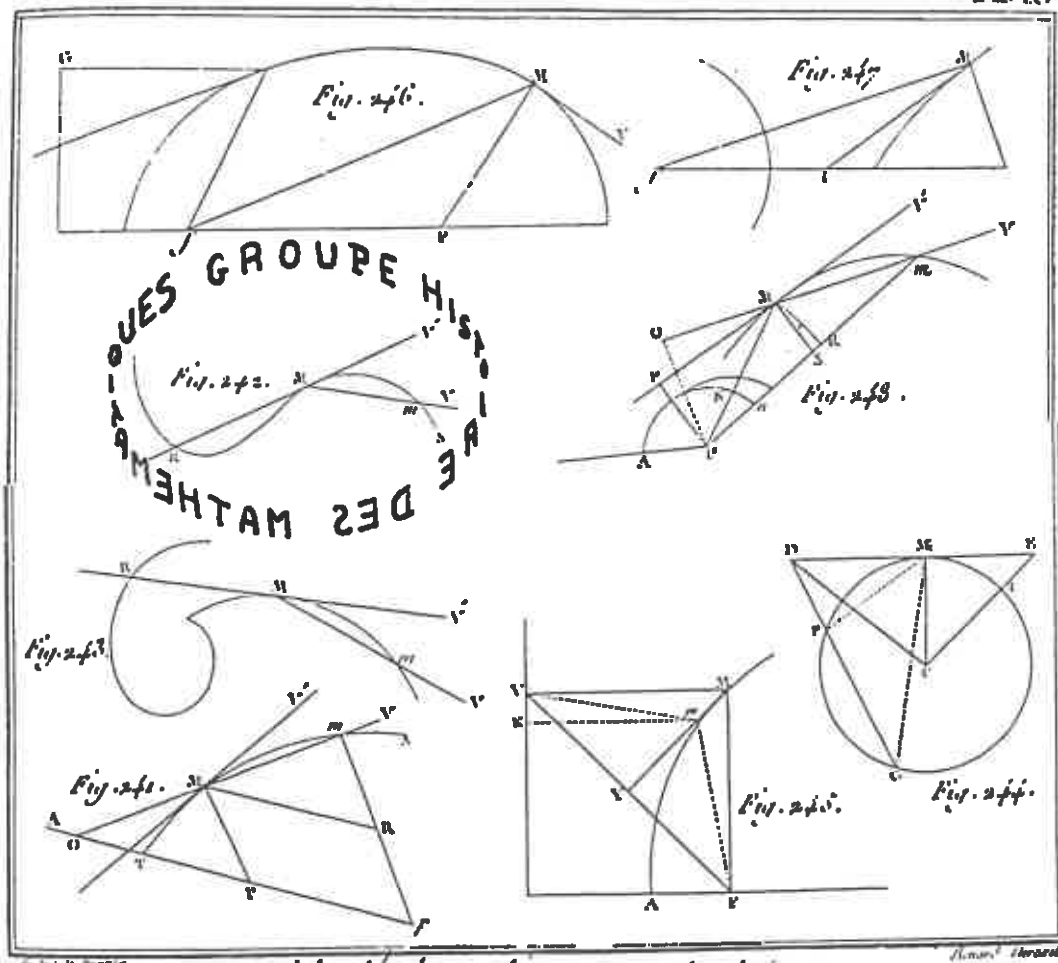




# Histoires de Tangentes

Pl. 16



Mathématiques, géométrie.



Cette brochure fait suite au stage : "l'analyse en second cycle ; l'histoire du calcul infinitésimal", qui eût lieu dans l'académie de Reims durant l'année scolaire 91-92. Elle est le fruit d'un travail mené par le groupe Histoire des Mathématiques de l'IREM de Reims.

A la lumière de textes du XVII<sup>e</sup> et du XVIII<sup>e</sup> siècle, nous avons essayé d'apporter un éclairage nouveau aux notions de base du calcul différentiel que nous enseignons à nos élèves : limite, continuité, dérivée, tangente ; entrepris d'analyser leur évolution historique. Vous trouverez ci-après les textes qui nous ont paru les plus significatifs, précédés d'une courte biographie de leur auteur et d'une présentation.

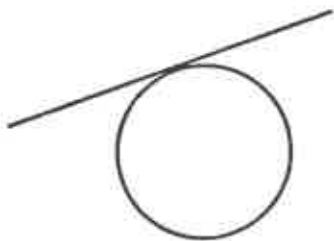
Certains textes ont fait l'objet d'activités en classe, vous pourrez en lire le contenu et un compte-rendu. Il nous semble que la mise en présence de textes historiques peut aider les élèves dans leur compréhension des mathématiques. La lecture des programmes nous a confortés dans cette démarche : "Il convient de mettre en oeuvre le contenu culturel des mathématiques : l'introduction d'une perspective historique peut y contribuer" (B.O. du 17 mai 1990).

Une des origines de ce travail a été la confusion que nous avons remarqué chez les élèves concernant les notions de limite, tangente et dérivée à leur entrée en terminale scientifique. Nous avons sur ce sujet mené une enquête auprès de 226 élèves du lycée Clémenceau de Reims, en Septembre 1991. Les résultats de cette enquête se trouvent à la fin de cette brochure.

Nous espérons que vous éprouverez autant de plaisir à découvrir ou étudier ces textes, dont certains sont peu connus, que nous en avons eu nous-mêmes. Toutes vos remarques ou suggestions seront les bienvenues.

Philippe DELEHAM  
Geneviève KIENZ  
Jean Claude PENIN  
Patrick PERRIN

## tangente



Je ne toucherai qu'une fois  
Et vous saurez que c'est furtif.

Inutile de m'appeler,  
Tout autant de me rappeler.

Vous aurez grandement le temps  
De vous redire ce moment

Et d'essayer de vous convaincre  
Que nous restons l'un contre l'autre.

GUILLEVIC  
Euclidiennes, poèmes  
Gallimard, nrf.

La dispute sur l'antériorité des travaux de Newton et de Leibniz entraîne, au XVIII<sup>e</sup> siècle, les écoles anglaise et continentale sur des chemins séparés ; mais toutes deux vont développer de façon extraordinaire le nouveau calcul. Les résultats vont s'accumuler dans cette nouvelle branche des mathématiques que l'on appellera plus tard l'analyse et dont l'efficacité dans la mathématisation des phénomènes naturels se révèle prodigieuse.

Parmi les oeuvres les plus marquantes, citons la courbe brachistochrone ( premier exemple de calcul des variations ) de Jean et Jacques Bernouilli (1697), le calcul différentiel de Taylor (1715), l'étude des courbes à double courbure de Clairaut (1728), l'exposé sur la méthode des fluxions de Mac Laurin (1741) ; et surtout l'oeuvre immense de Leonhard Euler (1707-1783).

La fin du XVIII siècle voit les essais de fondement du calcul infinitésimal de d'Alembert (\*) dans les articles infini, limite et différentielle de l'encyclopédie, et ceux de Lagrange dans sa "Théorie des fonctions analytiques" (1797). Mais il faut attendre le siècle suivant pour que les concepts de base soient clarifiés par Cauchy (\*), qui met en avant l'importance de la notion de limite.

(\*) Nous présentons un texte de ce mathématicien dans les pages suivantes.

# EUCLIDE ARCHIMEDE APOLLONIUS

et les autres.

## - TANGENTES -

Le Grec Démocrite fondateur de l'atomisme et contemporain de Socrate avait écrit selon Diogène Laerce, plusieurs ouvrages de mathématiques; l'un de ceux-ci ayant pour titre "de la différence angulaire, ou de la tangente du cercle et de la sphère". Malheureusement l'ouvrage, comme beaucoup d'autres de l'époque, ne nous est pas parvenue.

Passons à EUCLIDE, sur lequel nous savons peu de choses, sinon qu'il aurait vécu au début du 3<sup>ème</sup> siècle peut-être à Alexandrie. Son grand traité de Géométrie LES ELEMENTS nous est parvenu, il sera une référence et un modèle de rigueur jusqu'au 17<sup>ème</sup> siècle. Sa valeur didactique exceptionnelle fera de lui un modèle pour beaucoup d'ouvrages d'enseignement de la géométrie qui jusqu'au début du 20<sup>ème</sup> siècle en reprendront plus ou moins le plan et les démonstrations. Dans LES ELEMENTS la tangente apparaît au Livre III, qui est consacré au cercle et à ses propriétés, et elle apparaît sous la forme d'une définition concernant la tangente au cercle:

2. Une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas, est dite être tangente au cercle.
3. Des cercles qui se rencontrent l'un l'autre sans se couper, sont dits être tangents l'un à l'autre.<sup>(1)</sup>

On constate d'une part que dans les ELEMENTS *tangent* se dit seulement d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles, d'autre part ce sont deux définitions en terme d'attouchement, d'effleurage, de non traversée.

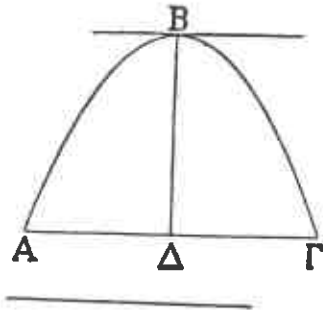
**Tangere:** Verbe latin: toucher, frapper, atteindre, effleurer<sup>(2)</sup>

Au sujet de la première remarque peut-on affirmer qu'Euclide ne connaissait que ces deux cas de tangences ? c'est peu probable, car parmi les ouvrages du Géomètre Alexandrin qui ne nous sont pas parvenus devait figurer un traité des Coniques dans lequel on pense que les problèmes de recherches de tangentes aux coniques étaient posés et résolus; ainsi les références d'Archimède du TRAITE DE LA PARABOLE pourraient avoir directement été inspirées par ces livres<sup>(3)</sup> de même que celles des premiers livres d'Apollonius sur les coniques.

Voici les 3 propositions d'ARCHIMEDE qui figure au début du Traité de la Parabole<sup>(4)</sup>:

### PROPOSITION I

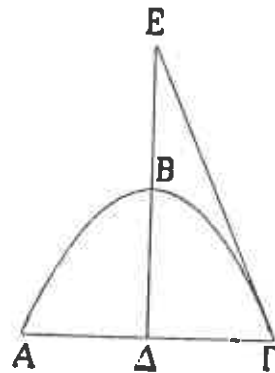
Si l'on a une parabole, sur laquelle se trouve l'arc  $AB\Gamma$ , une droite



$B\Delta$  parallèle au diamètre, ou diamètre elle-même (<sup>1</sup>), une droite  $A\Gamma$  parallèle à la tangente à la parabole en B, la droite  $A\Delta$  sera égale à la droite  $\Delta\Gamma$ , et, si la droite  $A\Delta$  est égale à la droite  $\Delta\Gamma$ , la droite  $A\Gamma$  et la tangente à la parabole en B seront parallèles (<sup>2</sup>).

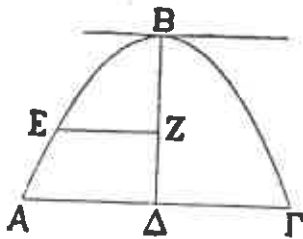
### PROPOSITION II

Si  $AB\Gamma$  est une parabole, la droite  $B\Delta$  une parallèle au diamètre, ou diamètre elle-même, la droite  $A\Delta\Gamma$  une parallèle à la tangente à la parabole au point B, et si la droite  $E\Gamma$  est une tangente à la parabole au point  $\Gamma$ , les droites  $B\Delta$ ,  $BE$  seront égales (<sup>1</sup>).



### PROPOSITION III

Si  $AB\Gamma$  est une parabole, la droite  $B\Delta$  une parallèle au diamètre, ou le diamètre même, et, si des droites  $A\Delta$ ,  $EZ$  sont menées parallèlement à la tangente à la parabole au point B, le carré de la droite  $A\Delta$  sera au carré de la droite  $EZ$  comme la droite  $B\Delta$  est à la droite  $BZ$  (<sup>1</sup>). Ces propositions sont d'ailleurs démontrées dans les *Eléments* relatifs aux sections coniques (<sup>2</sup>).



Dans ce traité de la Parabole ARCHIMEDE (-287; -212) effectue la quadrature de la Parabole, dans les propositions qu'il admet, la seconde est très connue, remarquer dans la troisième la référence aux ouvrages antérieurs auxquels nous avons fait allusion.

Poursuivons avec APOLLONIUS (? -170) que nous avons cité ci-dessus. La tradition le fait naître à Perge, ancienne ville d'Asie Mineure et il aurait étudié les mathématiques avec les disciples d'Euclide au Musée d'Alexandrie. Il est connu pour son grand ouvrage sur les Coniques dont les sept premiers livres nous sont parvenus et dans lesquels il traite des coniques obtenus à partir de la section d'un cône par un plan. On lui doit, semble-t-il d'ailleurs, les noms sous lesquelles elles sont connues actuellement.

Dans le passage proposé, qui appartient au Livre I<sup>(5)</sup>, APOLLONIUS démontre la réciproque de la proposition n 2 du traité d'ARCHIMEDE sur la Parabole (Voir plus haut). Apollonius use d'un langage essentiellement littéraire car l'époque ne connaît aucun symbolisme algébrique; C'est un raisonnement par l'absurde caractéristique des mathématiques Grecques et pour montrer que la droite  $A\Gamma$  est bien tangente à la parabole il montre d'une part quelle touche la parabole et d'autre part reste d'un seul côté ce qui nous ramène à EUCLIDE et à sa tangente au cercle.

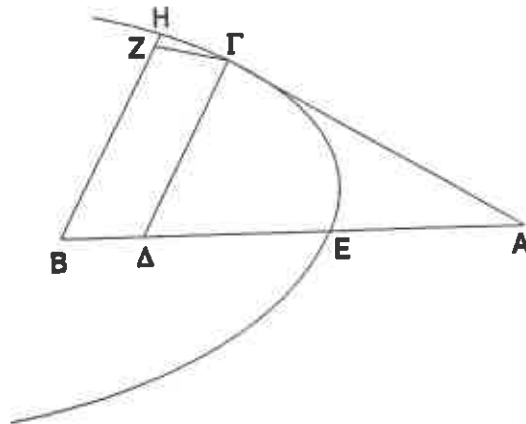
Voici ce texte:...

### PROPOSITION XXXIII

Si l'on prend un point sur une parabole; si, de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section.

Soit une parabole dont un diamètre est la droite  $AB$ . Abaissons une droite  $\Gamma\Delta$  de manière ordonnée; posons une droite  $AE$  égale à la droite  $E\Delta$ , et menons la droite de jonction  $A\Gamma$ . Je dis que la droite  $A\Gamma$  prolongée tombera à l'extérieur de la section.

En effet, qu'elle tombe à l'intérieur comme la droite  $\Gamma Z$ , et abaissons la droite  $HB$  de manière ordonnée. Dès lors, puisque le rapport du carré de  $BH$  au carré de  $\Gamma\Delta$  est plus grand que celui du carré de  $ZB$  au carré de  $\Gamma\Delta$ ; mais que le carré de  $BA$  est au carré de  $A\Delta$  comme le carré de  $ZB$  est au carré de  $\Gamma\Delta$ ; et que  $BE$  est à  $\Delta E$  comme le carré de  $HB$  est au carré de  $\Gamma\Delta$ , Il s'ensuit que le rapport de  $BE$  à  $\Delta E$  est plus grand que celui du carré de  $BA$  au carré de  $A\Delta$ . Or, le quadruple du rectangle délimité sous  $BE$ ,  $EA$  est au quadruple du rectangle délimité sous  $AE$ ,  $EA$  comme  $BE$  est à  $\Delta E$ ; donc le rapport du quadruple du rectangle délimité sous  $BE$ ,  $EA$  au quadruple du rectangle délimité sous  $AE$ ,  $EA$  est plus grand que celui du carré de  $BA$  au carré de  $A\Delta$ . Dès lors, par





permutation, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au carré de AB est plus grand que celui du quadruple du rectangle délimité sous AE, EA au carré de AΔ; ce qui ne peut avoir lieu, car, EA étant égal à AE, le quadruple du rectangle délimité sous AE, EA équivaut au carré de AΔ, et le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est moindre que le carré de BA, puisque le point E n'est pas le milieu de la droite AB. Dès lors, la droite AΓ ne tombe pas à l'intérieur de la section; donc lui est tangente.

Quelques explications...

"de manières ordonnées": (droites) menées en ordre ou d'une manière ordonnée sur le diamètre; expression par laquelle Apollonius désigne les droites que nous nommons actuellement les "ordonnées". (V. Eecke).

"droite AE égale à la droite EA": Entendez la distance AE égale à la distance EA.

$$\frac{BH^2}{\Gamma\Delta^2} > \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2} \quad \text{Car Z est supposé intérieur à la parabole.}$$

$$\frac{BA^2}{A\Delta^2} = \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2} \quad \text{Le triangle A}\Delta\Gamma \text{ est semblable au triangle ABZ.}$$

$$\frac{BE}{\Delta E} = \frac{HB^2}{\Gamma\Delta^2} \quad \text{Propriété de la Parabole d'axe AB de sommet E (ce qui ne fait que traduire le moderne } y = \sqrt{x}$$

$$\text{en résumé: } \frac{BE}{\Delta E} = \frac{HB^2}{\Gamma\Delta^2} > \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2} = \frac{BA^2}{A\Delta^2} \text{ entraîne que } \frac{BE}{EA} > \frac{BA^2}{A\Delta^2}$$

$$\text{or } \frac{4BE.EA}{4AE.E\Delta} = \frac{BE}{EA} \text{ par simplification.}$$

$$\text{donc } \frac{4BE.EA}{4AE.E\Delta} > \frac{BA^2}{A\Delta^2} \text{ et par permutation } \frac{4BE.EA}{AB^2} > \frac{4AE.E\Delta}{A\Delta^2}.$$

Or cette dernière inégalité est impossible car d'une part  $E\Delta = AE$  par hypothèse, donc  $4AE.E\Delta = A\Delta^2$  et d'autre part  $4BE.EA < BA^2$  car E n'est pas le milieu de AB. En effet un produit de somme donnée est maximal si les deux facteurs sont égaux.

Les travaux d'Apollonius et d'une façon plus générale de tous les géomètres grecs fascinèrent les mathématiciens qui suivirent; leurs redécouvertes à la Renaissance contribuèrent beaucoup au renouveau des mathématiques en Occident.

(1) - EUCLIDE Les Eléments Trad. par B. Vitrac PUF 1990

(2) - Dictionnaire Latin Français du Baccalauréat.

(3) - Au pluriel car selon la tradition Euclide ne fut pas le seul à avoir écrit sur les coniques, il faudrait citer les noms d'Aristée, Eudoxe de Cnide, Menechme, Dinostrate etc.

(4) - Les Oeuvres d'Archimède. P. Ver Eecke, Bruges, 1924

(5) - Les Coniques d'Apollonius de Perge. P. Ver Eecke, Bruges, 1923

## Pierre Fermat (Beaumont de Lomagne 1601 - Castres 1665)

Conseiller au Parlement de Toulouse en 1631, les mathématiques n'ont été pour lui qu'un passe-temps. Peu soucieux de sa gloire, Fermat ne prenait pas la peine de publier ses découvertes, se contentant de les communiquer à quelques correspondants ; ce qui ne l'empêche pas d'acquérir une immense réputation dans le milieu savant de l'époque. Fermat partage avec Descartes l'invention de la Géométrie Analytique et est un des précurseurs du calcul Différentiel et Intégral.

Dès 1629 il est en possession d'une règle pour la détermination des extremums des fonctions algébriques.

En 1632 il élabore sa méthode des Tangentes.

Avec Pascal il est considéré comme le fondateur du Calcul des Probabilités (1654). Mais c'est surtout en théorie des nombres que le nom de Fermat brille avec le plus d'éclat.

\*  
\* \*

En réaction à la méthode préconisée par Descartes dans sa Géométrie (1637), Fermat expose ses propres méthodes de détermination des tangentes à une courbe découlant d'une "règle" permettant la recherche d'un maximum et d'un minimum; "règle" qu'il prétend avoir mis au point dès 1629 et qu'il donne sans justification.

Cet écrit intitulé "Methodus ad disquirendam maximam et minimam" (méthode pour la recherche du maximum et du minimum) fut transmis par Mersenne à Descartes le 10 Janvier 1638 et devint dès lors le principal thème de polémique entre ces deux hommes.



# MÉTHODE

POUR LA

## RÉCHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

---

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit  $a$  une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en  $a$ , au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite  $a + e$  à l'inconnue primitive  $a$ , et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entrèrent  $a$  et  $e$  à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de  $e$  ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par  $e$ , ou par une puissance de  $e$  d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres  $e$  disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore  $e$  ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de  $a$ , qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (fig. 91) en E, en sorte que  $AE \times EC$  soit maximum.

Fig. 91.



Posons  $AC = b$ ; soit  $a$  un des segments, l'autre sera  $b - a$ , et le produit dont on doit trouver le maximum :  $ba - a^2$ . Soit maintenant  $a + e$  le premier segment de  $b$ , le second sera  $b - a - e$ , et le produit des segments :  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ ;

Il doit être adégagé au précédent :  $ba - a^2$ ;

Supprimant les termes communs :  $be \curvearrowright 2ae + e^2$ ; (2)

Divisant tous les termes :  $b \curvearrowright 2a + e$ ;

Supprimez  $e$  :  $b = 2a$ .

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de  $b$ .

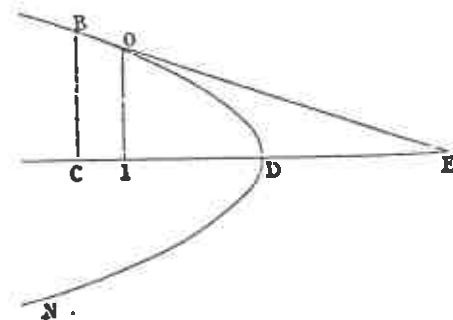
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

#### DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (fig. 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène

l'ordonnée  $OI$ , en même temps que l'ordonnée  $BC$  du point  $B$ , on aura :

$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$ , puisque le point  $O$  est extérieur à la parabole. Mais

$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$ , à cause de la similitude des triangles. Donc  $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$ .

Or le point  $B$  est donné, donc l'ordonnée  $BC$ , donc le point  $C$ , donc  $CD$ . Soit donc  $CD = d$ , donnée. Posons  $CE = a$  et  $CI = e$ ; on aura

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^3 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \curvearrowright - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \curvearrowright 2dae.$$

Divisez tous les termes par  $e$  :

$$de + a^2 \curvearrowright 2da.$$

Supprimez  $de$  : il reste  $a^2 = 2da$ , donc :  $a = 2d$ .

Nous prouvons ainsi que  $CE$  est double de  $CD$ , ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrions traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.



Par E menons EOVIN parallèle à la droite RMD; on a  $\frac{a}{a-e} = \frac{z}{\text{NIVOE}}$ ;  
d'où  $\text{NIVOE} = \frac{za - ze}{a}$ .

Il faut donc *adégaler* (à cause de la propriété spécifique, de la courbe qui est à considérer sur la tangente) cette droite  $\frac{za - ze}{a}$  à la somme OE + arc CO.

Mais arc CO = arc CM - arc MO. Donc  $\frac{za - ze}{a} \curvearrowright$  OE + arc CM - arc MO.

Pour obtenir l'expression analytique des trois derniers termes, tout en évitant les radicaux, on peut, d'après la remarque précédente, substituer, à OE, l'ordonnée EV de la tangente, et à l'arc MO, la portion de tangente MV qui lui est adjacente. (3)

Pour trouver l'expression analytique de EV, on a d'ailleurs  $\frac{b}{b-e} = \frac{r}{\text{EV}}$ , d'où  $\text{EV} = \frac{rb - re}{b}$ .

Pour celle de MV, à cause des triangles semblables, comme ci-dessus,  $\frac{b}{d} = \frac{e}{\text{MV}}$ , d'où  $\text{MV} = \frac{de}{b}$ .

Enfin on a posé arc CM = n. On aura donc analytiquement

$$\frac{za - ze}{a} \curvearrowright \frac{rb - re}{b} + n - \frac{de}{b}$$

Multipliant, de part et d'autre, par ab :

$$zba - zbe \curvearrowright rba - rae + bna - dae.$$

Mais, d'après la propriété de la courbe,  $z = r + n$ , donc  $zba = rba + bna$ .  
Supprimant les termes communs,

$$zbe \curvearrowright rae + dae.$$

Divisons par e: comme il ne reste ici aucun terme superflu, il n'y a pas d'autre suppression à faire :

$$zb = ra + da, \quad \text{d'où} \quad \frac{r+d}{b} = \frac{z}{a}.$$

Pour la construction, on fera donc  $\frac{MA + MD}{DA} = \frac{RD}{DB}$ ; on joindra BR qui touchera la courbe CR.

Mais comme  $\frac{MA + MD}{DA} = \frac{MD}{DC}$ , ainsi qu'il est facile de le démontrer, (4)  
 on peut faire  $\frac{MD}{DC} = \frac{RD}{DB}$ , ou, pour que la construction soit plus élégante, joindre MC et lui mener RB parallèle.

La même méthode donnera les tangentes à toutes les courbes de cette espèce. Nous avons indiqué il y a longtemps leur construction générale.

\* \*  
 \*

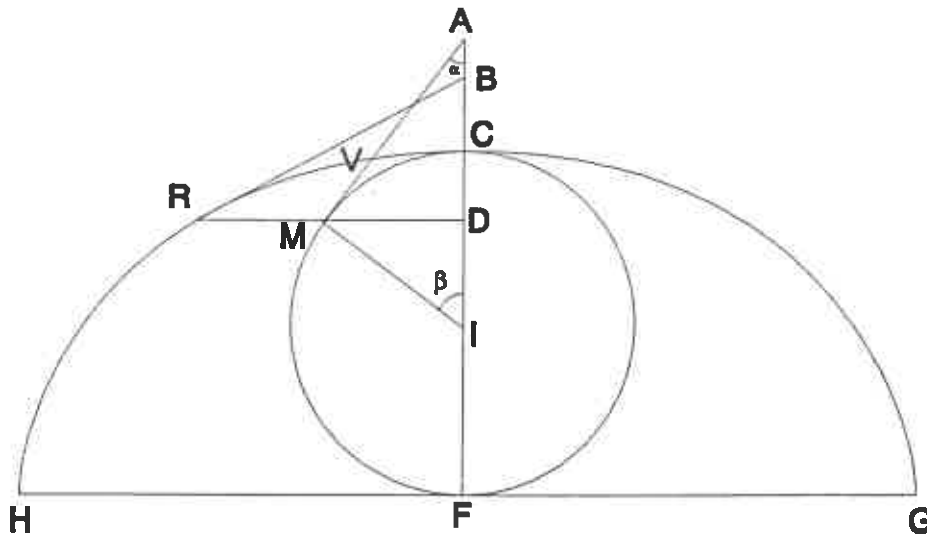
Note 1 : Oeuvres, tome III page 144 - 145.

Note 2 : Le signe  $\sphericalangle$  est du aux traducteurs.

Note 3 : Ici on voit Fermat adégaleriser un arc de courbe MO avec un segment de tangente MV

Note 4 : " Mais comme  $\frac{MA + MD}{DA} = \frac{MD}{DC}$  ainsi qu'il est facile de le démontrer"

Preuve



$$\frac{MA + MD}{DA} = \frac{MA}{DA} + \frac{MD}{DA} = \frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{MD}{DC} = \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \text{ et ces deux quantités sont égales.}$$



René DESCARTES  
( La Haye 1596 - Stockholm 1650 )

Natif de la Touraine, Descartes est sans doute le philosophe français le plus célèbre. En mathématique il créa avec Fermat la géométrie analytique ; il simplifia les notations algébriques et découvrit les principes de l'optique géométrique. En 1629 il se rendit en Hollande où il vécut vingt ans. Descartes publia à Leyde en 1637 son fameux Discours de la Méthode, accompagné de trois traités scientifiques : La Dioptrique Les Météores et La Géométrie.

Le texte qui suit est une lettre au Père Marin Mersenne datée du 23 Août 1638. Dans cette lettre Descartes donne, pour la tangente en un point donné d'une cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, une construction fondée sur la considération du centre instantané de rotation.

