BULLETIN DE LIAISON DE L'I.R.E.M. DE REIMS

I.R.E.M. de REIMS
MOULIN de la HOUSSE
BP 347 51062 REIMS CEDEX

SOMMAIRE

Mai 1981

Aux enseignants de mathématiques de l'Académie de REIMS

Nous présentons dans ce Bulletin de Liaison quelques unes de nos activités de l'année 1980-81, ainsi que certaines des actions que nous organiserons en 1981-82.

Encouragés par l'intérêt que vous avez montré pour nos stages de sensibilisation aux calculatrices programmables et aux micro-ordinateurs à Reims et dans la région des Ardennes, nous prévoyons de continuer notre effort dans cette direction.

Nous annonçons aussi la mise en place d'un Séminaire sur le nouveau programme de mathématiques des classes de seconde ; votre participation nous aidera à élargir notre expérience dans ces classes ; en outre, les résultats de ce séminaire serviront de point de départ à l'étude critique des nouveaux programmes des classes de Première et Terminale.

Si vous avez des suggestions à nous faire, n'hésitez pas à nous écrire.

Signalons enfin que notre prochain Bulletin de Liaison paraitra à la rentrée prochaine.

Madame UNTERBERGER

Directrice de l'IREM de REIMS
Moulin de la Housse
B. P. 347

51062 REIMS CEDEX

COMPTE-RENDU DE LA SEANCE D'INITIATION AUX CALCULATRICES PROGRAMMABLES ORGANISEE LE 1er AVRIL PAR L'IREM DE REIMS ET ANIMEE PAR MESSIEURS DIDI ET FERRANT

Ces animateurs venus spécialement de Paris nous ont d'abord demandé ce que nous étions venus chercher. Ils nous présentèrent la calcultrice T. I. 57 et son utilisation pédagogique. Ils nous donnèrent quelques explications sur le fonctionnement du centre de calcul de la machine qui mémorise jusque 5 nombres et 4 opérations pour les effectuer ensuite suivant l'ordre des priorités de l'algèbre. On remarque l'existence de parenthèses pour modifier l'ordre des priorités. Ce qui fait dire que ce calculateur "connait l'algèbre".

Après quelques manipulations et surtout quelques calculs faits directement dans l'une ou l'autre des 7 mémoires disponibles, c'est-à-dire sans qu'apparaisse le résultat à l'affichage, vint l'exemple de programmation tant attendu. Il était complet, progressif et montrait les possibilités du calculateur :

1ère Question (algèbre) : Faire un programme permettant de calculer le 3ème côté d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse H et un côté de l'angle droit C.

Réponse :

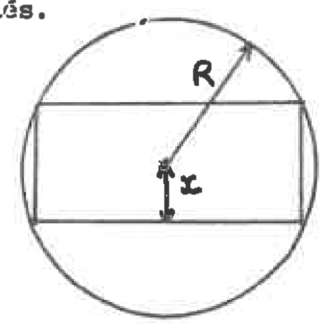
ON ⟶ mise de la machine sous tension
LRN ⟶ mode programme
LBLO ⟶ étiquette ou numéro du programme
(
RCL 1
x^2
\-
RCL 2
x^2
)
$\sqrt{x}$
⟶ suite d'opérations demandées au centre de calcul
INV SBR ⟶ fin du programme O

Pour l'utiliser, il faut effectuer la séquence de touches suivante :

LRN ⟶ mode calcul
Afficher H
STO 1
Afficher C
STO 2
SBR O ⟶ le calculateur effectue le programme O

...

2ème Question (géométrie) : Dans un cercle de rayon R, on construit un rectangle inscrit. Calculer la surface de ce rectangle en fonction de la distance x du centre du cercle à un de ses côtés.



Réponse :

LRN → mode programme
GTO $\boxed{2nd}$ 10 → pour aller au 10ème pas de la mémoire programme
LBL 1 → étiquette ou numéro de ce programme
STO 2
SBR O → le calculateur exécute le programme O et reviendra avec le résultat du programme O pour continuer son exécution
*
4
*
RCL 2
=
INV SBR → fin du programme 1

Pour exécuter ce programme il faut effectuer :

LRN → mode calcul
Afficher R
STO 1
Afficher x
SBR 1

Ce programme 1 agit comme une fonction, il suffit alors de lire la réponse qui est S (x).

3ème Question : (analyse : recherche d'extrêmum) Quelle est la valeur de x pour laquelle la surface ci-dessus est maximum ?

Je laisse le soin aux collègues qui ont assisté ou non de fabriquer ou de refabriquer ce programme qui sera étiqueté LBL 2, qui utilisera les sous-programmes ou subroutines O et 1 et qui nécessitera la fabrication d'une "boucle".

Quand tout sera fini, mettre le calculateur sur OFF et surtout ne pas le faire avant car tout est à recommencer.

Rappelons que cet exemple est extrait du livre "LRN, tout un programme" de Messieurs DIDI et FERRANT, édité ches BORDAS, dont la bibliothèque IREM possède 4 exemplaires.

L'IREM de REIMS et tous les particpants à cette séance d'initiation remercient vivement Messieurs DIDI et FERRANT qui par leur expérience et leur pédagogie ont su apporter une plus grande compréhension dans l'usage de la calculatrice mais surtout l'envie de recommencer et d'aller plus loin.

RAPPORT SUR LE STAGE DE SENSIBLISATION AUX MICRO-ORDINATEURS

(2e trimestre 80/81)

par Alain RIGAUT - Coll. EST I - Reims
Yves ANDRIOT - Coll. Châtillons-Reims
Alain FAIVRE - Coll. AY

Parmi les appels lancés par les animateurs IREM l'année précédente, il faut rappeler que celui du groupe Informatique de REIMS avait reçu peu d'échos. Bien sûr quelques candidats se sont présentée pour découvrir"l'ancêtre" : l'IBM 1130 et le petit nouveau au multiples possibilités : le SERIE I d'IBM.

Mais avant de se mettre aux commandes et de transmettre à l'ordinateur le plus petit programme, il est nécessaire pour le "1130" de passer par le stade de la perforatrice - et gare aux erreurs (un trou ne peut pas être bouché) - ou pour le SERIE I de passer par une console, mais ici tout un cérémonial à connaitre... Quand enfin le programme est totalement tapé, la "parole" est à l'ordinateur et ce dernier ne s'en prive pas pour vous apprendre au bout de quelques minutes (et même de longues minutes sur le petit nouveau) qu'il y a des erreurs ça et là : une virgule oubliée ou mal placée, un format incorrect... et encore est-on déjà satisfait si l'erreur est parfaitement localisée et définie. Alors on recommence.

A ce rythme peu d'amateurs programmeurs persévèrent car le résultat se fait souvent beaucoup attendre.

