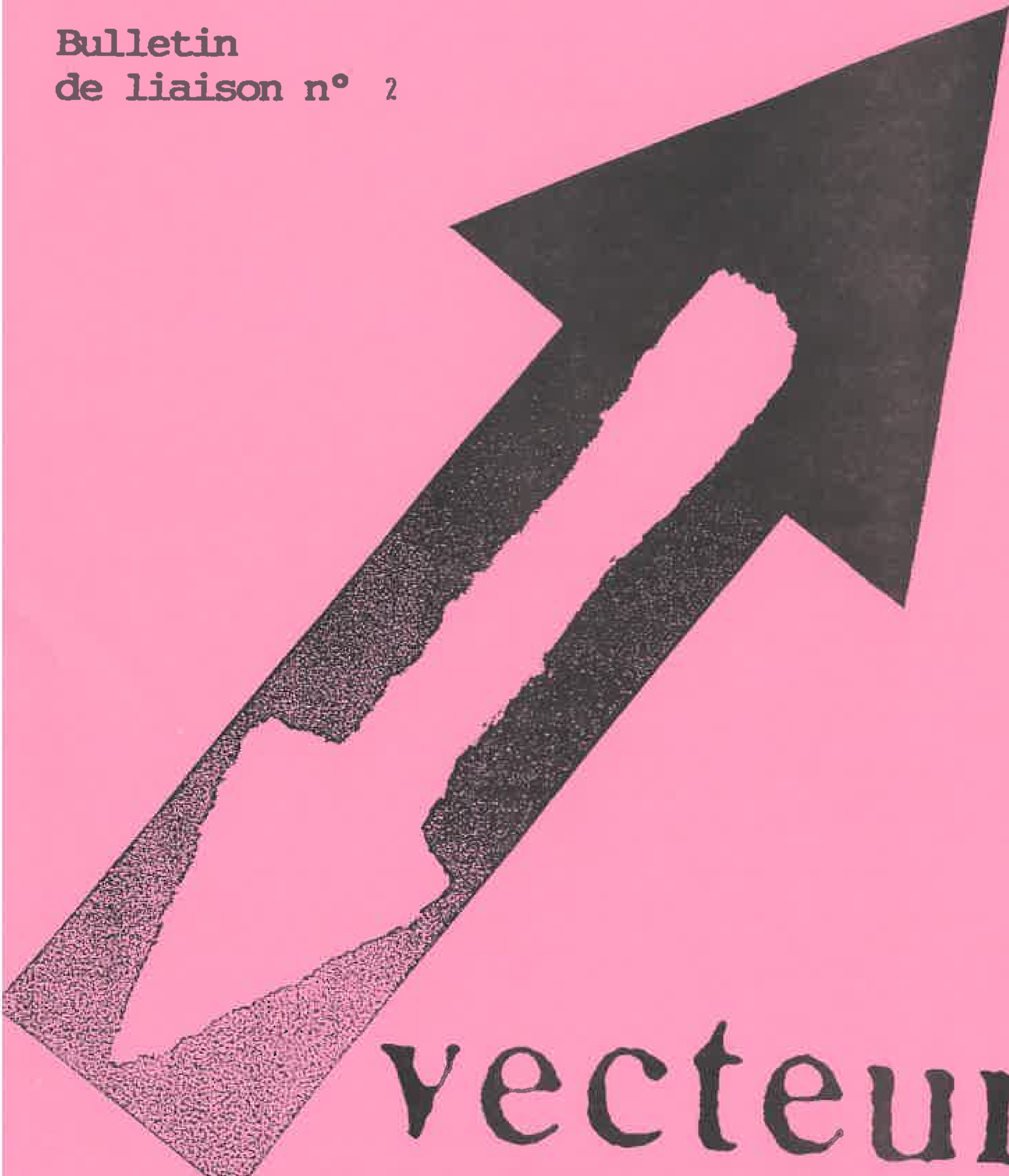
ACADEMIE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

Bulletin
de liaison n° 2



vecteur

1992

Déjà le numéro deux ne manquerez vous pas de dire en recevant ce nouveau bulletin ! Soyons francs, nous nous étions fixés pour objectif de faire paraître deux numéros par an, l'un à l'automne l'autre au printemps et malgré la sortie tardive du numéro un nous avons tenu à respecter cet engagement.

A travers les trois articles de ce bulletin nous avons essayé de confirmer sa double vocation à la fois culturelle et pédagogique : faites nous part de vos remarques à ce propos.

L'I.R.E.M. de Reims souhaiterait élargir son équipe d'animateurs, si vous vous sentez intéressés prenez contact avec l'une des personnes indiquées en dernière page ; elle pourra vous fournir toutes les informations et précisions nécessaires.

Ceux d'entre vous qui nous ont renvoyé l'encart pour un abonnement gratuit reçoivent en prime un exemplaire du numéro un. Les autres doivent se dépêcher !

Bon courage pour cette fin d'année scolaire et bonnes vacances à tous !

la rédaction

SOMMAIRE DU NUMERO DEUX (1992)

Dominique ANTOINE
Brigitte CHAPUT
I.R.E.M. de REIMS
Antenne de Troyes

DES CARACTERISTIQUES DE POSITION AUX CARACTERISTIQUES DE DISPERSION OU DE LA TROISIEME A LA SECONDE

La dispersion

On a étudié dans l'article précédent de Jean-Claude Duperret, les caractéristiques de position - moyenne, médiane - abordées en premier cycle. Elles ne suffisent pas à résumer une série statistique. Il est nécessaire de tenir compte de sa dispersion.

La première mesure de cette dispersion qui vient à l'esprit est l'étendue, c'est-à-dire l'écart entre la plus petite et la plus grande des valeurs de la série. C'est le caractère de dispersion le plus simple mais il présente l'inconvénient de ne prendre en compte que les valeurs extrêmes de la série, qui peuvent être mal connues ou même être exceptionnellement fortes ou faibles.

Par exemple, est-il raisonnable d'utiliser comme mesure de dispersion des revenus la différence entre le revenu d'une célébrité du cinéma et celui du plus pauvres des marginaux ?

Pour tenir compte de l'ensemble des valeurs d'une série, on préfère mesurer la dispersion autour des paramètres de position, ce qui fait appel à la notion de distance. Si on considére les écarts[1] des termes de la série à un nombre quelconque : ce sont des nombres qui s'expriment dans la même unité que celle de la série étudiée.

La moyenne arithmétique des écarts à la moyenne d'une série est l'écart moyen. Bien que mesurant la dispersion de la série, il est insensible à certaines variations.

---

[1] L'écart entre deux nombres est défini comme la valeur absolue de leur différence.

Par exemple, considérons la série statistique 2, 5, 8, 11, 14, qui a pour moyenne 8 et pour écart moyen 3,6. Ces deux caractéristiques sont inchangées si l'on retranche 2 à la première valeur de la série et que l'on ajoute 2 à la seconde.

De telles modifications sur la série laissent-elles toujours invariants l'écart moyen et la moyenne ?

On préfère utiliser l'écart-type, noté σ, qui est la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne. (C'est la moyenne quadratique des écarts à la moyenne.)

Il s'exprime dans la même unité que la série étudiée et il est d'autant plus grand que la série est dispersée (nul, si et seulement si la série est constante, c'est-à-dire qu'elle n'a qu'une seule modalité).

Les écarts interquantiles (interquartile et interdécile en particulier) sont aussi utilisés pour mesurer la dispersion.

Propriétés de l'écart-type

Calculs

Bien que la plupart des calculatrices scientifiques possèdent une touche de calcul de l'écart-type, notée en général σ_n, il arrive que l'on ait besoin des formules suivantes.

Remarque : La touche σ_{n-1} est utilisée lors du calcul d'une estimation de l'écart-type d'une population à partir d'un échantillon.

Soit une série de N observations x_1, x_2, ..., x_N de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - (\bar{x})^2}$$

La seconde formule, appelée formule de König, sera préférée à la première chaque fois que les termes en $(x_i - \bar{x})^2$ ne seront pas simples : elle a l'avantage de ne contenir qu'une fois la moyenne.

Sensibilité aux variations de la série

Modification de certaines valeurs

L'écart-type est sensible aux modifications internes de la série (en particulier il est toujours modifié si l'on ajoute et retranche un même nombre à deux valeurs.)

Reprenons l'exemple ci-dessus : l'écart-type de la première série est environ 4,24 alors que celui de la seconde est environ 4,69.

Changement affine des valeurs

Si on remplace la série (x_i) d'écart-type σ par la série $(ax_i + b)$, où a et b sont des réels, d'écart-type σ', alors $\sigma' = |a|\,\sigma$.

Remarques : Cette propriété peut être utilisée lors d'un changement affine d'unité. On l'employait aussi, avant l'usage des calculatrices électroniques, pour simplifier les calculs d'écart-type.

Partition de la population - Ajout de nouvelles données

Une série statistique a été scindée en deux séries d'effectifs respectifs m et p, de moyennes respectives $\bar{y}$ et $\bar{z}$ et d'écarts-types respectifs α et β. La série de départ a pour effectif $n = m + p$, pour moyenne $\bar{x} = \dfrac{m\bar{y} + p\bar{z}}{m + p}$ et pour écart-type $\sigma = \sqrt{\dfrac{m\alpha^2 + p\beta^2}{m + p} + \dfrac{mp}{(m + p)^2}(\bar{y} - \bar{z})^2}$.

On peut utiliser les résultats ci-dessus lorsqu'on ajoute d'autres données à une série statistique, pour calculer ses nouvelles caractéristiques ou pour savoir comment elles évoluent.

Peut-on ajouter une nouvelle donnée à une série statistique sans en changer la moyenne ? sans changer l'écart-type ? en ne changeant ni l'un, ni l'autre ?

Regroupement en classes

Il arrive que l'on soit amené à regrouper les données en classes. On effectue alors les calculs à partir des valeurs centrales de chaque classe, ce qui peut donner des caractéristiques sensiblement différentes de celles de la série initiale.

__Exemple__ Voici les durées en minutes du trajet en chemin de fer entre deux villes.

227	155	177	174	165	165	165	179	177	143	143	260
154	155	242	154	172	173	173	173	173	173	183	183
175	176	181	175	222	178	204	193	193	186	173	202
165	165	173	175	198	182						

La moyenne de la série est environ 179,85 minutes et son écart-type est environ 23,41 minutes.