\* \*

\*

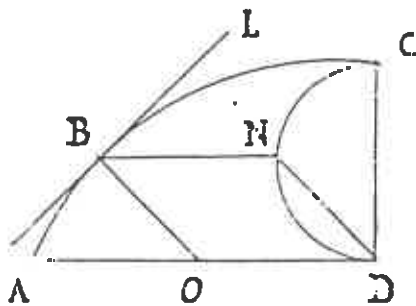


23 août 1638.

Mon Reuerend Pere,<sup>(1)</sup>

l'ay esté bien ayse de voir les questions que celuy que vous estimez le principal de vos Geometres confesse ne sçauoir pas; car ie pourray esprouer, en les cherchant, si mon analyse est aussy bonne que la leur.

La premiere de ces questions est de trouuer les tangentes des courbes decrites par le mouuement d'une roulete.<sup>(3)</sup> A quoy ie respons que la ligne droite qui passe par le point de la courbe dont on veut trouuer la tangente, & par celuy de la baze auquel touche la roulete pendant qu'elle le decrit, coupe tousiours cete



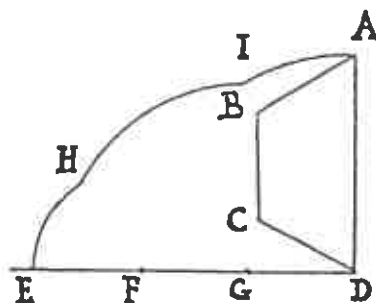
tangente a angles droits. En sorte que si on veut, par exemple, trouuer la ligne droite qui touche au point B la courbe ABC, descrite sur la baze AD par l'un des poins de la circonference de la roulete DNC, il

faut mener par ce point B la ligne BN parallele a la baze AD, puis mener vne autre ligne du point N, ou cete parallele rencontre la roulete, vers le point D, ou cete roulete touche la baze, & apres cela mener BO parallele a ND, & enfin BL qui la rencontre a angles droits; car cete ligne BL est la tangente cherchée.


De quoy ie ne mettray icy qu'une demonstration qui est fort courte & fort simple. Si on fait rouler vn polygone rectiligne, quel qu'il soit, sur vne ligne droite, la courbe descrite par l'un de ses poins, quel qu'il soit, fera composée de plusieurs parties de cercles, & les tangentes de tous les poins de chascune de ces parties

de cercles couperont a angles droits les lignes tirees de ces poins vers celui auquel le polygone aura touché la baze en decrivant cete partie. En suite de quoy, considerant la roulete circulaire comme vn polygone qui a vne infinité de costez, on voit clairement qu'elle doit auoir cete mesme proprieté, c'est a dire que les tangentes de chascun des poins qui sont en la courbe qu'elle decrit doiuent couper a angles droits les lignes tirées de ces poins vers ceux de la baze qui sont touchés par elle au mesme tems qu'elle les decrit.

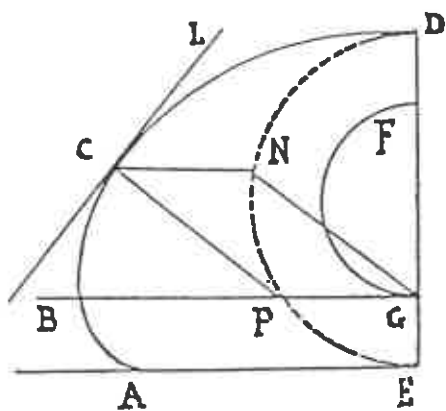
Ainsy, lorsqu'on fait rouler l'hexagone ABCD sur la ligne droite EFGD, son point A decrit la ligne courbe EHIA, composée de l'arc EH, qu'il decrit pendant que cet hexagone touche la baze au point F qui est le centre de cet arc, de l'arc HI dont le centre est G, de l'arc IA dont le centre est D &c., par lesquels centres passent toutes les lignes qui rencontrent les tangentes de ces arcs a angles droits. Or le mesme arriue a vn polygone de cent mil millions de costez, & par consequent aussy au cercle. Je pourrois demonstrier cete tangente d'une autre façon, plus belle a mon gré & plus Geometrique; mais ie l'obmets pour espargner la peine de l'escire, a cause qu'elle seroit vn peu plus longue.



Or il faut remarquer que, lorsque la baze de cete courbe est egale a la circonference du cercle qu'on imagine rouler sur cete mesme baze pour la decrivre, ainsy que ie l'ay suposée en l'exemple precedent, cete

courbe n'a que la vouture d'un demi cercle, c'est a dire qu'en chascun de ses bouts la tangente de son dernier point est perpendiculaire sur cete baze. Mais lorsque la baze est plus courte, ses deux bouts sont repliez en dedans de part & d'autre, en sorte que plusieurs de ces reuolutions font vne telle figure : .


Or pour trouuer les tangentes de cete courbe, & sçauoir exactement ou elle commence ainfy a se replier, il faut imaginer que le point qui la décrit est au dehors de la roulete, & supposer deux bases : l'une sur laquelle est descrite la courbe, comme icy AE, sur



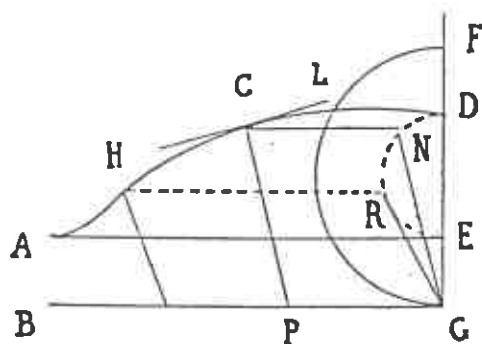
laquelle la courbe ABCD est descrite par le point D, ioint par dehors a la roulete FG, en telle sorte qu'il décrit le cercle ED autour de cete roulete au mesme tems qu'il décrit la courbe ABCD sur le plan AD ; & vne autre base comme BG, sur laquelle se

meut la roulete FG, dont la demi-circonférence doit estre egale a la demi-base AE. Et les tangentes se mesurent icy par le cercle DE & le point G, ou la roulete FG touche sa base BG, en sorte que, pour trouuer la ligne qui touche cete courbe, par exemple au point C, il faut mener CN parallele a la base, & ioindre le point N, qui est dans le cercle DNE, au point G ou la roulete touche sa base, puis mener CP parallele a NG, & cete CP est perpendiculaire sur CL qui est la tangente cherchée.

En suite de quoy on voit clairement que le point B, ou la seconde base B G rencontre cete courbe, est celui ou elle commence a se replier en dedans ; car la tangente de ce point est perpendiculaire sur la base A E.

Que si la base de cete courbe est plus longue que la circonference du cercle que trace autour du centre de la roulette le point qui la decrit, ses deux bouts sont repliez en dehors, en sorte que plusieurs de ses reuolutions font vne telle figure  . Et pour trouuer ses tangentes & sçauoir ou elle commence a se replier, il faut imaginer que le point qui la decrit est au dedans de la roulette, &

ainsy supposer vne seconde base B G, sur laquelle se meut la roulette F G, dont la circonference est egale a cete base, pendant que le point D, qui decrit la courbe sur l'autre base A E, decrit autour du centre de la roulette le cercle D E. Puis, pour trouuer la tangente du point C, pris a discretion en cete courbe, il faut mener C N parallele a la base, & ioindre le point N, qui est dans le cercle D E, au point G, ou la roulette touche sa base, puis tirer C P parallele a N G ; & C L, qu'elle rencontre a angles droits, est la tangente cherchée.



En suite de quoy, pour trouuer le point H, ou la partie de la courbe A H cesse d'estre concaue, & H C D d'estre conuexe, il ne faut que tirer du point G vne ligne comme G R, qui touche le cercle D R E au point R, & de ce point R mener R H parallele a la

base. Et il est a remarquer qu'il ne peut y auoir aucune ligne droite qui touche cete courbe AHC en ce point H, a cause qu'il fait la separation de ses deux parties, dont l'une est concaue & l'autre conuexe. Or ces determinations si simples & si faciles peuuent estre prises pour la seconde chose que M<sup>r</sup> vostre Geometre a confessé ne sçauoir pas ; car bien qu'il ait dit en auoir vne demonstration, mais qui estoit longue, & qu'il en desiroit seulement vne plus courte, il n'a pû toutefois en auoir qui determinast exactement aucune de ces choses, puisqu'il n'a pû trouuer les tangentes.

Au reste, il est a remarquer que tant ce que i'ay icy escrit des tangentes, que ce que ie vous auois mandé cy deuant touchant l'espace que contiennent ces lignes decrites par vne roulete circulaire, se peut aussy estendre a toutes celles qui sont decrites par des rouletes qui ont d'autres figures, telles qu'elles puissent estre. Excepté seulement que, touchant l'espace, il faut que les circonferences de ces rouletes soient conuexes & que leurs parties opposées soient semblables, comme lorsqu'elles ont la figure d'une Ellipse ou de deux hyperboles aiustées l'une contre l'autre, &c. Et il est si aysé de leur appliquer les demonstrations que ie vous ay enuoyées, que cela ne vaut pas la peine que ie l'explique. Mesme il n'y faut changer que fort peu de chose, lorsque les circonferences de ces rouletes ne sont pas toutes conuexes. Et ainsy ie ne croy pas qu'il y ait gueres rien a dire touchant

ces lignes, qui ne foit compris en ce peu que ie vous en ay escrit.

Il faut auffy remarquer que les courbes descrites par des rouletes font des lignes entierement mecha- niques, & du nombre de celles que i'ay reietées de ma Geometrie; c'est pourquoy ce n'est pas merueille que leurs tangentes ne se trouuent point par les regles que i'y ay mifes. (4)

Lettre de Descartes à Mersenne, édition Clerselier III 65 page 350

\* \*

\*

Notes :

(1) : Le père Marin Mersenne ( 1588-1648 ) de l'ordre des Minimes était en rapport épistolaire avec tout le monde savant de la première moitié du 17<sup>e</sup> siècle ( Fermat, Descartes, Roberval, Galilée ). Il détermina les rapports des fréquences des notes de la gamme et la vitesse du son. Il publia l'Harmonie Universelle en 1636.

(2) : Le principal de vos géomètres : il s'agit de Roberval.

(3) : roulette appelée également trochoïde ou cycloïde. La roulette est certainement une des courbes les plus étudiées à cette époque.

"La roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est pas autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé ; supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane". B.Pascal 10/10/1658.

(4) : Pour Descartes la normale à une courbe parait plus aisée à déterminer que la tangente. Dans la Géométrie publiée en 1637, Descartes propose une méthode générale de détermination d'une normale à une courbe, méthode ne convenant que pour les courbes algébriques ( cf annexe ).

Descartes imagina sa célèbre théorie du centre instantané de rotation dans la première édition latine de sa Géométrie (1649).

\* \*

\*

En 1637-1638 a lieu la polémique à propos des tangentes entre Fermat et Descartes. Dans la lettre suivante qui est adressée à Hardy (1) Descartes essaie de justifier la méthode proposée par Fermat dans le court essai intitulé "Methodus ad disquirendam maximam et minimam" et que lui avait transmis le Père Mersenne en Janvier 1638.

\* \*

\*

Monfieur,

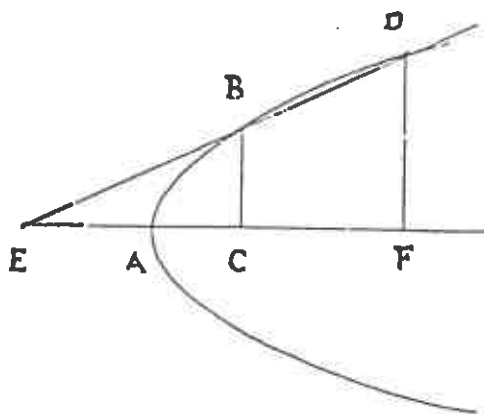
Au reste, ie vous suis tres obligé de ce que vous auez foûtenu mon party, touchant la regle *De maximis* de Monfieur de Fermat, & ie ne m'estonne point de ce que vous n'en iugez pas plus aduantageusement que ie n'ay fait; car, de la façon qu'elle est proposée, tout ce que vous en dites est veritable.

Mais pour ce que i'ay mis, dés mon premier Escrit, qu'on la pouuoit rendre bonne en la corrigeant, & que i'ay toujourns depuis foûtenu la mesme chose, ie m'assure que vous ne ferez pas marry que ie vous en die icy le fondement; aussi bien ie me persuade que ces Messieurs, qui l'estiment tant, ne l'entendent pas, ny peut-estre mesme celuy qui en est l'Autheur.

Soit donc la ligne courbe donnée  $ABD$ , & que le point  $B$  de cette ligne soit aussi donné, à sçauoir, ie fais l'ordonnée  $BC \propto b$ , & le diametre  $AC \propto c$ , & qu'on demande vn point en ce diametre, comme  $E$ , qui soit tel que la ligne droite, qui en sera menée vers  $B$ , coupe cette courbe en  $B$ , & encore en vn autre point, comme  $D$ , en sorte que l'ordonnée  $DF$  soit à l'ordonnée  $BC$  en raison donnée, par exemple, comme  $g$  à  $h$ . Vous sçaucez bien que, pour trouuer ce point  $E$ , on peut poser  $EC \propto a$ , &  $CF \propto e$ , & dire premiere-ment, à cause des triangles semblables  $ECB$  &  $EFD$ ,

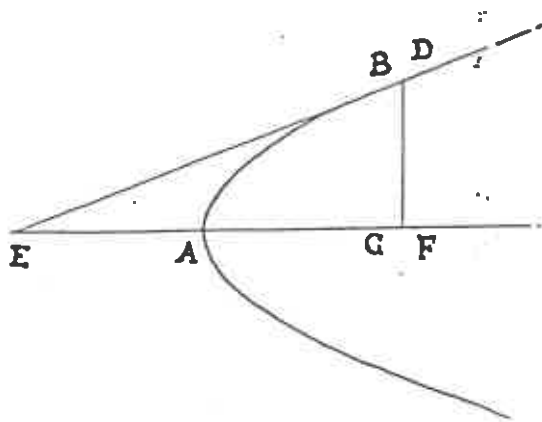


comme  $CE \propto a$  est à  $BC \propto b$ , ainsi  $EF \propto a + e$ , est à  $DF$ , qui par consequent est  $DF \propto \frac{ba + be}{a}$ . Puis, à cause que



DF est l'une des ordonnées en la ligne courbe, on la trouue aussi en d'autres termes, qui seront diuers, selon les diuerses proprietés de cette courbe. Par exemple, si c'est la première des lignes que Monsieur de Fermat a imaginées à l'imitation de la parabole, (2) c'est à dire celle en laquelle les segmens du diametre ont entr'eux mesme proportion que les cubes des ordonnées, on dira, comme  $AC \propto c$  est à  $FA \propto c + e$ , ainsi le cube de  $BC$ , qui est  $b^3$ , est au cube de  $DF$ , qui, par les termes trouuez cy-dessus, est  $\frac{b^3 a^3 + 3b^2 a^2 e + 3b a e^2 + b^3 e^3}{a^3}$ . Car cecy est le cube de  $\frac{ba + be}{a}$ . Puis, multipliant les moyennes & les extremes de ces quatre proportionnelles,  $c \mid c + e \mid b^3 \mid$  &  $\frac{b^3 a^3 + 3b^2 a^2 e + 3b a e^2 + b^3 e^3}{a^3}$ , on a  $cb^3 + eb^3 \propto \frac{cb^3 a^3 + 3b^2 caae + 3b^2 acee + cb^3 e^3}{a^3}$ . Et diuisant le tout par  $b^3$ , & le multipliant par  $a^3$ , il vient  $a^3 c + a^3 e \propto ca^3 + 3 caae + 3 caee + ce^3$ , & ostant de part & d'autre  $ca^3$ , il reste  $a^3 e \propto 3 caae + 3 caee + ce^3$ . Et enfin, pour ce que le tout se peut diuiser par  $e$ , il vient  $a^3 \propto 3 caa + 3 cae + ce$ . Mais pour ce qu'il y a icy deux quantitez inconnuës, à sçauoir  $a$  &  $e$ , & qu'on n'en peut trouuer qu'une par vne seule équation, il en faut chercher encore vne autre, & il est aisé

par la proportion des lignes BC & DF, qui est donnée; à sçavoir : comme  $g$  est à  $h$ , ainsi  $BC \propto b$  est à  $DF \propto \frac{ba+bc}{a}$ , & par consequent  $bh \propto \frac{gba+gbc}{a}$ , ou bien  $ha \propto ga+ge$ ; et par le moyen de cette équation on trouue aisément l'une des deux quantitez  $a$  ou  $e$ , au lieu de laquelle il faut par apres substituer en l'autre équation les termes qui luy sont égaux, afin de chercher en suite l'autre quantité inconnue: Et c'est icy le chemin ordinaire de l'Analyse pour trouuer le point E, ou bien la ligne CE, lors que la raison qui est entre les lignes BC & DF est donnée. Maintenant pour appliquer tout cecy à l'invention de la tangente (ou, ce qui est le mesme, de la plus grande), il faut seulement considérer que, lors que EB est la tangente, la



ligne DF n'est qu'une avec BC, & toutefois qu'elle doit estre cherchée par le mesme calcul que ie viens de mettre, en supposant seulement la proportion d'égalité, au lieu de celle que j'ay nom-

mée de  $g$  à  $h$ ; à cause que DF est renduë égale à BC (3) par EB, en tant qu'elle est la tangente (au moins lors qu'elle l'est), en mesme façon qu'elle est renduë double, ou triple &c., de BC, par la mesme EB, en tant qu'elle coupe la courbe en tel ou tel point, lors qu'elle l'y coupe. Si bien qu'en la seconde équation, au lieu de  $ha \propto ga+ge$ , pour ce que  $h$  est égale à  $g$ , on a seulement  $a \propto a+e$ , c'est à dire,  $e$  égal à rien. D'où il est

euident que, pour trouuer la valeur de la quantité  $a$ , il ne faut que substituer vn zero en la place de tous les termes multipliez par  $e$ , qui sont en la premiere équation, laquelle est  $a^3 \propto 3\ caa + 3\ cae + cee$ , c'est à dire qu'il ne faut que les effacer. Car vne quantité réelle estant multipliée par vne autre quantité imaginaire, qui est nulle, produit tousiours rien. Et cecy est l'elision des Homogenes de Monsieur de Fermat, laquelle ne se fait nullement gratis en ce sens-là. Or cette elision estant faite, il ne reste icy en nostre équation que  $a^3 \propto 3\ caa$ , ou bien  $a \propto 3\ c$ ; d'où l'on apprend que, lors que EB est la tangente de la ligne courbe proposée, la lig(ne) EC est necessairement triple de la ligne AC.

Voila donc le fondement de la regle, en laquelle il y a virtuellement deux équations, bien qu'il ne soit besoin d'y faire mention expresse que d'une, à cause que l'autre sert seulement à faire effacer ces Homogenes. Mais il est fort vray-semblable que Monsieur de Fermat ne l'a point ainsi entenduë, & qu'il ne l'a trouuée qu'à tâtons, veu qu'il y a obmis la principale condition, à sçauoir celle qui presuppose ce fondement, ainsi que vous pourrez voir, s'il vous plaist, par ce que i'ay mandé cy-deuant deuoir y estre corrigé, dans vne Lettre adressée au R. Pere Merseenne .  
Je suis,

Correspondance Descartes Hardy

Oeuvre de Fermat tome IV page 48 à 51.

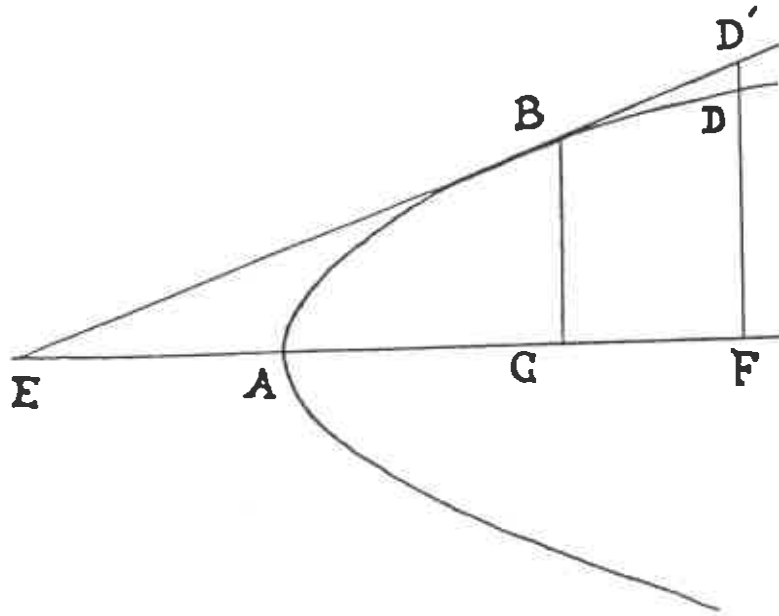
\* \*  
\*

Notes :

(1) : Claude Hardy ( Le Mans 1604 - Paris 1678 ). Ami de Descartes, il joua avec Mersenne le rôle d'arbitre dans la polémique entre Fermat et Descartes à propos du traité de Maximis et Minimis. Il fut conseiller à la cour des comptes, puis conseiller au Chatelet ; il connaissait une trentaine de langues. Il a traduit les Données d'Euclide.

(2) : L'exemple étudié par Descartes est en termes modernes la courbe d'équation  $y=|x|^3$  ; l'axe des y étant horizontal et l'origine du repère située en A.

(3) : La méthode exposée ici par Descartes revient à considérer la tangente comme la position limite de la sécante EBD lorsque les deux points B et D se confondent. Descartes adopte un procédé d'adégalisation analogue à celui de Fermat, mais il adégale BC et DF alors que la méthode de Fermat consiste à adégaler DF et  $DF'$  , le point D' de la tangente et le point D de la courbe se projetant tous deux sur l'axe en F.



Descartes a donné deux autres méthodes de détermination de la tangente. Dans la première la tangente est considérée comme la position limite d'une sécante tournant autour du pied de la tangente. La seconde utilise la recherche d'un cercle tangent à la courbe par la méthode du point d'intersection double.

Gilles PERSONNE de ROBERVAL  
( Roberval 1602 - Paris 1675 )

Gilles Personne vit le jour dans une famille paysanne près de Senlis ; il prit en 1628 le nom de son lieu de naissance. En 1632 il est professeur de philosophie au collège de Maitre Gervais et deux ans plus tard il obtient la chaire créée par Ramus au Collège Royal de France ; il la gardera jusqu'à sa mort. Surtout connu du grand public pour la description de sa célèbre balance, Roberval a très peu publié de son vivant, un traité de statique en 1636 et un d'astronomie en 1644. Par contre il transmit à l'académie des Sciences, dont il fut membre dès sa création en 1666, de nombreuses notes portant sur la cycloïde, la composition des mouvements, les quadratures par la méthode des indivisibles, la recherche des centres de gravité.

Le texte suivant est extrait d'un des huit traités rassemblés par l'abbé Gallois et publiés en 1693. L'ouvrage s'intitule : "Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les tangentes des lignes courbes". Roberval considère les courbes comme trajectoires d'un point mobile, la direction du mouvement étant celle de la tangente.

\* \*  
\*

# P R O B L E M E I.

**D** O N N E R les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvemens qui les décrivent.

*Axiome, ou principe d'invention.*

**L** A direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention,

*Règle générale.*

**P** A R les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

\* \*  
\*

Le *Traité des indivisibles* fut publié pour la première fois en 1693 dans les mémoires de l'Académie des Sciences. Dans l'extrait qui suit, se trouve la célèbre quadrature de la cycloïde datant de 1636, ainsi que la construction de sa tangente. Ici Roberval interprète le mouvement d'un point décrivant une cycloïde comme résultant de la composition de deux mouvements, un de translation uniforme et un de rotation uniforme. Il trouve la tangente en composant les vitesses ( de même module ) de ces mouvements.

\* \*  
\*



Gilles-Personne de Roberval  
*Traité des Indivisibles*

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

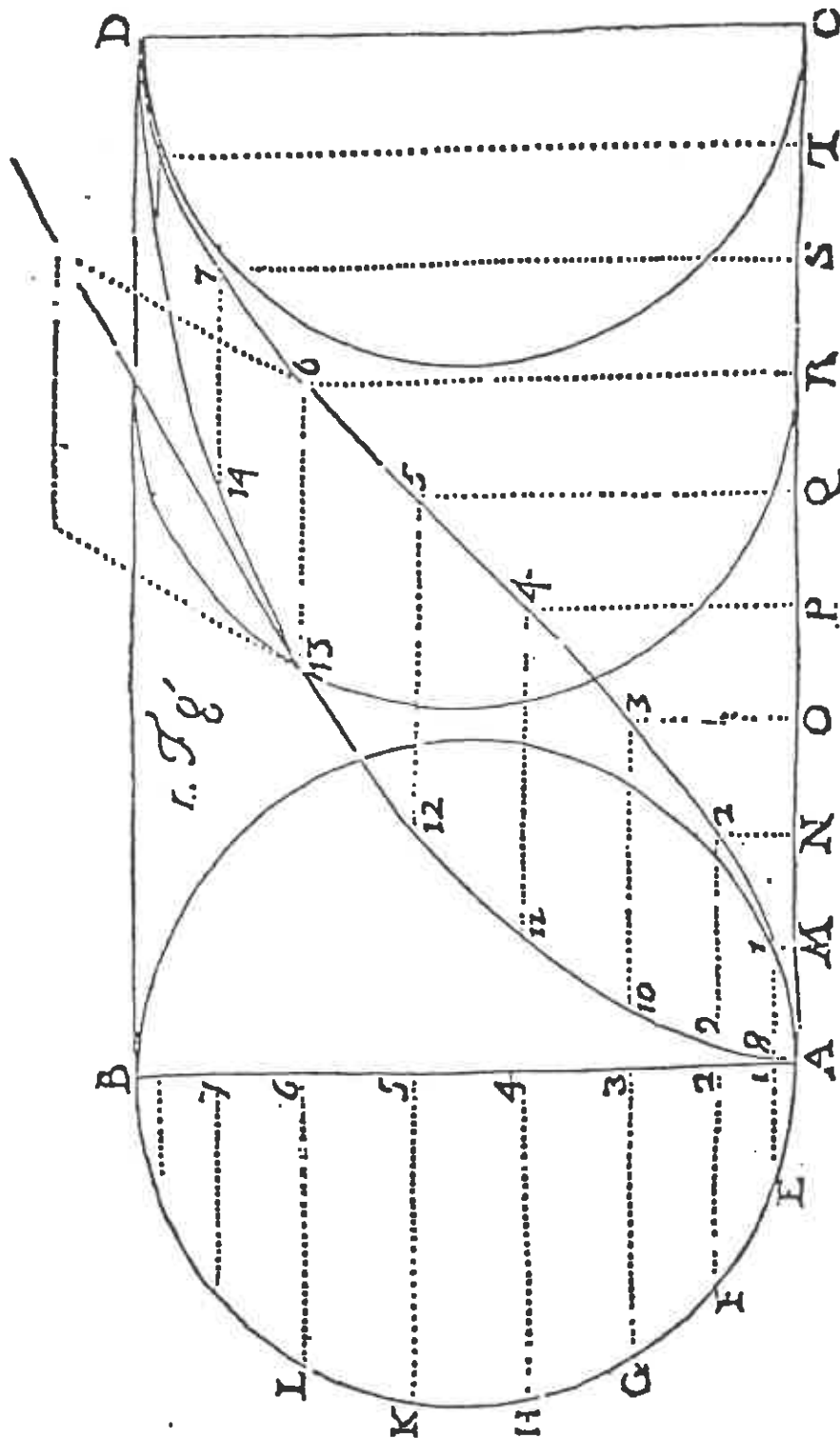
**N** O U S posons que le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallèlement à soy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamètre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamètre, en sorte que quand le diamètre est en CD, le point A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamètre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamètre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamètre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti; cette hauteur se marque tirant du point F au diamètre AB un sinus E<sub>1</sub>, & le sinus Versé A<sub>1</sub> est la (1) hauteur dudit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F<sub>2</sub>, & A<sub>2</sub> sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le sinus G<sub>3</sub>, le sinus Versé A<sub>3</sub> sera la hauteur de A quand il est parvenu en G; & faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que

Les notes sont regroupées page 39.