Sur les micro-ordinateurs (on dit aussi Petits Systèmes Individuels), pas de grand cérémonial, on appuie sur un interrupteur et on commence à taper. Bien sûr il faudra apprendre à programmer, à utiliser un nouveau langage (souvent à base d'anglais), mais on en découre les effets immédiatement.

Au bout de quelques minutes, on peut déjà faire exécuter quelques ordres simples au système ; on le maîtrise plus facilement. En cas d'arrêt sur une erreur, on peut même l'interroger sur les résultats de ses calculs intermédiaires, ce qui facilite énormément la mise au point d'un programme.

L'IREM décide donc en Décembre 1980 d'organiser un stage de sensibilisation à l'informatique sur P.S.I. et envoie une circulaire aux différents établissements de REIMS.

L'effet est immédiat : plus de 60 candidatures. L'organisation s'avère plus difficile que prévue. Nous n'attendions pas tant de monde et nous ne disposons que de 5 micro-ordinateurs. Le vendredi après-midi étant retenu, une cinquantaine de stagiaires s'inscrivent aux différentes séances qui pour certaines se prolongent jusqu'à 20 heures le soir.

Les stagiaires s'installent tout de suite devant un micro-ordinateur par binôme et une documentation est distribuée. Chacun la suit à son rythme et commence à donner des ordres à l'ordinateur. Il y a 7 postes de travail - 3 animateurs nouvellement recyclés apportent leur soutien aux différents groupes.

...

Là, quelques critiques aux animateurs peu méfiants : certains stagiaires tentés par la réalisation de programmes, mais déjà largement sensibilisés, se sont mêlés aux débutants pour concrétiser une formation antérieure essentiellement théorique et ont parfois découragé un binome tout à fait débutant.

Dans l'ensemble, les stagiaires ont été satisfaits, mais nous tiendrons compte des différentes critiques si nous devons recommencer un stage de sensibilisation :

- envoi préalable d'une documentation et/ou d'une bibliographie succinte sur le langage utilisé et la programmation.

- documentation plus fournie ; plus d'exemples guidés et commentés, non axés systématiquement sur les maths.

- séances hebdomadaires.

Pour l'année prochaine de nombreux stagiaires souhaitent se perfectionner dans la programmation pour se préparer à une utilisation éventuelle des micro-ordinateurs dans l'enseignement.

Cette utilisation reste d'ailleurs à préciser et un groupe IREM pourrait peut-être se créer pour essayer de définir le domaine d'utilisation des P.S.I., les besoins et peut-être aussi les limites.

Quelques mots sur : LA MATHEMATIQUE AU SERVICE DES INTERETS"

(à paraitre)

par Alain FAIVRE
Professeur
Collège AY-CHAMPAGNE

Je vous propose un condensé des principales notions de mathématiques financières concernant les emprunts indivis ; des tables denses donnant des annuités constantes ou progressives ; un listing commenté de programme BASIC pour miniordinateur permettant d'établir le plan d'amortissement complet d'un emprunt quelconque à la carte, destiné au consommateur moyen ; quelques réflexions sur les idées fausses et les précautions concernant les emprunts.

L'outil mathématique utilisé, ne dépasse pas le niveau des classes de second cycle des Lycées, donc le sujet complet peut-être abordé en classe de terminale des L.E.P. où l'informatique est de plus en plus présente.

Les professeurs de Mathématiques y trouveront je pense des réponses simples aux questions qu'ils peuvent être amenés à se poser, mais aussi une façon inhabituelle de parler "emprunts".

Les consommateurs non mathématiciens sans calculatrice sophistiquée puiseront des renseignements précieux dans les tables et les mises en garde ; ils seront mieux armés pour emprunter.

Voilà un sujet qu'il serait souhaitable d'introduire, en Première ou Terminale de tous les lycées, car beaucoup trop d'élèves demeurent à jamais en marge du domaine des calculs financiers, auquel ils seront pourtant systématiquement confrontés dans leur vie d'adulte.

NOUVELLES DU QUESTIONNAIRE POSE AUX PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES PAR L'EQUIPE D'ANIMATEURS D'EPERNAY

Jacques NIMIER
Maître Assistant
IUT TROYES

Nous voudrions remercier ici tous ceux qui se sont intéressés à notre travail et qui nous ont demandé où nous en étions. Qu'ils ne désespèrent pas de voir un jour les résultats, mais il nous faut du temps !

Nous avons reçu 908 réponses à notre questionnaire, 486 hommes et 422 femmes répartis ainsi : 222 PEGC, 462 Certifiés, 107 Agrégés et 117 "Autres".

Nous avons dû commencer par prendre les 10 896 pages (chaque questionnaire comprend 12 pages), pour les coder. Ceci s'est fait en 2 temps.

Une première fois pour coder les questions fermées, soit mettre 181 600 chiffres à la main dans les cases prévues à cet effet.

Une deuxième fois pour coder les questions ouvertes (par exemple : exprimer ce qui est le plus important dans votre métier de professeur). Ceci a demandé de construire pour chaque question une grille de dépouillement avec codage et à traduire ainsi ces réponses en 18 160 chiffres.

Ce travail étant terminé, il nous a fallu reprendre tous les questionnaires pour introduire les codages sur disquette, ce qui a demandé la frappe sur la console de l'ordinateur des 199 760 chiffres ! Travail passionnant comme vous pouvez vous en douter.

L'étape suivante a été l'écriture des programmes de dépouillement qui nous ont permis d'obtenir 170 pages de listing d'ordinateur.Celles-ci nous permettent de connaitre pour chaque question le nombre (et le pourcentage) des diverses réponses à une question en fonction de variables, sexes, catégories professionnelles, âge, lieu d'enseignement.

Nous avons commencé à étudier ces 170 pages, en particulier en testant au χ^2 les différences qui apparaissaient. Nous en sommes là pour l'instant. Il nous faut maintenant mettre au point sur le nouvel ordinateur nos programmes d'analyse factorielle. Nous voudrions en effet faire une première analyse portant sur la partie "Vous et vos élèves" pour rechercher les grands axes pouvant décrire les différents comportements vis-à-vis des élèves. Nous prendrons alors en variables supplémentaires des questions sur le Vécu des Maths pour vérifier si ce Vécu influence ce comportement à l'égard des élèves. Une vérification sera faite sans doute en faisant une 2e analyse factorielle de la 3e partie du questionnaire, "Vous et les Mathématiques" pour essayer de décrire les grands axes de ce Vécu. En prenant comme variables supplémentaires soit les catégories (certifiés, Agrégés, PEGC...) soit des questions déterminant le comportement à l'égard des élèves, nous chercherons ainsi si des correlations existent entre ce Vécu des Mathématiques et le comportement vis à vis des élèves.

...