Si on regroupe les données en classes d'amplitude 20 minutes, on obtient :

classes	valeurs centrales	effectifs
[140, 160[	150	5
[160, 180[	170	22
[180, 200[	190	8
[200, 220[	210	2
[220, 240[	230	2
[240, 260[	250	1
[260, 280[	270	1

La nouvelle moyenne est alors 180 minutes et le nouvel écart-type est environ 25,91 minutes.

Dans le cas d'une distribution voisine d'une distribution normale, le groupement en classes de même amplitude majore la valeur de σ^2 d'environ $\frac{h^2}{12}$ (correction de Sheppard) où h est l'amplitude constante des classes.

__Interprétation géométrique__

__Pour les enseignants__

Une série statistique $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^N$.

On munit $\mathbb{R}^N$ d'un produit scalaire : $X.Y = \frac{1}{N}(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_Ny_N)$ et de la distance euclidienne associée d :

$$d(X, Y) = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_N - y_N)^2}{N}}$$

où $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$.

A la série X de moyenne $\bar{x}$, on associe la série statistique constante $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$. On a alors les trois résultats suivants :

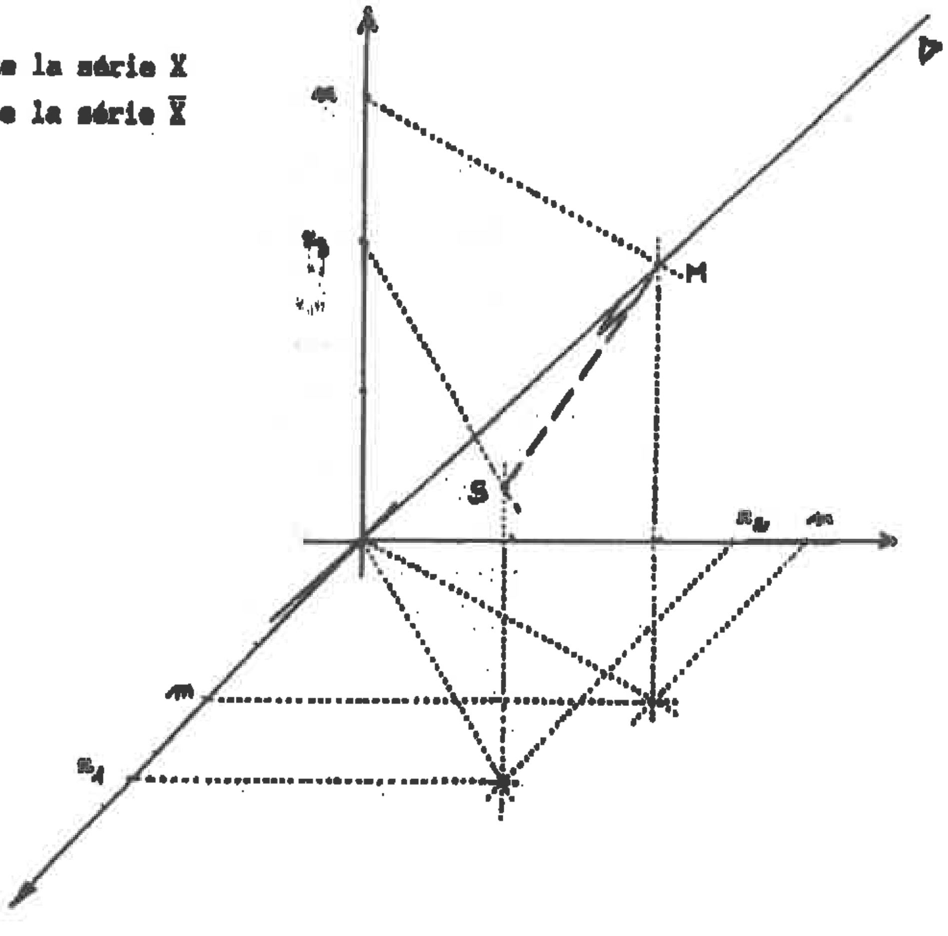
1 - la série $\bar{X}$ est la série constante la plus proche de la série X pour la distance d,

2 - l'écart-type σ de X est la distance $d(X, \bar{X})$,

3 - $\bar{X}$ est la projection orthogonale (pour le produit scalaire ".") de X sur la droite Δ d'équations $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$.

Illustration dans R^3 :

S représente la série X
M représente la série $\bar{X}$



Interprétation géométrique de la moyenne et de l'écart-type.

<u>Démonstration de 1 et 3</u> :

En effet, si $Z = (a, a, \dots, a)$ où $a \in \mathbb{R}$,

$$[d(X, Z)]^2 = (X - Z)^2 = [(X - \bar{X}) + (\bar{X} - Z)]^2$$

$$= (X - \bar{X})^2 + 2\,(X - \bar{X})\,.\,(\bar{X} - Z) + (\bar{X} - Z)^2$$

$$= [d(X,\bar{X})]^2 + \frac{2}{N}\left[(x_1-\bar{x})(\bar{x}-a) + (x_2-\bar{x})(\bar{x}-a) + \dots + (x_N-\bar{x})(\bar{x}-a)\right] + [d(\bar{X},Z)]^2$$

$$= [d(X,\bar{X})]^2 + 2(\bar{x}-a)\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} - \bar{x}\right) + [d(\bar{X},Z)]^2$$

$$= [d(X,\bar{X})]^2 + [d(\bar{X},Z)]^2\,. \qquad \text{Ainsi } [d(X, Z)]^2 \geq [d(X,\bar{X})]^2\,.$$

$\bar{X}$ minimise la distance entre X et Δ et $\bar{X}$ est la projection orthogonale de X sur Δ (chacun aura reconnu le théorème de Pythagore !).

<u>Pour les élèves</u>

Les explications données ci-dessus sont évidemment hors du programme de seconde. On peut cependant utiliser les connaissances des élèves (si ! ils en ont) et leur bon sens (s'ils en ont !) pour construire un instrument de mesure de la dispersion d'une série statistique.

On veut mesurer la distance entre les valeurs d'une série statistique et sa moyenne ; ce qui nous amène à considérer les deux séries $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$.

L'analogie avec la distance de deux points du plan conduit à la formule : $\delta^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2$.

Cette quantité, si elle mesure bien la dispersion, se révèle inutilisable pour comparer les dispersions de deux séries statistiques d'effectifs différents.

<u>Exemple</u> Considérons les deux séries :

$S_1 = (3, 4, 4, 5, 6, 6, 7)$ d'effectif 7 et de moyenne 5, et

$S_2 = (3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7)$ d'effectif 14 et de moyenne 5.

Elles ont même histogramme des fréquences ; ce qui n'est pas mis en évidence par la formule précédente qui donne $\delta_1^2 = 12$ et $\delta_2^2 = 24$.

$\delta_2^2 = 2\,\delta_1^2$ car on a doublé les effectifs de chaque valeur.

Pour pallier cet inconvénient, on est amené à diviser δ^2 par l'effectif de la série. On obtient ainsi la variance de la série, on en prend la racine carrée pour conserver la dimension du caractère étudié.

Répartition de la population

L'écart-type s'exprime dans la même unité que les valeurs de la série, ainsi on peut s'intéresser aux observations distantes de la moyenne de 1 ou 1,5 ou 2 ... écarts-types.

Considérons une série statistique X d'effectif total N, de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ.

Pour $\alpha > 0$, on note n_α le nombre de valeurs distantes de $\bar{x}$ de moins de $\alpha\,\sigma$, c'est-à-dire appartenant à l'intervalle $I = [\bar{x} - \alpha\,\sigma\ ;\ \bar{x} + \alpha\,\sigma]$.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{1\le i\le N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{\substack{1\le i\le N\\ x_i\notin I}}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{N}\sum_{\substack{1\le i\le N\\ x_i\in I}}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\ge \frac{1}{N}\sum_{\substack{1\le i\le N\\ x_i\notin I}}(x_i - \bar{x})^2 \ge \frac{1}{N}(N - n_\alpha)\,\alpha^2\,\sigma^2$$

Ainsi, $\dfrac{N - n_\alpha}{N} \le \dfrac{1}{\alpha^2}$ et $\dfrac{n_\alpha}{N} \ge 1 - \dfrac{1}{\alpha^2}$.

Il y a alors au moins 75 % des valeurs comprises entre $\bar{x} - 2\,\sigma$ et $\bar{x} + 2\,\sigma$.

Quel est le pourcentage minimal des valeurs qui s'éloignent de $\bar{x}$ de moins de $3\,\sigma$?

Dans de nombreux cas, on a affaire à une série dont la distribution est proche d'une distribution gaussienne ; la répartition des effectifs est alors approximativement la suivante :

- 68 % des valeurs sont comprises entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$,
- 95 % des valeurs sont comprises entre $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$,
- 99,74 % des valeurs sont comprises entre $\bar{x} - 3\sigma$ et $\bar{x} + 3\sigma$.

Il apparaît ainsi que l'écart-type informe sur l'étalement des données autour de la moyenne ce qui justifie sa dénomination.

Exemple

On a mesuré en kilogrammes les masses de 815 fillettes du même âge appartenant aux groupes scolaires d'une ville.
On obtient le tableau ci-contre :

classes	valeurs centrales	effectifs
[15,5 ; 16,5[	16	4
[16,5 ; 17,5[	17	9
[17,5 ; 18,5[	18	31
[18,5 ; 19,5[	19	76
[19,5 ; 20,5[	20	183
[20,5 ; 21,5[	21	204
[21,5 ; 22,5[	22	167
[22,5 ; 23,5[	23	97
[23,5 ; 24,5[	24	40
[24,5 ; 25,5[	25	12
[25,5 ; 26,5[	26	3