# TRAITE' DES INDIVISIBLES.

parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevezmens par dessus l'extrémité du diamètre A, qui sont  $A_1, A_2,$



$A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ ; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-  
I i ij

## T R A I T E' D E S I N D I V I S I B L E S.

dant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamètres  $M, N, O, P, Q, R, S, T$ , & je trouve que  $M_1, N_2, O_3, P_4, Q_5, R_6, S_7$  sont les mêmes que celles qui sont prises sur  $AB$ . Puis je prends les mêmes sinus  $E_1, F_2, G_3$ , &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamètre, & je les tire vers le cercle, & des extrémités de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est  $A_8_9_{10}_{11}_{12}_{13}_{14} D$ , & l'autre  $A_1_2_3_4_5_6_7 D$ . Je sçai comme s'est fait la ligne  $A_8_9 D$ ; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que  $AB$  a parcouru la ligne  $AC$ , le point  $A$  est monté par la ligne  $AB$ , & a marqué tous les points  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , le premier espace pendant que  $AB$  est venu en  $M$ , le second pendant que  $AB$  est venu en  $N$ , & ainsi toujours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamètre soit arrivé en  $CD$ ; alors le point  $A$  est monté en  $B$ . Voilà comment s'est formée la ligne  $A_1_2_3 D$ . Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémités  $AD$ . Or chaque partie contenue entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle  $AEB$  contenue dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur  $A_1, A_2$ , &c. & des sinus  $E_1, F_2$ , &c. qui sont les mêmes que ceux des diamètres  $M, N, O$ , &c. ainsi la figure  $A_4 D_{12}$  est égale au demi-cercle  $AHB$ . Or la ligne  $A_1_2_3 D$  divise le parallélogramme  $ABCD$  en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne  $AC$  à la ligne  $BD$ ; & partant selon Archimède, la moitié est égale au cercle, auquel ajoutant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace  $A_8_9 DC$ ; &

## TRAITE' DES INDIVISIBLES.

faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

· Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considère ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamètre marchant parallèlement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallélogramme ( qui doit toujours avoir les quatre côtes égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamètre AB par la ligne AC ) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procède en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelque autre raison, comme si lorsque l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcourroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison. (2)

\* \*  
\*

### Notes :

(1) : sinus Verse  $\theta = 1 - \cos\theta$

(2) : Roberval a sans doute été influencé par Simon Stévin (1548 - 1620) qui un demi siècle plus tôt avait énoncé sa règle du parallélogramme des forces. Vers 1640 Evangelista Torricelli (1608 - 1647) développa une méthode des tangentes si proche de celle de Roberval qu'il y eut querelle de priorité et accusation de plagiat.

## ISAAC BARROW

( Londres 1630 - id. 1677 )

Premier titulaire de la chaire Lucasienne de Mathématiques au Trinity College de Cambridge, il fut à la fois un spécialiste de la géométrie des anciens Grecs et un précurseur du calcul infinitésimal. Il céda sa place en 1669 à un de ses étudiants promis à un bel avenir, Isaac Newton. Après une carrière à la Cour comme chapelain du roi, il retourna à Cambridge à la tête du Trinity College.

Les *Lectiones Geometricae*, imprimées en 1670, sont un véritable traité de calcul différentiel avant la lettre ; on y trouve par exemple la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, la dérivation comme inverse de l'intégration. Ces leçons sont écrites dans le plus pur langage géométrique, excepté en fait la lecture X que nous en avons extraite.



# LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præsertim)  
GENERALIA *Curvarum, Linearum* ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ  
DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW, Collegii  
SS. Trinitatis in Acad. Cantab. Socio, & Societatis Re-  
giæ Sodale.

Οι φύσει λογικὸι εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἐκ<sup>θ</sup> ἠκέειν, ὀξὺς φαί-  
νονται· οἱτὶ βραδύως, αἶ ἐν τέτρῳ παιδιδάσει, καὶ γυμνάσει, καὶ  
μηδὲν ἄλλο ἀσκηθῶσιν, ὅμως ἄσχα τὸ ὀξὺτερον αὐτοῖ ἀνωτέρω γίγνεται  
πάντες διδιδάσειν. Plato de Repub. VII.

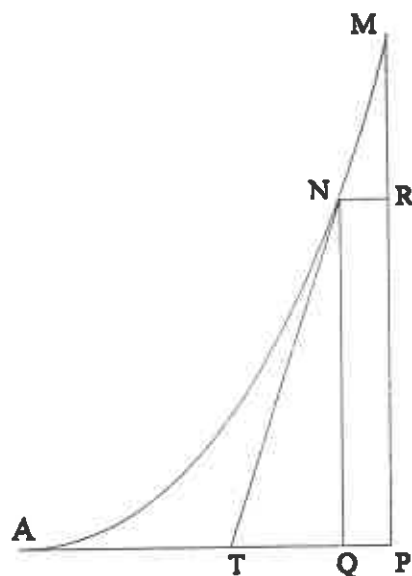


LONDINI,  
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud  
Johannem Danmore, M. D. C. L. X. X.

## LECTURE X

D'une certaine façon nous avons terminé la première partie de notre sujet. En supplément nous ajouterons sous forme d'appendice, une méthode, que nous utilisons, pour trouver les tangentes par calcul. Toutefois je ne sais pas, après tant de méthodes de ce genre connues et rebattues, si on peut faire quelque chose de son utilisation. Encore fais-je celle-ci sur les conseils d'un ami, et pour cela de bon gré, parce que celle-ci me paraît être plus avantageuse et générale en comparaison des autres que j'ai examinées.

Soient AP, PM deux lignes droites données en position, (telles que PM coupe la courbe proposée en M) et soit MT supposée toucher la courbe en M et couper la droite AP en T. Dans le dessein de rechercher maintenant la valeur PT de la même droite<sup>(1)</sup> je prends l'arc de courbe MN indéfiniment petit; puis je trace les droites NQ parallèles à MP et NR à AP; je nomme  $MP = m$ ;  $PT = t$ ;  $MR = a$ ;  $NR = e$ ; et je désigne par leur nom les autres droites déterminées par la nature particulière de la courbe et utile à ce qui est proposé; Je réunis en une *égalité*, découverte par le calcul, MR, NR elles mêmes (et parmi celles ci MP, PT); en observant en même temps les règles suivantes.



1. Dans le calcul je rejette tous les termes, dans lesquels  $a$  ou bien  $e$  ont des puissances d'eux-mêmes, ou bien dans lesquels ils sont multipliés entre eux (en effet ces termes ne valent rien)<sup>(2)</sup>.

2. Après que l'*égalité ait été établie* je rejette tous les termes formés de lettres désignant des quantités constantes ou déterminées; ou bien dans lesquels ne se trouve ni  $a$ , ou  $e$ . (en effet tous ces termes amenés dans une des parties de l'*égalité* donneront toujours quelque chose égal à rien)

3. Je substitue à la place de  $a$ :  $m$  lui-même (ou bien MP); à la place de  $e$ :  $t$  lui-même (ou bien PT). A partir de quoi la valeur de PT elle-même deviendra connue.<sup>(3)</sup>

Parce que si une partie infiniment petite d'une courbe quelconque entre dans le calcul, on pourra substituer exactement à cette endroit une petite partie de tangente; ou bien (à cause de l'infinie petitesse de la courbe) une droite équivalente.

Mais ces points seront rendus plus clairs par des exemples.

Les notes sont regroupées page 44.

### Exemple I

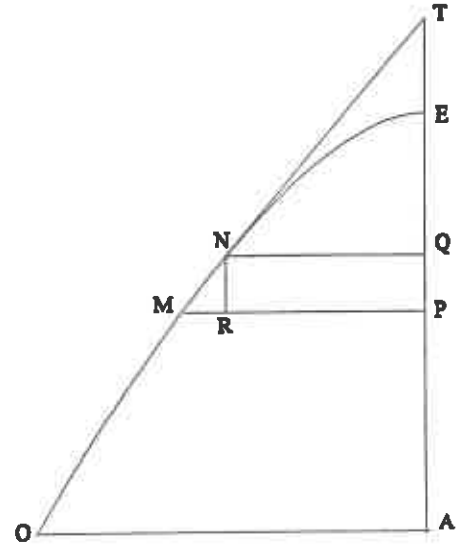
Soit la droite EA (donnée en position et grandeur) et la courbe EMO dont la propriété est de telle sorte que la droite MP étant tracée d'une manière quelconque, perpendiculaire à EA, la somme des cubes de AP et MP soit égale à la droite AE au cube.

Supposons nommés  $AE = r$  ;  $AP = f$  ; de là  $AQ = f + e$  ; et  $AQ$  cube  $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$  ; (ou bien après avoir rejeté ce qui est superflu, d'après ce qui a été dit)  $= f^3 + 3ffe$ . De même  $NQ$  cube  $=$  cube de  $m-a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$  (c'est à dire)  $m^3 - 3mma$ . C'est pourquoi on a  $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma = (AQ$  cube  $+ NQ$  cube  $= AE$  cube  $=) r^3$  et après avoir rejeté les données,  $3ffe - 3mma = 0$  ou bien  $ffe = mma$  ; et substituant au lieu de  $a$ , et  $e$ ,  $m$  et  $t$  eux-mêmes, il

viendra  $fft = m^3$  ; ou si on veut  $t = \frac{m^3}{ff}$  ; donc PT est la quatrième proportionnelle en raison continue de AP et PM.

Semblablement ; si on avait  $APqq^{(4)} + MPqq = AEqq$  il serait trouvé que  $PT = \frac{m^4}{f^3}$  ou

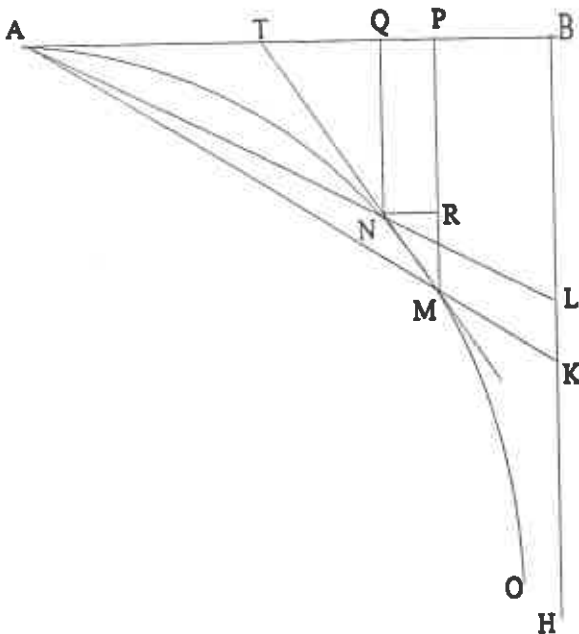
que PM est la quatrième proportionnelle en raison de AP et PM ; en fait je ne sais pas si ces lignes *Cycloformes* sont dignes d'études.



### Exemple II

Supposons que l'angle ABH soit droit, et soit la courbe AMO, de sorte que par A ayant conduit d'une manière quelconque la droite AK, qui coupe la droite BH en K, la courbe AMO en M, on suppose que la sous-tangente AM est égal à l'abscisse BK<sup>(5)</sup>. On doit tracer la tangente en M à cette courbe.

Faisons tout ce qu'on a dit au-dessus, (après avoir tracé ANL) nommons  $AB = r$  et  $AP = q$ , de là  $AQ = q - e$  ; de même  $QN = m - a$  ; donc  $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma = (AQq^{(4)} + QNq = ANq =) BLq$  ; c'est à dire en rejetant (Comme il a été dit) tout ce qui doit l'être:  $qq - 2qe + mm - 2ma = BLq$ . D'un autre côté  $AQ.QN::AB:BL^{(3)}$  c'est à dire  $q -$



$e . m - a :: r . BL = \frac{rm - ra}{q - e}$  aussi  $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe} = BLq$  ; ou bien (ayant rejeté ce qui est superflu)  $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$ . ou bien  
 $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$  ; après avoir rejeté ce que nous avons dit :  $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$  ou bien  
 $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$  ; ou en substituant  $m$  à la place de  $a$ , et  $t$  à la place de  $e$ , il vient :  
 $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$  ou  $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$ .

### Sources

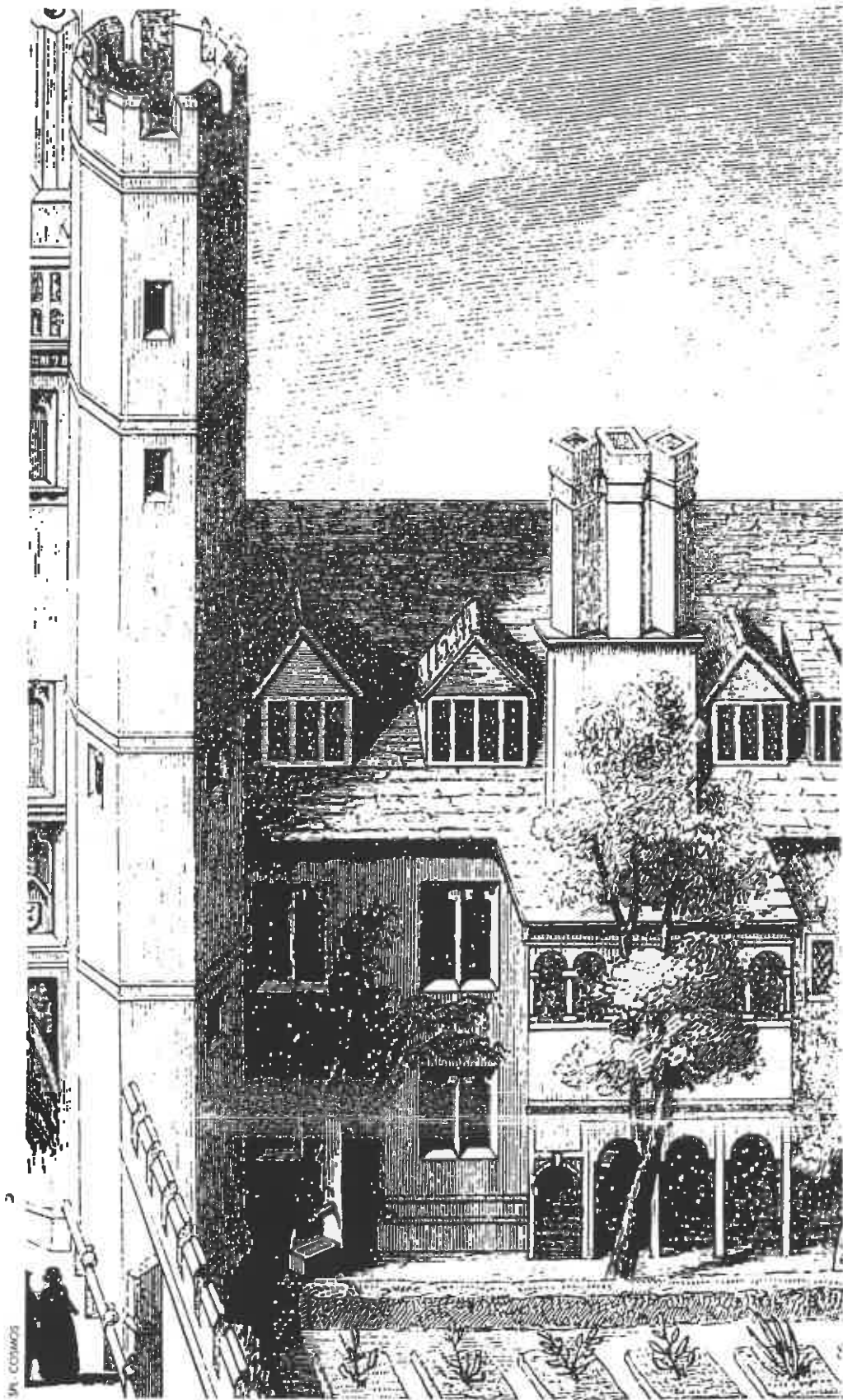
Lectiones Geometricae : I. Barrow 1670

### Notes

- 1: Suivant la tradition de l'époque, Isaac Barrow cherche à déterminer la sous-tangente PT.
- 2: Comme on peut le vérifier sur les exemples qui suivent, cette règle 1 consiste à faire un développement limité à l'ordre un. Négliger les termes d'ordres supérieurs, "qui ne valent rien", revient à confondre la courbe avec sa tangente entre les points M et N, ainsi que le dit explicitement Barrow quelques lignes plus loin.
- 3: Cette figure, dite du triangle caractéristique, est célèbre dans l'histoire du calcul des tangentes. Le triangle MRN à côtés infinitésimaux est semblable au triangle MPT dont les côtés ont des longueurs assignables.
- 4: Cette condition définit la courbe AMO.
- 5: APqq signifie  $AP^4$ , de la même façon AQq signifie  $AQ^2$
- 6: Se lit AQ est à QN comme AB est à BL pour nous c'est la proportion  $\frac{AQ}{QN} = \frac{AB}{BL}$

Traduction libre : Jean Claude PENIN





Trinity College Cambridge

## Isaac NEWTON (Woolthorpe Lincolnshire 1642 - Londres 1727)

Etudiant au Trinity College de Cambridge, il s'intéressa particulièrement à la Géométrie de Descartes et aux optiques de Képler. Sous l'égide d'Isaac Barrow, auquel il succéda comme professeur à Cambridge en 1669, il avait dès cette date fait de grandes découvertes en Géométrie et posé les fondements de son oeuvre. Il en fit état dans le manuscrit : " De analysis per aequationes numero terminorum infinitas", non publié avant 1711 mais qui circulait parmi ses amis. Newton utilise l'infiniment petit à la fois géométrique et analytique de manière analogue à Barrow et Fermat et étend son application par le théorème du Binôme<sup>(1)</sup>.

En 1671 il présenta son télescope à miroir ; en 1672 il exposa sa théorie des couleurs sur la composition de la lumière blanche.

Dans les "principes mathématiques de la philosophie naturelle" paru en 1687, il jette les bases d'une nouvelle physique : la théorie des forces centrales et la loi de l'attraction universelle.

A la base de son second traité le plus étudié : "Méthodes des fluxions et des séries infinies", écrit vers 1671 mais non publié avant 1736, se trouve la notion de mouvement instantané.<sup>(2)</sup> Il y introduit sa notation caractéristique du calcul différentiel ( $\dot{x}$ ,  $\ddot{y}$ , ... ). Ses procédures algorithmiques sont encore utilisées actuellement.

En 1669 il est élu à l'académie des sciences, dès que cette institution peut admettre en son sein des savants étrangers. En 1703 il est élu président de la Royal Society et le restera jusqu'à sa mort. Il eut droit à des funérailles dignes du héros national qu'il était devenu dans son pays.

Le premier texte qui suit est extrait des "Principes":

Newton y développe un point de vue cinématique .Il se défend d'avoir une vision atomiste.

Sa conception du nombre est plus proche de celle de Wallis que de celle de Barrow : un nombre est moins une collection d'unités qu'un rapport abstrait d'une quantité à une autre (rapport incluant les nombres irrationnels).

Le deuxième texte est extrait de la "Méthode des fluxions".

Dans cet ouvrage Newton considère les quantités variables comme générées par le mouvement continu d'un point : Il appelle fluxion la quantité proportionnelle au mouvement générateur et fluente la quantité générée.

Il pose clairement le problème fondamental du calcul différentiel : la relation entre deux quantités étant donnée, trouver celle entre leurs fluxions et réciproquement, il considère le problème des tangentes comme inverse de celui des quadratures.

Les notes sont regroupées page 55.

PRINCIPES MATHÉMATIQUES  
DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE.



DU MOUVEMENT  
DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

*De la méthode des premières & dernières raisons employée dans  
tout cet Ouvrage.*

LEMME PREMIER.

*Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à  
devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps  
approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite  
qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.*

**S** I on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inéga-  
les, & que leur dernière différence soit  $D$ , puisqu'elles  
ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que  
de cette différence donnée  $D$ , leur différence ne sera donc pas  
plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hy-  
pothèse.

DU  
MOUVEMENT  
DES CORPS.

Ainsi, lorsque dans la suite je considérerai des quantités comme composées de particules déterminées, & que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes; je ne désignerai point par-là des quantités indivisibles, mais des quantités divisibles évanouissantes; de même, ce que je dirai des sommes & des raisons, doit toujours s'entendre non des particules déterminées, mais des limites des sommes & des raisons des particules évanouissantes; & pour sentir la force de mes démonstrations, il faudra toujours se rappeler la méthode que j'ai suivie dans les Lemmes précédens.

On peut dire, contre ce principe des premières & dernières raisons, que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de dernière proportion entr'elles; parce qu'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la dernière, & que lorsqu'elles sont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Mais on pourroit soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint, n'a point de dernière vitesse; Car, diroit-on, avant que ce corps soit parvenu à ce lieu, il n'a pas encore sa dernière vitesse, & quand il l'a atteint, il n'en a aucune, puisqu'alors son mouvement est éteint. Or, la réponse à cet argument est facile;

DU  
MOUVEMENT  
DES CORPS.

on doit entendre par la dernière vitesse de ce corps celle avec laquelle il se meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où son mouvement cesse, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'instant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle son mouvement cesse. Il en est de même de la dernière raison des quantités évanouissantes, il faut entendre par cette raison celles qu'ont entr'elles des quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles sont évanouies, mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouissent. De la même manière, la première raison des quantités naissantes est celle que les quantités qui augmentent ont au moment qu'elles naissent, & la première ou dernière somme de ces quantités est celle qui répond au commencement ou à la fin de leur existence, c'est-à-dire, au moment qu'elles commencent à augmenter ou qu'elles cessent de diminuer.

Il y a une certaine borne que la vitesse d'un corps peut atteindre à la fin de son mouvement, & qu'elle ne sauroit passer ; c'est cette vitesse qui est la dernière vitesse du corps. Il en est de même des limites & des proportions de toutes les quantités qui commencent & cessent. Comme cette limite est certaine & définie, c'est un problème très géométrique que de la déterminer ; car on peut regarder comme géométriques tous les problèmes où il s'agit de déterminer avec précision quelque quantité.

On objectera peut-être que si les dernières raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent sont données, les dernières grandeurs de ces quantités seront aussi données ; & qu'ainsi toute quantité sera composée d'indivisibles, au contraire de ce qu'*Euclide* a démontré des incommensurables dans le dixième Livre de ses élémens. Mais cette objection porte sur une supposition fautive ; car les dernières raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas en effet les raisons des dernières quantités, ou de quantités déterminées & indivisibles, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent à l'infini approchent sans cesse, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais passer, & qu'elles ne sauroient atteindre, si ce n'est dans l'infini.

On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence est donnée, augmentent à l'infini, leur dernière raison sera donnée, & sera certainement la raison d'égalité ; cependant les dernières, ou les plus grandes quantités auxquelles répond cette raison, ne seront point des quantités données. Donc, lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernières*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

---

## M E T H O D E   D E S   F L U X I O N S .

L VIII. Ainsi dans l'Equation  $xx = y$ , si  $y$  représente la longueur de l'Espace décrit à un tems quelconque, lequel tems un autre Espace  $x$  en augmentant d'une vitesse uniforme  $x$  mesure & représente comme décrit, alors  $2xx$  représentera la vitesse avec laquelle dans le même instant l'Espace  $y$  viendra à être décrit & *vice versa*; & c'est de-là que j'ai dans ce qui suit considéré les Quantités comme produites par une augmentation continuelle à la manière de l'Espace que décrit un corps en mouvement.

L IX. Mais comme nous n'avons pas besoin de considérer ici le tems autrement que comme exprimé & mesuré par un mouvement local uniforme, & qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer ensemble que des Quantités de même genre, non-plus que leurs vitesses d'accroissement & de diminution; je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au tems considéré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des Quantités proposées de même genre doit augmenter par une Fluxion uniforme, à laquelle Quantité je rapporterai tout le reste comme si c'étoit au tems; donc par Analogie cette quantité peut avec raison recevoir le nom de tems; ainsi quand dans la suite pour donner des idées plus claires & plus distinctes, je me servirai du mot *Temps*, je n'entends jamais le tems proprement pris comme tel, mais seulement une autre Quantité par l'augmentation ou Fluxion de laquelle le tems peut être exprimé & mesuré.

L X. J'appellerai *Quantités Fluentes*, ou simplement *Fluents* ces Quantités que je considère comme augmentées graduellement & indéfiniment, je les représenterai par les dernières Lettres de l'Alphabet  $v, x, y$  &  $z$  pour les distinguer des autres quantités qui dans les Equations sont considérées comme connues & déterminées qu'on représente par les Lettres initiales  $a, b, c$ , &c. & je représenterai par les mêmes dernières Lettres surmontées d'un point  $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$  &  $\dot{z}$  les vitesses dont les Fluents sont augmentées par le mouvement qui les produit, & que par conséquent on peut appeler *Fluxions*. Ainsi pour la Vitesse ou Fluxion de  $v$  je mettrai  $\dot{v}$ , & pour les vitesses de  $x, y, z$  je mettrai  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  respectivement.

M E T H O D E  
P R O B L E M E I.

*Etant donnée la Relation des Quantités Fluentes, trouver  
la Relation de leurs Fluxions. (\*)*

S O L U T I O N.

I. **D**ISPOSEZ l'Equation par laquelle la Relation donnée est exprimée suivant les Dimensions de l'une de ses Quantités Fluentes  $x$  par exemple, & multipliez ses Termes par une Progression Arithmétique quelconque, & ensuite par  $\frac{\dot{x}}{x}$  faites cette Operation séparément pour chacune des Quantités Fluentes; après quoi égalez à zero la somme de tous les produits, & vous aurez l'Equation cherchée.

II. **E**XEMPLE I. Si la Relation des Quantités Fluentes  $x$  &  $y$  est  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , disposez d'abord les Termes suivant  $x$ , & ensuite suivant  $y$ , & multipliez-les comme vous voyez.

$$\begin{array}{r|l} \text{Multipliez } x^3 & -ax^2 & +axy & -y^3 \\ \text{par } \frac{\dot{x}}{x} & \cdot \frac{2\dot{x}}{x} & \cdot \frac{\dot{x}}{x} & \cdot 0 \\ \hline \text{Vous aurez } 3\dot{x}x^2 & -2ax\dot{x} & +\dot{a}xy & -3\dot{y}y^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} +ax\dot{y} - \dot{a}x^2 \\ \frac{\dot{y}}{y} \cdot \frac{\dot{y}}{y} \cdot 0 \\ \hline -3\dot{y}y^2 + \dot{a}yx \end{array} *$$

la somme des produits est  $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + \dot{a}xy - 3\dot{y}y^2 + \dot{a}yx$ , qui étant égale à zero, donne la Relation des Fluxions  $\dot{x}$  &  $\dot{y}$ ; car si vous donnez à volonté une valeur à  $x$ , l'Equation  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , donnera la valeur de  $y$ ; ce qui étant déterminé, l'on aura  $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$ .

III. **E**XEMPLE II. Si la Relation des Quantités  $x$ ,  $y$  &  $z$ , est exprimée par l'Equation  $2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$

$$\begin{array}{r|l} \text{Multipliez } 2y^3 & +x^2y & -2cyz & +3yz^2 & -z^3 \\ \text{par } \frac{\dot{y}}{y} & \cdot 0 & \cdot \frac{\dot{y}}{y} & \cdot 0 & \cdot 0 \\ \hline \text{Vous aurez } 4\dot{y}y^2 & +\dot{x}xy & -2\dot{c}zy & +6\dot{z}zy & -2\dot{c}zy \end{array} \quad \begin{array}{l} yx^2 + 2y^3 \\ -2cyz \\ +3yz^2 \\ -z^3 \\ \hline \frac{\dot{x}}{x} \cdot 0 \cdot \frac{\dot{z}}{z} \cdot 0 \cdot 0 \\ \hline 2\dot{x}xy \end{array} \quad \begin{array}{l} -z^3 + 3yz^2 - 2cyz + x^2y \\ +2y^3 \\ \hline \frac{\dot{z}}{z} \cdot \frac{\dot{z}}{z} \cdot \frac{\dot{z}}{z} \cdot 0 \\ \hline -3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}zy - 2\dot{c}zy \end{array} *$$

(\*) Un exemple commenté est donné en annexe page 108.

donc la Relation des Fluxions  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  &  $\dot{z}$  est  $4\dot{y}\dot{y} + \frac{2\dot{x}^2}{y} + 2\dot{x}\dot{y}$   
 $- 3\dot{z}\dot{z} + 6\dot{z}\dot{z}y - 2\dot{z}\dot{z}y = 0$ .