Nous avons voulu aussi avoir un groupe de comparaison, c'est pourquoi nous avons lancé une enquête auprès des professeurs de français grace à un sous ensemble du questionnaire proposé aux professeurs de mathématiques. Nous sommes en ce moment en train de recevoir ces réponses. Il nous faudra là encore coder, introduire,dépouiller, comparer...

Voilà quelques nouvelles qui nous l'espérons vous permettront de ne pas désespérer d'avoir les résultats de cette enquête.

FORMATION PSYCHOLOGIQUE ET PSYCHOSOCIOLOGIQUE

Jacques NIMIER
Maître Assistant
IUT TROYES

Certains ressentent la nécessité d'une formation psychologique ou psychosociologique pour exercer leur métier comme ils le désireraient et ne savent pas où s'adresser.

A côté des formations longues en faculté, il existe des organismes offrant une formation sous la forme de stagesplus ou moins longs(3 à 10 jours). Cette formation est donnée avec des techniques diverses : séminaire de dynamique de groupe, de jeux de rôle, de psychodrame, de réflexion etc... Voici trois de ces organismes :

I. F. E. P. P. (Institut de Formation et d'Etudes psychosociologiques et pédagogiques) - 140 bis, rue de Rennes 75006 PARIS Tél.222 90 70

Organisme rattaché à"l'Ecole des Parents et des Educateurs"
Loi 1901 - reconnu d'utilité publique.

O.F.R.E.P.S. (Organisme de Formation aux relations personnelles et sociales)
34, rue de Reille, 75014 PARIS - Tél. 589 18 50

Organisme rattaché à l'A.F.C.C.C. (Association Française des Centres de consultations conjugales)
Loi 1901 : reconnu d'utilité publique

A. R. I. P. (Association pour la Recherche et l'Intervention Psychosociologique)
6 bis rue Bachaumont - 75002 PARIS - Tél. 236 40 56

Organisme loi 1901 - dirigé pas des universitaires.

Arrêté du 26 janvier 1981

(Lycées : bureau DL 3)

Vu L. n° 75-620 du 11-7-1975 ; D. n° 59-57 du 6-1-1959 mod. ; D. n° 76-1304 du 28-12-1976 ; D. n° 62-1173 du 29-9-1962 ; D. n° 64-42 du 14-1-1964 ; D. n° 68-1008 du 20-11-1968 mod. ; A. 24-2-1943 ; A. 21-9-1944 ; A. 27-7-1949 ; A. 19-7-1957 ; A. 9-6-1959 ; A. 10-6-1960 ; A. 4-7-1961 ; A. 1er-7-1964 ; A. 10-6-1965 ; A. 13-6-1966 ; A. 26-7-1966 ; A. 25-8-1966 ; A. 31-7-1967 ; A. 9-8-1967 ; A. 31-7-1967 ; Arrêtés 19-3-1970 ; A. 18-10-1971 ; Arrêtés 29-3-1972 ; A. 30-5-1973 ; A. 20-3-1978 ; A. 31-10-1980 ; Le Conseil de l'enseignement général et technique entendu les 29-5-1980 et 26-6-1980.

Modification des programmes des disciplines de la classe de seconde et institution de l'enseignement de nouvelles matières dans la classe de seconde conduisant au baccalauréat de l'enseignement général, au baccalauréat de technicien ou au brevet de technicien.

Article premier. — Dans les classes de seconde conduisant au baccalauréat de l'enseignement général, au baccalauréat de technicien ou au brevet de technicien, les enseignements de français, d'histoire, de géographie et instruction civique, de langue vivante I, de mathématiques, de sciences physiques, de sciences naturelles*, d'éducation physique et sportive, de technologies industrielles, de sciences et technologie des laboratoires, de sciences médico-sociales, d'initiation économique et sociale, de grec, de latin, de langue vivante II, de latin ou grec « grand débutant», de langue vivante II « grand débutant », de gestion, de technologie, d'arts plastiques, de musique, d'activités sportives spécialisées, de langue vivante III, d'enseignement artistique complémentaire, de préparation à la vie sociale et familiale et de dactylographie sont dispensés conformément aux programmes annexés au présent arrêté.

Art. 2. — Les dispositions du présent arrêté entreront en application à la rentrée de l'année scolaire 1981-1982.

Toutes les dispositions contraires au présent arrêté seront abrogées à cette date.

Art. 3. — Le directeur des Lycées est chargé de l'application du présent arrêté.

Pour le ministre et par délégation :

Le directeur des Lycées,

J. SAUREL.

(J.O. N.C. du 3 février 1981)

Introduction au programme de mathematiques

Les actuels programmes de mathématiques pour le premier cycle ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action. A la base de tout bon apprentissage, il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète, la stimulation de l'activité personnelle de l'élève, l'élaboration de moyens d'investigation aussitôt applicables au monde qui l'entoure.

Le présent programme est celui d'une classe de seconde pour tous ; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures, et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement ; mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit-il ; sa tâche essentielle est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle. C'est d'ailleurs pour favoriser le développement de ces qualités qu'une heure dédoublée est prévue.

La classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploration de situations plus ou moins aisément maîtrisables, de réflexion sur des problèmes résolus. De ce fait, à chaque séquence du programme correspondent des thèmes d'activités, dont le choix demande à être adapté aux possibilités de la classe et éventuellement relié à son orientation ultérieure ; il ne saurait être question de traiter tous les thèmes mentionnés. Les questions obligatoires sont en nombre restreint et n'occupent que peu d'épaisseur de cours.

L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt et qu'elle soit suivie immédiatement d'applications substantielles : on ne peut imaginer de parler du produit scalaire sans s'en servir abondamment. Des notions comme la linéarité, la convexité ont besoin d'un support d'exemples et de contre-exemples. Certains des exemples étudiés auront servi à faire sentir la nécessité d'une formulation générale, les autres auront pour but ensuite d'en montrer la puissance. Au moment voulu, une phase d'approfondissement théorique est indispensable.

Ces différentes phases jouent un rôle également important dans la formation mathématique des élèves et doivent donc faire l'objet d'un même soin.

⁂

Parce que les sciences expérimentales, la technologie, ont pour base des mesures, la géométrie de seconde est essentiellement métrique ; à l'égard de l'espace, parce que nous vivons dans un monde fait de solides, elle comporte, après celle de troisième, une étude franchement expérimentale des relations entre droites et plans, de l'orthogonalité, des évaluations de distances et d'angles ; tout développement axiomatique à ce propos est exclu.

Cette géométrie, par son contenu euclidien, doit aider à entretenir une habitude de vision directe des choses ; elle met au service de l'intuition et de l'imagination son langage, ses procédés de représentation. L'enseignement de l'analyse qui va se poursuivre tout au long du cycle peut s'en imprégner dès son commencement.