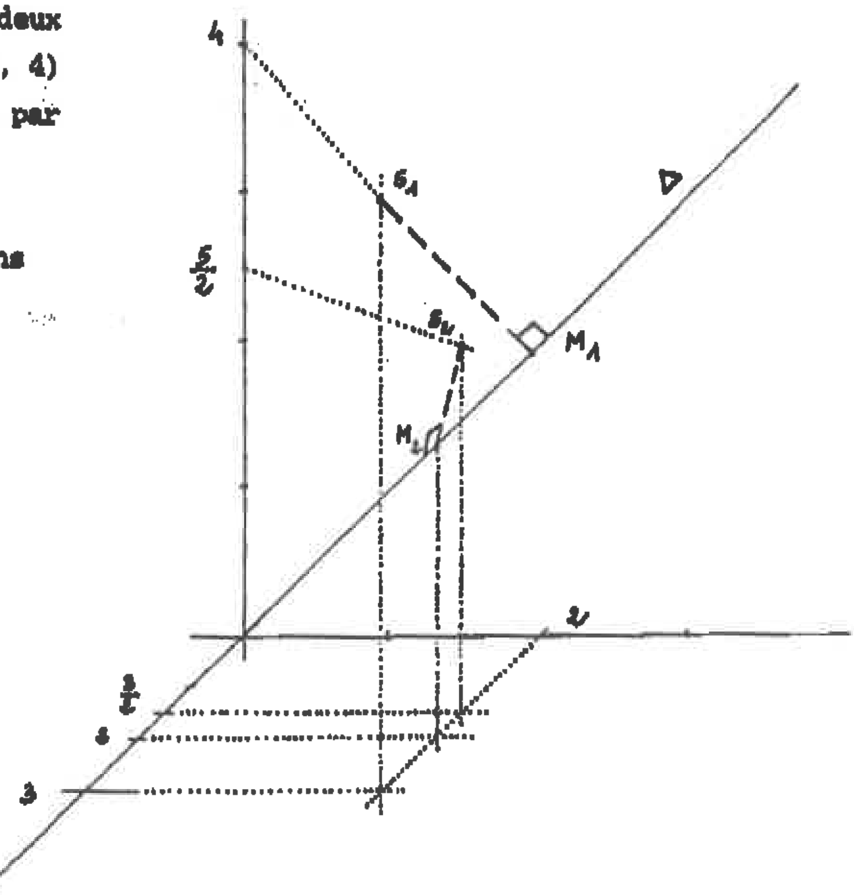
La moyenne de la série est $m \approx 21{,}06$ kg et l'écart-type est $\sigma \approx 1{,}63$ kg.
Il y a 96,6 % de filles ayant un poids compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$.
Il y a 99,1 % de filles ayant un poids compris entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$.

Comparaison des séries statistiques

De même effectif : interprétation géométrique

On considère les deux séries statistiques (3, 2, 4) et $(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$ représentées par les points S_1 et S_2.

Δ est la droite d'équations $x_1 = x_2 = x_3$



Comparer les moyennes et les écarts-types des deux séries revient a comparer des positions de points sur la droite Δ et des longueurs de segments.

De caractères différents

Il est possible de comparer la dispersion de deux séries dont les caractères sont différents à l'aide des mesures de dispersion relative c'est-à-dire le rapport entre une valeur de dispersion et une valeur centrale de la même série.

Par exemple, on pourra procéder à la comparaison des salaires en France et aux Etats-Unis (on évite le problème posé par les unités monétaires) et à celle des salaires d'un même pays au cours des trente dernières années (la prise en compte de l'inflation est alors inutile).

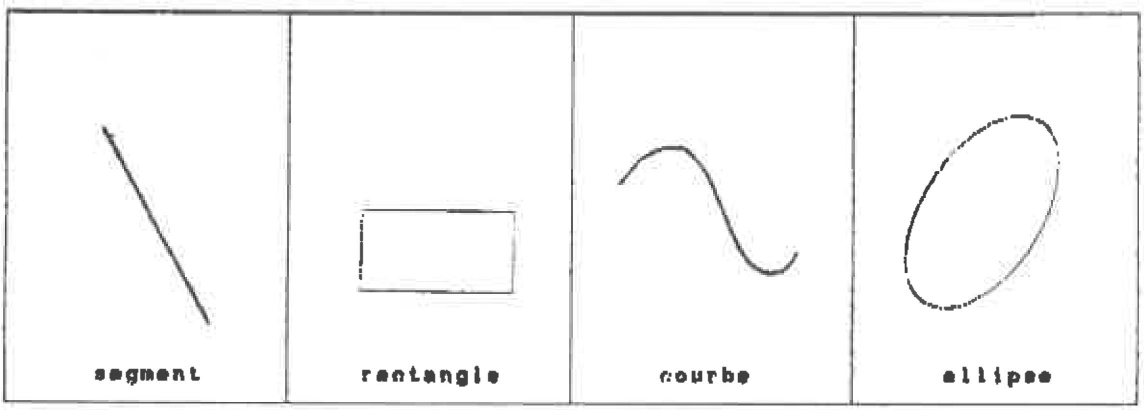
Activités en seconde

Pour illustrer ce qui précède, voici quelques activités que l'on peut proposer aux élèves.

Une activité de l'I.R.E.M. de Strasbourg

Après leur avoir distribué les graphiques ci-dessous, on demande aux élèves d'évaluer sans aucun instrument de mesure :

- la longueur du segment (en centimètres),
- la longueur de l'arc de courbe (en centimètres),
- l'aire du rectangle (en centimètres carrés),
- l'aire de l'ellipse (en centimètres carrés).



Les réponses recueillies constituent quatre séries statistiques sur lesquelles on peut travailler : présentation des résultats, calculs de moyennes et d'écarts-types, comparaison, conclusions éventuelles sur les différences de perception.

Une activité de l'I.R.E.M. de Reims

On demande à chaque élève de la classe de tracer un rectangle, de mesurer au millimètre près ses dimensions, puis de faire le quotient de la longueur par la largeur. On obtient trois séries statistiques ; que pensez-vous de la dernière ?

Une activité de l'I.R.E.M. de Limoges

On trouvera dans la brochure "Statistique et technologie" éditée par l'I.R.E.M. de Limoges un compte-rendu d'expériences de fabrication d'épingles pour le béton armé. Il donne de nombreuses séries statistiques et leurs exploitations.

Bibliographie

- Jean Cuenat, *Cours de statistique élémentaire*, Editions Magnard.
- Francis Labroue, *Statistique et technologie*, I.R.E.M. de Limoges.
- Michel Laviéville, *Statistique et probabilités*, Dunod.
- Albert Monjallon, *Introduction à la méthode statistique*, Vuibert.
- P. Pêpe et M. Tisserand-Perrier, *Méthodes statistiques dans les sciences humaines*, Masson.
- Didier Schlacther, *De l'analyse à la prévision*, Ellipses.

Remarque

Cet article paraîtra dans le bulletin INTER-I.R.E.M. 1er cycle "Des chiffres et des lettres au collège" au mois d'avril 1992.


IOHANNES WALLIS S. T. P. GEOMETRIÆ PROF. SAVILIANUS OXON. REG. MAti A SACRIS REGALIS SOCIETs LOND. SODALIS
D. Loggan ad vivum delin.
M Burghers fc

John WALLIS

Né à Ashford en 1616 est mort à Londres en 1703; élève de l'université de Cambridge il fit des études de philologie, philosophie, théologie, mèdecine et Mathématiques, il fut un très bon calculateur ce qui transparait dans toute son oeuvre ; il fut un des fondateurs de la Société Royale de Londres. Ses travaux mathématiques occupent plus de 2 gros volumes sur les 3 publiés de ses Opera Mathématica en 1697 - 1699.

L'extrait publié ici provient de l'une de ses oeuvres, considérée comme la plus importante, l'ARITHMETIQUE DES INFINIS publiée d'abord en 1656 à une époque ou le calcul différentiel n'était pas encore inventée.

Ici WALLIS calcule l'aire sous la parabole, $y=x^2$ en notation moderne, et l'aire limité par la spirale d'Archimède, cette dernière obtenue par le deplacement uniforme d'un point sur une droite, qui tourne uniformément autour d'un point.

ARITHMETIQUE DES INFINIS

John WALLIS 1655

PROP XIX

Lemme

SI on considère la suite des quantités en raison doublée Arithmético-proportionnelle(1), (ou bien la suite des nombres carrés) croissante de façon continue d'un point ou bien de 0 pour le début (je calcule de la sorte 0, 1, 4, 9, &c) il est proposé de rechercher, quelle raison à celle-ci à la suite identiquement égale au plus grand terme.

Soit la recherche par le moyen de l'induction (Comme dans la prop 1), on aura

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18} \qquad \frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

Et ainsi de suite.

La raison se développant est partout plus grande que le sous triple, ou si vous voulez $\frac{1}{3}$. Mais l'excès décroit continuellement, selon que le nombre de termes augmente; je calcule $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, &c; certes le dénominateur de la fraction augmente, ou bien celui adjoint à la raison, en chaque terme d'un nombre composé de 6, (ainsi qu'il parait) de sorte que l'excès du nombre se développant au dessus du sous-triple, est celui qu'a l'unité au sextuple du nombre de termes après 0. Et donc ———

PROP XX

Thèorème

SI on propose la suite des quantités en double raison Arithmétique-proportionnelle (ou bien la suite des nombres carrés) continuellement croissante, d'un point ou bien 0 comme début; le rapport qu'a celle-ci à la suite identiquement égale au plus grand, surpassera la sous-triple, et l'excès sera, ce rapport qu'a l'unité au sextuple du nombre de termes après 0; ou bien, qu'a la racine carré du premier terme après 0, au sextuple de la racine carré du plus grand terme.

J'estime (si le premier terme après 0 est fixé à 1, & la racine du dernier k,) $\frac{k+1}{3} k^2 + \frac{k+1}{6k} k^2$. Ou (ayant posé pour m le nombre, ou bien la quantité des termes), & k pour le dernier coté [la racine du dernier]) $\frac{m}{3} k^2 + \frac{m}{6m-6} k^2$.

C'est manifeste par la proposition précédente.

Et avec le nombre croissant de termes, cet excès au dessus du sous triple diminue ainsi de façon continue de sorte qu'enfin il sort plus petit qu'une quantité assignable à volonté, (comme il est manifeste;) si on progresse vers l'infinie, il s'évanouit tout à fait. Et donc ———

PROP XXI

Théorème

SI est proposée la suite infinie des Quantités en double raison Arithmético-Proportionnelles (ou bien la suite des nombres carrés) croissante de façon continue, commençant d'un point ou bien de 0; celle-là sera à la suite identiquement égale au plus grand, comme 1 à 3.

C'est manifeste d'après ce que prècède.

PROP XXII

Théorème

POur cette raison le Cône ou la Pyramide par rapport au Cylindre ou au Prisme (sur une base identique ou égale avec la même hauteur) est comme 1 à 3.

