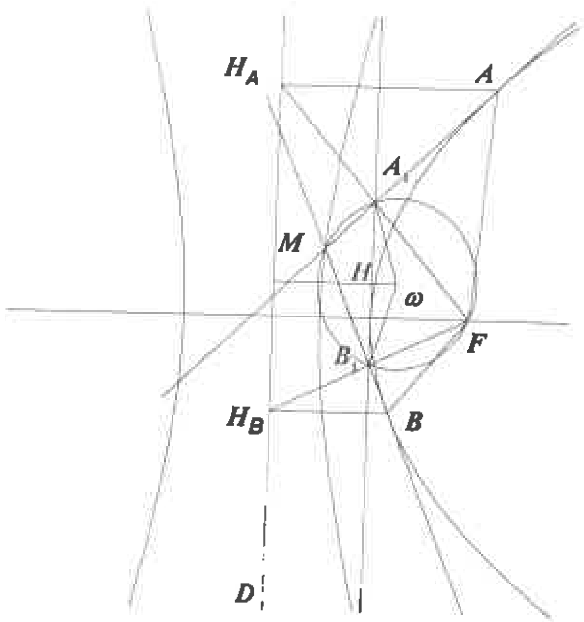
10. Par un point M on a mené deux tangentes à la parabole de foyer F et de directrice (D). On appelle A et B les points de contacts, H_A et H_B leurs projections sur (D). L'angle $(\vec{MA}, \vec{MB})$ est constant et vaut α. On suppose que $\alpha \not\equiv 0\ [\frac{\pi}{2}]$.

La parallèle à la directrice menée par le sommet (D_1), coupe ces tangentes en A_1 et B_1.

1°) Montrer que
$$(\vec{FA_1}, \vec{FB_1}) = \alpha\ \ [\pi].$$

2°) Le centre ω du cercle circonscrit à MA_1F n'appartient pas à la droite (A_1B_1). On appelle H la projection orthogonale de ω sur la droite (A_1B_1). Montrer que :
$$\omega F = \frac{1}{\cos\alpha}\,\omega H$$

3°) En dédruire le lieu décrit par le point M d'où l'on voit la parabole sous un angle α.



11. Chercher dans le plan complexe l'image du cercle unité par l'application qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\frac{1}{z^2+z+1}$.

Exercices sur la leçon 3

12. Soit (Γ) une conique non dégénérée située dans le plan (P). Déterminer l'ensemble des sommets des cônes de révolution contenant (Γ) (on distinguera quatre cas: *cercle, ellipse, hyperbole, parabole*).

13. Soit (S) une sphère et (P) un plan tangent à (S) en F. Soit (Q) un plan parallèle ne coupant pas (S) et M un point de (Q). Le cône de sommet M circonscrit à (S) coupe (P) suivant (γ).
 a. Montrer que (γ) est une ellipse et que la droite (OM) où O est le centre de (γ) passe par un point fixe.
 b. Le point M décrit maintenant la perpendiculaire (Δ) en F au plan (P). Montrer que le cône admet deux plans tangents fixes et que (γ) admet deux tangentes fixes.

Exercices sur la leçon 4

14. Soit (E) une ellipse et $A \in (E)$. On fait passer par A deux droites (D_1) et (D_2) symétriques par rapport à un axe de l'ellipse. Ces droites recoupent (E) en P et Q. Montrer que la direction de (PQ) est fixe et coïncide avec la direction commune des tangentes aux points d'intersection de (E) avec les droites parallèles aux axes de l'ellipse passant par A.

15. Traiter le même exercice avec une hyperbole (H).

16.

Soit M un point d'un segment $[AB]$. Du même côté de (AB) on construit les carrés $AMCD$ et $MBEF$ de centres respectifs I et J.

90

a) Quels sont les lieux de I et J ?

b)Montrer que les droites (AE), (BD) et (IJ) se coupent en un point P de (MC).

c) Montrer que $PM^2 = \overline{PC}\ \overline{PF}$

d) En déduire le lieu du point P lorsque M varie sur $[AB]$.

17. Soit (E) une ellipse inscrite dans un triangle (ABC). Les droites (AB), (BC), et (CA) sont tangentes en C' , A' et B' à (E). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

18. • Soit A et B deux points d'une hyperbole équilatère (H) symétriques par rapport au centre O de (H). Montrer que $M \in (H)$ si et seulement si (MA) et (MB) sont également inclinées sur les asymptotes.