Il y a lieu d'éviter tout exposé artificiel de logique mathématique ; un tel exposé serait vide de sens pour les élèves, précisément par manque de pratique mathématique antérieure ; en outre la description d'un raisonnement mathématique, même très simple, est souvent d'un niveau de complexité assez grand, et on fausserait le jugement des élèves en se bornant à des aspects très partiels (tables de vérité, etc.). Il sera par contre judicieux de souligner les différentes formes du raisonnement mathématique, au fur et à mesure de leur emploi dans les situations étudiées. En effet il va de soi qu'au cours des activités, même lorsqu'il s'agit d'activités d'initiation, on ne se contentera pas de constatations, mais bien au contraire on s'efforcera dans la plupart des cas de justifier les résultats apparus, et l'on choisira au besoin les exercices en fonction de cet objectif. A travers ces diverses activités, on mettra en lumière différentes phases d'un raisonnement mathématique : conjecture, mise en œuvre d'arguments, élaboration d'une stratégie de démonstration et rédaction de la démonstration.

Il est également important qu'un grand nombre d'activités fassent intervenir simultanément des parties diverses du programme pour en faire ressortir l'unité (activités géométriques et algébriques relatives aux fonctions ; activités de géométrie dans l'espace aux divers stades de l'étude des propriétés métriques).

La pratique fondamentale, sur quoi repose pour l'élève l'entraînement au travail personnel, est celle des problèmes ; il ne faut pas craindre d'en poser de peu formalisés et d'énoncés concis. On s'attachera d'autre part, dans l'étude d'un problème, à éclairer ses diverses facettes et on n'hésitera pas à comparer sur une même question l'efficacité de plusieurs méthodes.

Sur le fond, les qualités d'un problème pour être bien à sa place en seconde sont d'être lié de façon naturelle à l'acquis mathématique préalable de la classe, mais aussi d'avoir un intérêt aux yeux des élèves, et un intérêt en soi, même s'il ne conduit pas toujours à une synthèse immédiate. On proposera abondamment des problèmes courts, choisis de manière que l'on n'ait pas nécessairement à donner des concepts mis en jeu une définition rigide et étroitement formalisée ; par exemple un problème où interviennent deux suites adjacentes peut se faire en l'absence de toute définition de la notion de convergence et de celle de suites adjacentes.

Il convient d'attirer l'attention sur l'importance du travail scolaire écrit de l'élève qui devra faire l'objet de devoirs fréquents à la maison et de quelques devoirs de contrôle faits en classe. Ils seront l'occasion de développer les qualités de rigueur, de clarté de la rédaction et de la présentation.

⁂

L'utilisation systématique des calculatrices, qui dispense naturellement d'avoir recours aux instruments antérieurs (table de logarithmes, règle à calcul...) constitue une des nouveautés du programme de mathématiques. Il est primordial, à notre époque, d'apprendre aux jeunes à se servir d'une machine à clavier, de les renseigner sur les contraintes imposées par la technique du constructeur, et de les mettre en garde contre les erreurs plus fréquentes qu'ils ne le pensent. Il suffit que les élèves possèdent une calculatrice scientifique non programmable. Dès le début de l'année il sera bon de vérifier que chacun sait utiliser son propre instrument, et ce sera une occasion de préciser l'usage des parenthèses et de réviser les propriétés de R.

Les touches de la calculatrice permettent d'accéder à des fonctions. Une représentation graphique de ces fonctions permet d'avoir une vue d'ensemble de la correspondance ; l'usage de la touche donnant la fonction réciproque permet ensuite de préciser la notion de bijection et les limitations imposées.

Une grande facilité du calcul numérique permet d'aborder d'une façon nouvelle les problèmes d'approximation ; c'est l'expérimentation qui associe $(1 + h)^a$ et $1 + ah$ pour h petit, le raisonnement ensuite justifie le résultat et en indique les limites ; il en va de même ensuite au voisinage d'un point quelconque.

Naturellement la calculatrice permet toutes sortes de stratégies d'itération.

On peut par exemple calculer les termes successifs d'une suite récurrente et en présumer le comportement. On découvre ici l'intérêt qu'il peut y avoir à organiser méthodiquement le calcul pour le resserrer et lui conférer une bonne précision.

L'emploi des calculatrices a lui-même ses objectifs ; de leur utilisation judicieuse on peut attendre une expansion des activités expérimentales (élaboration de conjectures à partir de recherches sur des exemples), et en retour de nouvelles motivations d'approfondissement théorique nées du besoin de contrôler les algorithmes et d'apprécier la pertinence des moyens de calcul.

OBJECTIFS

(classes de seconde, première, terminale)

La formation mathématique, qui ne commence pas avec le second cycle, s'insère de manière irremplaçable dans l'éducation ; et les mathématiques sont sans cesse plus nécessaires dans la plupart des domaines, scientifiques ou non. Les nouveaux programmes tiennent compte des évolutions technologiques et sociales (utilisation des calculatrices, introduction des statistiques...) et développent l'intérêt pour des problèmes liés à d'autres disciplines, grâce auxquels l'élève sera habitué à tirer parti efficacement de ses connaissances mathématiques.

Trois grands axes définissent les finalités du présent cycle :

a) *Développement de la formation scientifique :*

Capacité d'analyser une situation, d'élaborer et d'appliquer les concepts appropriés, d'explorer et de contrôler par l'expérimentation. Ce développement a ses clefs :

— acquisition de connaissances et analyse de leur portée ;
— maîtrise de l'acquis (entraînement, mémorisation) et création de nouveaux moyens (débroussaillage, conjectures) ;
— coordination des démarches grâce à l'étude de grandes questions jouant un rôle central dans le secteur considéré.

b) *Développement de la formation sociale, économique et culturelle :*

— initiation aux méthodes d'information, d'organisation, de traitement des données ;
— liaison des activités mathématiques au contexte culturel, et éventuellement à des perspectives historiques.

c) *Développement de la formulation personnelle :*

— développement de l'imagination et des facultés d'observation ;
— développement des capacités de travail individuel et collectif, aisance dans l'emploi de documents et d'appareils ;
— sûreté dans le maniement des grands moyens de communication : expression écrite et orale, techniques de représentation (schémas, graphiques, dessin industriel), de codage (organigrammes, diagrammes), langages de programmation.

Les étapes postérieures à la classe de seconde comportent, en raison de la ramification des cursus, des degrés différents d'investigation et d'approfondissement. Mais l'enjeu fondamental est, à chaque niveau, la réalisation soigneuse d'un programme bref, entouré de nombreux exercices. Il s'agit de développer l'activité mathématique personnelle de l'élève ; or il n'y a pas de telle activité sans recherche, et par conséquent sans une gamme de problèmes. Ce n'est que dans ce cadre que le fonctionnement des concepts peut s'éclairer, et que peut être assurée leur appropriation progressive par l'élève. Aussi les problèmes doivent-ils imprégner tout l'enseignement et non pas servir de cortège à la présentation prématurée, ex nihilo, d'une théorie.