En effet nous supposons autant le Cône que la Pyramide composés

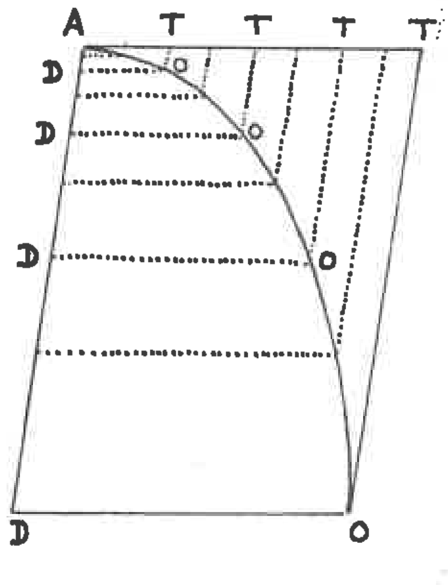
d'une infinité de plans semblables et parallèles, en double raison Arithmético-proportionnelle déterminée, dont le plus petit est supposé un point, et le plus grand la base (par ce que nous disons à la Prop 6. des Sect. Con.); le Cylindre ou le Prisme, par des plans partout égaux au plus grand (comme il est manifeste:) Le rapport est donc comme 1 à 3 par la Prop. précédente.

PROP XXIII

Corollaire

DE même le complément de la Semi-parabole, (Comprends la figure AOT qui avec la semi-parabole elle-même remplit le Parallélogramme,) est au Parallélogramme TD (sur celui-là même ou bien ayant une base égale sur une hauteur égale) comme 1 à 3. (Et en conséquence, la semi-parabole elle-même est au même Parallélogramme, comme 2 à 3.)

Soit enfin la figure AOT de sommet A , de diamètre AT, de base TO, et à celle-ci parallèle autant que l'on voudra (entre la base & le sommet) TO, TO, &c. Puisque (par la prop. 21 Con. Sect.) les droites DO, DO, &c sont en raison sous-doubléesdes droites AD, AD, &c. Par contre les droites AD, AD, &c elles-mêmes, c'est à dire TO, TO, &c seront en raison doublées de DO, DO, &c elles-mêmes c'est à dire de AT, AT, &c. Donc toute la figure AOT (étant composée des droites infinies en nombre TO, TO, &c. en double raison des droites AT, AT, &c. Arithmétiquement proportionnelles) sera au Parallélogramme également élevé TD (étant composé par autant de droites égales à la plus grande des TO) comme 1 à 3 par la prop. 21. (Ce qui devait être prouvé) Et conséquemment, la semi parabole AOD (ce qui reste du parallélogramme) au même Parallélogramme, comme 2 à 3.(2)

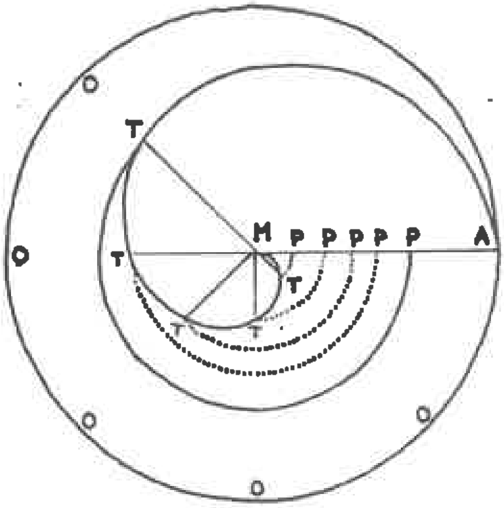


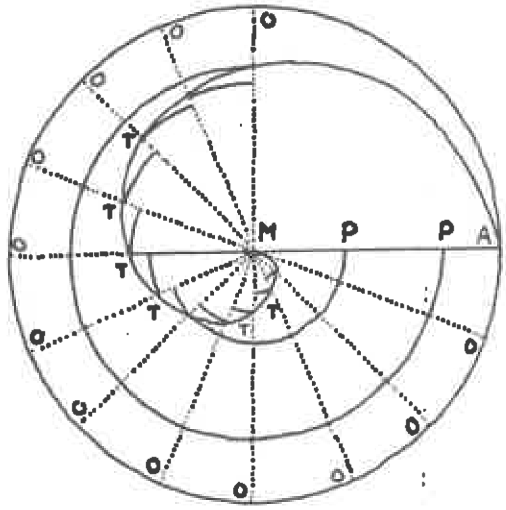
PROP XXIV

Corollaire

DE même la figure MTM, qui est limitée par la Spirale MT (Commencant à l'origine de la Spirale) et la droite MT; est au

Secteur correspondant PMT; comme 1 à 3.[3]





En effet (comme nous avons dit à la Prop. 5.) nous supposons cette Figure MTM composée par une infinité de Secteurs semblables, dont les rayons sont Arithmético-proportionnels, pour cette raison les Secteurs eux-mêmes en doubles raison Arithmético-proportionnelles (bien sûr de leur côtés;) Quant au secteur PMT il est pris parmi tous les secteurs égaux aux plus grand: En conséquence cette figure là sera à celle-ci comme 1 à 3 par la prop. 21.

Et j'appelle ici par le nom de Secteur, aussi l'aggregat[4] en tel nombre qu'on voudra de Secteurs;. il est permis d'égaler le demi-cercle (ou même le cercle entier) ou bien même de le surpasser; (comme nous avons averti au-dessus au sujet de l'appellation d'Angle, à la prop. 5).

NOTES

(1) <u>raison</u> Le mot est traduit du latin *ratio* comme "rapport" avec un sens assez général d'ailleurs de "mettre en relation" ici par exemple des longueurs ou des nombres, on retrouve ici les rapports des longueurs des segments de la Géometrie Grecque d'Euclide (livre V) que Wallis et la plupart des Mathématiciens de l'époque d'ailleurs connaissaient parfaitement.

On pourra comprendre y *en raison de x* comme $y = kx$, y *en raison doublée de x* comme $y = kx^2$ et enfin y *en raison sous doublée de* x comme $y = k\sqrt{x}$

Donc une *suite de quantités en raison arithmético-proportionnelle* correspond actuellement à une suite arithmétique $an+b$, $n \in \mathbb{N}$; et une *suite de quantités en raison doublée arithmético-proportionnelle* est donc de la forme $(an+b)^2$.

(2) La surface ATOD est supposée constituée d'un infinité de lignes parallèles à AD et placées les unes à côté des autres à intervalles réguliers et très proches, connaissant la limite de la somme des longueurs des lignes TO sur autant de lignes AD Wallis en déduit l'aire ATO; c'est un raisonnement caractéristique de la théorie des indivisibles, née en Italie avec Galilée et Cavalieri dans la première moitié du XVI^{eme} siècle.

(3) Spirale Il s'agit ici de la Spirale d'Archimède (remarquer la référence au Anciens) obtenue par le déplacement uniforme d'un point sur une droite, cette dernière tournant à vitesse uniforme autour d'un point fixe

(4) Aggrègat = Somme.

BIBLIOGRAPHIE

Origine Du Texte:

Arithmetica Infinitorum 1655 in OPERA MATHEMATICA Johannis WALLIS 1695

Pour la vie de WALLIS:

Histoire abrégée des sciences Mathématiques Maurice D'OCCAGNE VUIBERT 1952

Sur le livre 5 d'EUCLIDE on pourra consulter:

NOMBRES, MESURE ET CONTINUE. Epistémologie et histoire Jean DHOMBRES CEDIC/FERNAND NATHAN.

Sur la théorie des indivisibles (Galilée, Cavaliéri, Toricelli ...):

L'article de François DE GANDT dans FRAGMENT D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES II :BROCHURE A.P.M.E.P. N°65 1987

Traduction:
JClaude PENIN
Groupe Histoire Des Math.
IREM De REIMS

CARRÉ LATIN

	I	II	III	IV
I				
II				
III				
IV				

I Créé à Reims en 1974

II A fait courber la tête d'un fier sicambre

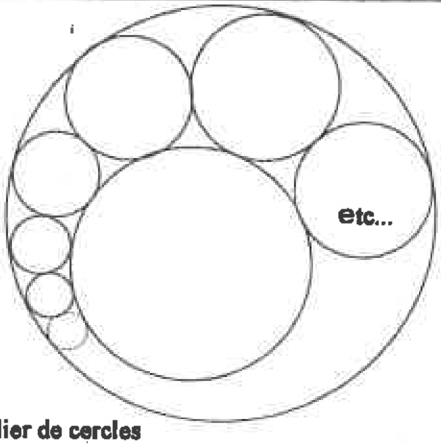
III Souvent associé à un hydrocarbure

IV Se laisse regarder

Solution dans le prochain numéro

PORISMES DE STEINER

Soient deux cercles non concentriques, dont l'un est intérieur à l'autre. Si l'on considère alors d'autres cercles de telle sorte qu'ils soient tangents entre eux successivement et, à la fois, aux deux cercles donnés, il peut arriver que cette suite de cercles se ferme sur elle-même, le premier étant tangent au dernier. Cette "fermeture " du collier de cercles peut intervenir après plusieurs tours, mais il peut se faire aussi que ce collier ne se ferme jamais.



Collier de cercles

Les cas de fermeture sont connus sous l'appellation de porismes de Steiner, du nom du géomètre suisse Jacob Steiner (1796-1867).

En fait si une chaîne est fermée pour un certain cercle de départ, elle l'est pour n'importe quel cercle de départ. Ce résultat peut-être établi de façon elégante, à l'aide de l'inversion qui transforme les deux cercles de base en deux cercles concentriques.(On pourra lire à ce sujet [1] chap.5 et [2] chap. 6.)

Ce type de problèmes a été repris entre 1930 et 1960 par le chimiste **F. Soddy**, et les géomètres **L.Kollros** et **H.S.M Coxeter** en géométrie de l'espace avec des anneaux de sphères tangentes.

Avis aux amateurs !

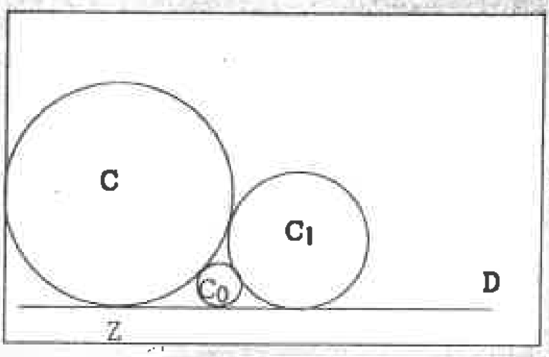
L'enseignement actuel de la géométrie dans les classes de second degré, n'utilise que peu ou pas les transformations qui "transforment" réellement, les formes de figures et donc les stratégies de résolution de problèmes, transformations non affines.