• En déduire que si un cercle et une hyperbole équilatère ont quatre points communs dont deux sont diamètralement opposés sur l'une des courbes, les deux autres le sont sur l'autre courbe.

19. • Déterminer les triangles d'aires maximales inscrits dans une ellipse de centre O et de paramètres a et b donnés.

• Préciser le lieu des milieux des côtés de ces triangles.

20. Déterminer l'ensemble des milieux des cordes d'une ellipse découpant sur celle-ci une aire constante.

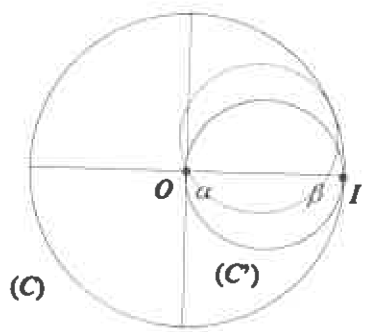
21. Soit (H) une hyperbole d'asymptotes Ox, Oy, M et M' deux points de (H). On note (M, N, M', N') le parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes et dont (MM') est une diagonale. Démontrer que l'autre diagonale passe par le centre de (H).

Application: construire le centre d'une hyperbole connaissant trois de ses points et les directions asymptotiques.

22. Chercher dans le plan complexe les images des cercles centrés à l'origine et des demi droites de sommet l'origine par l'application[1] qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

23. Soit (Γ) un cercle de diamètre $[A,A']$ et $[P,P']$ une corde perpendiculaire à (AA').
Déterminer l'ensemble des points d'intersection des droites (AP) et $(P'A')$ lorsque $[P,P']$ varie (*on pourra utiliser une caractérisation angulaire de l'hyperbole équilatère*).

24. Un cercle (C) de centre O et de rayon 1 est donné.
Un cercle (C') de rayon $\frac{1}{2}$ roule sans glisser dans (C).
Au départ le diamètre $[\alpha\square\beta]$ de (C') coïncide avec $[OI]$ (*cf figure*). Où doit on placer m sur $[\alpha\square\beta]$ pour que ce point décrive une ellipse d'excentricité e et d'axe focal (OI).



Exercices sur la leçon 5

25. Soit (ABC) un triangle non rectangle. Montrer que :

• toute conique passant par A, B, C et H orthocentre de (ABC) est une hyperbole équilatère.

• toute hyperbole équilatère passante par A, B, C passera nécessairement par H l'orthocentre de (ABC).

Exercices transversaux

Soit (C) un cercle du plan, α un réel donné et A un point du plan extérieur à (C). Soit M un point de (C) et (Δ_M) la droite passant par M telle que $(\widehat{(MF),(\Delta_M)}) \equiv \alpha\ [\pi]$.

1°) Chercher le lieu du projeté orthogonal de A sur (Δ_M), H.

2°) Montrer que (Δ_M) reste tangente à une hyperbole de foyer A dont on déterminera le cercle principal.

3°) Que se passe-t-il lorsque *i)* A appartient au cercle (C) ? *ii)* A est à l'intérieur de (C) ?

---

[1] Cette application est du même type que celle étudiée en 1997 (Juin série S, regroupement national). On appelle de telles applications transformations de Joukowki. Elles conservent les angles et permettent dans certain cas de transformer un profil d'aile d'avion en cylindre, facilitant ainsi le calcul des flux.

Titre : DOCUMENT DE TRAVAIL SUR LES CONIQUES

Auteurs : Commission Inter IREM GÉOMÉTRIE
BECZKOWSKI Richard - BKOUCHE Rudolf - BONAFE Freddy
BONNET Pierre-Henri - CHAMONTIN Françoise - COLMEZ François
CORTIER Jean-Philippe - FELDMAN Bernard - HAMEL Thierry - PLANE Henry
SINEGRE Luc - VIGIER Noëlle - DESTAINVILLE Bernard

Editeur : I.R.E.M. de Reims

Date : Novembre 2001

Niveau : Lycée - 1[er] cycle universitaire - I.U.F.M.

Mots clés : Géométrie - Coniques - Affinités - Division harmonique.