IV. Mais comme il y a trois Quantités Fluents  $x$ ,  $y$  &  $z$ , il faut une autre Equation pour que la Relation entr'elles & entre leurs Fluxions, puisse être entièrement déterminée; comme si l'on suppose que  $x + y - z = 0$ , l'on trouvera par cette Regle une autre Relation  $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$  entre leurs Fluxions. En les comparant avec les Equations précédentes, & chassant l'une des trois Quantités, & aussi l'une des Fluxions, vous aurez une Equation qui déterminera entièrement la Relation de tout le reste.

V. Lorsque dans l'Equation proposée, il se trouve des Fractions complexes, ou des Quantités sourdes, je mets pour chacune autant de Lettres, & les traitant comme des Fluents, j'opere comme auparavant, après quoi je supprime ces Lettres comme vous le voyez.

VI. EXEMPLE III. Si la Relation des Quantités  $x$  &  $y$  est donnée par  $yy - aa - x\sqrt{aa - xx} = 0$  pour  $x\sqrt{aa - xx}$  j'écris  $z$ , & j'ai les deux Equations  $yy - aa - z = 0$ , &  $a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0$ , dont la premiere donnera  $2\dot{y}\dot{y} - \dot{z} = 0$  pour la Relation des Vitesses ou Fluxions  $\dot{y}$  &  $\dot{z}$ , & la seconde  $2a^2\dot{x}x - 4\dot{x}x^3 - 2\dot{z}\dot{z} = 0$ , ou  $\frac{a^2\dot{x}x - 2\dot{x}x^3}{x} = \dot{z}$  pour la Relation des Vitesses  $\dot{x}$  &  $\dot{z}$ , & chassant  $z$  on aura  $2\dot{y}\dot{y} - \frac{a^2\dot{x}x + 2\dot{x}x^3}{x} = 0$  dans laquelle Equation remettant  $x\sqrt{aa - xx}$ , au lieu de  $z$ , il vient  $2\dot{y}\dot{y} - \frac{-2\dot{x}x + 2\dot{x}x^3}{\sqrt{aa - xx}} = 0$  pour la Relation cherchée entre  $\dot{x}$  &  $\dot{y}$ .

#### Démonstration de la Solution.

XIII. Les momens des Quantités Fluents (c'est-à-dire leurs parties indefiniment petites, par l'accession desquelles, dans des parties indefiniment petites de tems, elles sont continuellement augmentées) sont comme les Vitesses de leur Flux ou Accroissement.

XIV. Si donc le produit de la Vitesse  $\dot{x}$  par une Quantité indefiniment petite  $o$ , c'est-à-dire, si  $\dot{x}o$  représente le moment d'une Quantité quelconque  $x$ , les momens des autres  $v$ ,  $y$ ,  $z$  seront représentés par  $\dot{v}o$ ,  $\dot{y}o$ ,  $\dot{z}o$ , parce que  $\dot{v}o$ ,  $\dot{y}o$ ,  $\dot{x}o$ ,  $\dot{z}o$  sont chacuns comme  $v$ ,  $y$ ,  $x$ ,  $z$ .

XV. Puis donc que les momens comme  $\dot{x}o$ ,  $\dot{y}o$  sont les accessions ou augmentations indefiniment petites des Quantités Fluents  $x$  &  $y$  pendant les indefiniment petits intervalles de tems, il suit que ces Quantités  $x$  &  $y$  après un intervalle indefiniment petit de tems, deviennent  $x + \dot{x}o$  &  $y + \dot{y}o$ , & par conséquent l'Equation qui en tout tems exprime également la Relation des Quantités Fluents, exprimera la Relation entre  $x + \dot{x}o$  &  $y + \dot{y}o$  tout aussi-bien qu'entre  $x$  &  $y$ ; ainsi on peut substituer dans la même Equation  $x + \dot{x}o$  &  $y + \dot{y}o$ , au lieu de  $x$  &  $y$ .

XVI. Soit donc l'Equation donnée quelconque  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  je substitue  $x + \dot{x}o$  pour  $x$ , &  $y + \dot{y}o$  pour  $y$ , & j'ai

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^3 \\ - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo \\ - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{array} \right\} = 0$$



XVII. Maintenant j'ai par la supposition  $x^2 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , j'efface donc ces Termes dans l'Equation précédente, & ayant divisé par  $o$  tous les Termes qui restent, j'aurai  $3xx^2 - 2axx + axy - 3yy^2 + 3x^2ox - ax^2o + ayx - 3y^2oy + x^2o^2 + axyo - y^3o^2 = 0$ . Mais comme  $o$  a dû être supposé infiniment petit, pour pouvoir représenter les momens des Quantités, les Termes qu'il multiplie sont nuls en comparaison des autres, je les rejette donc, & il me reste  $3xx^2 - 2axx + axy + ayx - 3yy^2 = 0$ , comme ci-dessus dans l'Exemple premier.

XVIII. On peut observer ici que les Termes qui ne sont pas multipliés par  $o$  s'évanouissent toujours, comme aussi ceux qui sont multipliés par  $o$  élevé à plus d'une Dimension, & que le reste des Termes étant divisé par  $o$  acquiert la forme qu'il doit avoir par la règle prescrite; & c'est ce qu'il falloit prouver.

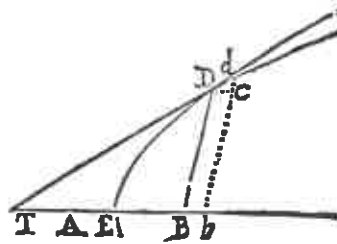
XIX. De ceci bien entendu suivent aisément les autres choses comprises dans la règle, que dans l'Equation proposée il peut se trouver plusieurs Quantités Fluents & que les Termes peuvent être multipliés non seulement par le Nombre des Dimensions des Quantités Fluents, mais aussi par d'autres Progressions Arithmetiques quelconques; en sorte cependant que dans l'Operation il y ait la même différence, & que la Progression soit disposée selon le même ordre des Dimensions. Ces choses étant admises, le reste qui est compris dans les Exemples 3, 4 & 5, sera assez clair.

## P R O B L E M E I V.

*Tirer les Tangentes des Courbes.*

### P R E M I E R E M A N I E R E:

I. **O**N peut tirer les Tangentes différemment, selon les différentes Relations des Courbes aux Lignes droites, & premierement soit BD une Ligne droite Ordonnée sous un Angle donné à une autre Ligne droite AB; prise pour Base ou Abscisse, & soit BD terminée à une Courbe ED. Faites mouvoir cette Ordonnée & faites-lui parcourir un Espace indéfiniment petit & parvenir à  $bd$ . Elle aura augmenté du Moment  $cd$ , tandis que AB aura augmenté du Moment  $Bb$ , auquel  $Dc$  est égal & parallele. Prolongés  $Dd$  jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en T, cette Ligne touchera la Courbe en D ou  $d$ , & les Triangles  $dcD$ , DBT seront semblables; ce qui donne  $TB : BD :: Dc$  ou  $Bb : cd$ .



II. La Relation de BD à AB est donnée par l'Equation à la Courbe; cherchez par le Prob. 1. la Relation des Fluxions, & prenez TB à BD dans le Rapport de la Fluxion de AB à la Fluxion de BD; la Ligne TD touchera la Courbe au Point D.

III. EXEMPLE. I. Nommant AB ,  $x$  & BD ,  $y$  , soit leur Rapport  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ . Celui des Fluxions sera  $3xx^2 - 2axx + axy + ayx - 3yy^2 = 0$ . Ainsi  $\dot{x} : \dot{y} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax$  :: BD ( $y$ ) : BT. Donc  $BT = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$ . Et le Point D & de la les Lignes DB & AB ou  $x$  &  $y$  étant données, la longueur BT sera donnée , ce qui détermine la Tangente TD.

IV. Mais on peut abrégér l'Opération ; faites les Termes de l'Equation proposée égaux à zero , multipliez - les par les nombres des Dimensions de l'Ordonnée , & mettez le Résultat au Numerateur ; multipliez ensuite les Termes de la même Equation par les nombres des Dimensions de l'Abcisse , & mettez le produit divisé par l'Abcisse au Dénominateur de la Valeur de BT , & prenez BT du côté de A , si sa Valeur est positive , & du côté opposé si sa Valeur est négative.

V. Ainsi l'Equation  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  , étant multipliée par les Nombres du dessus , donne  $axy - 3y^3$  pour le Numerateur ; & multipliée par les Nombres de dessous & divisée par  $x$  , donne  $3x^2 - 2ax + ay$  pour le Dénominateur de la Valeur de BT.

VI. Ainsi l'Equation  $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$  , qui désigne une Parabole du second genre par le moyen de laquelle *Descartes* construisoit les Equations de six Dimensions , Voyez sa *Géometrie pag. 42. Edit. d'Amsterdam 1659.* donne à l'Inspection  $\frac{3y^2 - 2by - cdy + dxy}{dy}$  , ou  $\frac{3y}{d} - \frac{2by}{d} - c + x = BT$ .

VII. Et de même  $a^2 - \frac{r}{2}x^2 - y^2 = 0$  , qui désigne une Ellipse dont le Centre est A , donne  $\frac{-2y}{\frac{r}{2}}$  , ou  $\frac{4y}{r} = BT$  , & ainsi des autres.

VIII. Vous pouvez remarquer qu'il n'importe de quelle grandeur soit l'Angle d'Ordination ABD.

Notes :

1: Pour déterminer une aire, à l'inverse de ses prédécesseurs, Newton ne fait pas une somme d'aires infinitésimales mais il détermine d'abord l'accroissement de l'aire et trouve ensuite l'aire elle-même qui est pour nous l'intégrale définie de la fonction représentant l'ordonnée: Soit une courbe donnée de sorte que l'abscisse soit  $x$  et l'ordonnée  $y$ , l'aire est

$z = \frac{n}{m+n} \cdot a x^{\frac{m+n}{n}}$ . Si  $x$  augmente d'un infiniment petit  $o$  (notation de James Gregory) la

nouvelle abscisse est  $x+o$  et l'aire  $z+o \cdot y = \frac{n}{m+n} a \cdot (x+o)^{\frac{m+n}{n}}$ . Dans cette expression appliquons le théorème de binôme, divisons par  $o$  puis négligeons les termes contenant encore

$o$ . On obtient  $y = a \cdot x^{\frac{m}{n}}$ . Ainsi si l'aire est donnée par  $z = \frac{n}{m+n} \cdot a x^{\frac{m+n}{n}}$  alors la courbe est

définie par  $y = a \cdot x^{\frac{m}{n}}$  et réciproquement.

2: Newton considérait toute tentative d'explication de la notion de mouvement instantané comme liée à la métaphysique.



Newton



Gottfried Wilhelm Leibniz

## G. W. Leibniz

Leipzig 23 Juin 1646 Hanovre 14 Novembre 1716

Né à Leipzig d'un père professeur de droit et de morale il acquiert un culture d'honnête homme . Il s'intéresse à l'histoire , puis étudie la jurisprudence, la théorie du droit à Altdorf et s'initie à la chimie chez les Rose-Croix.

En 1666 il publie: "De ante Combinatoria" qui contient les permutations, les combinaisons: "cum3natio". Il n'utilise pas  $n!$ . Si l'apport de cet ouvrage est modeste il n'y en a pas eu d'autre sur le même sujet jusqu'à la théorie des groupes: Leibniz approche fort les notions d'idéal et de treillis.

En 1670, il se déclare philosophe et prend la défense d'Aristote et de St Thomas contre les scholastiques.

En 1671 il publie deux traités de mécanique: l'un dédié à l'Académie des sciences de Paris, l'autre à la Société Royale de Londres.

Envoyé en France en 1672 pour convaincre Louis XVI d'entreprendre la conquête de l'Egypte, il échoue dans sa mission, mais rencontre Huyghens, Arnauld et étudie Pascal. Il continuera de mener une carrière politique à travers l'Europe.

Après avoir rencontré à Londres en 1673 le chimiste Robert Boyle ainsi que le secrétaire de la Société Royale il invente le calcul différentiel dont il fixe les règles.

L'ambition scientifique cohabite chez lui avec l'ambition métaphysique et le calcul infinitésimal lui sert d'argument philosophique.

L'infini mathématique présuppose un infini de nature spirituel; il requiert Dieu comme cause et comme modèle, il est expliqué par Dieu et l'exprime.

La polémique sur la priorité de l'invention du calcul infinitésimal entre Newton et Leibniz empoisonnera la fin de la vie de Leibniz.

On lui doit les notations actuelles du calcul différentiel: " $\int$ "; " $dx$ " qui seront adoptées même en Angleterre dès le XIX<sup>e</sup> siècle.

\*  
\* \*

Le texte ci-dessous est extrait de la revue: "De acta eruditorum" de Leipzig fondée en 1682 (par Otton Mecke). Leibniz contribuera à la fondation de cette revue, il y voyait l'équivalent d'un collège de savants. Un grand nombre d'articles mathématiques que Leibniz y fera paraître mettent en oeuvre le calcul différentiel.

Dans l'extrait proposé Leibniz est volontairement formaliste présentant les résultats comme des algorithmes qui se justifiaient par eux-mêmes (Il s'est expliqué ailleurs plus en détail).

Son génie est ici d'explicitier et de formaliser la liaison opératoire perçue depuis longtemps entre l'établissement des tangentes et le calcul des quadratures.

Se réclamant d'Archimède plutôt que de Descartes il utilise la notion de fonction qu'il substitue à celle d'équation; une fonction est pour lui une correspondance entre éléments quelconques appartenant à des multiplicités données. On voit chez lui la naissance de l'idée d'isomorphisme.

Pour lui, les infiniments petits sont des "choses idéales ou fictions bien fondées", (analogues aux racines carrées des nombres négatifs) : si la mesure d'une quantité désignable est la somme des ses parties, l'infinitésimale, quantité évanouissante n'est ni une partie, ni une somme de parties mais une règle de variation qui permet de déterminer des grandeurs désignables.

NOUVELLE METHODE POUR LES  
MAXIMA ET LES MINIMA,

et de même pour les tangentes, qui ne s'oppose  
ni aux quantités fractionnaires, ni irrationnelles,  
et un genre de calcul pour eux.

*D'après les Actes des Savants de Leipzig de l'an 1684 (NI).*

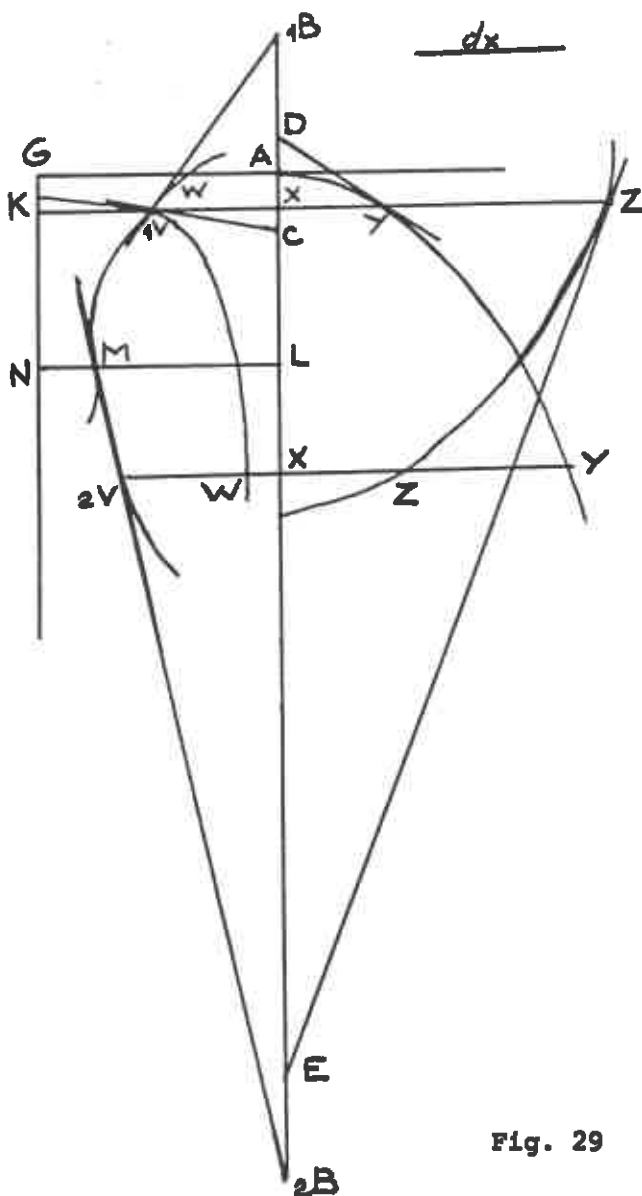


Fig. 29

Soit l'axe AX, et plusieurs courbes, comme VV, WW, YY, ZZ, dont les ordonnées normales à l'axe, VX, WX, YX, ZX, qui soient appelées respectivement  $v, w, y, z$ ; et que l'abscisse elle-même AX depuis l'axe soit appelée  $x$ . Soient VB, WC, YD, ZE, les Tangentes allant à la rencontre de l'axe respectivement aux points B, C, D, E. En outre, qu'une certaine droite prise à volonté soit appelée  $dx$ ; et que la droite qui soit à  $dx$ , comme  $v$  (ou  $w$ , ou  $y$ , ou  $z$ ) est à XB (ou XC, ou XD, ou XE) (NII), soit appelée  $dv$  (ou  $dw$ , ou  $dy$ , ou  $dz$ , soit la différence des  $v$  mêmes (ou des  $w$  mêmes, ou des  $y$ , ou des  $z$ ). Cela étant posé, les règles du calcul seront telles.

Soit  $a$  une quantité constante donnée,  $da$  sera égal à 0, et  $dax$  sera égal à  $adx$ : si  $y$  est fait égal à  $v$  (ou l'ordonnée que tu veux de la courbe YY égale à l'ordonnée que tu veux correspondant à la courbe W),  $dy$  sera égal à  $dv$ . Maintenant l'Addition et la Soustraction: si  $z - y + w + x$  est fait égal à  $v$ ,  $d(z - y + w + x)$  ou  $dv$  sera égal à  $dz - dy + dw + dx$ . Multipli-

NOUVELLE METHODE POUR LES MAXIMA.

$x dv + v dx$ , ou  $y$  étant posé égal à  $xv$ ,  $dy$  sera fait  $x dv + v dx$ . Car il est à volonté d'employer ou la forme comme  $xv$ , ou par abréviation une lettre pour elle comme  $y$ . On doit noter que  $x$  et que  $dx$  sont traités de la même façon dans ce calcul, comme  $y$  et  $dy$ , ou une autre lettre indéterminée avec sa différentielle. On doit encore noter que le retour de la différentielle à l'équation n'est pas toujours donné, si ce n'est avec une certaine précaution dont [nous parlerons] ailleurs. Ensuite la Division  $d\frac{v}{y}$  ou ( $z$  étant posé égal à  $\frac{v}{y}$ ,  $dz$  sera égal à  $\frac{\pm v dy + y dv}{yy}$ .

Quant aux *Signes*, ceci est à beaucoup noter : lorsque dans le calcul est substituée pour la lettre, simplement sa différentielle, certes les mêmes signes sont à conserver, et pour  $+z$ , écris  $+ dz$  ; pour  $-z$ , écris  $-dz$  ; comme il apparaît de l'addition et de la soustraction posées un peu avant ; mais quand on en vient à l'explication des valeurs, ou quand est considérée la relation de  $z$  même à  $x$ , alors il apparaît si la valeur de  $dz$  même est une quantité positive, si elle est plus petite que rien ou négative : et ensuite quand cela est fait, alors la tangente  $ZE$  est menée depuis le point  $Z$ , non vers  $A$ , mais dans les parties contraires ou en dessous de  $X$ , ce qui est alors quand les ordonnées elles-mêmes décroissent, les  $x$  croissant. Et parce que les ordonnées elles-mêmes maintenant croissent, maintenant décroissent,  $dv$  sera maintenant une quantité positive, maintenant négative, et dans le premier cas la tangente  $V B$  est menée vers  $A$  ; dans le suivant  $V B$  vers les parties adverses : d'autre part ni l'un ni l'autre n'est fait dans le milieu vers  $M$ , moment où les  $v$  mêmes ni ne croissent ni ne décroissent, mais elles sont en repos, et pour cette raison  $dv$  est fait égal à  $0$ , où la quantité n'importe en rien, n'est faite ni positive ni négative, car  $+ 0$  égale  $-0$  : et en ce lieu  $v$  même, c'est-à-dire l'ordonnée  $LM$ , est *maximale* (ou *minimale* si elle tournait la convexité vers l'axe), et la tangente à la courbe en  $M$  n'est pas conduite au-dessus de  $X$  vers les parties  $A$ , et là approche de l'axe, ni en dessous de  $X$  vers les parties contraires, mais elle est parallèle à l'axe. Si  $dv$  et  $dx$  sont égaux, la tangente fait un angle demi-droit à l'axe. Si les ordonnées  $v$  croissant, leurs accroissements ou différences  $ddv$  croissent (ou si les  $dv$  étant positifs les différences des différences  $ddv$  sont positives, ou négatifs, négatives), la courbe tourne la *convexité* vers l'axe ; autrement, la *concavité* : où assurément l'accroissement est maximum, ou minimum ; ou quand les accroissements sont faits croissants à partir de décroissants, ou contrairement, là est un *point de flexion contraire*, et la concavité et la convexité se permutent entre elles, presque, et là où les ordonnées seraient faites décroissantes à partir de croissantes, ou inversement, alors en effet la concavité ou la convexité persisterait : d'autre part que les accroissements continuent de croître ou de décroître, de plus que les ordonnées soient faites décroissantes à partir de croissantes, ou le contraire, ce ne peut être fait. C'est pourquoi un point de flexion contraire a lieu, quand ni  $v$  ni  $dv$  ne paraissent  $0$ , pourtant  $ddv$  est  $0$ . D'où encore le problème de flexion contraire n'a pas deux racines égales comme le problème du maximum, mais trois. Et tout cela certes est attaché à l'emploi correct des signes.

Parfois d'autre part les *Signes* à employer sont *ambigus*, comme récemment dans la *division*, à savoir avant qu'il soit reconnu comment ils devraient être délivrés. Et certes si les  $x$  croissant, les  $\frac{v}{y}$  croissent

(décroissent), les signes ambigus dans  $d\frac{v}{y}$  ou dans  $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$  doivent être ainsi délivrés, afin que cette fraction soit faite une quantité positive (négative). D'autre part  $\mp$  indique le contraire de  $\pm$  même, de sorte que si ceci est fait + cela est fait -, ou l'inverse. Plusieurs ambiguïtés peuvent se présenter dans le même calcul, que je distingue par des parenthèses, par exemple si  $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v}$  était égal à  $w$ , il arriverait

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm) ydz (\mp) zdy}{zz} + \frac{((\pm)) xdv ((\mp)) vdx}{vv} = dw$$

d'ailleurs les ambiguïtés issues des divers termes seraient mélangées. Où il doit être noté que le signe ambigu supporté en soi-même donne +, dans son contraire il donne -, dans l'autre ambigu il forme une nouvelle ambiguïté dépendant des deux.

*Puissances* :  $dx^a = ax^{a-1} dx$ , par exemple  $dx^3 = 3x^2 dx$  ;  $d\frac{1}{xa} = -\frac{a dx}{xa+1}$ , par exemple si  $w$  est fait égal à  $\frac{1}{x^3}$ ,  $dw$  sera fait  $-\frac{3 dx}{x^4}$

*Racines* :  $d\sqrt[b]{xa} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{xa-b}$  (De là  $d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ , en effet dans ce cas  $a$  est 1 et  $b$  est 2 ; donc  $\frac{a}{b} \sqrt[b]{xa-b}$  est  $\frac{1}{2} \sqrt{y^{-1}}$ ,

d'ailleurs  $y^{-1}$  est le même que  $\frac{1}{y}$ , d'après la nature des exposants de la progression Géométrique et  $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{y}}}$  est  $\frac{1}{\sqrt{2y}}$  ;  $d\sqrt[b]{\frac{1}{xa}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{xb+a}}$ .

D'autre part il aurait suffi de la règle des puissances entières tant pour les fractionnaires que pour les racines à déterminer, car la puissance est faite fractionnaire quand l'exposant est négatif, et est changée en racine quand l'exposant est fractionnaire : mais j'ai mieux aimé déduire moi-même ces conséquences que les laisser à d'autres à déduire, puisqu'elles sont tout à fait générales et se présentant souvent, et qu'il vaut mieux veiller à la facilité dans une chose par soi embarrassée.

De ceci connu comme *Algorithme*, que je dise ainsi, de ce calcul que j'appelle *différentiel*, toutes les autres égalités différentielles peuvent être trouvées par un calcul commun, et les plus grandes et les plus petites, et de même les tangentes sont tenues, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire d'enlever les fractionnaires ou irrationnelles, ou autres chaînes, ce que pourtant il fut à faire selon les Méthodes jusqu'ici montrées. La démonstration de toutes [ces formules] sera facile pour qui est versé dans ces choses et considérant ceci non assez examiné jusqu'ici, que  $dx, dy, dv, dw, dz$  mêmes peuvent être tenus pour proportionnels aux différences de  $x, y, v, w, z$  eux-mêmes (dans leur succession), soit aux accroissements, soit aux diminutions passagers. D'où il est fait que son équation différentielle peut être écrite comme une équation proposée quelconque, ce qui serait pour le *membre* que l'on veut (ce qui est pour la partie qui concourt à établir l'équation par la seule addition ou soustraction) à substituer simplement la quantité différentielle du membre, de plus pour une autre quantité (qui elle-même n'est pas un membre mais concourt au membre à former), sa quantité différentielle en employant son membre pour la quantité différentielle à former, non certes simplement, mais selon l'Algorithme jusqu'ici prescrit.



## NOUVELLE METHODE POUR LES MAXIMA.

Assurément les Méthodes éditées jusqu'ici n'ont pas un tel passage, car ordinairement elles emploient une droite comme  $DX$  ou une autre de ce mode, non assurément une droite  $dy$  qui est une quatrième proportionnelle à  $DX$ ,  $XY$ ,  $dx$ , mêmes, ce qui trouble toutes les choses ; de là elles prescrivent d'ôter d'abord les [quantités] fractionnaires et irrationnelles (qui s'avancent indéterminées), il est visible encore que notre méthode est étendue aux lignes transcendantes qui ne peuvent être amenées vers le calcul Algébrique ou qui ne sont d'aucun degré déterminé, et cela par un mode universel, sans aucune supposition ne s'avancant pas toujours par un mode qui soit général : trouver la *tangente*, est mener une droite qui joint deux points de la courbe ayant une distance infiniment petite, ou le côté d'un polygone d'un nombre infini d'angles, ce qui pour nous est équivalent à une *courbe*. D'autre part cette distance infiniment petite peut être toujours exprimée par quelque différentiel connue comme  $dv$  ou par une relation à elle-même, ce qui est au moyen d'une certaine tangente connue. En particulier si y était une quantité transcendante, par exemple l'ordonnée d'une cycloïde, et que celle-ci s'avancât vers le calcul, dont l'ordonnée  $z$  serait déterminée par le moyen d'une autre courbe, et que  $dz$  soit cherchée, soit la tangente à cette seconde courbe au moyen d'elle, dans tous les cas  $dz$  serait à déterminer par  $dy$  ; d'autre part  $dy$  serait tenu parce qu'est tenue la tangente à la cycloïde. En outre la tangente elle-même de la cycloïde, si elle n'était pas encore possédée, pourrait être trouvée d'après la propriété donnée des tangentes du cercle.

## NOTES DU TRADUCTEUR.

Nouvelle méthode pour les maxima et les minima :

*NI* : Titre d'un journal fondé en 1682 par l'érudit allemand Othon Mencke, né à Oldenbourg en 1644, mort à Leipzig en 1707, professeur de morale à l'Université de Leipzig. Il forma le projet de publier un journal critique où serait donnée l'analyse de tous les ouvrages importants qui paraîtraient en Europe, et qui prit le titre : Acta eruditorum Lipxensium . Grâce à l'exactitude de ses travaux et à l'autorité qu'ils avaient dans le monde scientifique, le journal jouit d'un grand crédit et prospéra pendant un siècle. C'est là où Leibnitz fit paraître la plupart de ses travaux scientifiques. La Nouvelle Méthode pour les maxima est le premier écrit dans lequel Leibnitz fait part de sa découverte du calcul différentiel.