Pour permettre de discuter ce point de vue avec des professeurs stagiaires en formation à l'IUFM, j'ai choisi de proposer l'exercice suivant, dont la parenté avec les porismes est flagrante, avec trois objectifs complémentaires :

- **aborder des algorithmes de construction non triviaux**
- **résoudre un "problème" dont la solution est peu ou pas connue.**
- **utiliser si nécessaire l'outil informatique (logiciel Graph'x)**

- **Problème :**

Le cercle C de rayon 1 et la droite D sont tangents en Z. "A droite" de C on trace le cercle C_0 de rayon $R_0<1/10$ tangent à C et à D, puis "à droite" de C_0 le cercle C_1, tangent à C, D, et C_0, puis "à droite" de C_1 le cercle C_2, tangent à C, D, et C_1 .... On obtient ainsi une famille de cercles C_0, C_1, C_2 ...Il arrive un moment ou il est impossible de tracer un cercle supplémentaire. Combien y a-t'il de cercles dans la famille ?

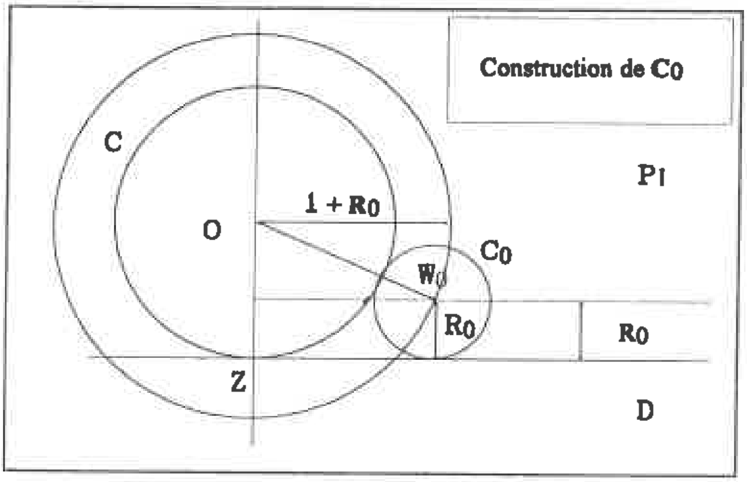


Quelques tracés "expérimentaux", permettent vite de se convaincre que l'algorithme est marqué par deux sous-problèmes : construire le premier cercle C0, construire le nième connaissant ceux qui précèdent. Cette deuxième partie est une boucle qui s'arrête sur une "condition de fin" délicate à exprimer, mais dont chacun comprend à l'évidence la nécessité.

Il faut régler l'ambiguité du texte sur la locution "à droite" : Il s'agit à chaque fois que cela est possible de tracer un nouveau cercle dont le centre est situé sur un perpendiculaire à D, située à droite de la perpendiculaire à D passant par le centre du cercle précédent. Toute notre étude ultérieure se fera donc dans le 1/2 plan "de droite" P1, limité par la perpendiculaire en Z à la droite D.

Le tracé du cercle C0 trouve rapidement une solution par analyse synthèse, c'est un problème classique de construction. La figure résume l'étude que l'on peut d'ailleurs conduire avec des élèves.

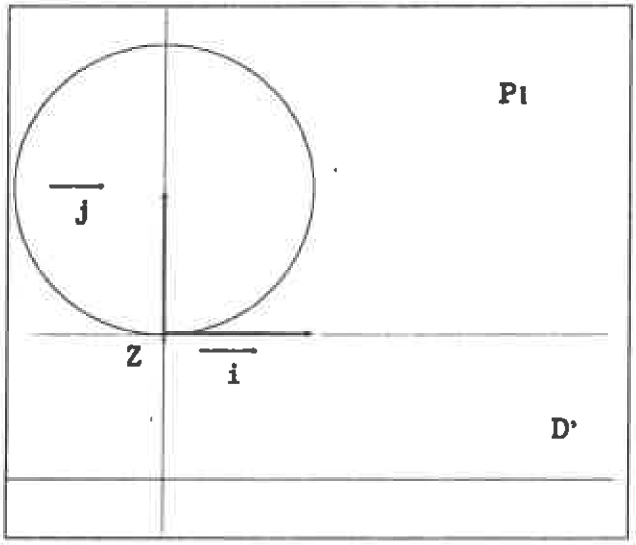
Le centre W_0 du cercle C_0 est l'intersection du 1/2 cercle de centre O et de rayon $1+R_0$ situé dans P_1 avec la parallèle à D située à la distance R_0 au-dessus de D



Construction des cercles C_n

La construction de C_n connaissant ceux qui précèdent (constructibilité ?) est plus délicate à règler. Après bien des essais papier-crayon infructueux' le logiciel Graph'x semblait un bon recours pour un tracé utilisant l'analytique. Difficile cependant d'accepter de passer de ce problème de "géométrie pure " à l'analytique. Pourtant, l'utilisation de l'outil informatique permettra un découverte intéressante et la rédaction d'une solution ne devant rien aux calculs dans un repère !

- **Méthode analytique**



On cherche d'abord le lieu des centres des cercles tangents à C et D dans le 1/2 plan P1. On considère le repère $(Z, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ est vecteur unitaire de D situé dans P1 et $\vec{j} = \overrightarrow{ZO}$ Soit D' la droite d'équation $y = -1$.

W (x,y) est centre d'un cercle tangent à C et D si et seulement si d(W,O) = d(W, D'). Le lieu des points W est donc la 1/2 parabole (P) définie par $x > 0$ et $x^2 + (1-y)^2 = (y+1)^2$.

Donc W(x,y) est sur (P) définie par $x > 0$ et l'équation $y = 1/4\, x^2$. C, D, et la1/2 parabole (P) sont alors faciles à construire dans Graph'x.

Il reste donc à déterminer les centres W_i des cercles C_i par leur abscisse x_i, leur ordonnée égale au rayon valant $1/4\, y_i^2$. En supposant connu le cercle C_i de centre W_i, le cercle C_{i+1} de centre W_{i+1} est constructible si et seulement si : $[\, x_{i+1} > x_i$ et $W_iW_{i+1}^2 = R_i + R_{i+1} = 1/4\, x_i^2 + 1/4\, x_{i+1}^2 = (x_{i+1} - x_i)^2 + (1/4\, x_{i+1}^2 - 1/4\, x_i^2)^2$

Cette condition se traduit par : $[x_{i+1} > x_i$ et $x_{i+1}(1 - 1/2\, x_i) = x_i\,]$. La condition de fin de l'algorithme est donc $x_i < 2$. C'est elle qui conditionne le tracé possible du dernier cercle de la famille.

On est alors ramené à l'étude d'une suite (x_n) de premier terme x_0 telle que :

$$[R_0 = 1/4\, x_0^2 \text{, et } x_{n+1} = 2x_n / (2 - x_n)] \quad (1)$$

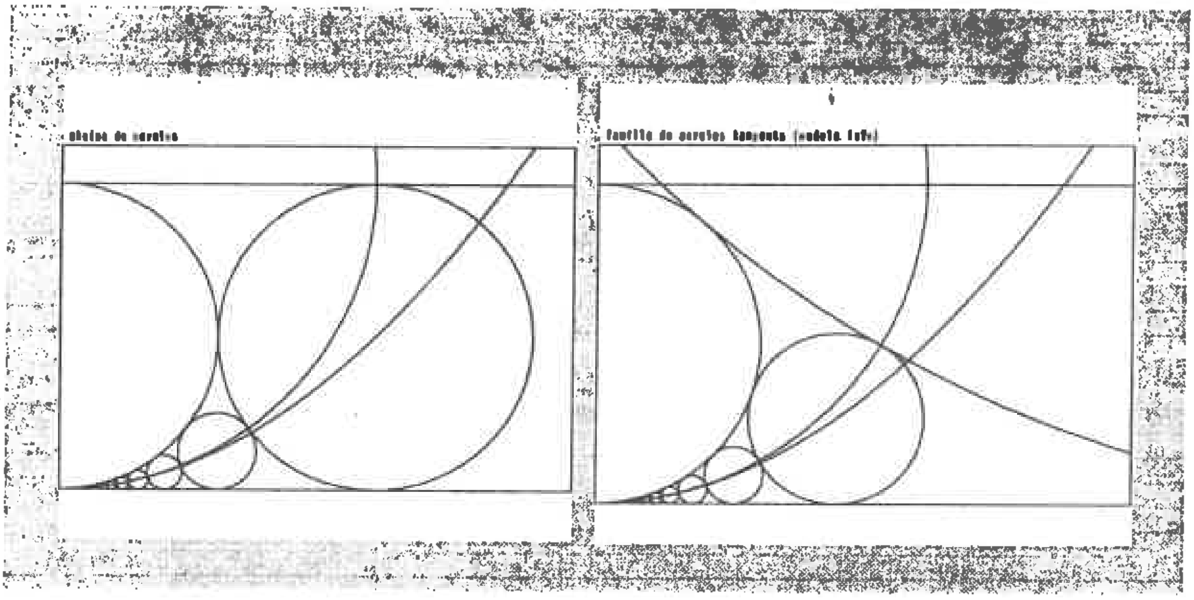
et en particulier à chercher le nombre de premiers termes pour lesquels elle est croissante.

La relation (1) permet d'établir que $x_{n+1} = 2 / (2 / x_n - 1)$, d'où $2 / x_{n+1} = 2 / x_n - 1$, ce qui conduit au calcul (suite arithmétique simple !) : $2 / x_n = 2 / x_0 - n$, d'où $x_n = 2x_0 / (2 - n.x_0)$.

Graph'x permet alors en paramètrant de tracer la famille de cercles cherchée selon la valeur initiale du rayon. Avec $R_0 = 10^{-6}$, on obtient $x_0 = 2.10^{-3}$ et la condition de fin $x_n < 2$ nous donne $n < 999$ ce qui conduit à une famille de 1000 cercles possibles !