S'il est vrai que certains concepts sont d'élaboration délicate, ils peuvent et doivent cependant être utilisés très tôt, à un moment où leur statut théorique n'est pas encore précisé (notions de base de la géométrie, orientation, fonctions trigonométriques, récurrence, intégration...). D'ailleurs la plupart des grands concepts interviennent de manières très diverses et sous des aspects souvent complémentaires ; on évacuerait à tort cette diversité par un exposé théorique hâtif et parcimonieux ; on prendra au contraire appui sur une étude de front des situations rencontrées dans des problèmes progressifs et variés.

L'important est, répétons-le, d'aider l'élève à organiser la synthèse de ses connaissances pour les investir de lui-même dans des domaines a priori éloignés. D'autre part, la vie de la discipline a elle-même ses règles de bon sens. A des considérations générales sur les nombres réels, sur les fonctions, on préfèrera des activités de fabrication par des suites ou des représentations graphiques. De même, en géométrie, on n'étudie pas les transformations dans l'abstrait, on en crée ou on en observe ; il s'impose par conséquent de se laisser conduire par une approche dynamique et souvent globale, qui s'exprime par exemple dans des recherches de lignes de niveau.

En conclusion, l'activité mathématique n'obéit pas à une ligne rigide ; sa conduite dépend de contraintes souvent fécondes, tenant à la nature du sujet abordé, au niveau espéré de traitement, aux prolongements vers les autres disciplines. Certains thèmes se recommandent d'emblée à l'attention du professeur ; ce sont tous ceux qui, à égalité d'importance dans la formation scientifique, économique et culturelle, offrent à la fois un bon terrain à l'initiative personnelle de l'élève et à un effort d'approfondissement théorique et expérimental.

La partie ne sera pas gagnée sans qu'une mutation profonde ne s'opère dans les habitudes d'enseignement ; cette mutation est à la portée de tous ; elle relève de l'action personnelle, mais aussi collective de formation continue, avec le soutien de l'enseignement supérieur.

PROGRAMME DE SECONDE

L'horaire de la classe est de 4 heures (3 + 1)

Le programme requiert, pour donner prise à un travail efficace et bien remplir son rôle d'initiation aux enseignements ultérieurs, d'être appliqué avec réalisme et souplesse. Le professeur adopte la répartition qui lui convient des différentes parties, en les scindant ou les menant de front ; il lui est demandé de ne sacrifier aucune rubrique.

L'équilibre du programme a été conçu sur la base de 10 % du temps pour chacune des rubriques (20 % en ce qui concerne III, 15 % pour VII).

Des thèmes d'activités sont partout mentionnés ; on notera qu'ils font l'objet de listes indicatives, c'est-à-dire ni impératives ni exhaustives.

I - Activités numériques

Le calcul sur les nombres réels n'est pas revu pour lui-même, mais solidairement avec la résolution des problèmes numériques, qui sont au cœur de l'analyse.

Pour ne pas en épuiser prématurément l'intérêt on évitera d'accumuler ces activités en début d'année. On se préoccupera d'habituer les élèves à évaluer — grâce notamment aux puissances de 10 — l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul.

Pratique des opérations et des inégalités portant sur des nombres réels, en particulier décimaux, rationnels.

Valeur absolue ; distance.

Exemples d'approximation d'un nombre réel donné au moyen de suites.

Aucune définition sur les limites ne figure au programme.

Thèmes (à titre indicatif) :

— Exemples de suites convergeant vers $\sqrt{p}$ (p donné strictement positif) :
- dichotomie ;
- couples de réels de produit p :

$$a_1 b_1 = p,\ a_1, b_1 \text{ positifs,}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right),\ b_n = \frac{p}{a_n} ;$$

— Exemples de suites convergeant vers π :
- à l'aide des aires et des périmètres de polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un même cercle ;
- méthode des isopérimètres.

II - Statistique

Les documents nécessaires seront empruntés à l'environnement de l'élève ou proposés en liaison avec les enseignements de sciences biologiques, économiques et humaines.

Il est souhaitable que ces documents soient authentiques et récents.

Description statistique d'une population ou d'un échantillon. Tableaux de données, relevés périodiques, réponses à une enquête... ; classement de ces données, représentations graphiques diverses.

Effectifs, fréquences, fréquences cumulées. Moyennes.

Il est conseillé de faire porter ces activités sur l'étude d'une seule situation, apte à une bonne approche des notions statistiques, et de se borner à explorer ces notions sur l'exemple choisi par le professeur.

Des données nombreuses sont indispensables ; des phases distinctes sont à prévoir dans le déroulement (voir commentaires).

III - Fonctions

a. Exemples de fonctions introduits par des procédés très divers :

- formules explicites, tableaux de données numériques, touches de la calculatrice ;
- états de systèmes physiques, biologiques, économiques, mesures de grandeurs géométriques ou cinématiques ;
- fonctions trigonométriques.

Représentations graphiques ; leur exploitation. Fonction définie par une représentation graphique. Restriction d'une fonction à un intervalle.

b. Comportement global d'une fonction

On conduira de front les études globales et les études locales (voir ci-dessous), en soulignant les aspects qualitatifs et les aspects quantitatifs, notamment pour les fonctions usuelles.

Sens de variation, monotonie.

Parité, périodicité, interprétation graphique.

Ces notions seront dégagées d'exemples variés, en liaison avec celles pratiquées en physique (taux de variation). On s'attachera à des représentations graphiques d'une bonne précision, en repères orthogonaux.

En ce qui concerne les fonctions trigonométriques, il n'est question que de les explorer à partir de la mesure des arcs de cercle et du mouvement circulaire uniforme, et aussi en utilisant les touches des calculatrices.

Il ne sera demandé aux élèves que de connaître leur périodicité, leurs symétries, leur sens de variation ; de savoir interpréter et appliquer des relations telles que :

$\cos(x + \pi) = -\cos x$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, ... ; *d'apprendre quelques valeurs remarquables en liaison avec l'étude des polygones réguliers à 3, 4, 6 côtés.*

Les formules dites d'addition ne sont pas au programme.

Etude des variations et représentations graphiques des fonctions :

$$x \mapsto ax + b, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Exemples d'autres études de variations se ramenant à celles-ci (changements d'échelles, utilisation de transformations algébriques et géométriques).