*NII* : Le texte original porte manifestement ici une erreur en mettant VB pour XB WC pour XC ... J'ai rectifié. D'ailleurs Leibnitz le signale lui-même dans la petite note des actes de 1695.

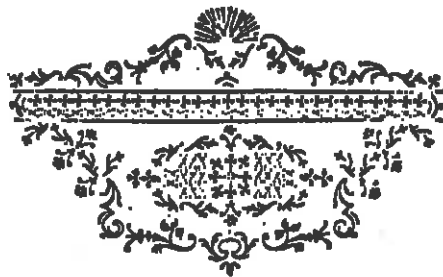
# ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE.

---

## MATHÉMATIQUES,

*Par MM. D'ALEMBERT, l'Abbé BOSSUT, DE LA LANDE,  
le Marquis de CONDORCET, &c.*

TOME PREMIER.



*A PARIS,*

Chez PANCKOUCKE, Libraire, hôtel de Thou, rue des Poitevins;

*A LIÈGE,*

Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

---

M. DCC. LXXXIV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.



Jean Le Rond d'Alembert

---

## AUTEURS.

On n'a pu citer dans le Frontispice que les principaux Auteurs de ce Dictionnaire; mais voici une liste de tous ceux qui y ont travaillé, avec les lettres par lesquelles ils sont désignés à la fin de chacun des articles qui leur appartiennent. Quelquefois on a écrit les noms en entier. M. de la Lande est seul Auteur de toute la partie astronomique.

M. d'Alembert.....	( O ).
M. l'Abbé Bossut.....	( L. B. ).
M. de la Lande.....	( D. L. ).
M. le Marquis de Condorcet.....	( M. D. C. ).
M. Castillon, père.....	( J. D. C. ).
M. Castillon, fils.....	( F. D. C. ).
M. Jean Bernoulli.....	( J. B. ).
M. l'Abbé de la Chapelle.....	( F. ).
M. Dargenville.....	( K ).
M. Diderot.....	
M. Rallier des Ourmes.....	

---

Jean LE ROND D'ALEMBERT  
( Paris 1717 - id. 1783 )

Ses recherches en mécanique, acoustique et en astronomie le conduisirent à approfondir et à perfectionner les outils de l'analyse. Il fut le premier à utiliser un développement de Taylor avec reste explicite sous forme d'intégrale et à étudier un exemple d'équation aux dérivées partielles. Parmi ses oeuvres importantes il faut aussi citer son traité de dynamique et ses travaux sur les nombres complexes. Il entra à vingt-trois ans à l'académie des sciences et collabora jusqu'en 1759 à la Grande Encyclopédie ( Discours préliminaire et nombreux articles scientifiques ).

Le texte suivant est l'article Tangente de la Grande Encyclopédie. Sa clarté et sa concision montrent les préoccupations pédagogiques de d'Alembert. Il définit d'abord la tangente comme position limite d'une sécante et s'intéresse ensuite à la tangente au cercle et aux coniques après avoir rappelé la définition de celles-ci. Enfin il décrit l'usage du calcul différentiel dans la recherche des tangentes.

\* \*  
\*

**TANGENTE**, s. f. ( *Géométrie* ) menez à la courbe  $MS$  ( *planc. Géom. fig. 241* ) une sécante  $MmV$  qui la coupe en  $M$  &  $m$  ; faites tourner cette sécante autour du point  $M$  jusqu'à ce que le point  $m$  tombe sur le point  $M$  ; la ligne  $M.mV$  parvenue à sa dernière position  $MV$  est une *tangente*.

Si la courbe a une inflexion, *fig. 242*, ou un rebroussement, *fig. 243* ; la ligne  $MV$  pourra être en même-temps tangente & sécante, & après avoir touché la courbe en  $M$ , aller la couper en  $R$ .

Dans les éléments de *Géométrie* on ne s'occupe guères que de la *tangente* au cercle. On y démontre que cette *tangente* est perpendiculaire au rayon. Effectivement, soit la ligne  $DE$ , *fig. 244* perpendiculaire en  $M$  au rayon  $MC$  de la circonférence  $MFG$ . Ce rayon étant perpendiculaire à  $DE$  sera la plus courte de toutes les lignes qui y aboutissent du point  $C$ . Si donc on mène les lignes  $DC$  &  $CE$ , ces lignes étant plus grandes que  $MC$ , les points  $D$  &  $E$  seront hors du cercle, & comme on peut dire la même chose de tout autre point, tous les points de la ligne  $DM$  sont hors du cercle excepté le point

(1)  $M$ , qui est sur la circonférence même; donc cette ligne est *tangente*.

Si d'un même point  $D$  on mène une *tangente*  $MD$  & une *secante*  $D F G$  au cercle; la *tangente* est moyenne proportionnelle entre la *secante* entière & sa partie extérieure; car si on mène les lignes  $F M$  &  $G M$ ; les triangles  $F D M$  &  $D M G$  seroient semblables, parce que l'angle  $D$  est commun; de plus les angles  $D M F$  &  $D G M$  sont, chacun; mesurés par la moitié de l'arc  $F M$ , don  $D G$ :  $D M = D M$ :  $D F$ .

La portion  $M E$  de la *tangente* au point  $M$  extrémité de l'arc  $M I$ , comprise entre ce point  $M$  & le rayon prolongé qui passe par le point  $I$ , autre extrémité de cet arc, s'appelle *tangente* de l'arc  $M I$  ou de l'angle  $M C I$  mesuré par cet arc. Voyez SINUS.

*Tangentes des sections coniques.*

Si du point  $M$  de la parabole  $A M$ , fig. 245, on mène deux lignes, l'une  $F M$  a son foyer, l'autre  $M V$  qui rencontre la directrice, perpendiculairement en  $V$ , ces lignes sont égales. Voyez CONIQUE ET PARABOLE.

Cela posé, je dis que la ligne  $M Y$  qui divise l'angle  $V M F$  en deux parties égales est *tangente* à la parabole au point  $M$ . Pour le démontrer, il suffit de faire voir que tout point de la ligne  $M Y m$  autre que le point  $M$ ,  $m$  par exemple, est hors de la parabole relativement au foyer. Menez de ce point  $m$  les lignes  $m V$ ,  $m K$  perpendiculaires sur la directrice &  $m F$ ;  $m V = m F$ ; donc  $m K$  est  $< m F$ ; donc le point  $m$  n'est pas à la parabole; donc l'intersection de  $K m$  avec la parabole est de l'autre côté du point  $m$  relativement au point  $K$ .

(2)

Si du point  $M$  de l'ellipse, fig. 246, on mène les lignes  $M F$  &  $M f$  aux foyers  $F, f$ , la somme de ces lignes sera constante & égale au grand arc. Voyez CONIQUE.

Cela posé, je dis que la ligne  $M Y$  qui divise en deux parties égales le supplément de l'angle  $F M f$  est *tangente*, je supprime la démonstration, parce qu'elle est la même à-peu-près que pour la parabole.

(3)

Si du point  $M$  de l'hyperbole, fig. 247, on mène les lignes  $M F$  &  $M f$ , aux foyers  $F, f$ , la différence de ces lignes est constante & égale à l'axe des foyers. Voyez CONIQUE.

Cela posé, je dis que la ligne  $M Y$  qui divise en deux parties égales l'angle  $F M f$  est *tangente*, même démonstration que pour l'ellipse.

Archimède a aussi déterminé la *tangente* de la spirale, par des moyens puisés dans l'ancienne Géométrie, sur quoi voyez ses œuvres, édition de Barrow.

Ces courbes sont à-peu-près les seules dont on puisse ainsi trouver les *tangentes*; pour les autres, il faut employer le calcul différentiel ou une méthode analogue, moyennant quoi le problème n'a aucune difficulté, quand l'équation de la courbe est donnée d'une manière quelconque. Voyez l'Analyse des Infiniments petits du marquis de l'Hôpital, qui ne laisse presque rien à desirer sur cette matière.

Nous parlerons ici de deux cas seulement qui se rencontrent le plus souvent, celui où l'équation de la courbe est donnée entre des coordonnées parallèles à deux lignes données, & celui où les

coordonnées sont, la distance du point indéterminé de la courbe à un point fixe, & la distance angulaire de ce point à une ligne donnée.

Menez à l'axe  $A P p$  (fig. 241), les lignes  $M P$  &  $m p$  parallèles entr'elles, & par le point  $M$ ;  $M R$  parallèle à  $A P$ ; soit  $A P = x$   $P M = y$ ;  $P p = \Delta x$ ;  $R m = \Delta y$  ( $\Delta$  est la caractéristique des différences finies); prolongez la *secante*  $M V$  & la *tangente*  $M V'$  jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'axe des  $x$  en  $O$  & en  $T$ , vous aurez évidemment la sous-secante  $P O = y \frac{\Delta x}{\Delta y}$ ; donc quand le point  $m$  vient à tomber

sur le point  $M$ , la sous-tangente  $P T = y \frac{dx}{dy}$ .

Soit  $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$  on aura  $\frac{y dx}{dy}$  ou  $P T = \frac{2ax - x^2}{2a-x}$ . Si les coordonnées étoient perpendiculaires entr'elles, cette courbe seroit la cissoïde de Dioclès. (4)

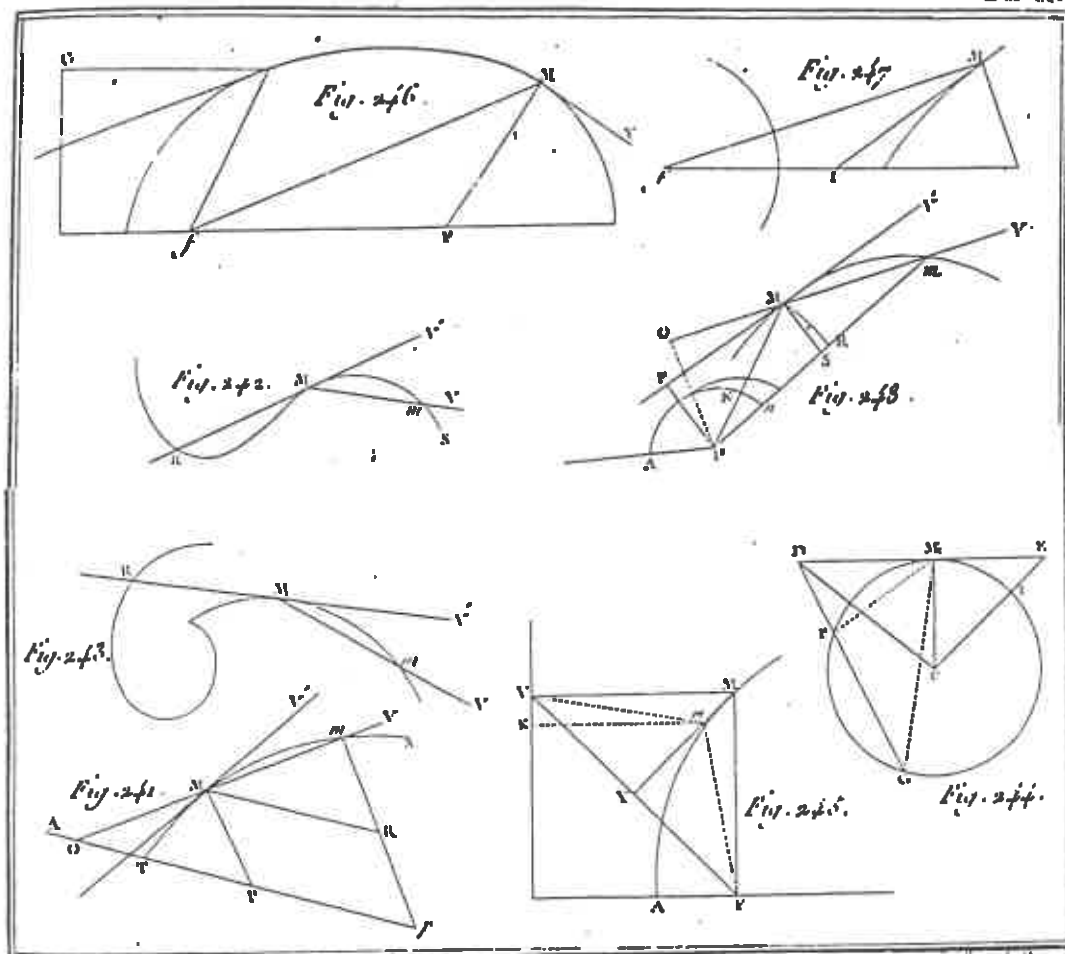
Menez au point fixe  $P$ , fig. 248, les ordonnées  $P M, P m$ ; décrivez l'abscisse circulaire  $A N n$ , qui ait pour centre le point  $P$ , & pour origine le point  $A$ , placé sur une ligne  $A P$  donnée de position; menez la perpendiculaire  $M S$  sur  $P m$ ; & décrivez l'arc  $M R$  qui ait pour centre le point  $P$ ; prolongez la *secante*  $M V$  & la *tangente*  $M V'$  jusqu'à ce qu'elles rencontrent en  $O$  &  $T$  des perpendiculaires menés sur  $P m$  &  $P M$ ; cela posé, soit  $A P = P N = r$ ,  $A N = x$ ;  $P M = y$ , on

aura  $S m = y (1 - \cos \frac{\Delta x}{r}) + \Delta y$ , &  $M S = y \sin \frac{\Delta x}{r}$ ; donc la sous-secante  $P O = \dots \dots \dots$

$(y^2 + y \Delta y) \sin \frac{\Delta x}{r}$   
 $y (1 - \cos \frac{\Delta x}{r}) + \Delta y$

à tomber sur le point  $M$ , la sous-tangente  $P T = \frac{y^2 dx}{r dy}$ .

Soit  $y = m x$ , on aura  $\frac{y^2 dx}{r dy}$  ou  $P T = \frac{m x^2}{r}$ ; si  $m =$  le rapport du rayon à la circonférence, cette courbe sera la spirale d'Archimède.



*Mathématiques, Géométrie.*

\* \*  
\*

Notes :

(1) : L'auteur prouve que la perpendiculaire en M au rayon est tangente au cercle au sens "euclidien" du mot ( la droite n'a qu'un seul point commun avec le cercle, tous les autres points de la ligne sont hors du cercle ). Il n'utilise donc pas la définition qu'il vient de donner en début d'article. La démarche sera identique pour les tangentes des sections coniques.

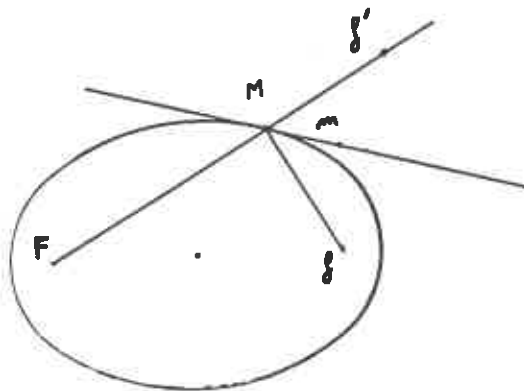
(2) : Il faut admettre que la parabole sépare le plan en deux régions, l'une où  $mF > mK$ , l'autre où  $mF < mK$ . La même supposition sera faite pour les autres coniques.

(3) : La démonstration est donnée en annexe.

(4) : Pour la définition de la cissoïde de Dioclès cf annexe.

Annexe 1 :

**Tangente à l'ellipse**



M est un point de l'ellipse de foyers F et f, et de grand axe 2a. Sur la droite FM et à l'extérieur de l'ellipse, on place f' tel que :  $Mf = Mf'$ . m est un point autre que M de la bissectrice extérieure de l'angle FMf.

On a alors :  $mF + mf = mF + mf'$  ;  $mF + mf' > MF + Mf'$  et  $MF + Mf = 2a$ . Par conséquent  $mF + mf > 2a$ . Ce qui prouve que m est un point extérieur à l'ellipse.

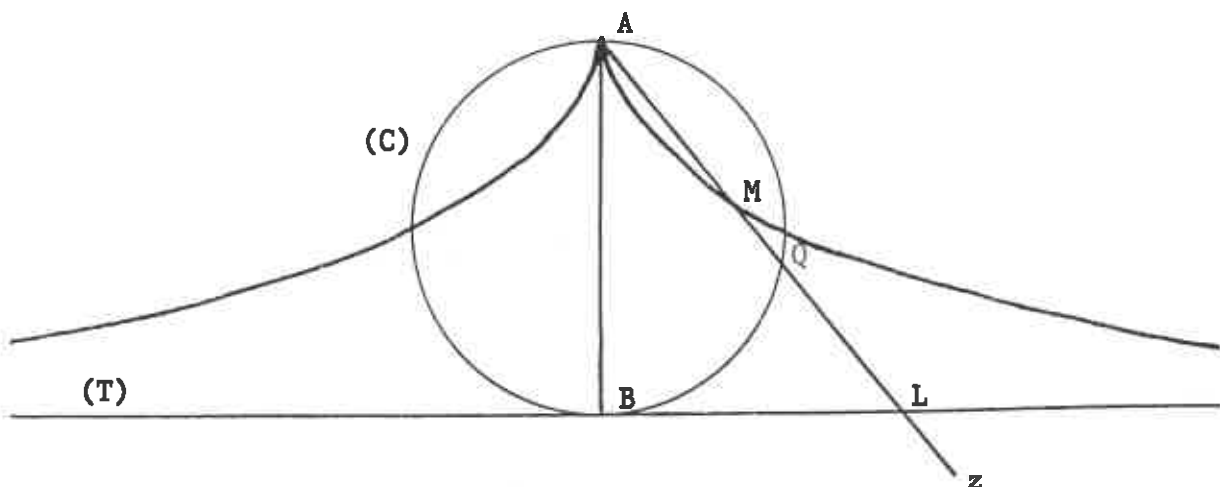
Annexe 2 :

**La Cissoïde de Dioclès (fin du II<sup>e</sup> siècle av.J.C.)**

Sont donnés un cercle (C) de diamètre  $AB = 2a$  et sa tangente (T) en B. La demi-droite Az recoupe (C) au point Q et coupe (T) en L. On place le point M tel que :  $AM = QL$ . La cissoïde de Dioclès est la courbe décrite par M lorsque Az tourne autour de A.

Ayant choisi un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B a pour coordonnées  $(2a; 0)$ , posons  $M(x; y)$  et  $m = \tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL})$ . On a alors  $L(2a; 2am)$  et  $Q(2a/(1+m^2); 2am/(1+m^2))$  ; D'où la représentation paramétrique de la cissoïde :  $x = 2am^2/(1+m^2)$  et  $y = mx$  avec  $m \in \mathbb{R}$

En éliminant le paramètre m, on obtient l'équation cartésienne de la cissoïde :  $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$ .



# RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique,  
Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.



TOME PREMIER.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,  
rue Serpente, n.° 7.



1823.



Augustin-Louis CAUCHY  
( Paris 1789 - Sceaux 1857 )

D'abord ingénieur des ponts et chaussées, il se consacra entièrement aux mathématiques dès 1813 et devint professeur à l'école polytechnique, à la faculté des Sciences, et en 1816, académicien. Il exerça une véritable hégémonie sur les mathématiques françaises à partir des années 1820 jusqu'à sa mort. Son oeuvre couvre de nombreux domaines des mathématiques et de la physique mathématique. Il créa la théorie des fonctions d'une variable complexe et fut un des fondateurs de la théorie des groupes finis. Il montra l'importance de la convergence des séries entières et précisa la notion d'intégrale définie. Son influence fut décisive pour l'introduction de la rigueur en analyse.

Les textes suivants sont extraits de son cours d'analyse donné à l'école royale polytechnique, paru en 1821. Les concepts de base du calcul infinitésimal y sont définis suivant un plan que l'on retrouve encore dans les manuels actuels : limite, continuité, dérivée, différentielle. La dérivée est définie par la limite du taux d'accroissement et Cauchy distingue les notions de différentielle et de dérivée avant de faire l'identification entre  $y'$  et  $dy/dx$ . La tangente apparaît comme position limite d'une corde à l'occasion d'un problème d'application des dérivées ( sixième leçon ).

\* \*  
\*



## COURS D'ANALYSE.

---

### RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES À L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

Par M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

---

### CALCUL INFINITÉSIMAL.

---

#### PREMIÈRE LEÇON.

*Des Variables, de leurs Limites, et des Quantités infiniment petites.*

---

ON nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; et le rayon vecteur, mené du centre d'une hyperbole à un point de la courbe qui s'éloigne de plus en plus de ce centre, forme avec l'axe des  $x$  un angle qui a pour limite l'angle formé par l'asymptote avec le même axe; &c. . . . Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation *lim.* placée devant cette variable.

\* \*  
\*

La première leçon se poursuit par l'étude de deux exemples :  
"limites dont s'approchent indéfiniment les deux expressions variables  $(\sin x)/x$ ,  $(1+x)^{1/x}$ , tandis que  $x$  converge vers zéro", selon les propres termes de Cauchy.

Elle se termine par les deux paragraphes suivants où Cauchy identifie une quantité variable de limite zéro avec un infiniment petit.

\* \*  
\*

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite. Telle est la variable  $x$  dans les calculs qui précèdent.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'infini positif indiqué par le signe  $\infty$ , s'il s'agit d'une variable positive; et l'infini négatif indiqué par la notation  $-\infty$ , s'il s'agit d'une variable négative. Tel est le nombre variable  $m$  que nous avons employé ci-dessus.

---

\* \*  
\*

La deuxième leçon est consacrée à la continuité, nous n'en donnons pas d'extrait.

\* \*  
\*

TROISIÈME LEÇON.

*Dérivées des Fonctions d'une seule Variable.*

LORSQUE la fonction  $y = f(x)$  reste continue entre deux limites données de la variable  $x$ , et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors  $\Delta x = i$ , les deux termes du rapport aux différences

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de  $x$ ; mais elle varie avec  $x$ . Ainsi, par exemple, si l'on prend  $f(x) = x^m$ ,  $m$  désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + \dots + i^{m-1}$$

et il aura pour limite la quantité  $mx^{m-1}$ , c'est-à-dire, une nouvelle fonction de la variable  $x$ . Il en sera de même en général; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport  $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$  dépendra de la forme de la fonction proposée  $y = f(x)$ . Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \text{ ou } f'(x).$$

\* \*  
\*

Dans la suite de la troisième leçon se trouvent le calcul des dérivées des fonctions usuelles ainsi que la dérivée d'une fonction composée

\* \*  
\*

QUATRIÈME LEÇON.

*Différentielles des Fonctions d'une seule variable.*

SOIENT toujours  $y=f(x)$  une fonction de la variable indépendante  $x$ ,  $i$  une quantité infiniment petite, et  $h$  une quantité finie. Si l'on pose  $i=ah$ ,  $a$  sera encore une quantité infiniment petite, et l'on aura identiquement

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+ah)-f(x)}{ah},$$

d'où l'on conclura

$$(1) \quad \frac{f(x+ah)-f(x)}{a} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h.$$

La limite vers laquelle converge le premier membre de l'équation (1), tandis que la variable  $a$  s'approche indéfiniment de zéro, la quantité  $h$  demeurant constante, est ce qu'on appelle la *différentielle* de la fonction  $y=f(x)$ . On indique cette différentielle par la caractéristique  $d$ , ainsi qu'il suit :

$$dy \text{ ou } df(x).$$

Il est facile d'obtenir sa valeur, lorsqu'on connaît celle de la fonction dérivée  $y'$  ou  $f'(x)$ . En effet, en prenant les limites des deux membres de l'équation (1), on trouvera généralement

$$(2) \quad df(x) = hf'(x).$$

Dans le cas particulier où  $f(x)=x$ , l'équation (2) se réduit à

$$(3) \quad dx = h.$$

Ainsi la différentielle de la variable indépendante  $x$  n'est autre chose que la constante finie  $h$ . Cela posé, l'équation (2) deviendra

$$(4) \quad df(x) = f'(x) \cdot dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \quad dy = y' dx.$$

Il résulte de ces dernières que la dérivée  $y'=f'(x)$  d'une fonction quelconque  $y=f(x)$  est précisément égale à  $\frac{dy}{dx}$ , c'est-à-dire, au rapport entre la différentielle de la fonction et celle de la variable, ou, si l'on veut, au coefficient par lequel il faut multiplier la seconde différentielle pour obtenir la première. C'est pour cette raison qu'on donne quelquefois à la fonction dérivée le nom de *coefficient différentiel*.

## COURS D'ANALYSE.

### SIXIÈME LEÇON.

*Usage des Différentielles et des Fonctions dérivées dans la solution de plusieurs Problèmes. Maxima et minima des Fonctions d'une seule variable. Valeurs des Fractions qui se présentent sous la forme  $\frac{0}{0}$ .*

APRÈS avoir appris à former les dérivées et les différentielles des fonctions d'une seule variable, nous allons indiquer l'usage qu'on peut en faire pour la solution de plusieurs problèmes.

1.<sup>er</sup> Problème. La fonction  $y = f(x)$  étant supposée continue par rapport à  $x$  dans le voisinage de la valeur particulière  $x = x_0$ , on demande si, à partir de cette valeur, la fonction croît ou diminue, tandis que l'on fait croître ou diminuer la variable elle-même. (1)

*Solution.* Soient  $\Delta x, \Delta y$ , les accroissemens infiniment petits et simultanés des variables  $x, y$ . Le rapport  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  aura pour limite  $\frac{dy}{dx} = y'$ . On doit en conclure que pour de très-petites valeurs numériques de  $\Delta x$ , et pour une valeur particulière  $x_0$  de la variable  $x$ , le rapport  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  sera positif, si la valeur correspondante de  $y'$  est une quantité positive et finie, négatif, si cette valeur de  $y'$  est une quantité finie mais négative. Dans le premier cas, les différences infiniment petites  $\Delta x, \Delta y$  étant de même signe, la fonction  $y$  croîtra ou diminuera, à partir de  $x = x_0$ , en même temps que la variable  $x$ . Dans le second cas, les différences infiniment petites étant de signes contraires, la fonction  $y$  croîtra si la variable  $x$  diminue, et décroîtra si la variable augmente. (2)

Ces principes étant admis, concevons que la fonction  $y = f(x)$  demeure continue entre deux limites données  $x = x_0, x = X$ . Si l'on fait croître la variable  $x$  par degrés insensibles depuis la première limite jusqu'à la seconde, la fonction  $y$  ira en croissant, toutes les fois que sa dérivée étant finie aura une valeur positive, et en décroissant, toutes les fois que cette même dérivée obtiendra une valeur négative. Donc, la fonction  $y$  ne pourra cesser de croître pour diminuer, ou de diminuer

*Leçons de M. Cauchy,*

E

Les notes sont regroupées page 76.

## COURS D'ANALYSE.

pour croître, qu'autant que la dérivée  $y'$  passera du positif au négatif, ou réciproquement. Il est essentiel d'observer que, dans ce passage, la fonction dérivée deviendra nulle, si elle ne cesse pas d'être continue. (3)

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction  $f(x)$  surpasse toutes les valeurs voisines, c'est-à-dire, toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier  $x$  en plus ou en moins d'une quantité très-petite, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction  $f(x)$  est inférieure à toutes les valeurs voisines, elle prend le nom de *minimum*.

Cela posé, il est clair que, si les deux fonctions  $f(x)$ ,  $f'(x)$  sont continues dans le voisinage d'une valeur donnée de la variable  $x$ , cette valeur ne pourra produire un *maximum* ou un *minimum* de  $f(x)$ , qu'en faisant évanouir  $f'(x)$ .

\* \*  
\*

Nous passons sur le deuxième problème consacré à la recherche des minima et maxima d'une fonction d'une seule variable.