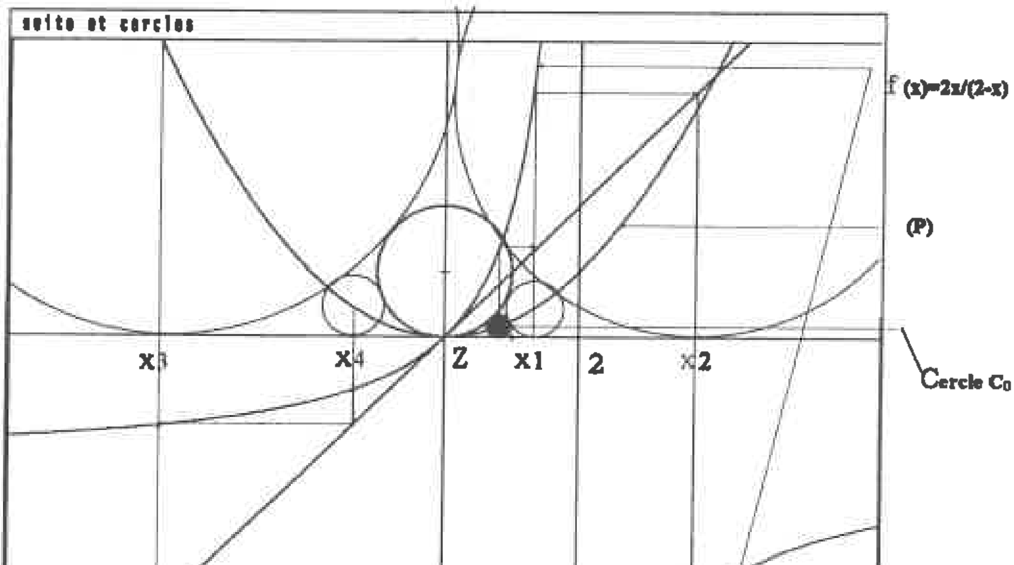
Pour $R_0 = 10^{-2}$ cela ne fait que 10 cercles dans la famille.

- **remarques**



Ces deux figures donnent le tracé de cercles de la famille avec deux cercles de départ très petits mais différents. Outre la 1/2 parabole (P) , la droite D et le cercle C, j'ai mis en évidence une constatation que seule l'informatique permet de réaliser de façon commode : il semble bien que les points de contact de tous les cercles de la famille soient eux-même sur un cercle de centre J et de rayon 2. Cela conduira à une solution géométrique "pure".

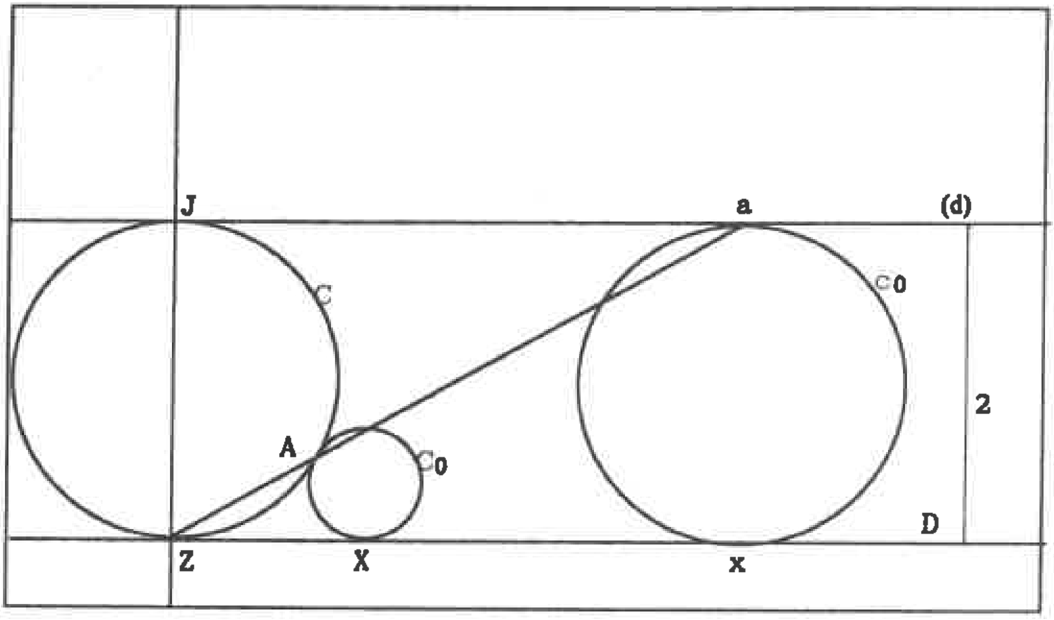
Avec des élèves de terminale, l'étude de la suite (x_n) conduit graphiquement à une étude de point fixe, la convergence n'étant pas le but essentiel, puisque c'est la croissance des premiers termes qui nous intéresse. Cependant il est clair que la suite est croissante "en deux parties" et donc quand la construction n'est plus possible du côté droit, la famille se reconstitue par la gauche comme l'indique la figure ci-dessous



- **Méthodes géométriques**

Utilisation de l'inversion

L'inversion permet de changer de stratégie en ramenant le problème à la recherche de cercles tangents à deux droites parallèles :



On considère l'inversion I de pôle Z et de puissance 4. Dans cette inversion I, l'image du cercle C qui passe par le pôle est la parallèle (d) à D passant par J (J est invariant). L'image de la droite D, passant par le pôle est la droite D. Tout cercle tangent à C et D, ne passant pas par Z, est transformé en un cercle tangent à (d) et D. Tous ces cercles ont le même diamètre, distance de (d) à D.

Plus le point de contact X s'éloigne de Z, plus son image x, se rapproche de Z.

En revenant au problème posé, il s'agit donc de trouver tous les cercles C_n de la famille, tangents à C et D, tangents entre eux "par la droite". Leurs images par I seront des cercles tangents à (d) et à D, et tangents entre eux "par la gauche", à partir du premier, c_0 image de C_0 par I

Le cercle C_0 étant tracé, on trace sans difficulté son image c_0 par I, puis le cercle c_1, tangents à c_0 "à gauche", à (d) et D, puis le cercle c_1 ....Les images des cercles c_n par I sont les cercles C_n de la famille.

Quel est leur nombre?

L'inversion I de pôle Z et de puissance 4 est l'application involutive du plan privé de Z, qui à tout point M associe le point m tel que Z, M, m sont alignés et ZM . Zm = 4.

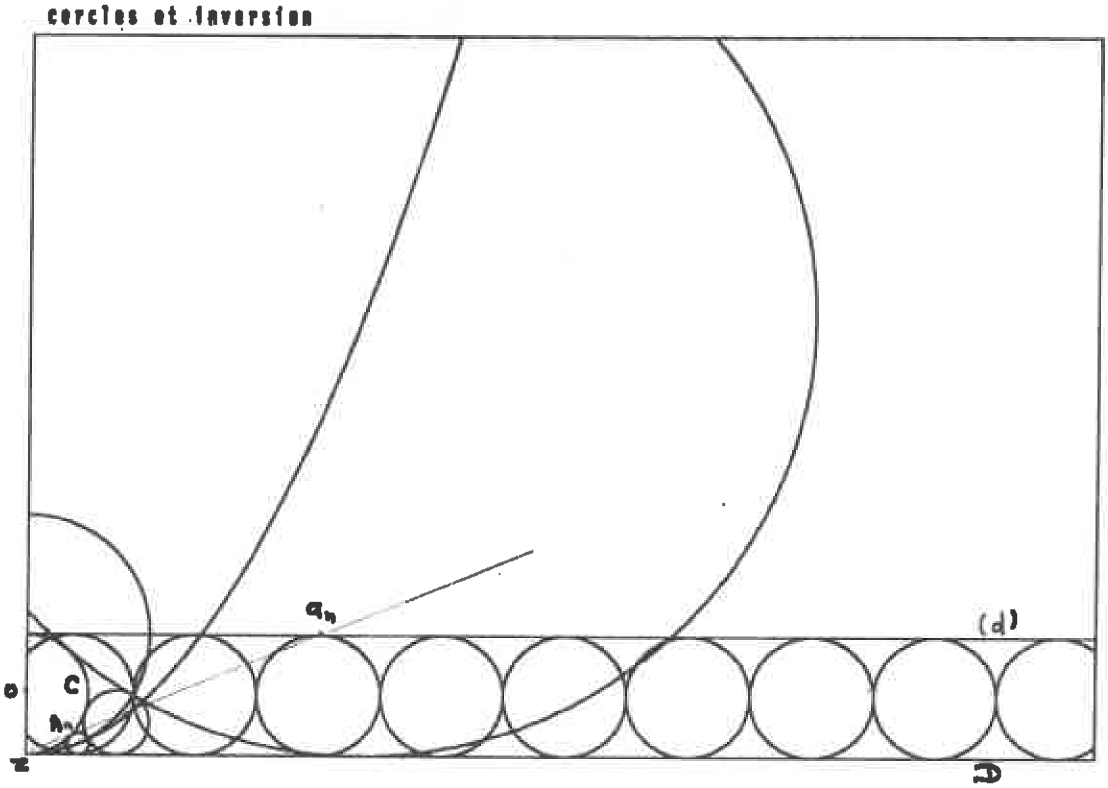
Pour toute figure F du plan on note F* cette figure privée de Z.

L'image par I d'une droite D* passant par Z est D*. L'image d'un cercle C* passant par Z est une droite ne passant pas par Z et réciproquement. L'image d'un cercle C ne passant pas par Z est un cercle c.

L'inversion conserve les contacts.

Le rayon R_0 de C_0 est fixé. Nous avons vu que l'abscisse X_0 de son centre vaut $2\sqrt{R_0}$. L'abscisse du centre de l'image c_0 est x_0 telle que $X_0.x_0 = 4$, d'où $x_0 = 2 / \sqrt{R_0}$. Chaque cercle c_n ayant pour diamètre 2, le nombre de cercles possibles est donc la partie entière de $1 / \sqrt{R_0}$, augmentée de 1.

La figure ci-dessous présente les cercles de la famille C_n et leurs images c_n' par I



Seconde méthode, n'utilisant pas l'inversion

On suppose connus la droite D, le cercle C et le premier cercle de la famille, C_0 de centre W_0 et de rayon R_0.

O est le centre de C , Z son point de contact avec D et J le point diametralament opposé à Z sur C. C_0 à pour centre W_0.et est tangent à C en A_0, à D en Z_0., comme indiqué sur la figure qui suit.

Il faut donc tracer si possible le cercle suivant, C_1 de centre W_1, tangent à C en A_1, à D en Z_1, et situé à droite de C_0.