Pour les grandes valeurs, l'étude consistera à faire manipuler des conditions suffisantes (pour que $x^2 > 10^p$*, pour que* $0 < \frac{1}{x} < 10^{-p}$*, ...).*

Thèmes (à titre indicatif) :

— Majoration, minoration d'une fonction sur un intervalle ;

— Recherches de maxima, de minima, associées à des problèmes élémentaires d'optimisation ;

— Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique ;

— Emploi des variations d'une fonction f pour l'étude d'équations $f(x) = b$ et d'inéquations ;

— Exemples numériques d'équations du second degré ;

— Convexité de la fonction $x \to x^2$

c. Comportement local d'une fonction

Exemples d'études au voisinage de zéro :

$$x \mapsto (1 + x)^2, \quad x \mapsto (1 + x)^3, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + x}, \quad x \mapsto \sqrt{1 + x}$$

Exemples d'approximation locale par une fonction affine ; utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.

On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place d'une majoration ;

par exemple : $0 \leqslant \frac{1}{1 + x} - (1 - x) \leqslant 2x^2$

sous la condition suffisante $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

$$0 \leqslant -\sqrt{1 + x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{2},$$

etc.

IV - Géométrie plane

Dans la consolidation et la mise en œuvre des connaissances du premier cycle (Distance. Coordonnées. Symétries. Translation, vecteur. Théorème de Thalès...) on aura soin de ne négliger aucun des trois aspects de l'étude géométrique :

— fréquentation directe des figures,

— familiarité avec le calcul dans un repère,

— écriture vectorielle,

et de sensibiliser la classe à l'importance, dans un problème, d'un bon choix de méthode ainsi que d'un bon choix de repère (lorsqu'intervient par exemple une symétrie axiale).

A propos du théorème de Thalès on soulignera l'aspect suivant qui est l'un des plus importants : dans une projection parallèle d'un axe du plan sur un autre l'abscisse se transforme par une application affine.

Homothétie ; formules analytiques de la translation, de l'homothétie.

Barycentre de deux points pondérés, d'un système de points (jusqu'à quatre).

Représentations paramétriques et équations d'une droite relativement à un repère du plan ; pratique du passage des unes aux autres.

Thèmes (à titre indicatif) :

— Problèmes de constructions ;

— Exemples de transformations $x' = ax + b$, $y' = ay + c$; interprétation géométrique ;

— Recherche de symétries et d'homothéties transformant une configuration simple en une autre ;

— Propriétés d'alignement et de concours ;

— Convexité ; intersections de parties convexes et notamment de demi-plans ; application à la caractérisation graphique d'ensembles de solutions de systèmes d'inéquations (intérieur d'un polygone, etc.).

V - Produit scalaire dans le plan

L'introduction du produit scalaire par les formes bilinéaires symétriques ne figure pas au programme.

Formule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est la projection orthogonale de C sur un axe normé portant A et B.

Egalités $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Cosinus de l'angle de deux demi-droites.

Formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$.

Théorème de Pythagore et sa réciproque.

Expression du produit scalaire de deux vecteurs et de la distance de deux points dans un repère orthonormal.

Caractérisation analytique du disque et du cercle.

Lignes de niveau, O et $\vec{k}$ étant donnés, de l'application $M \rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Thèmes (à titre indicatif) :

— Equation normale d'une droite ; distance d'un point à une droite définie par une équation ;

— Relations métriques dans le triangle :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$,

$2\,S = b\,c \sin A$,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\,R$$

(en liaison avec VI) ;

— Lignes de niveau d'applications $M \rightarrow \alpha . AM^2 + \beta . BM^2$;

— Puissance d'un point par rapport à un cercle : lignes de niveau, régionnement ;

— Parabole ; lignes de niveau de $M \rightarrow MO - MK$ (K projection orthogonale de M sur une droite donnée).

VI - Angles et rotations (Géométrie plane)

Cercle et disque. Tangentes. Convexité du disque. Symétries.

Cercle trigonométrique ; mesure d'un arc orienté ; mesure de l'angle d'un couple de demi-droites. Demi-droite définie par son angle avec une demi-droite fixée.

Comme on n'a pas les outils nécessaires à une définition et à une mesure rigoureuses des angles, on se bornera à la définition provisoire suggérée par l'usage du rapporteur.

Angle inscrit dans un cercle, angle au centre associé.

Rotations ; composition de deux rotations de même centre.

Conservation des distances, et des angles orientés, par une rotation.

Thèmes (à titre indicatif) :

— Symétries et rotations laissant invariant un polygone régulier de 3, 4, 6 côtés ;

— Quart de tour (ou rotation d'angle droit) ;

— Quadrangle inscriptible ;

— Lignes de niveau de $M \rightarrow \widehat{MA, MB}$.

VII - Géométrie dans l'espace

Cette partie du programme se propose d'organiser, vis-à-vis de l'espace dans lequel nous vivons, les connaissances de l'élève, et de l'amener à raisonner et à calculer.

On se gardera de tout édifice axiomatique.

L'espace est muni d'une distance. Dans tout plan de l'espace les théorèmes de géométrie plane sont vrais, ils suffisent à la conduite des calculs.

Propriétés d'incidence ; parallélisme.

Orthogonalité. Symétrie par rapport à un plan ; plan médiateur.

Projection. Projections orthogonales.

Repère cartésien : coordonnées d'un point.

Calculs de distances, d'aires, de volumes.

Thèmes (à titre indicatif) :

— Perpendiculaire commune à deux droites. Distance de deux droites.

— Représentation d'un solide par des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires bien choisis.

— Représentation par perspective cavalière.

— Exemples de figures admettant un centre, un axe, un plan de symétrie ; cercle, cube, tétraèdre régulier,...

VIII - Equations et systèmes

On aura intérêt à lier cette partie du programme aux autres :

— *problèmes élémentaires d'optimisation (programmation linéaire) mettant en jeu la convexité et des recherches de maxima et minima ;*

— *problèmes élémentaires d'interpolation et d'extrapolation des fonctions.*

Pratique de la méthode de substitution sur de nombreux systèmes d'équations affines fournis par des problèmes variés pouvant comporter jusqu'à quatre inconnues.

Equations et inéquations affines à deux inconnues.

L'objectif n'est pas d'apprendre des formules de résolution, mais d'organiser et de conjuguer des études numériques et des études graphiques.

Les formules de Cramer ne sont pas au programme, et les paramètres sont indésirables.

Le déterminant d'un système de deux équations affines à deux inconnues n'est propre qu'à renseigner a priori sur l'unicité éventuelle de la solution ; dans ce rôle il ne peut être en seconde qu'une notion marginale.

SEMINAIRE SUR LE NOUVEAU PROGRAMME DES CLASSES DE SECONDE

L'IREM de REIMS vous propose un séminaire sur le nouveau programme de seconde. Ce séminaire aura lieu le vendredi après-midi de 14 h 30 à 17 h 30 ; deux cycles de quatre séances sont prévus :

1er cycle : les vendredis 2, 9, 16 et 23 octobre 1981

2ème cycle : 4 vendredis au cours du deuxième trimestre de l'année scolaire 1981-82 (les dates seront choisies à l'issue du 1er cycle).