\* \*  
\*

3.<sup>e</sup> Problème. *Déterminer l'inclinaison d'une courbe en un point donné.*

*Solution.* Considérons la courbe qui a pour équation en coordonnées rectangulaires  $y = f(x)$ . Dans cette courbe, la corde menée du point  $(x, y)$ \* au point  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ , forme, avec l'axe des  $x$  prolongé dans le sens des  $x$  positives, deux angles, l'un aigu, l'autre obtus, dont le premier mesure l'inclinaison de la corde, par rapport à l'axe des  $x$ . Si le second point vient à se rapprocher à une distance infiniment petite du premier, la corde se confondra sensiblement avec la tan-

---

\* Nous indiquons ici les points à l'aide de leurs coordonnées renfermées entre deux parenthèses, ce que nous ferons toujours par la suite. Souvent aussi, nous indiquerons les courbes ou surfaces courbes par leurs équations.

## COURS D'ANALYSE.

gente menée à la courbe par ce premier point ; et l'inclinaison de la corde, par rapport à l'axe des  $x$ , deviendra l'inclinaison de la tangente, ou ce qu'on nomme *l'inclinaison de la courbe* par rapport au même axe. Cela posé, comme l'inclinaison de la corde aura pour tangente trigonométrique la valeur numérique du rapport  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , il est clair que l'inclinaison de la courbe aura pour tangente trigonométrique la valeur numérique de la limite vers laquelle ce rapport converge, c'est-à-dire, de la fonction dérivée  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Si la valeur de  $y'$  est nulle ou infinie, la tangente à la courbe sera parallèle ou perpendiculaire à l'axe des  $x$ . C'est ordinairement ce qui arrive, quand l'ordonnée  $y$  devient un *maximum* ou un *minimum*.

*Exemples.*  $y=x^2$ ,  $y=x^3$ ,  $y=x^m$ ,  $y=x^{\frac{1}{2}}$ ,  $y=x^a$ ,  $y=A^x$ ,  $y=\sin x$ , &c..

\* \*  
\*

### Notes :

(1) : A cette époque les mathématiciens ne mettent pas en doute l'existence de la dérivée des fonctions continues (au sens actuel de dérivée à droite et à gauche éventuellement infinie). Il faudra attendre les travaux de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier (1829) pour que ces deux notions soient clairement séparées.

(2) : Cette démonstration laisse perplexe. On peut lire ce paragraphe de la façon suivante : "Pour une fonction dérivable sur un voisinage de  $x_0$ , lorsque  $f'(x_0) > 0$  il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $f$  est croissante", mais ce résultat est faux comme le prouve le contre-exemple suivant :  $f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Par contre le résultat est vrai si l'on suppose  $f$  continûment dérivable sur un voisinage de  $x_0$ .

(3) : Si l'on veut soumettre à la rigueur de nos définitions actuelles l'idée intuitive développée par Cauchy dans ce paragraphe, on doit alors utiliser les propriétés topologiques de l'ensemble des nombres réels (cf annexe 3). Rappelons que celles-ci ne seront mises en évidence que dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. On voit ici, ainsi que dans les précédentes notes, une illustration des liens existants entre le niveau de rigueur et la précision des définitions.



Annexe 3 :

**Une caractérisation des fonctions monotones**

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et soit  $f$  une fonction de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  continue et dérivable à droite sur  $I$ , alors :

$f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $t$  de  $I$   $f'_+(t) \geq 0$

Démontrons que la condition est nécessaire :

Soit  $a \in I$ , pour tout  $t$  de  $I$  tel que  $t > a$ , on a :  $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq 0$   
 ce qui entraîne que :  $\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq 0$ .

Démontrons que la condition est suffisante :

Soit  $a$  et  $b$  deux points de  $I$  avec  $a < b$ , et soit  $h$  un réel strictement positif.

Remarquons d'abord que si  $x \in I$  alors il existe  $d > 0$  tel que :  
 pour tout  $u \in ]x; x+d]$ ,  $f'_+(x) - h \leq \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq f'_+(x) + h$  et par conséquent  
 comme  $f'_+(x) \geq 0$ , pour tout  $u \in ]x; x+d]$  on a :  $f(u)-f(x)+h(u-x) \geq 0$ .

Ceci dit posons  $I_h = \{ t \in [a; b] \mid \forall u \in [a; t] f(u)-f(a)+h(u-a) \geq 0 \}$ .

1°)  $I_h$  est un intervalle qui contient un segment  $[a; a+d]$  avec  $d > 0$ .

En effet  $a \in I_h$  et comme  $f'_+(a) \geq 0$ , d'après la remarque préliminaire il existe  $d > 0$  tel que  $a+d \in I_h$  ; d'autre part  $I_h$  est un intervalle car si  $t$  et  $t'$  sont deux éléments de  $I_h$  avec  $t < t'$ , tout réel  $t''$  de  $]t; t'[$  est également dans  $I_h$ .

2°)  $I_h$  admet un plus grand élément.

En effet  $I_h$  étant majoré par  $b$  admet une borne supérieure  $c$  et pour tout  $t < c$ ,  $t \in I_h$  donc  $f(t)-f(a)+h(t-a) \geq 0$  et par conséquent  $f(c)-f(a)+h(c-a) \geq 0$  ( passage à la limite,  $f$  étant continue au point  $c$  )  
 ce qui prouve que  $c \in I_h$ .

3°)  $I_h = [a; b]$  ( reste à prouver que  $c=b$  ).

Supposons par l'absurde que  $c < b$ , comme  $f'_+(c) \geq 0$ , il existe alors  $d > 0$  tel que : pour tout  $u$  de  $[c; c+d]$ ,  $f(u)-f(c)+h(u-c) \geq 0$  (rem. prélim.)  
 et comme on sait que :  $f(c)-f(a)+h(c-a) \geq 0$  ; on en déduit que :  
 pour tout  $u$  de  $[c; c+d]$ ,  $f(u)-f(a)+h(u-a) \geq 0$  donc que  $c+d \in I_h$  ;  
 d'où la contradiction.

Finalement  $b \in I_h$  donc  $f(b)-f(a)+h(b-a) \geq 0$  i.e  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq -h$ .

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout  $h > 0$ , on a bien  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$ .

## UNE EXPERIMENTATION EN PREMIERE SCIENTIFIQUE

Elle fut menée pendant deux années consécutives (1992 et 1993) dans une classe de première S. Il s'agissait d'introduire la notion de dérivée en s'appuyant sur celle de tangente à une courbe. Elle comportait trois séquences d'environ une heure et demie, une partie du travail devant être fait à la maison. Deux textes historiques furent utilisés en classe : celui de Roberval sur la tangente à la cycloïde et la lecture X des Leçons Géométriques de Barrow. Ils sont présentés par ailleurs dans cette brochure. Les documents de travail destinés aux élèves, ainsi que quelques-unes de leurs copies, se trouvent à la suite du compte rendu de de ces trois séquences.

La première n'avait pas de caractère historique, elle consistait à faire construire plusieurs tangentes à la parabole d'équation  $y=x^2$  par recherche de sécantes ayant un point d'intersection unique. Son objectif était de manipuler la vision "euclidienne" de la tangente, la seule connue des élèves à ce moment, et d'en indiquer les limites. Suite à une question de ma part, les élèves se sont accordés pour dire que, des deux propriétés de la tangente à un cercle, droite ayant un seul point d'intersection ou droite perpendiculaire au rayon, seule la première s'étendait facilement à la parabole. Cette séquence permit aux élèves, après qu'ils eussent résolu quelques exemples, de conjecturer et de démontrer la valeur du coefficient directeur de la tangente de la courbe étudiée au point d'abscisse  $a$ . Dans la synthèse qui suivit, j'insistai sur le fait que cette méthode leur avait été accessible parce qu'elle ne mettait en jeu que des équations du second degré et que par conséquent on ne pourrait pas l'appliquer à toutes les courbes. J'en profitai également pour illustrer la notion d'enveloppe à l'aide d'un transparent montrant les tangentes tracées sans la parabole.

La deuxième séquence était bâtie autour du texte de Roberval. Elle devait donner aux élèves une vision cinématique de la tangente (droite donnant la "direction future" de la trajectoire) à travers un exemple de courbe définie autrement que par son équation cartésienne. Le texte fut présenté et commenté en classe. A mon étonnement certains élèves avaient une première connaissance de la cycloïde (c'est une courbe formée d'arceaux dirent-ils), mais le principe de sa génération dut être expliqué en détail. Le fait que le vecteur vitesse soit porté par la tangente était connu des élèves (ou admis facilement). Par contre la composition des mouvements ne l'était pas et nécessita donc des commentaires fournis. Ceci mis à part la lecture du texte ne posa pas de gros problèmes. Les élèves devaient approfondir ce travail chez eux en refaisant la construction de la roulette et de ses tangentes et en reconnaissant la courbe qui l'accompagne.

La troisième séquence construite autour du texte de Barrow était la plus ambitieuse. Elle devait amener la vision "différentielle" de la tangente (correspondant à l'approximation affine de la fonction), introduire la définition de la différentiabilité en un point, et donner la dérivée de trois fonctions usuelles : cube, racine carrée, inverse. Avant de distribuer le texte je présentai un transparent mettant en évidence comment une courbe finit par se confondre avec sa tangente lorsque l'on effectue des zooms successifs autour du point de contact (j'avais choisi comme exemple la parabole étudiée lors de la première séquence). La lecture du texte ne causa pas de gros soucis aux élèves, j'avais pris soin de remplacer les exemples originaux par celui plus simple de la courbe définie par  $MP=AP^2$  et dont le résultat pouvait être recoupé avec les travaux précédents. Le travail demandé aux élèves était de justifier les trois règles de la méthode et de l'appliquer aux courbes définies par :  $MP=AP^3$  ;  $MP^2=AP$  ;  $MP \times AP=1$ .

Eu égard aux productions des élèves, le bilan de ces trois séquences m'est apparu positif. Les textes avaient suscité l'intérêt. Les méthodes de Roberval et de Barrow avaient été comprises par une majorité d'élèves. Lorsque, par la suite, je donnai la définition de la dérivabilité en un point par l'existence d'un développement limité d'ordre un, il me sembla que les élèves éprouvaient moins de difficultés. Ils savaient mieux "lire" cette définition, y reconnaître le nombre dérivé, les termes négligeables, voire même l'équation de la tangente dans le cas d'une étude en zéro. Autre avantage, le lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée avait pu être mis en évidence dès la première séquence.

## QUESTIONS SUR LE TEXTE DE ROBERVAL

Gilles Personne de Roberval vous explique dans les pages suivantes comment construire la courbe qu'il appelle Roulette, ainsi que la tangente en l'un de ses points.

Votre travail consiste à refaire vous-même cette construction.

Pour cela, prenez  $AB = 10\text{cm}$  et calculez  $AC$ .

Placez sur la demi-circonférence  $AB$  les points  $E, F, G, H, K, L, L'$  qui la partagent en huit arcs de même longueur.

Construisez en suivant la méthode de Roberval les points  $M_1, N_2, O_3, \dots$  etc... puis les points  $A, 8, 9, 10, \dots$  etc...

Construisez ensuite les "touchantes" à la roulette aux points  $A, 8, 9, 10, \dots$  etc...

Questions supplémentaires :

1°) La méthode de Roberval permet-elle de trouver la touchante à la roulette au point  $A$  ?

2°) Reconnaissez-vous la courbe  $A 1 2 3 4 \dots D$  ? Calculez donc son équation dans le repère orthonormé d'origine  $A$  dans lequel  $B$  a pour coordonnées  $(0;2)$ .

N.B. : La partie du texte commençant à : " Or ces deux lignes ...", et finissant à : "...trois fois le cercle.", qui traite de la quadrature de la cycloïde, ne figurait pas dans le document fourni aux élèves.

## COMMENTAIRES ET QUESTIONS SUR LE TEXTE DE BARROW

Pour bien comprendre la méthode d'Isaac Barrow, nous allons l'illustrer par un exemple simple.

La courbe proposée a pour équation :  $MP = AP^2$  (autrement dit c'est une parabole de sommet A). Nous utilisons les notations de Barrow avec en plus  $AP = f$ . (il faudra s'y faire et puis cela change de  $x$  et  $y$  !).

Nous allons donc comparer par le calcul au moyen de l'équation MR et NR. On a :

$$AQ^2 = (f-e)^2 = f^2 - 2fe + e^2 ;$$

d'après la règle 1, je jette  $e^2$ , donc :  $AQ^2 = f^2 - 2fe$  ;

d'après l'équation :  $NQ = AQ^2$ , c'est à dire :  $m-a = f^2 - 2fe$  ;

d'après la règle 2, je jette  $m$  et  $f^2$ , donc :  $-a = -2fe$  ou  $a = 2fe$  ;

d'après la règle 3, je substitue  $MP$  à la place de  $a$ , et  $PT$  à celle de  $e$ .

De là je trouve :  $MP = 2fxPT$  ou encore  $\frac{MP}{PT} = 2AP$  ; formule qui donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point P.

Question : comment peut-on justifier chacune des règles 1, 2 et 3 ?

Exercice : calculer les tangentes aux courbes suivantes par la méthode de Barrow ?

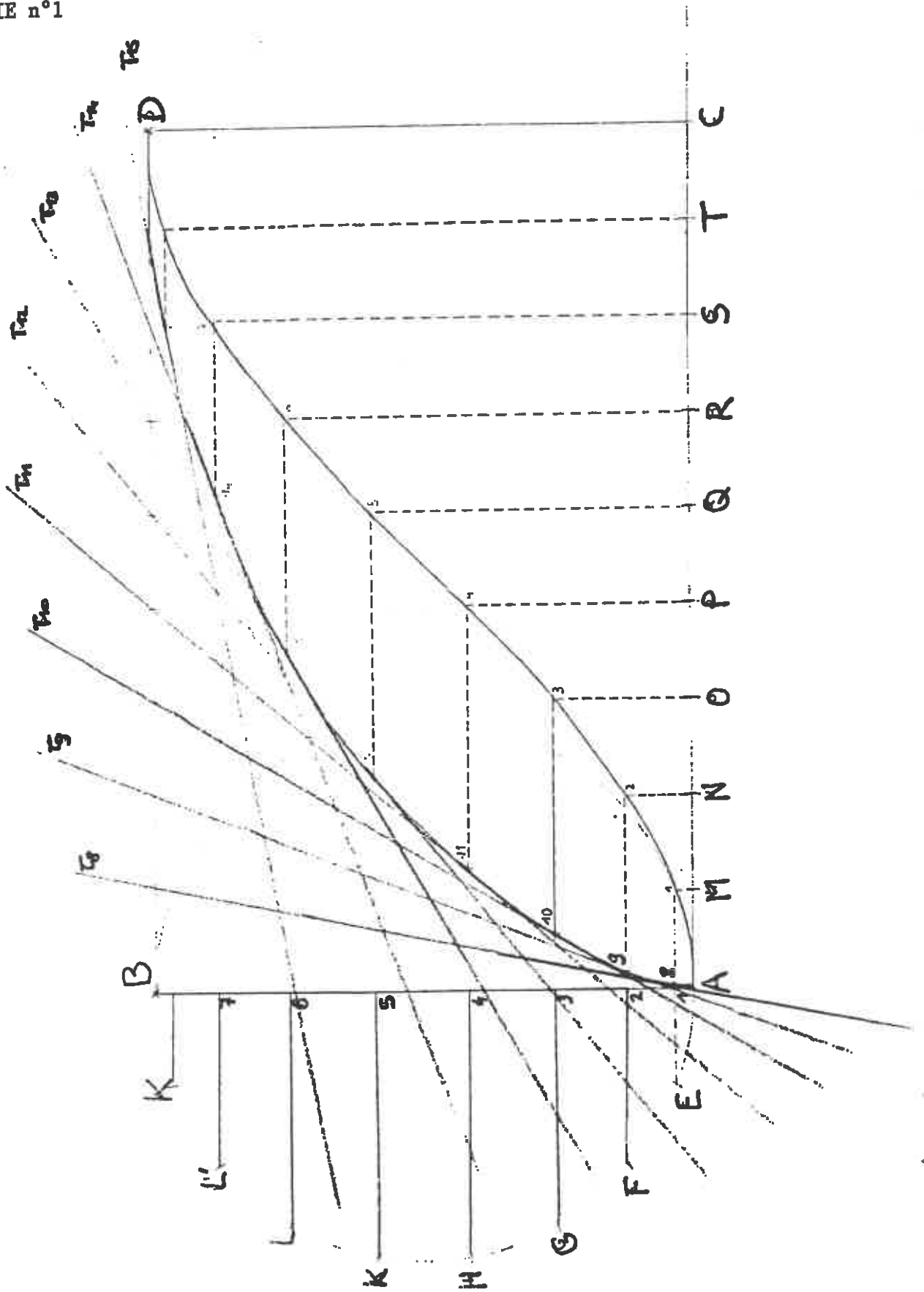
1°) Equation  $MP = AP^3$  (fonction cube) ; on trouvera :  $\frac{MP}{PT} = 3AP^2$ .

2°) Equation  $MP^2 = AP$  (fonct. racine carrée) ; on trouvera :  $\frac{MP}{PT} = \frac{1}{2\sqrt{AP}}$ .

3°) Equation  $MP \times AP = 1$  (fonction inverse) ; on trouvera :  $\frac{MP}{PT} = -\frac{1}{AP^2}$ .

N.B. : Le document fourni aux élèves ne comportait pas l'exemple II.

### III La Roulette de l'il Personne de Rebornal



• Construction : voir la figure

• Questions supplémentaires

1) La construction de la touchante en  $A$  point de la roulette nécessite la construction d'un losange dont l'un des cotés est constitué par un segment, reliant la courbe comprenant les points  $M_1, M_2$  etc et la cycloïde parallèlement à  $[AC]$ . Or au point  $A$ , les deux courbes sont confondues. Le losange est donc égal à un seul point. On ne peut donc pas déterminer sa diagonale. Donc la méthode de Roberval ne permet pas de trouver la touchante en  $A$ .

2) Si l'on prend un repère adéquat, cette courbe représente la courbe de la fonction sinus :  $y = \sin x$ . La courbe, dans le repère d'origine  $A(0,0)$  et orthonormé ( $B(0,2)$ ) représente une fonction paire car elle est symétrique par rapport à  $AB$ . Si l'origine était  $I$ , milieu de  $[AB]$  avec  $A(0,-1)$  et  $B(0,1)$ , la fonction serait l'opposé de la fonction  $y = \cos x$  (car la fonction cosinus coupe l'axe des ordonnées en  $(0,1)$  et la fonction présente le coupe en  $(0,-1)$ ). Dans le repère ayant  $A$  pour origine <sup>la courbe</sup> a été translatée par un vecteur  $\vec{a}$  de coordonnées  $(0,1)$ . Son équation dans le repère d'origine  $\mathcal{R}$  serait  $y = -\cos x$ . Si on effectue un changement de repère en prenant  $A$  comme origine on obtiendra la fonction  $y = (-\cos x) + 1$

2) Appelons  $\mathcal{C}$  la courbe  $A123\dots D$ .

Preons un repère  $(A, AB, AC)$ .

Tout point  $M$ , appartenant à  $\mathcal{C}$ , a d'abscisse  $x$ , a sa ordonnée  $y$  égale à celle du point  $Z$ , appartenant au cercle, de rayon  $R$  et de diamètre  $AB$ , tel que l'arc  $\widehat{AZ} = x$ .

Soit  $O$  centre du cercle

$$\text{On a la relation : } \frac{2\pi R}{x} = \frac{2\pi}{\widehat{AOZ}}$$

$$\widehat{AOZ} = \frac{x}{R}$$

Le repère étant orthogonal, l'ordonnée  $y$  de  $Z$  est égale à celle de  $M$ , projeté orthogonal de  $Z$  sur l'axe  $AB$ .

$$\text{on a donc : } y = R - R \cos \widehat{AOZ}$$

$$y = R \left( 1 - \cos \left( \frac{x}{R} \right) \right)$$

avec  $B(2;0)$ ,  $R=1$  et  $\mathcal{C}: y = 1 - \cos x$

3 Méthode de Barrow.

Tangente en  $M(AP; PH)$  à la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation :  $MP \cdot AP = 1$ .

NEE donc  $AQ \times NQ = 1$

$$(f-e) \times (m-a) = 1$$

$$fm - af - em + ea = 1$$

$$\text{On a } MN^2 = e^2 + a^2$$

Or  $MN$  est indéfiniment petit, donc  $e$  et  $a$  le sont d'autant plus.

① Alors lorsqu'on a :  $a = e^m$ ;  $a^m$ ;  $ae$ , ces membres deviennent négligeables et peuvent être considérés comme nuls. On a alors :

$$fm - af - em = 1$$

② D'après l'équation de  $\mathcal{C}$ , on a  $MP \times AP = f \times m = 1$ . On peut alors simplifier :

$$-af - em = 0$$



③ Le coefficient directeur,  $d$ , de  $\mathcal{P}$  se calcule:  $d = \frac{MR}{NR} = \frac{a}{c}$ , mais aussi:  
 $d = \frac{MP}{PT} = \frac{m}{t}$  donc  $\frac{a}{c} = \frac{m}{t}$ ; alors:

$$\frac{a}{c} = \frac{-m}{f}$$

$$\frac{m}{t} = \frac{-m}{f}, \text{ changeons le nom des variables:}$$

$$\frac{MP}{PT} = -\frac{MP}{AP}, \text{ d'après l'équation de } \mathcal{L}, \text{ on a: } PM = \frac{L}{AP}$$

$$\text{donc: } \frac{MP}{PT} = -\frac{1}{AP} \times \frac{1}{AP} = -\frac{1}{AP^2}$$

De plus  $\mathcal{P}$  est une droite de la forme  $y = dx + c$

$$\text{On aura donc } MP = -\frac{1}{AP} \times AP + c$$

$$c = MP + \frac{1}{AP}$$

$$\text{D'après l'équation de } \mathcal{L}: MP \cdot AP = 1 \Leftrightarrow MP = \frac{1}{AP}$$

$$c = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AP} = \frac{2}{AP}$$

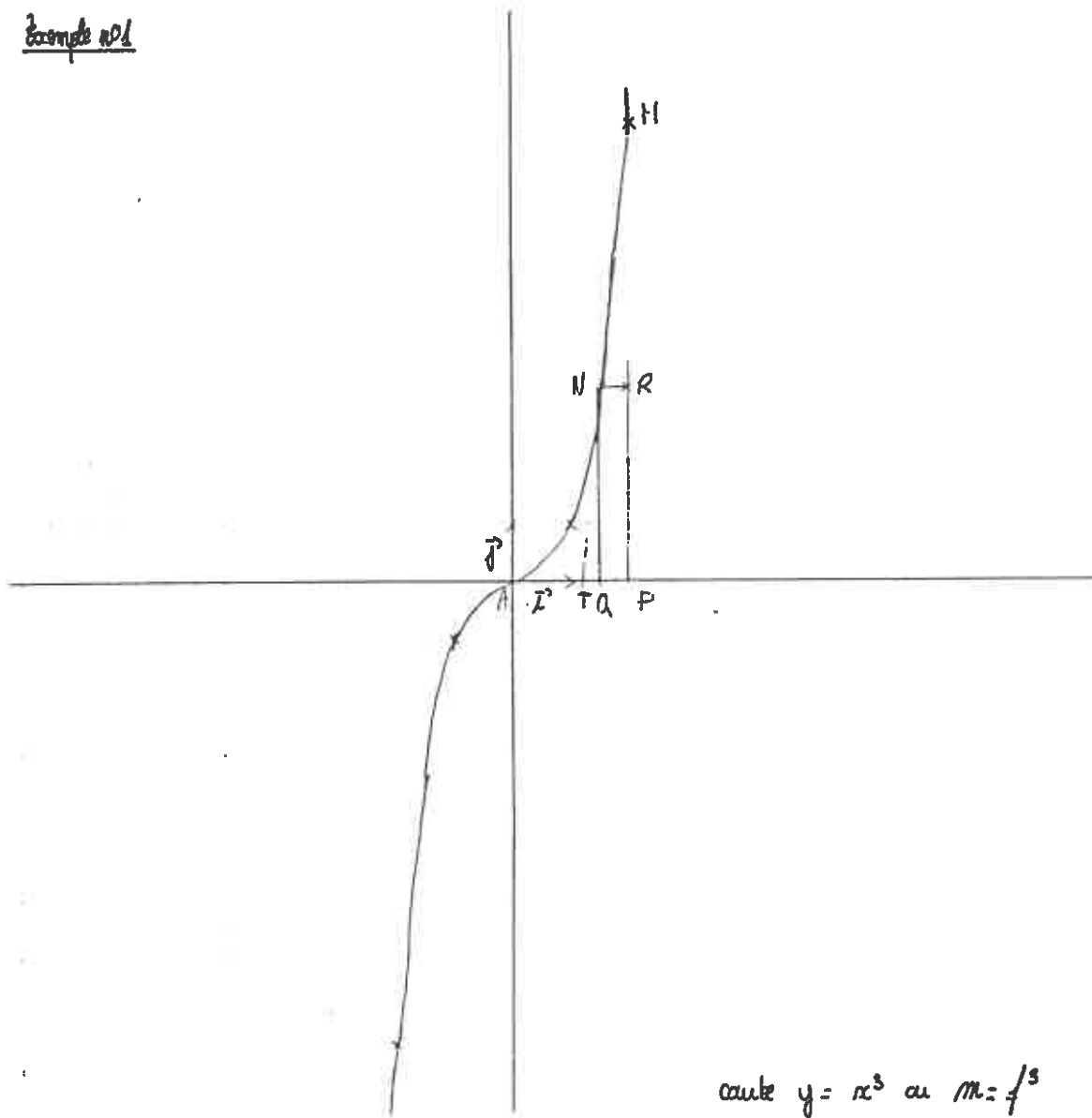
Remarque

La tangente  $\mathcal{P}$  à la courbe  $\mathcal{C}: y = \frac{1}{x}$ , au point  $M(a; \frac{1}{a})$  aura pour équation

$$\mathcal{P}: y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

III, Methode d'Isaac Barrow

Exemple n°1



curve  $y = x^3$  ou  $m = f^3$

$MP = AP^3$     on a  $AP = f$      $PT = e$      $MP = m$      $NR = a$      $NR = e$   
 et  $NR = RP$      $NR = QP$  etc...

$AQ^3 = (f - e)^3 = (f - e)(f^2 - 2fe + e^2)$   
 $AQ^3 = f^3 - 2f^2e + fe^2 - f^2e + 2fe^2 - e^3$     d'après la règle n°1  
 $AQ^3 = f^3 - 3f^2e$

Règle n°1: D'après Barrow, on prend  $a$  et  $e$  "indéfiniment petit" donc très petit et toujours inférieur à 1. Donc ces nombres cités, au carré, au cube et... ou multipliés entre eux sont si

petits qui s'ils deviennent multiplicables. C'est pourquoi on peut les supprimer dans les équations.

• D'après l'équation de la courbe, on a :

$$\begin{aligned}NQ &= mQ^3 \\ m-a &= f^3 - 3f^2e \quad \text{d'après la règle 2} \\ -a &= -3f^2e \\ \underline{a} &= \underline{3f^2e}\end{aligned}$$

Règle 2 Prenons l'exemple ci-dessus : on peut éliminer  $m$  et  $f^3$  puisque ceux-ci, d'après l'équation de la courbe, sont égaux. De même, si on des quantités constantes on peut les supprimer puisqu'elle ne font pas varier le résultat de l'équation.

de même dans l'exemple avec une parabole, on pourrait éliminer  $m$  et  $f^2$  qui étaient égaux

→ Soit une courbe  $y = x^m$  on a  $m = f^m$

$$mQ^m = (f-e)^m \quad \text{on obtiendra ensuite } mQ^m = f^m - m f^{m-1} e \quad (\text{règle 1})$$

$$\text{on a } mQ^m = mQ \quad mQ = f^m - m f^{m-1} e$$

$$m^2 - a = f^m - m f^{m-1} e \quad \text{donc on peut éliminer les}$$

termes dans lesquels  $a$  et  $e$  ne sont pas.