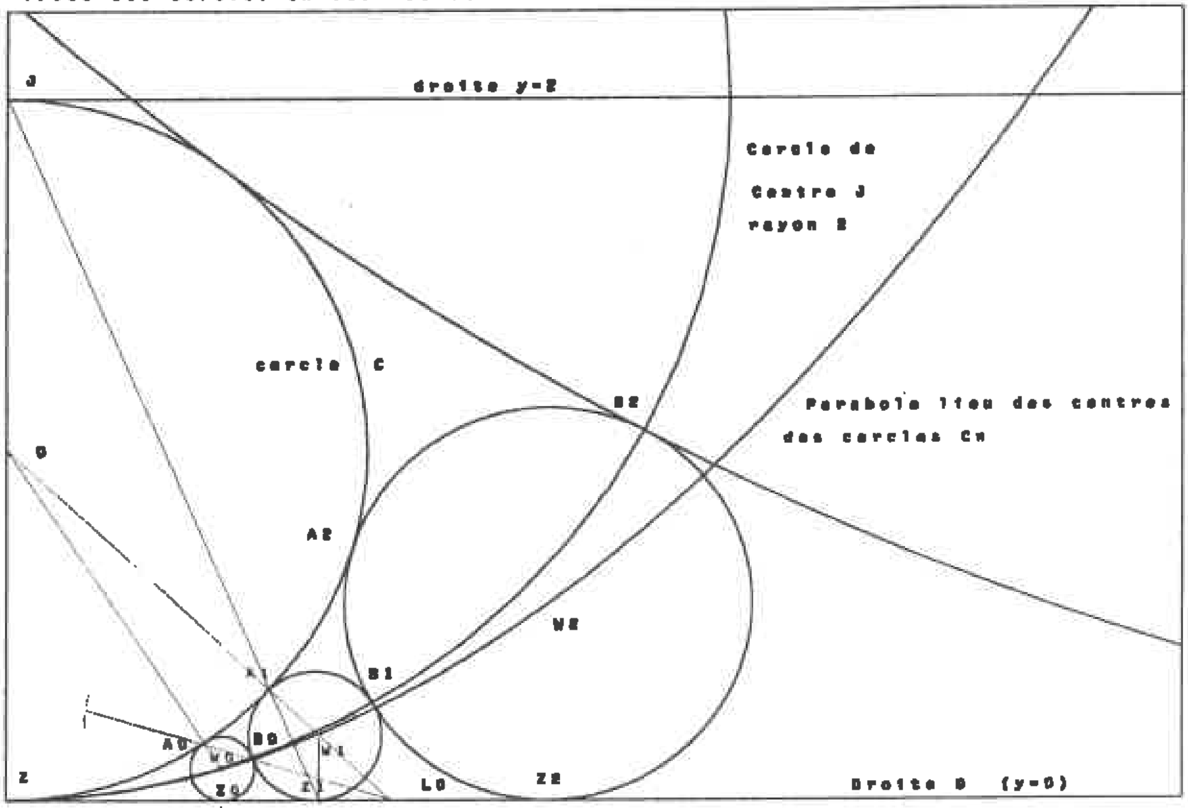
Le cercle C a pour image le cercle C_0 dans l'homothétie négative de centre A_0 et de rapport $-R_0$. Dans cette homothétie, l'image de J est Z_0. les points J, A_0, Z_0 sont donc alignés. (Il en serait de même pour raison analogue de J, et A_1, Z_1, que l'on cherche.)

Le problème revient donc maintenant à la détermination du point A_1, car (JA_1) coupera D en Z_1 et (OA_1) recoupera en W_1 la perpendiculaire en Z_1 à D, ce qui détermine complètement le cercle C_1.

Montrons que le point de contact éventuel B_0 du cercle C_0 et du cercle C_1, est sur le cercle de centre J et de rayon 2.

Le triangle JZ_0Z est rectangle en Z, de hauteur JA_0, donc $\overline{JA_0}.\overline{JZ_0} = JZ^2$. De même dans le triangle cherché JZ_1Z on a $\overline{JA_1}.\overline{JZ_1} = JZ^2$. D'où l'on tire que J a même puissance $\overline{JA_0}.\overline{JZ_0} = \overline{JA_1}.\overline{JZ_1} = 4$, par rapport à C_0 et à C_1

Trace des cercles Cn successifs



J se trouve donc sur l'axe radical des deux cercles C_0 et C_1, c'est à dire sur leur tangente commune en B_0, et l'on a $JZ^2 = JB_0^2 = 4$, d'où $JB_0 = 2$. B_0 est donc le point d'intersection "à droite" du cercle de centre J et de rayon 2 avec C_0.

Si le cercle C_1 existe, l'image de C est C_0 par l'homothétie négative de centre A_0 et de rapport $-R_0/1$ et l'image de C_0 est C_1 par l'homothétie négative de centre B_0 et de rapport $-R_1/R_0$. Le produit des rapports est R_1.

Si R_1 est diifférent de 1 on passe de C à C_1 dans l'homothétie positive de centre L_0 intersection de (A_0B_0) avec la tengente commune extérieure D à C et C_1 et de rapport R_1. Le point A_1 est alors l'intersection de C avec la demi-droite $[OL_0)$. Ce point A_1 ne convient que si L_0 est situé à droite de Z_0.

Si R_1 est égal à 1, la composée des deux homothéties est une translation (la droite (A_0B_0) est alors parallèle à D). Le point A_1 est alors le milieu de l'arc "de droite", JZ du cercle C..

Construction des cercles de la famille :

On trace C, D, C_0, et les points J, O, Z, A_0, Z_0, W_0. Le cercle de centre J et de rayon 2 coupe C_0, "à droite" en B_0. On trace (A_0B_0). Trois cas sont possibles :

La droite (A_0B_0) coupe D en L_0, à droite de Z_0. $[OL_0)$ coupe C en A_1 . (JA_1) coupe D en Z_1. La perpendiculaire en Z_1 à D coupe (OA_1) en W_1. C_1 est le cercle de centre W_1 et de rayon W_1Z_1.

La droite (A_0B_0) est parallèle à D. le point A_1 est le milieu de l'arc JZ de C. Le reste de la construction est identique.

La droite (A_0B_0) coupe D à gauche de Z_0. le cercle C_1 est alors du mauvais coté, la construction s'arrête.

L'algorithme de construction des cercles C_n est lancé. Il finit quand la droite (A_nB_n) "penche du mauvais coté".

Jean-Claude DANIEL

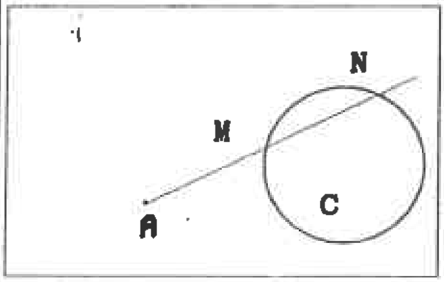
Antenne IREM de Haute-Marne Chaumont

Références

- [1] Redécouvrons la géométrie (Dunod) — H.M.S Coxeter et S.L Greitzer
- [2] Joyaux mathématiques volume 2 (Cédic) — R Honsberger
- [3] Comment résoudre et poser un problème (Dunod) — Polya
- [4] La découverte des mathématiques (Dunod) — Polya
- [5] Mathématique élémentaires d'un point de vue algorithmique (Cédic) — A Engel

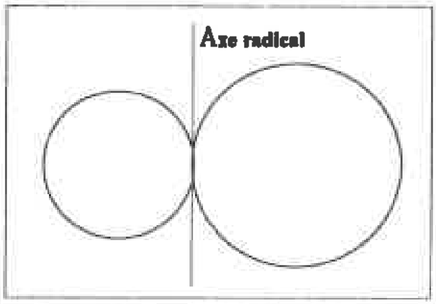
D'autres cercles en famille

Puissance d'un point par rapport à un cercle



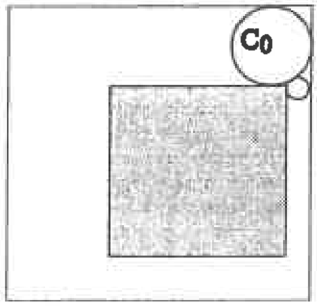
La puissance d'un point A par rapport au cercle C est le réel $\overline{AM}.\overline{AN}$ où M et N sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec C. Ce réel est indépendant de la sécante choisie. (Il vaut $OA^2 - R^2$ si C a pour centre O et rayon R.)

L'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles est une droite, qui est la tangente commune au point de contact quand les deux cercles sont tangents.



Problème 1

On considère deux carrés emboîtés non concentriques.

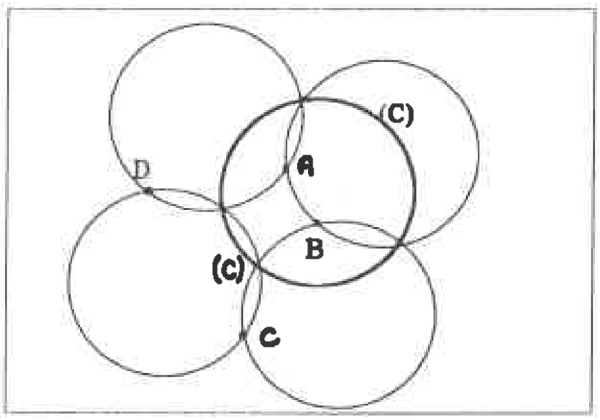


On trace un cercle C_0 tangent aux deux carrés, puis C_1 tangent aux deux carrés et à C_0 puis C_2 ...Est-il possible de disposer deux carrés pour que le "porisme s'effectue ? (Le dernier cercle ferme le collier en devenant tangent au premier.)

Problème 2

On trace un cercle (C) de rayon R, puis quatre cercles comme indiqué sur la figure.

Conjecture : les quatre points A, B, C, D sont sur un cercle de même rayon R



DES CHIFFRES ET DES LETTRES AU COLLEGE

NOUVEAUTE

Brochure Inter-IREM 1ER CYCLE

en vente à l'IREM au prix de : 65 F port compris.

SOMMAIRE

IREM de Reims
BP 347
51062 REIMS CEDEX

LISTE DES PUBLICATIONS IREM de REIMS

Au 15/05/92

NOM : ....

Prénom : ....

Adresse d'expédition : ....

....

....