Ces séances seront organisées, aux dates ci-dessus, dans les trois centres suivants :

CHAUMONT - Lycée de Chaumont - 24 boulevard Voltaire
REIMS - à la Faculté des Sciences
TROYES - Lycée Marie de Champagne - 118 Bd Pasteur

Les objectifs de ce séminaire sont les suivants :

- une meilleure connaissance du programme et de ses implications pédagogiques
- un essai de définition d'un savoir "indispensable" en fin de seconde

La méthode de travail que nous proposons est la suivante :

- dès la première séance, les participants seront répartis en petits groupes travaillant sur différentes parties du programme ; les documents d'aide pédagogique publiés par les IREM seront mis à leur disposition.
- chaque groupe fournira, à la fin du premier cycle, une analyse des thèmes qu'il aura approfondis, cette analyse devant permettre de situer ces thèmes dans la formation ; l'ensemble de ces analyses sera fourni à chaque participant.
- le second cycle permettra l'échange d'expériences acquises par les enseignants au cours du premier trimestre et, à cette lumière, l'approfondissement des thèmes déjà abordés au cours des quatre premières séances de travail et l'étude de nouveaux thèmes.

Signalons que cette action se situe dans le cadre de l'objectif "Etude et critique des nouveaux programmes de mathématiques du second cycle" que s'est fixé l'IREM depuis plus d'un an.

...

Les enseignants intéressés par ce séminaire sont priés de remplir le questionnaire ci-dessous. Signalons que l'IREM remboursera dans la mesure du possible les frais de déplacements aux participants ne résidant dans aucune des trois villes concernées.

QUESTIONNAIRE A RETOURNER A L'IREM DE REIMS AVANT LE 30 JUIN 1980

NOM ET PRENOM : ....

ETABLISSEMENT : ....

Mettre une croix en face de la ville où vous désirez suivre le séminaire :

CHAUMONT ☐

REIMS ☐

TROYES ☐

Observations éventuelles :

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION

INSPECTION GÉNÉRALE

19 JAN. 1981

ER/CB

CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE
PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

. L'horaire hebdomadaire de la classe est de 6 heures.

. Des questions qui figurent dans diverses rubriques du programme étant destinées à s'interpénétrer, le professeur adoptera la répartition qui lui convient des différentes parties, en les scindant ou les menant de front. Il lui est demandé de ne sacrifier aucune rubrique, et il est précisé que l'équilibre du programme a été conçu sur la base de la moitié de l'horaire consacrée à l'analyse, d'une dizaine d'heures réservées aux statistiques, le reste allant à la géométrie.

. Comme en Seconde, les calculatrices seront largement utilisées.

Le choix des thèmes d'activités permettra de tenir compte des centres d'intérêt et des possibilités des élèves ; les listes proposées pour ce choix ne sont ni impératives ni exhaustives ; il n'est pas question de traiter tous les thèmes.

. Dans tout le programme, la mention "on admettra" ou "énoncé admis" se rapporte à une proposition pour laquelle le professeur décidera de l'opportunité d'une démonstration, étant entendu que celle-ci ne sera pas exigible au baccalauréat mais qu'en tout état de cause la signification de l'énoncé, sa portée et ses applications seront mises en évidence.

Les autres propositions seront, bien entendu, démontrées.

I.- SUITES NUMERIQUES

a.- Exemples de suites définies par des procédés divers : valeurs d'une fonction, méthodes itératives faisant intervenir la différence ou le rapport de deux termes consécutifs.

Suites monotones. Suites périodiques.

Exemples de suites tendant vers l'infini ; cas de la suite (na), $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $pa \leqslant x < (p+1)a$.

b. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Sur les exemples types $n \mapsto n$, $n \mapsto a^n$, on calculera les sommes de rang n, en vue d'applications numériques.

c.- Convergence d'une suite vers 0 : définition ; les suites qui convergent vers 0 sont bornées ; stabilité de la convergence vers 0 pour l'addition et pour la multiplication par une suite bornée (énoncés admis).

Convergence d'une suite : on dira que ℓ est limite de la suite (u_n) si $\lim (u_n - \ell) = 0$. La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive.

Justification d'une convergence vers 0 à l'aide d'une majoration des exemples simples, tels que $|u_n| \leqslant \frac{k}{n}$, $|u_n| \leqslant \frac{k}{10^n}$, permettront d'apprécier la rapidité de diverses convergences.

Thèmes (à titre indicatif) :

- Exemples d'encadrements d'un nombre réel exprimant une mesure (aire, volume,...).
- Exemples d'approximation (notamment par des suites adjacentes) d'un nombre réel solution d'une équation.
- Développements décimaux ; un développement décimal périodique caractérise un rationnel.

II.- FONCTIONS NUMERIQUES

. Les premiers éléments de l'étude d'une fonction (majorations, minorations, monotonie, sens de variation) ont été mis en place en Seconde ; on fera ressortir toute l'importance de l'étude numérique et de la représentation graphique.

. On illustrera l'étude des propriétés qui vont suivre au moyen des fonctions déjà étudiées en Seconde, et d'exemples numériques de fonctions affines par morceaux, de fonctions polynômes ou encore de fonctions telles que $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$.

a.- Applications définies sur un intervalle ; opérations sur ces applications.

Notations $f \geqslant 0, f \geqslant g$; applications bornées.

Notion d'application bijective (liée à la discussion d'une équation $f(x) = y$, où x est l'inconnue).

b.- Exemples d'étude conjointe de deux fonctions : l'une d'elles étant f, l'autre est par exemple : $|f|$, λf, $x \longmapsto f(x-\lambda)$, $x \longmapsto f(\frac{x}{\lambda})$.

Fonctions composées.

c.- Limite d'une fonction en un point : on commencera par le cas de la limite 0 au point 0 ; on définira $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ par $\lim_{h \to 0} f(a+h) = 0$; on dira que ℓ est limite de la fonction f au point a si $\lim_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$; on admettra des énoncés analogues à ceux qui ont été cités en I c.

Continuité en un point (développement limité d'ordre zéro) ; continuité sur un intervalle. Toute étude systématique de la continuité est hors du programme.

d.- Développement limité d'ordre un ; nombre dérivé, interprétations cinématique (vitesse) et géométrique (tangente) ; fonction dérivable sur un intervalle.

Règles de dérivation de la somme, du produit de deux fonctions, Dérivée de $x \longmapsto f\ (ax+b)$.

e.- Applications des dérivées à l'étude du sens de variation d'une fonction, à la recherche d'extremums, à la résolution d'équations et inéquations. On s'appuiera sur les trois propositions suivantes, qu'à ce niveau il est hors de propos de démontrer :

- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si sa dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

- Si f est dérivable sur I et si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

- Si f est dérivable sur $[a, b]$ $(a<b)$ et si f' est à valeurs strictement positives sur $]a,b[$, alors f établit une bijection strictement croissante de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Primitives d'une fonction continue : on admettra qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I, et on démontrera que chacune d'elles est déterminée par sa valeur en un point de I.