• D'après la règle 3, je substitue  $m$  à  $a$  et  $t$  à  $e$

donc  $m = 3f^2 t$

$$\frac{m}{t} = 3f^2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{MP}{PT} = 3AP^2}$$

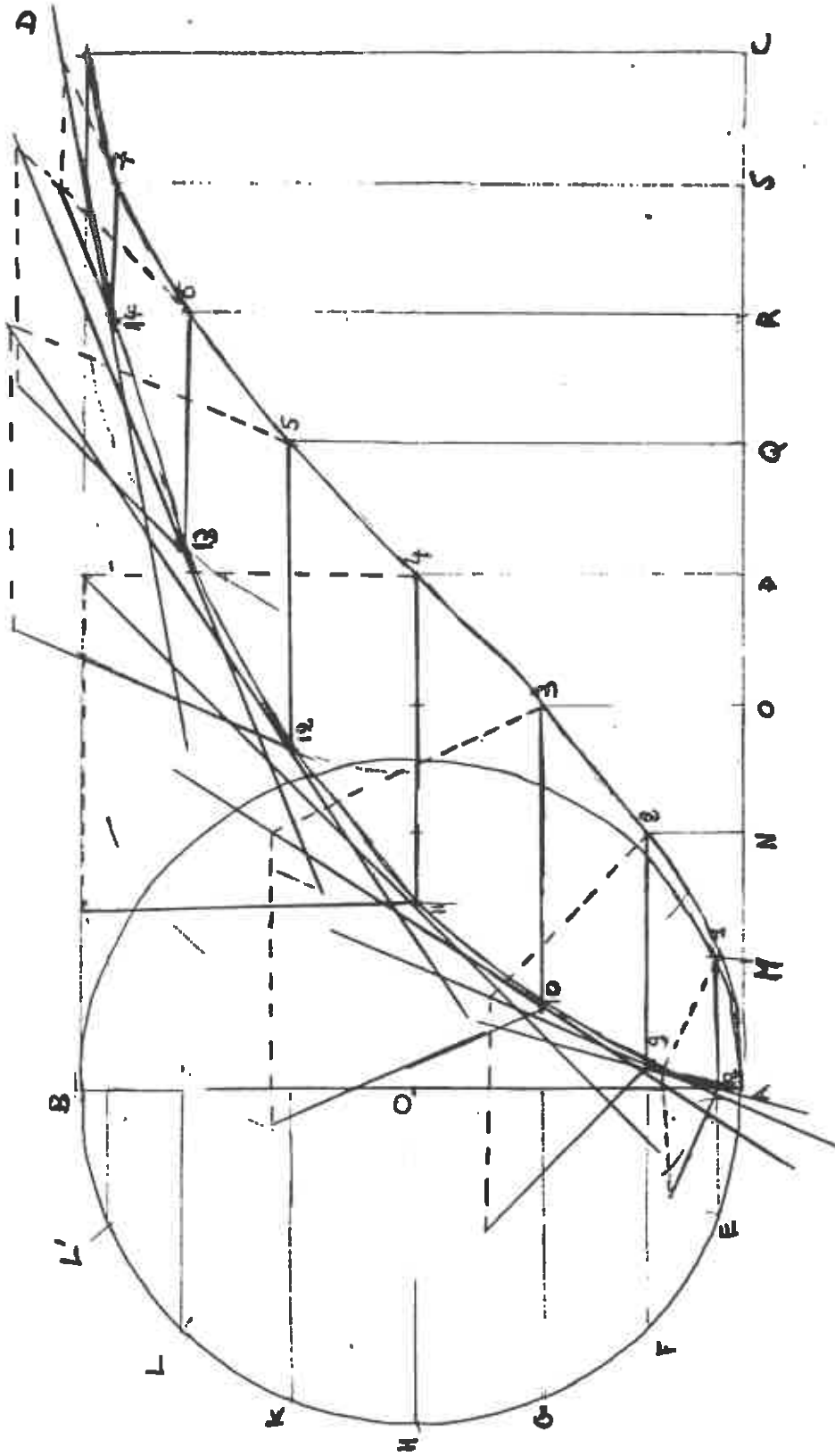
Règle 3 Pour arriver à l'équation  $a = 3f^2e$ , on a utilisé l'équation de la courbe ( $y = x^3$ ) qui est vérifiée pour tout point de la courbe donc pour  $m$  et  $b$ .

Théorème de Thalès dans le triangle  $MP$

$$\frac{MR}{MP} = \frac{MN}{MT} = \frac{NA}{PT} \quad \text{donc} \quad \frac{a}{MP} = \frac{e}{TP} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{e} = \frac{MP}{TP}$$

$$\text{soit} \quad \frac{a}{e} = 3f^2 \quad \text{et} \quad \frac{MP}{TP} = \frac{m}{t} = 3f^2$$

On peut donc substituer  $m$  à  $a$  et  $t$  à  $e$ .



— la roulette  
- - les tangentes.

## Justification des règles d'Isaac Barrow.

Equation  $MP = AP^3$

$$\begin{aligned} \text{On a } AQ^3 &= (f-e)^3 \\ &= (f-e)(f-e)^2 \\ &= (f-e)(f^2 - 2fe + e^2) \\ &= f^3 - 2f^2e + fe^2 - ef^2 + 2fe^2 - e^3 \end{aligned}$$

\* de règle 1 rejette  $axa, exe, axe, axa \dots xa,$   
 $exe \dots xe \dots$  car  $e$  et  $a$  étant des valeurs  
 infiniment petites, leur puissance ou leur produit  
 entre eux sont <sup>encore</sup> plus petits, donc seront de  
 valeurs négligeables.

Je jette donc  $f^2e + 2fe^2 - e^3$ .

Il reste :  $f^3 - 2f^2e - ef^2$

$$\text{On a ensuite : } m-a = f^3 - 2f^2e - ef^2$$

\* de règle 2 jette  $m$  et  $f$  car ce sont des  
 valeurs trop grandes par rapport à  $a$  et  $e$ , et  
 elles rendraient celle-ci négligeables, ce qui  
 "annulerait" l'équation.

- Je jette donc  $m$  et  $f^3$

$$\text{Il reste } -a = -2f^2e - ef^2$$

$$a = 3f^2e$$

\* de règle 3 utilise le théorème de Thalès  
 dans le triangle  $MPT$ . En effet,  $\frac{MP}{PT} = \frac{NR}{PT}$ .

Soit  $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{m}{t}$ . On peut donc remplacer

$a$  par  $m$  et  $\varepsilon$  par  $t$ .

$$\bullet \quad MP = 3AP^2 \cdot PT$$

$$\frac{MP}{PT} = 3AP^2$$

## Isaac Barrow : Lecture X (Lectiones Geometricae)

Equation choisie :  $MP = AP^3$

on a  $NR = QP = e$  et  $AP = f$

$$\text{donc } AQ = f - e, \quad AQ^3 = (f - e)^3 \\ = f^3 - 3f^2e + \cancel{3fe^2} - \cancel{e^3}$$

Je jette  $e^3$  mais aussi  $3fe^2$  puisque que ces 2 membres sont infiniment petits.

$$\text{Donc, il reste } AQ^3 = f^3 - 3f^2e$$

Nous avons  $NQ = AQ^3$ , c'est à dire  $m - a = f^3 - 3f^2e$

Je jette  $m$  et  $f^3$  puisque  $m$  est l'ordonnée du point de coordonnées  $(f, m)$  qui appartient à la fonction  $f: x \mapsto x^3$

$$\text{donc } m = f^3, \quad \text{donc } -a = -3f^2e$$

$$a = 3f^2e$$

Plaçons-nous dans le triangle rectangle  $MPT$  :

$$\frac{MP}{MR} = \frac{TP}{NR} \quad \text{donc } \frac{m}{a} = \frac{t}{e} \quad \text{et } \frac{m}{t} = \frac{a}{e}$$

donc  $m = a$  et  $t = e$  simultanément donc  $MP = a$  et  $TP = e$

$$\text{Ensuite, } MP = 3f^2 \times PT$$

$$MP = 3AP^2 \times PT$$

$$\frac{MP}{PT} = 3AP^2$$

Barrow :

Exemple 4 :

$$\begin{aligned} \text{On sait que } A Q^3 &= (f - e)^3 \\ &= f^3 - 3f^2e + 3fe^2 - e^3 \end{aligned}$$

On peut alors jeter les termes dans lesquels  $e$  est la puissance de lui-même car on considère le nombre que vaut  $e$  trop petit pour compter.

$$\text{On a alors } A Q^3 = 3fe^2 - 3f^2e + f^3$$

Or, comme nous avons une fonction cube, nous pouvons dire que  $NQ = A Q^3$

$$\text{Donc } m - a = 3f^2e$$

On peut alors jeter tous les termes dont les lettres désignent des quantités constantes ou alors si les quantités sont constantes, sur le même dessin à chaque fois que l'on calculera une tangente, les quantités interviendront, c'est peu aussi autant les éliminer à chaque calcul.

On peut aussi jeter tous les termes dans lesquels  $e$  n'a pas  $a$  ou  $e$

$$\text{On a alors : } -a = -3f^2e$$

$$\Leftrightarrow a = 3f^2e$$

On substitue ensuite à la place de  $a$ ,  $m (= NP)$  et à la place de  $e$ ,  $t (= TP)$  car  $m$  et  $a$  sont tous les deux proportionnels par rapport à  $e$  et  $t$ .

$$\text{On a donc : } 3 \times A P^2 \times P T$$

$$\text{Donc } \frac{NP}{DT} = 3AP^2$$

III) Question 1 :

$\epsilon$  est indéfiniment petit donc  $\epsilon^2$  est encore plus petit, c'est pourquoi on peut se permettre de le négliger.

Question 2 :

$m = MP$  et  $f = AP$ . De plus on a l'équation  $MP = AP^2$ , donc  $m = f^2$ . Comme dans l'égalité  $m - a = f^2 - \epsilon f$ , ils sont de part et d'autre de l'égalité, on peut les supprimer.

Question 3 :

Dans le triangle  $MPT$ , j'applique le théorème de Thalès car  $(NR) \parallel (PT)$  :

$$\frac{MR}{MP} = \frac{MN}{MT} \quad \text{et aussi} \quad = \frac{NR}{PT}$$

$$\frac{MR}{MP} = \frac{NR}{PT} \Leftrightarrow \frac{PT}{MP} = \frac{NR}{MR} \Leftrightarrow \frac{f}{m} = \frac{a}{a}$$

Les rapports étant équivalents, cela ne changera rien au résultat.

Exercice -

2) Equation  $MP^2 = AP$

On a :  $NQ^2 = (m - a)^2$

$NQ^2 = m^2 - 2ma + \epsilon^2$  (d'après la règle 1)

D'après l'équation on a :  $NQ^2 = AP \Leftrightarrow m^2 - 2ma = f - \epsilon$   
(d'après la règle 2)



on obtient donc:  $2ma = e$ .

D'après la règle 3, on substitue  $a \approx MP$  et  $e \approx PT$ :

$$2mMP = PT$$

$$\Leftrightarrow \frac{MP}{PT} = \frac{1}{2m}$$

et d'après l'équation  $MP^2 = AP$ , on a  $MP = \sqrt{AP}$   
 $m = \sqrt{AP}$

On obtient donc:  $\frac{MP}{PT} = \frac{1}{2\sqrt{AP}}$ .

SONDAGE ANONYME: TERMINALES SCIENTIFIQUES SEPTEMBRE 1991

Numéro de la classe:.....

N.B. Ce sondage sera exploité dans le cadre d'un travail de recherche sur le calcul différentiel. Il n'est en aucun cas destiné à vous évaluer. Nous vous remercions de votre collaboration.

1\_ Dans la page ci-contre sont dessinées 9 représentations graphiques de fonctions numériques (numérotées a) b) c) d) e) f) g) h) i);)

11\_ Quelles sont celles qui admettent une limite en 0 ?.....

12\_ Quelles sont celles qui sont dérivables en 0 ?.....

13\_ Lorsque la courbe admet une tangente au point d'abscisse 0 tracez-la approximativement. (Utilisez du rouge ou du bleu SVP)

2\_21\_ Quand dit-on qu'une droite est tangente à une courbe ?

.....

22\_ Y a-t-il un rapport entre la tangente à une courbe et la tangente à un cercle ? oui-non. Si oui lequel ?:.....

.....

23\_ Y a-t-il un rapport entre la tangente à une courbe et la fonction trigonométrique tangente ? oui-non. Si oui lequel ?:.....

.....

3\_ Dire que f admet pour limite le réel l quand h tend vers 0 signifie:

a) f(h) est voisin de l lorsque h est voisin de 0.

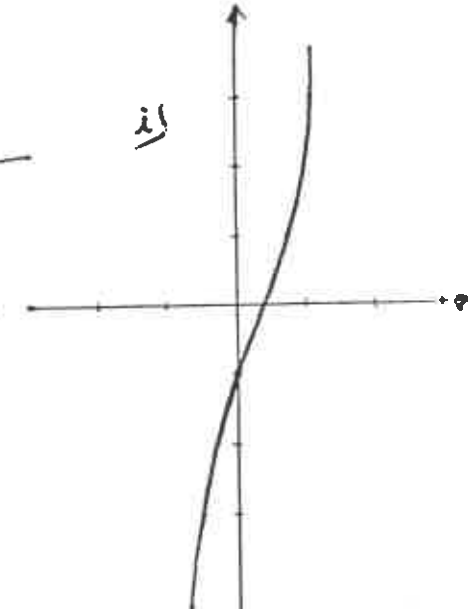
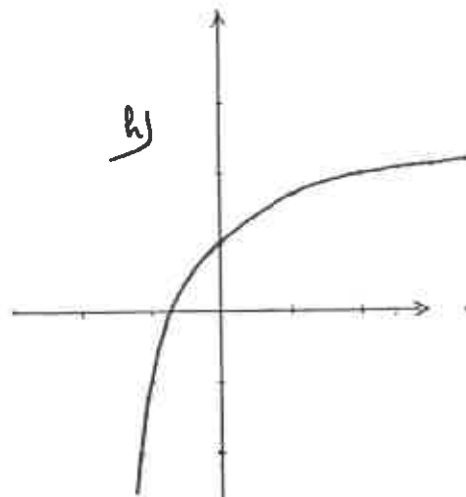
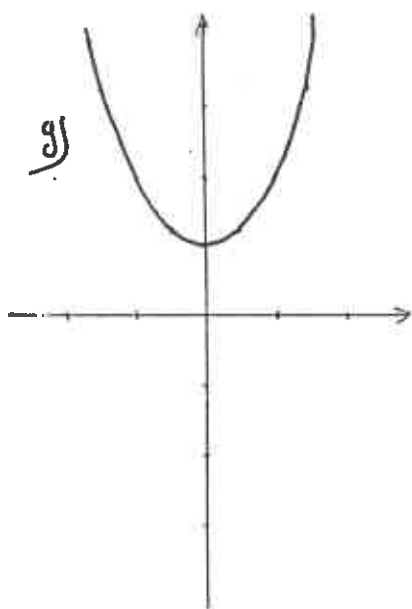
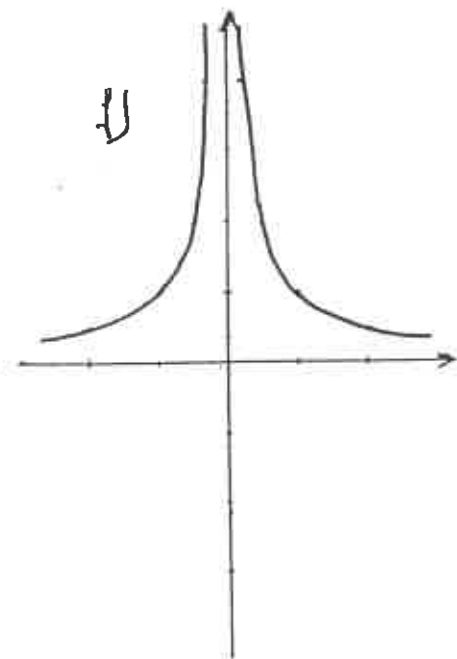
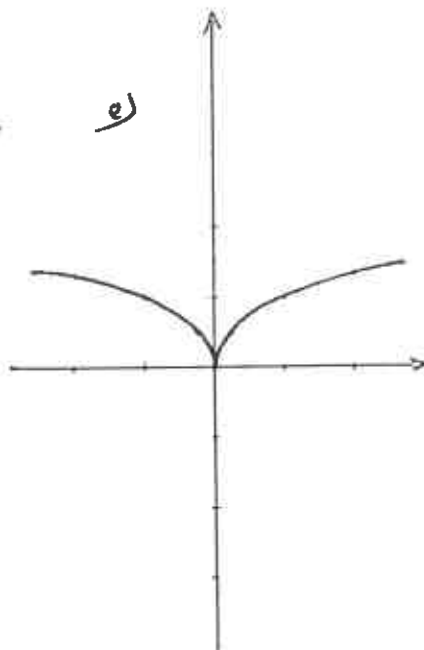
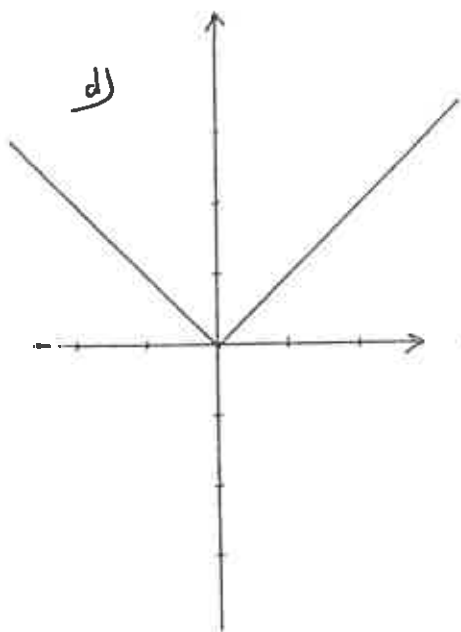
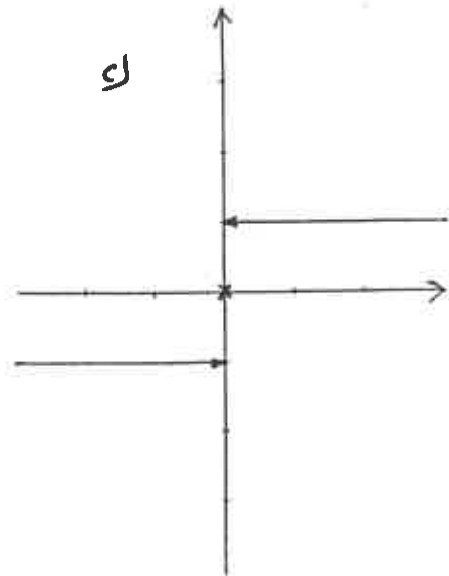
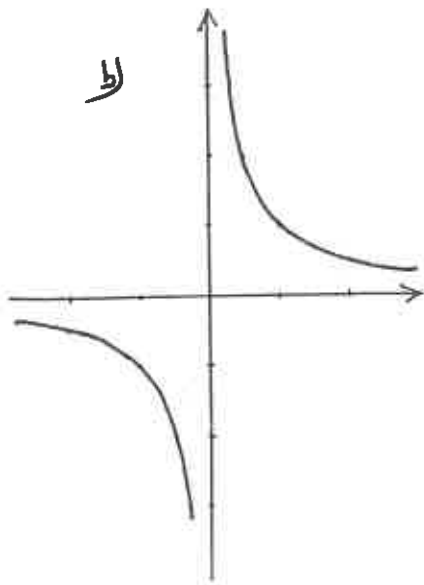
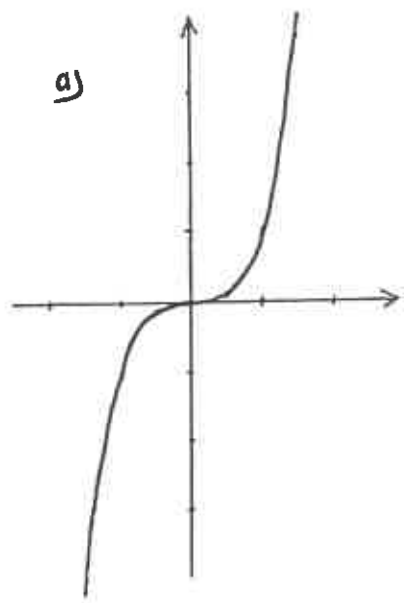
b) On peut trouver un réel strictement positif k et un entier naturel non nul n, tels que pour tout réel h assez proche de zéro on ait:

$$|f(h) - l| \leq k|h^n| \quad \text{ou} \quad |f(h) - l| \leq k\sqrt{|h|}$$

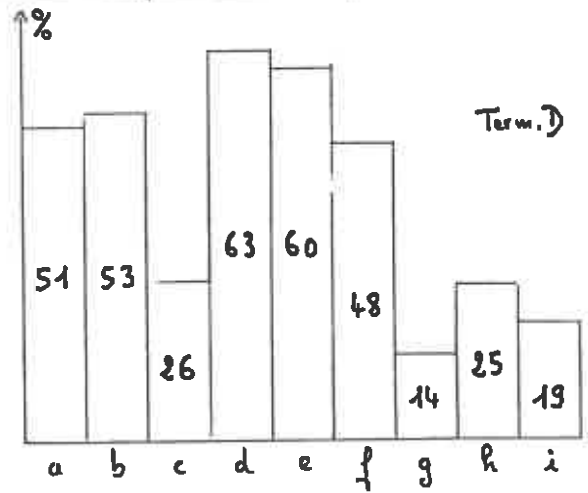
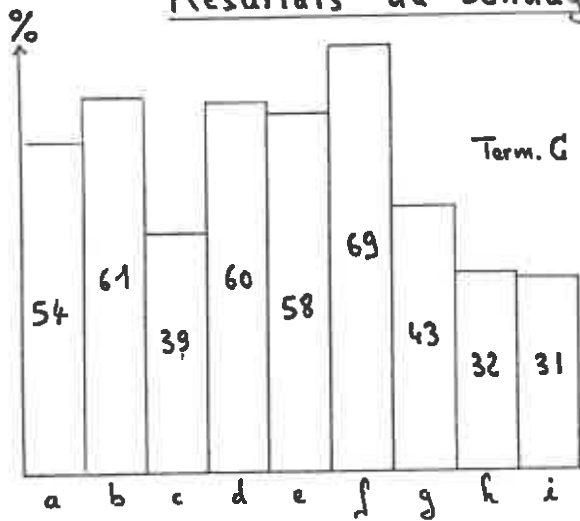
c) L'expression variable f(h) s'approche indéfiniment de la valeur fixe l de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra lorsque h converge vers 0.

d) Pour tout h suffisamment petit,  $|f(h) - l| \leq k\epsilon(h)$  où  $k \in \mathbb{R}^{**}$  et  $\epsilon$  est une fonction de référence de limite nulle en 0.

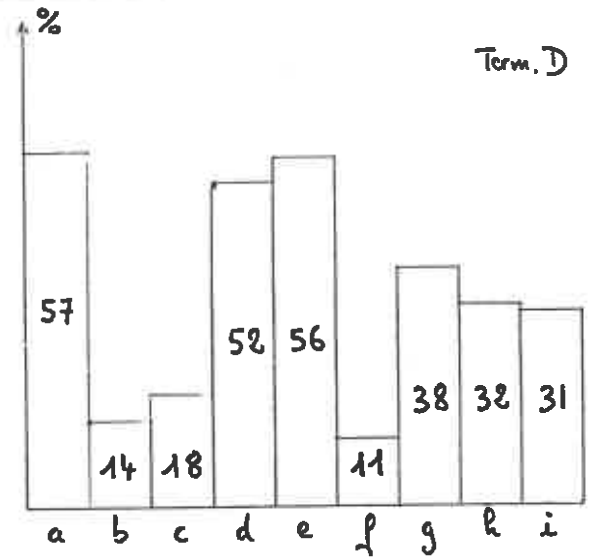
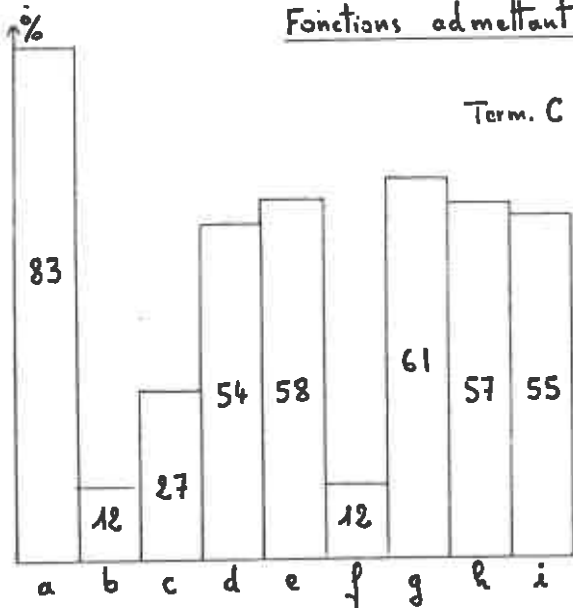
Choisissez parmi les quatre définitions précédentes celles qui vous paraît traduire le mieux le fait affirmé en première ligne:.....



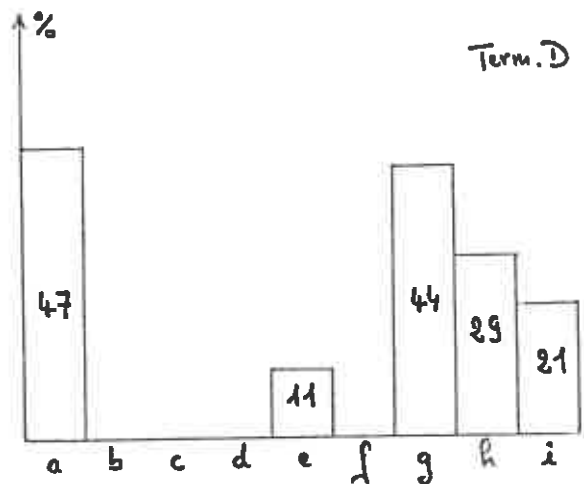
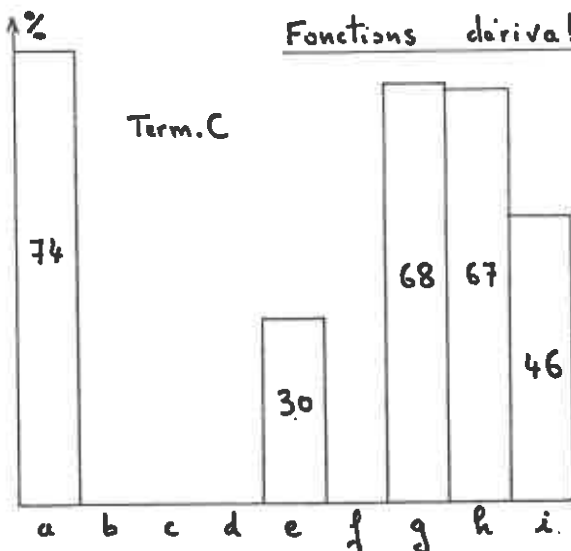
# Résultats du Sondage Calcul Différentiel Septembre 91



## Fonctions admettant une limite en 0.



## Fonctions dérivables en 0.



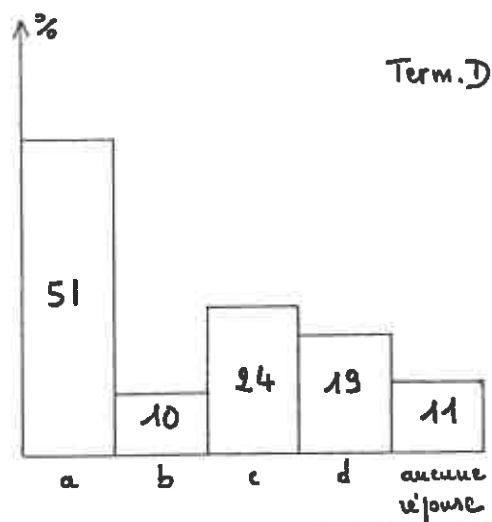
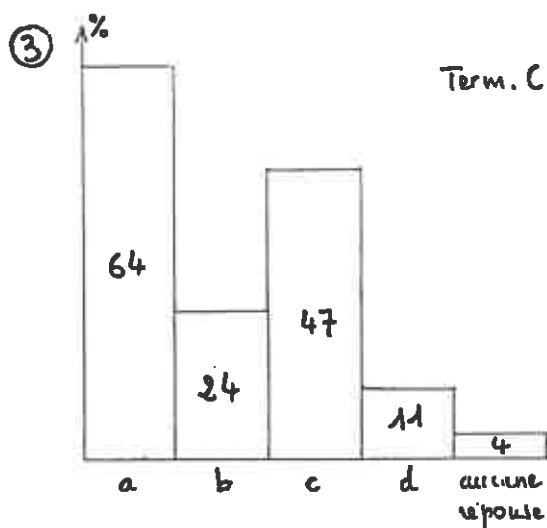
## Tangentes au point d'abscisse 0 correctement tracées.