	PRIX	QUANTITE	TOTAL
Re 5 - Introduction à la Géométrie Métrique Plane *Pour les Enseignants des 1er et 2nd Cycles*	20,00 F		
Re 6 - Sur les Quaternions *Pour les Enseignants & la Formation Continue*	20,00 F		
Re 7 - Influence de la formulation dans l'acquisition d'un concept mathématique. *Pour les formateurs*	35,00 F		
Re 8 - Evaluation : Docimologie - Orientation - Taxinomie *Pour les Enseignants ttes disciplines et les Formateurs*	35,00 F		
Re 9 - Le Vécu des Mathématiques (Français & Québécois) *Pour les Enseignants de math et philo, les Formateurs*	35,00 F		
Re11 - Premiers pas vers l'autonomie T A1 B *Pour les Enseignants, pour les Elèves*	25,00 F		
Re12 - Dictionnaire de mathématiques (2nde) *Pour les Elèves de 2nde, pour les Enseignants*	35,00 F		
Re13 - Opération Collège *Pour les Enseignants de Collège*	20,00 F		
Re14 - Piaget et les mathématiques au Collège *Pour les Enseignants*	30,00 F		
Re15 - Autonomie et math en 2nde : T1 Bilan d'une expé. *Pour les Elèves, pour les Enseignants*	20,00 F		
Re16 - Autonomie et math en 2nde : T2 le nombre d'or *Pour les Elèves, pour les Enseignants*	20,00 F		
Re17 - La Logique des Erreurs - primaire ou secondaire *Pour les Enseignants, les Maîtres, les Elèves*	20,00 F		
Re18 - Analyse & Calculatrice programmables au Lycée *Pour les Enseignants et les Elèves*	25,00 F		
EXPERIMENTATION *Pour les Enseignants, pour les Elèves*			
Re19 - Mathématiques en activités - 6ème - n° 1	20,00 F		
Re20 - " " " 6ème - n° 2	20,00 F	Epuisé	
Re21 - " " " 5ème - n° 3	20,00 F	Epuisé	
Re22 - " " " 5ème - n° 4	20,00 F		
Re23 - " " " 4ème - n° 5	20,00 F		
Re24 - " " " 4ème - n° 6	20,00 F		

	PRIX	QUANTITE	TOTAL
DOCUMENT HISTORIQUE			
Re25 - Un fruit bien défendu ou "BEN EZRA" *Elèves et Enseignants des 1er & 2nd Cycles secondaires*	25,00 F		
EXPERIMENTATION			
Pour les Enseignants, pour les Elèves			
Re26 - Mathématiques en activités - 3ème - n° 7	30,00 F		
Re27 - " " " 3ème - n° 8	30,00 F		
AUTRES DOCUMENTS			
Pour les Enseignants			
BULLETIN-INTER-IREM - premier cycle			
GEOMETRIE : n° 19 - 1981 - Activités 6°, 5°, 4°	20,00 F		
n° spécial - 1981 - thèmes pour la 2nde	20,00 F		
n° 20 - 1981 - Enseignement de l'Analyse	20,00 F		
n° 21 - 1982 - Rétroprojecteur	20,00 F		
spécial : ICME V	20,00 F		
n° 23 - 1983 - Enseignement de la géométrie	30,00 F		
n° 24 - 1984 - Astronomie	40,00 F		
SUIVI SCIENTIFIQUE : nx pgs de 6ème - maths en activités - 86	60,00 F		
5ème - " " " 87	60,00 F		
4ème - " " " 88	60,00 F		
3ème - " " " 89	60,00 F		
2nde- " " " 90	60,00 F		
EPISTEMOLOGIE : pour une perspective historique des mathématiques : BUDAPEST 88	60,00 F		
IMAGES ET MATHS - 88 - niveau secondaire	30,00 F		
Calculettes et calculatrices programmables (82) primaire	10,00 F		
Utilisation de calculettes en 2nde (81)	10,00 F		
Géométrie dans l'espace (84)	20,00 F		
Introduction des fractions au C.M. (77.78)	20,00 F		
Introduction aux fractions 4ème préparatoire CAP (LEP) (82)	10,00 F		
Liaison 3ème-2nde : rapport de stage 83/84	15,00 F		
Quelles activités pour quels apprentissages ? du Collège au Lycée - 1983 -	60,00 F		
Actes du Colloque Inter-IREM "GEOMETRIE" des 26, 27 & 28 Mai 1989	60,00 F		
ACTIVITES : CADRAN SOLAIRE A CONSTRUIRE	10,00 F		
Une brochure sur les Actes du Colloque qui s'est tenu à Troyes les 25, 26 & 27 Mai 1989, intitulé "DU COLLEGE AU LYCEE : POUR MIEUX REUSSIR" doit être publiée par les deux Commissions : "Objectifs et Niveaux d'Approfondissement" et "Premier Cycle" et vendue à l'IREM de Reims (environ 60 F)			
MONTANT de la Commande			
FRAIS administratifs et de gestion 5 F X Brochure			
A PAYER			

les chèques doivent être adressés à l'IREM :

(Tél : 26 05 32 08)

DATE : SIGNATURE :

I.R.E.M. de REIMS
MOULIN DE LA HOUSSE
B.P. 347 - 51062 REIMS CEDEX

DANS LA COLLECTION "BULLETIN INTER-IREM"
Disponibles à l'IREM de Reims
FORMAT POCHE
premier cycle

- SUIVI SCIENTIFIQUE :	nouveaux	programmes	de 6ème	- MATHS EN ACTIVITES				- 85-86 :	60 F
- "	"	"	"	de 5ème -	"	"	"	- 86-87 :	60 F
- "	"	"	"	de 4ème -	"	"	"	- 87-88 :	60 F
-				de 3ème -	"	"	"	- 88-89 :	60 F
- "	"	"	"	de 2nde -	"	"	"	- 89-90 :	60 F

- EPISTEMOLOGIE : POUR UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE DES MATHEMATIQUES
BUDAPEST 88 - 1988 : 60 F

FORMAT A4

- IMAGES ET MATHS (1988) niveau secondaire - 1988 : 30 F

POUR LES MAITRES
FORMAT A5

- QUELLES ACTIVITES POUR QUELS APPRENTISSAGES ? du Collège au Lycée - 1983 : 60 F

UNE BROCHURE SUR LES ACTES DU COLLOQUE QUI S'EST TENU A TROYES LES 25-26-27 MAI 1989 intitulé "DU COLLEGE AU LYCEE : POUR MIEUX REUSSIR" doit être publiée par les deux Commissions : "Objectifs et Niveaux d'Approfondissement" et "Premier Cycle" et vendue à l'IREM de Reims

Tous ces fascicules peuvent être expédiés en France Métropolitaine, Territoires et Départements d'Outre-Mer, ainsi que dans tous les pays ayant des établissements français, moyennant 5 F/Brochure comme participation aux frais administratifs et de gestion ; il faut y ajouter les frais d'envois lorsque la dispense d'affranchissement n'est pas autorisée.

PUBLICATIONS INTER-IREM	PRIX (Port compris)	QUANT.	TOTAL
- Suivi scientifique de 6^e	50,00 F		
- Suivi scientifique de 5^e	50,00 F		
- Suivi scientifique de 4^e	70,00 F		
- Suivi scientifique de 3^e	70,00 F		
- Quelles activités pour quels apprentissages, du collège au lycée, 1983	60,00 F		
- Astronomie, 1984	30,00 F		
- Images et maths	45,00 F		
- La démonstration mathématique dans l'histoire	145,00 F		
- Liaison collège-seconde, 1989-90	50,00 F		
Nouveauté :			
- Enseigner autrement les maths en DEUG A	70,00 F		

✂--

(A RETOURNER A L'IREM)

Joindre à votre commande un chèque libellé au nom de IREM de REIMS
adresse: Moulin de la Housse BP 347 51062 REIMS CEDEX

NOM.. Prénom ....

Etablissement ....

Adresse de l'établissement ....

....

Date ....

Signature

☐ **prix du numéro :** 70 F *(+ frais d'expédition si envoi par avion)*

☐ **abonnements** *(quatre numéros par an)*

— Institutions : 250 F — Particuliers : 200 F

Envoi par avion *(Dom - Tom ou Etranger)*

— Institutions : 330 F — Particuliers : 280 F

✂ ....

Bulletin d'abonnement à renvoyer à :

TOPIQUES éditions, 24 rue du 26e B.C.P., 54700 PONT-À-MOUSSON

accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

Nom : --
en capitales svp

Adresse : --

Code postal et Ville : --

Ci-joint la somme de : ----------------

Mode de réglement :

☐ Chèque bancaire ☐ Chèque postal

☐ Virement administratif sur facture

Premier numéro souhaité pour débuter l'abonnement : ------

(en cas d'impossibilité, l'abonnement débute au dernier numéro disponible)

REPERES - IREM , n°1 - octobre 1990

Cher(e) Collègue,

Vous avez reçu dans votre établissement la revue "Repères-Irem n° 1" destinée aux professeurs de mathématiques. (Eventuellement réclamez-la à votre documentaliste).

Elle est publiée par les Instituts universitaires de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) sous le patronage de l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'Irem).

Ce bulletin trimestriel s'adresse plus particulièrement aux enseignants des Collèges, des Lycées et des LycéesProfessionnels.

Nous attirons votre attention sur la qualité de cette publication en vous rappelant la possibilité d'utiliser vos crédits d'enseignement pour un tel abonnement.

Françoise PINCHON

Bibliothécaire

Pour recevoir $\vec{V}$ecteur à votre nom retournez cet encart à l'adresse suivante:

UNIVERSITE de REIMS

I.R.E.M.

Moulin de la Housse B.P.347 51062 REIMS CEDEX

Mr/Mme/Mlle NOM : Prénom :

Adresse de l'établissement (complète) :

souhaite recevoir le bulletin de liaison de l'IREM de REIMS 92-93

Les abonnements déjà demandés seront valables jusqu'au numéro 4 de Vecteur

Ce bulletin d'abonnement permet de recevoir les numéros 3 et 4, à paraître en 92-93

Pour recevoir $\vec{V}$ecteur à votre nom retournez cet encart à l'adresse suivante:

UNIVERSITE de REIMS

I.R.E.M.

Moulin de la Housse B.P.347 51062 REIMS CEDEX

Mr/Mme/Mlle NOM : Prénom :

Adresse de l'établissement (complète) :

souhaite recevoir le bulletin de liaison de l'IREM de REIMS 92-93

COURRIER

. Cette page blanche vous est réservée.
. Adressez vos remarques, suggestions,
. propositions d'articles, de préférence
. dactylographiées !

à

VECTEUR IREM
Moulin de la Housse
BP 347
51062 REIMS CEDEX

----------------.

Marne :	Patrick PERRIN Lycée Georges Clémenceau 46 avenue Georges Clémenceau 51096 REIMS Cédex FAX : 26.85.35.04
Ardennes :	Regis DEBARGE Lycée Parc du château de Montvillers 08140 BAZEILLES FAX : 24.27.43.27
Aube :	Brigitte CHAPUT Lycée Edouard Herriot 10300 SAINTE- SAVINE FAX : 25.75.63.15
Haute-Marne :	Jean-Claude DANIEL Lycée Edmé Bouchardon 16 rue Youri Gagarine 52012 CHAUMONT Cédex FAX : 25.32.15.90
I.R.E.M.	TEL : 26.05.32.08 FAX : 26.85.35.04

vecteur

SOMMAIRE DU NUMERO DEUX (1992)

ACADEMIE DE REIMS

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moulin de la Housse - B.P. 347 51062 REIMS Cedex