② 21. Réponses les plus fréquentes : le premier chiffre concerne les élèves de Terminale C, le second ceux de Terminale D.

"Lorsqu'elle n'a qu'un point commun avec cette courbe" :	57%	31%
"Lorsqu'elle touche la courbe sans la couper" :	17%	9%
"Lorsqu'elle a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ " :	9%	4%
"Lorsqu'elle a même direction que la courbe" :	6%	3%
"Lorsque son coefficient directeur est égal à la dérivée" :	4%	1%
"Lorsque la fonction est dérivable" :	5%	0%
"Lorsqu'elle passe par un sommet de la courbe" :	2%	2%

22. OUI	66%	en T.C	38%	en T.D
NON	17%	en T.C	32%	en T.D
ne sait pas	16%	en T.C	39%	en T.D

23. OUI	21%	en T.C	7%	en T.D
NON	52%	en T.C	62%	en T.D
ne sait pas	36%	en T.C	31%	en T.D



Ce sondage a été réalisé auprès de 127 élèves de Terminale C et de 99 élèves de Terminale D du Lycée Clémentineau à Reims.

## QUELQUES COMMENTAIRES

Nous avons distingué les résultats donnés par les élèves de C, de ceux des élèves de D, car les différences nous ont semblé significatives. Il est à remarquer que les élèves de C donnent davantage de réponses que ceux de D. Pour certaines questions plusieurs réponses étaient possibles d'où des totaux supérieurs à 100%.

A propos des questions :

1.11 : La notion de limite est associée à celle d'infini et d'asymptote. Les élèves ne font pas d'association entre, avoir une limite finie en 0 et une représentation graphique continue en  $(0;f(0))$ , pour une fonction  $f$ . Ils n'éprouvent pas le besoin de calculer la limite en 0 pour une fonction définie en 0, les fonctions sont alors pour eux "naturellement" continues.

1.12 et 1.13 : La dérivabilité n'est pas interprétée en terme de propriété de la courbe représentative ( absence de points anguleux ). Dans l'introduction de la définition (surtout par limite du taux d'accroissement) peu de place semble être donnée à l'aspect géométrique.

- Les élèves confondent zéro et origine ; donne-t-on trop d'exemples de courbes passant par l'origine ?
- La capacité à tracer une tangente à vue d'oeil n'est pas développée chez les élèves.
- On remarque une grande propension à tracer des tangentes horizontales en d) et en e). L'enseignant insiste sans doute trop sur ces dernières liées aux extrema.
- L'utilisation des tangentes comme enveloppantes de la courbe, pour en donner l'allure, a disparu avec les calculatrices.

2.21 : L'image de la tangente chez les élèves, reste celle de la tangente au cercle. Elle est peu modifiée par l'introduction du calcul différentiel. L'application linéaire tangente n'est pas reconnue comme telle.

2.22 : Le rapport entre tangente au cercle et tangente à une courbe est justifié géométriquement : un seul point d'intersection ou courbe assimilable à un cercle sur une petite partie. Très, très rarement le cercle est considéré comme représentation graphique d'une fonction dérivable.

2.23 : La définition de la fonction tangente sur le cercle trigonométrique est quasiment inconnue, ou en tout cas inopérante.

3 : La définition officielle des ex-programmes obtient un piteux résultat. La définition a) qui remporte le plus de suffrages est utilisée par Serge Lang dans un manuel d'analyse pour débutants. La définition c) qui est également appréciée, est copiée sur celle que donne Cauchy dans son cours d'analyse (cf première leçon citée dans cette brochure).

— Le concept de limite est liée à celui de fonction ; jusqu'à Cauchy lui-même, on parle de limite de quantité variable et non limite de quantité fonction d'une autre. Dans l'écriture  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , il y a deux difficultés pour les élèves :  $f(x)$  tend vers  $L$ , et ceci quand  $x$  tend vers  $a$ .

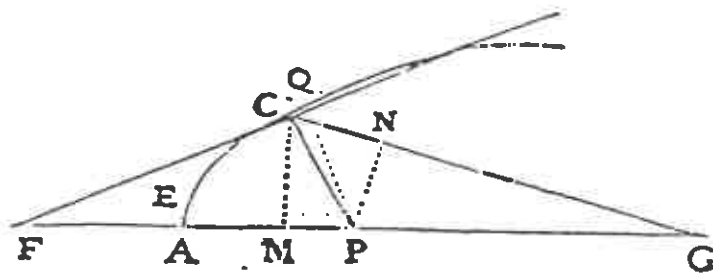
— Les réponses des élèves mettent en lumière les différents rôles que peuvent jouer les définitions dans notre enseignement :

\* La définition donne-t-elle du sens au concept qu'elle définit ?

\* Est-elle opératoire, au sens d'utile pour la résolution des problèmes ?

\* Permet-elle d'intégrer rigoureusement une nouvelle notion au sein du savoir mathématique ?

Et enfin pour ce qui est de toutes les autres propriétés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Mais lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les coupent à angles droits, aux points ou elles sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que je prens icy pour le mesme, qui coupent leurs contingentes ; la grandeur de ces angles n'est pas plus malaysée à trouver, que s'ils estoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy je croyray avoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lorsque j'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est cecy le problemesme le plus utile, et le plus general non seulement que je sçache, mais mesme que j'aye jamais desiré de sçavoir en Geometrie.



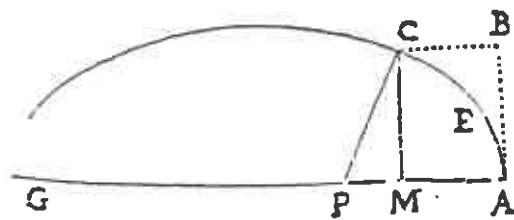
*Facon generale pour trouver des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, à angles droits.*

Soit CE la ligne courbe, et qu'il faille tirer une ligne droite par le point C, qui face avec elle des angles droits. Je suppose la chose desja faite, et que la ligne cherchée est CP, laquelle je prolonge jusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite GA, que je suppose être celle aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE : en sorte que faisant MA ou  $CB \propto y$ , et CM, ou  $BA \propto x$ , jay



quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre  $x$  et  $y$ . Puis je fais  $PC \propto s$ , et  $PA \propto v$ , ou  $PM \propto v - y$ , et a cause du triangle rectangle  $PMC$  j'ay  $ss$ , qui est le quarré de la baze esgal à  $xx + vv - 2vy + yy$ , qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire j'ay  $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ , ou bien  $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$ , et par le moyen de cete equation, j'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe  $CE$  a ceux de la droite  $GA$ , l'une des deux quantités indeterminées  $x$  ou  $y$ . ce qui est aysé a faire en mettant partout  $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$  au lieu d' $x$ , et le quarré de cete somme au lieu d' $xx$ , et son cube au lieu d' $x^3$ , et ainsi des autres, si c'est  $x$  que je veuille oster; ou bien si c'est  $y$ , en mettant en son lieu  $v + \sqrt{ss - xx}$ , et le quarré, ou le cube, etc. de cete somme, au lieu d' $yy$ , ou  $y^3$  etc. De façon qu'il reste tousjours après cela une equation, en laquelle il ny a plus qu'une seule quantité indeterminée,  $x$ , ou  $y$ .

Comme si  $CE$  est une Ellipse, et que  $MA$  soit le segment de son diametre, auquel  $CM$  soit appliquée par ordre, et qui ait  $r$  pour son costé droit, et  $q$  pour le traversant, on a par le 13th. du 1



liv. d'Apollonius.

$$xx \propto ry - \frac{r}{q} yy,$$

d'ou ostant  $xx$ , il reste  $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q} yy$ .

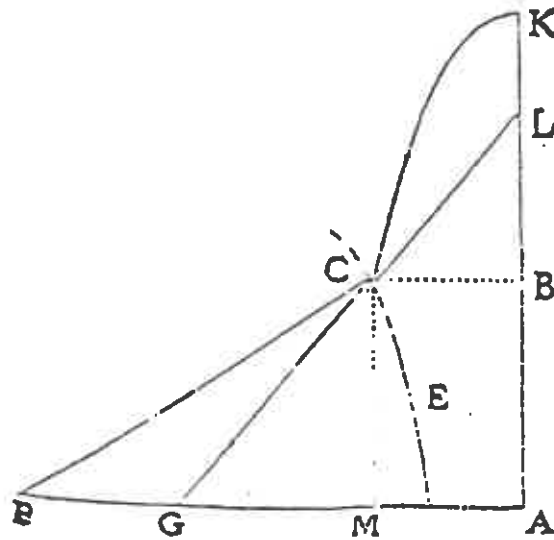
$$yy \propto ry - \frac{r}{q} yy.$$

ou bien,

$$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} \text{ esgal a rien. car il est}$$

mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire une partie esgale a l'autre.

Tout de mesme si  $CE$  est la ligne courbe descrite par le mouvement d'une Parabole en la façon cy dessus expliquée, et qu'on ait posé  $b$  pour  $GA$ ,  $c$  pour  $KL$ , et  $d$  pour le costé droit du diametre  $KL$  eq. la parabole : l'equation qui explique le rapport qui est entre  $x$  et  $y$ , est  $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \propto n$ . d'où ostant  $x$ , on a



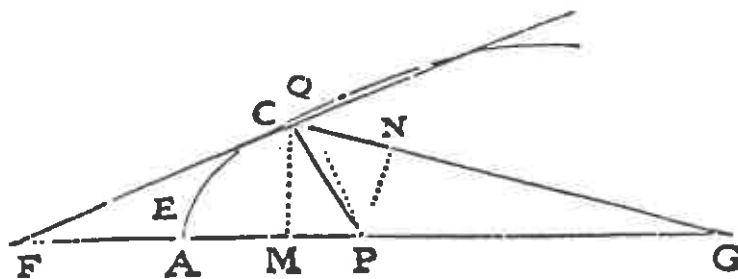
$y^3 - byy - cdy + bcd + dy \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ . et re-  
met[t]ant en ordre ces termes par le moyen de la  
multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 + bb^2 \left. \begin{array}{l} - 2cd \\ - dd \end{array} \right\} y^4 + 4bcd \left. \begin{array}{l} - 2bbcd \\ - dds \end{array} \right\} y^3 + cdd \left. \begin{array}{l} - ddss \\ - ddvv \end{array} \right\} yy - 2becddy + bbccdd = 0.$$

Et ainsi des autres.

416

Mesme encore que les points de la ligne  
courbe ne se rapportassent pas en la façon que j'ay  
ditte a ceux d'une ligne droite, mais en toute autre  
qu'on scauroit imaginer, on ne laisse pas de pou-  
voir tousjours avoir une telle equation. Comme si  
CE est une ligne, qui ait tel rapport aux trois  
points F, G, et A, que les lignes droites tirées de  
chascun de ses points comme C, jusques au point  
F, surpassent la ligne FA d'une quantité, qui ait



certaine proportion donnée a une autre quantité dont GA surpasse les lignes tirées des mesmes points jusques à G. Faisons  $GA \propto b$ ,  $AF \propto c$ , et prenant à discretion le point C dans la courbe, que la quantité dont CF surpasse FA, soit à celle dont GA surpasse GC, comme  $d$  à  $e$ , en sorte que si cete quantité qui est indéterminée se nomme  $z$ , FC est  $c + z$  et GC est  $b - \frac{d}{e} z$ . Puis posant  $MA \propto y$ , GM est  $b - y$ , et FM est  $c + y$ , et a cause du triangle rectangle CMG, ostant le quarré de GM du quarré de GC, on a le quarré de CM, qui est  $\frac{cc}{dd} z z - \frac{2bc}{d} z + 2by - yy$ . puis ostant le quarré de FM du quarré de FC, on a encore le quarré de CM en d'autres termes, a sçavoir  $z z + 2cz - 2cy - yy$ , et ces termes estant esgaux aux precedens, ils font connoistre  $y$ , ou MA, qui est  $\frac{ddz z - 2cddz - ccz z - 2bdez}{2bdd - 2cdd}$  et substituant cete somme au lieu d' $y$  dans le quarré de CM, on trouve qu'il s'exprime en ces termes.

417

$$\frac{bddz z + ccz z - 2bcddz - 2bdez}{bdd - cdd} = yy.$$

Puis supposant que la ligne droite PC rencontre la courbe a angles droits au point C, et faisant  $PC \propto s$ , et  $PA \propto v$  comme devant, PM est  $v - y$ ; et a cause du triangle rectangle PCM, on a  $ss - vv + 2vy - yy$  pour le quarré de CM, ou derechei ayant au lieu d' $y$  substitué la somme qui luy est esgale, il vient

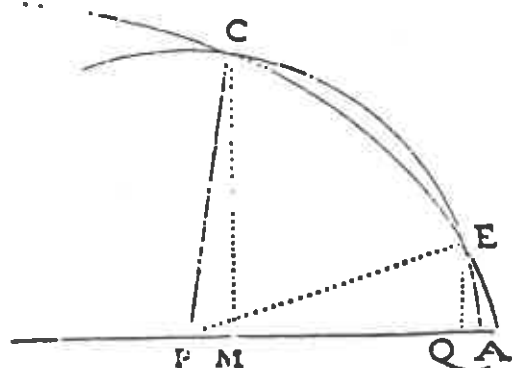
$$z z \frac{- 2bcddz - 2ccz z - 2cddz - 2bdez - bdds - vddv - cddss - cddvv}{[b]dd - cce - cev - ddv} \propto 0$$

pour l'equation que nous cherchions.

Or après qu'on a trouvé une telle equation, au lieu de s'en servir pour connoistre les quantités  $x$ , ou  $y$ , ou  $z$ , qui sont desja données, puisque le point C est donné, on la doit employer a trouver  $v$ , ou  $s$ , qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C, y touchera la

418

ligne courbe CE, sans la couper : mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C, mais aussy necessairement en quelque autre. Puis il faut aussy considerer, que lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE, l'equation par laquelle on cherche la quantité  $x$ , ou  $y$ , ou quelque autre semblable, en supposant PA et PC estre connus, contient necessairement deux racines, qui sont inegales. Car par exemple si ce cercle coupe la courbe aux points C et E, ayant tiré EQ parallele a CM, les noms des quantités indeterminées  $x$  et  $y$ , conviendront aussy bien aux lignes EQ, et QA, qu'a CM, et MA ; puis PE est esgale a PC, a cause du cercle, si bien que cherchant les lignes EQ



et QA, par PE et PA qu'on suppose comme données, on aura la mesme equation, que si on cherchoit CM et MA par PC, PA. d'où il suit evidemment, que la

valeur d' $x$ , ou d' $y$ , ou de telle autre quantité qu'on aura supposee, sera double en cete equation, c'est a dire qu'il y aura deux racines inegales entre elles ; et dont l'une sera CM, l'autre EQ, si c'est  $x$  qu'on cherche ; ou bien l'une sera MA, et l'autre QA, si c'est  $y$ . et ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouve pas du mesme costé de la courbe que le point C ; il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraye, et l'autre sera renversée, ou moindre que rien : mais plus ces deux points, C, et E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines ; et enfin elles sont entierement esgales, s'ils sont tous deux joins en un ; c'est a dire si le cercle, qui passe par C, y touche la courbe CE sans la couper.

De plus il faut considerer, que lorsqu'il y a deux racines esgales en une equation, elle a necessairement la mesme forme, que si on multiplie par soy mesme la quantité qu'on y suppose estre inconnue moins la quantité connue qui luy est esgale, et qu'après cela si cete derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puisse y avoir separement equation entre chascun des termes de l'une, et chascun des termes de l'autre.

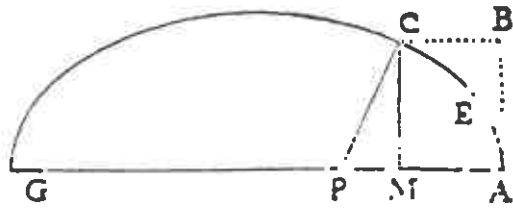
419

Comme par exemple je dis que la premiere equation trouvée cy dessus, à sçavoir

$$yy - \frac{qry - 2avy - avv - ass}{q - r}$$

doit avoir la mesme forme que celle qui se produist en faisant  $e$  esgal a  $y$ , et multipliant  $y - e$  par soy mesme, d'où il vient  $yy - 2ey + ee$ , en sorte qu'on peut comparer separement chascun de leurs termes, et dire que puisque le premier qui est  $yy$  est tout le mesme en l'une qu'en l'autre, le second qui est en l'une  $\frac{qry - 2avy}{q - r}$

est esgal au second de l'autre qui est  $-2ey$ , d'où cherchant la quantité  $v$  qui est la ligne  $PA$ , on



$av \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$ ,  
ou bien a cause que nous avons supposé  $e$  esgal a  $y$ , on a  $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$ .

Et ainsi on pourroit trouver  $s$  par le troisieme terme  $ee \propto \frac{ass - avv}{q - r}$  mais pourceque la quantité  $v$  determine assés le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.

Tout de mesme la seconde equation trouvée cy dessus, a sçavoir,

422

$$y^6 - 2by^4 \left\{ \begin{array}{l} - 2cd \\ - bb \\ - dd \end{array} \right\} y^4 - 4bcd \left\{ \begin{array}{l} - 2bbcd \\ - ccdd \\ - ddss \\ - ddrr \end{array} \right\} y^3 - 2bccddy - bbccdd.$$

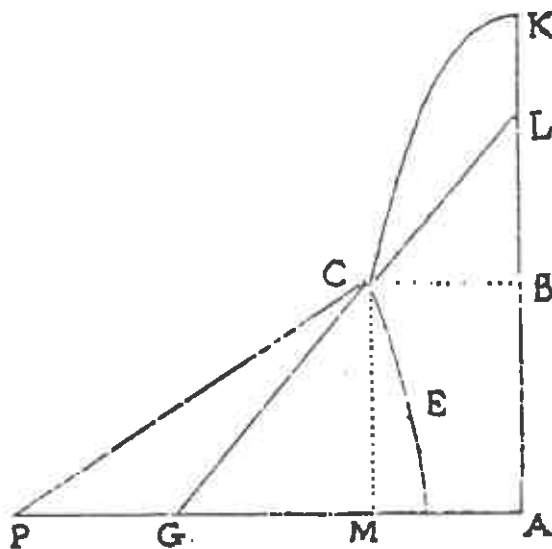
doit avoir mesme forme, que la somme qui se produist lorsqu'on multiplie  $yy - 2ey + ee$  par  $y^4 + fy^3 + ggy + h^3y + k^3$ , qui est

$$y^6 \left. \begin{array}{l} + f \\ - 2e \end{array} \right\} y^5 \left. \begin{array}{l} + eeg \\ + ce \end{array} \right\} y^4 \left. \begin{array}{l} + b^3 \\ + eef \end{array} \right\} y^3 \left. \begin{array}{l} + k^4 \\ + eeg \end{array} \right\} y^2 \left. \begin{array}{l} - 2ek^4 \\ + eeh^3 \end{array} \right\} y + eek^4.$$

de façon que de ces deux equations j'en tire six autres, qui servent a connoître les six quantités  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $v$ , et  $s$ . D'où il est fort aysé a entendre, que de quelque genre, que puisse être la ligne courbe proposée, il vient tousjours par cete façon de proceder autant d'equations, qu'on est obligé de supposer de quantités, qui sont inconnues. Mais pour demesler par ordre ces equations, et trouver enfin la quantité  $v$ , qui est la seule dont on a besoin, et à l'occasion de laquelle on cherche les autres : Il faut premierement par le second terme chercher  $f$ , la premiere des quantités inconnues de la derniere somme, et on trouve  $f \propto 2e - 2b$ .

Puis par le dernier il faut chercher  $k$  la derniere des quantités inconnues de la mesme somme, et on trouve  $k^4 \propto \frac{bbccdd}{ee}$ .

421 Puis par le troisieme terme il faut chercher  $g$  la seconde quantité, et on a



$$gg \propto 3ee - 4bc - 2cd + bb + dd.$$

Puis par le penultiesme il faut chercher  $h$  la penultiesme quantité, qui est  $h^3 \propto \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$ . Et ainsi il faudroit continuer suivant ce mesme ordre jusques a la derniere, s'il y en avoit d'avantage en cete somme; car c'est chose qu'on peut toujours faire en mesme façon.

Puis par le terme qui suit en ce mesme ordre, qui est icy le quatriesme, il faut chercher la quantité  $v$ , et on a  $v \propto \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}$  ou mettant  $y$  au lieu d' $e$  qui luy est esgal on a  $v \propto \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$  pour la ligne AP.

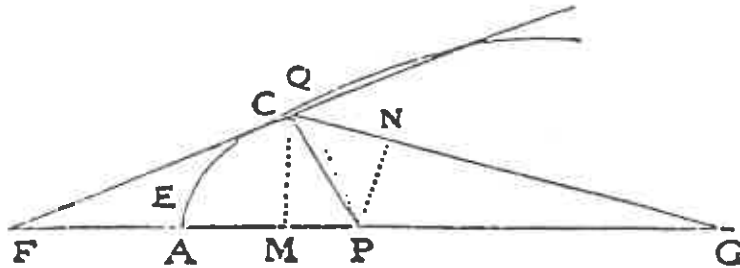
Et ainsi la troisieme equation, qui est

$$\frac{+ 2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev - bddz - bddv - cddz - cddv}{bdd + cev + eev - ddv}$$

a la mesme forme que  $zz - 2fz + ff$ , en supposant  $f$  esgal a  $z$ , si bienque il y a derechef equation entre  $-2f$ , ou  $-2z$ , et

$$\frac{+ 2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cev - eev - ddv} \quad \text{d'où on connoist que}$$

la quantité  $v$  est  $\frac{bcdd - bcde - bddz - ceev}{cdd - bde - ee z - ddz}$



C'est pourquoy composant la ligne AP, de cete somme esgale à  $v$  dont toutes les quantités sont connuës, et tirant du point P ainsi trouvé, une ligne droite vers C, elle y coupe la courbe CE a angles droits. qui est ce qu'il falloit faire. Et je ne voy rien qui empesche, qu'on n'estende ce problemesme en mesme façon a toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque calcul Geometrique.

## ANNEXE 5

### Texte de Newton de la méthode des fluxions

La méthode de Newton relative à *étant donné la Relation des Quantités Fluantes, trouver la Relation de leurs Fluxions* paraît d'emblée assez éloignée quant à sa relation avec la notion de dérivée actuelle.

Voici un exemple en langage moderne, un peu plus détaillé :

$$\text{Soit la relation } f(x,y) = x^3 + 5x - y = 0$$

Newton considère deux suites arithmétiques de même raison :

$(n+3r)$	$(n+2r)$	$(n+r)$	$n$	$(m+r)$	$m$
$x^3$	$0x^2$	$5x$	$-y$	$-y$	$x^3 + 5x$
$(n+3r)\dot{x}x^2 +$	$(n+2r)0 +$	$(n+r)5\dot{x}$	$-ny\frac{\dot{x}}{x}$	$(m+r)(-\dot{y}) +$	$m(x^3 + 5x)\frac{\dot{y}}{y}$

On réordonne les termes selon  $n, r, m$  :

$\frac{n\dot{x}}{x}[x^3 + 5x - y] + r[3x^2\dot{x} + 5\dot{x}]$	$\frac{m\dot{y}}{y}[-y + x^3 + 5x] + r[-\dot{y}]$
--	---

On ajoute et on égale à 0, comme le fait Newton sans plus d'explication, ces deux expressions :

$$\left( n\frac{\dot{x}}{x} + m\frac{\dot{y}}{y} \right) [x^3 + 5x - y] + r[3x^2\dot{x} + 5\dot{x} - \dot{y}] = 0$$

Ce qu'on peut écrire :

$$\left( n\frac{\dot{x}}{x} + m\frac{\dot{y}}{y} \right) [f(x,y)] + r \left[ \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} \right] = 0$$

Egalité vraie pour toute valeur de  $m, n, r$ , mais en prenant  $n = m = 0$  comme le fait d'ailleurs Newton, on retombe sur notre classique dérivée.



## Bibliographie

### Textes anciens :

APOLLONIUS DE PERGE : Traduction de Ver Eecke P., éditions Desclée de Brouwer et Cie Bruges 1923

ARCHIMEDES : Traduction de Ver Eecke P., Bruges, 1924.

BARROW I. : Lectiones geometricae. Londres, 1670

CAUCHY : Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique sur le calcul infinitésimal., Debuie, Paris 1823, Réédition ACL - éditions 50 rue des Ecoles PARIS 5<sup>e</sup> Octobre 87

DESCARTES :

Oeuvres. Editions Ch. Adam et P. Tannery, Vrin, Paris 1897 - 1913

Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie. L. A. Fayard 1986.

Encyclopédie Méthodique, Mathématiques : Editions Pauckoucke, 1784, Réédition du bicentenaire, ACL - éditions, Paris.

FERMAT P. : Oeuvres. Trad. Henry CH.,ed. Tannery P., Paris, 1891 - 1912.

LEIBNITZ : Oeuvres concernant le calcul infinitésimal. Traduction Jean Peyroux, Blanchard, Paris, 1983.

NEWTON I. : La méthode des fluxions et des suites infinies. Trad. par Buffon, Paris, 1740. Réédité chez Blanchard A., 1966.

ROBERVAL : Traité des Indivisibles. Brochure IREM PARIS VII

### Ouvrages généraux :

AMY. DAHAN DALMEDICO / PFEIFFER J. : Une histoire des mathématiques. Points Sciences, Seuil, 1986.

BELAVAL Y. : Leibniz critique de Descartes. Editions Gallimard, 1960

BOURBAKI N. : Eléments d'histoire des Mathématiques. Hermann, Paris, 1960.

BOYER Carl B. : The history of the calculus and its conceptual development. Dover Editions, New-York, 1959

Cahier de Science & Vie n° 13 consacré à I. Newton.

CHILD J. M. : The geometrical lectures of Isaac Barrow. Chicago and London, 1916

CLERO J. P. / LE REST E. : La naissance du calcul différentiel au XVI<sup>ème</sup> siècle. Revue d'histoire des Sciences.

COLETTE J. P. : Histoire des mathématiques. Tome II, Ottawa, 1979, Diffusion Vuibert.

DHOMBRES J. : Nombres, mesure et continu. Cedic Fernand Nathan, Paris, 1978.

DUMONT J. P. : Les écoles présocratiques, Collection Folio / Essais, Editions Gallimard 1991.

FONTENELLE : Oeuvres pour la biographie des académiciens. 10 V., par B. Brunet, Paris, 1758

ITARD J. : Essais d'histoire des Mathématiques. Blanchard, Paris, 1984.

KLINE : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New-York, 1972.

Eléments d'Histoire de Sciences, sous la direction de M. Serres. Bordas, Paris, 1978.

LEIBNIZ : Naissance du calcul différentiel. Traduction Parmentier, Vrin, Paris, 1989.

LELONG-FERRAND J & ARNAUDIES J.M. : Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, Dunod Université.

MONTUCLA J. F. : Histoire des mathématiques. Réédition A. Blanchard, 1960.

SERRES M. : Le système de Leibniz et les modèles mathématiques de l'univers. (2 T.), P.U.F. Paris, 1968



FICHE DUBLIREM

Titre : HISTOIRES de TANGENTES

Auteurs : Philippe DELEHAM, Geneviève KIENTZ  
Jean Claude PENIN, Patrick PERRIN

Niveau : Second cycle et supérieur, formation des maitres

Date : Mars 1994

Mots-clé :   spécialité :   Histoire des mathématiques  
                  autres :        Activité en classe  
                                  Calcul différentiel  
                                  Cycloïde  
                                  Tangente

Résumé : Présentation de textes anciens annotés traitant  
du calcul des tangentes.  
Comptes-rendus d'expérimentations en classe et  
d'enquête concernant l'enseignement des notions  
de limite, dérivée, tangente.

Format A4	Nombre de pages 110	Prix 60,00 F	IREM numéro Re 30
--------------	------------------------	-----------------	----------------------

ISBN 2-910076-01-6