Cette notion de primitive permettra d'introduire la fonction logarithme népérien dès le début de la classe Terminale.

f.- Etude des fonctions sinus et cosinus : périodicité, parité, dérivées et primitives, représentations graphiques.

Thèmes (à titre indicatif) :

- Problèmes simples d'optimisation se ramenant à la recherche d'extremums de fonctions d'une variable.
- Recherche de limites de suites ou de fonctions à l'aide de développements limités d'ordre un.
- Obtention de majorations et d'encadrements à l'aide du calcul différentiel. A titre d'exemple, la chaîne d'inégalités valables pour tout $x \geqslant 0$:

  $\cos x \leqslant 1$; $\sin x \leqslant x$; $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$; etc.

- Calcul de valeurs approchées de fonctions.
- Exemples d'étude de mouvements rectilignes.
- Exemples d'étude de positions relatives de deux arcs de courbe.

III.- FONCTIONS POLYNOMES

a. Calcul sur les fonctions polynômes à une variable.

Factorisation par $x - a$.

b. Trinôme du second degré ; technique de la forme canonique ; application à la recherche du sens de variation, à la représentation graphique et à la résolution de l'équation du second degré ; somme et produit des racines.

Thèmes (à titre indicatif)

- Exemples de décomposition d'un polynôme en produit de polynômes de degré 1 ou 2.
- Exemples de séparation et de calcul approché des zéros d'une fonction polynôme.
- Détermination d'une fonction polynôme par des valeurs données (problème de l'interpolation).
- Constitution et utilisation de tables de différences finies.

IV.- STATISTIQUES

Etude de séries statistiques à une variable.

Fréquences, histogramme.

Eléments caractéristiques de description et d'analyse d'une série statistique : caractéristiques de position (médiane, moyenne) ; caractéristiques de dispersion (écart moyen, écart type).

Thème (à titre indicatif) ;

Le regroupement en classes ; ses effets sur les caractères quantitatifs.

V.- <u>GEOMETRIE PLANE.</u>

. Le professeur procèdera à un rappel rapide (sans démonstration) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle.

Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme ; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espace vectoriel que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan (§ V), de l'espace (§ VI).

. L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points.

a.- Colinéarité de deux vecteurs ; vecteurs directeurs d'une droite. Bases ; repères.

b.- Exemples de transformations du plan, définies par des procédés variés.

Exemples de composition de transformations, de décomposition d'une transformation ; exemples de groupes de transformations.

c.- Groupe des isométries du plan conservant un point donné ; décomposition d'une telle isométrie en un produit de symétries axiales ; partition du groupe en deux classes ; rotations.

Application linéaire associé à une isométrie admettant un point fixe.

d.- Orientation du plan.

e.- Applications du produit scalaire :

- Fonctions $M \to \alpha AM^2 + \beta BM^2$; théorème de la médiane.

- Formule $\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$; formules d'addition ; formules de multiplication par 2.

- Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

f.- Autres relations métriques dans le triangle :

$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin A \quad ; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r.$$

Thèmes (à titre indicatif) :

- Problèmes d'alignement et de concours ; rôle du calcul barycentrique dans ces problèmes.
- Problèmes de constructions : rôle des diverses méthodes (analyse des propriétés d'une configuration, recours à une transformation, emploi de l'outil algébrique,...)
- Problèmes de lieux géométriques.
- Problèmes de trajets de longueur minimale et de trajets de durée minimale : billard, réflexion, réfraction,...

VI.- <u>GEOMETRIE DANS L'ESPACE</u>

a.- Vecteurs de l'espace : extension de la définition et des opérations étudiées dans le plan.

Droite définie par un point et un vecteur ; plan défini par un point et deux vecteurs.

Bases ; repères.

b.- Extension du produit scalaire à l'espace.

Orthogonalité de deux vecteurs ; traduction vectorielle d l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan.

Plans perpendiculaires : définition, caractérisation.

Projection orthogonale d'un angle droit.

c.- Bases orthonormales ; repères orthonormaux ; expressions du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

Fonction $M \longmapsto \vec{K} \cdot \vec{OM}$; équations cartésiennes d'un plan ; distance d'un point à un plan.

d.- Orientation de l'espace ; bases orthonormales directes ; repères orthonormaux directs.

Produit vectoriel [notations : $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$].

Produit mixte.

Coordonnées du produit vectoriel et expression du produit mixte dans une base orthonormale directe.

e.- Sphère ; section plane ; plan tangent.

<u>Thème obligatoire dans la section E, facultatif dans les autres</u> :

(Représentation, à l'aide des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires, de polyèdres tels que tétraèdres réguliers, cubes, prismes, pyramides.
((Il n'est pas question de faire un cours de géométrie descriptive ; en particulier l'usage de la ligne de terre et des traces d'un plan est sans intérêt ; mais il est bon d'habituer les élèves à traiter par les techniques de l'épure des problèmes simples de constructions, en particulier ceux qui concernent l'intersection de deux plans, l'orthogonalité d'une droite et d'un plan).
(Exemples de détermination de sections planes de polyèdres.

<u>Autres thèmes</u> (à titre indicatif).

- Utilisation de transformations simples de l'espace, telles que translations et homothéties, pour la résolution de problèmes de constructions.
- Exemples de distance de deux parties de l'espace ; problèmes simples d'équidistance.
- Repérage d'un point sur une sphère.

PROGRAMMATION DE LA RECHERCHE DES DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER NATUREL SUR LA CALCULATRICE T.I. 57

A. JURION
Animateur IREM Informatique
Professeur
Collège de MONTHERME

Le travail s'est déroulé sur plusieurs séances dont le nombre a varié suivant le niveau des élèves (classe de C.P.P.N., club informatique avec des élèves de 4e et 3e et quelques professeurs, classe de 5e dans le cadre du soutien et de l'approfondissement).

Afin de conserver la généralité de l'aspect informatique, la trilogie "Organigramme, Programme, Instructions" a toujours été respectée, d'où un passage ultérieur plus facile sur d'autres matériels avec d'autres langages, ce qui sera fait prochainement en BASIC sur le micro-ordinateur TRS - 80.

D'autre part, la forme du travail a été très variée afin d'éviter la monotonie et surtout de provoquer une recherche active.

I ENCADREMENT DE CETTE LECON

1. Antérieurement

Recherche des diviseurs d'un nombre en mode calcul-notions revues ou abordées : diviseurs, nombres premiers, calculs directs en mémoires (avec les précautions à prendre), stockage et rappel du contenu des mémoires, boucles, tests, sous-programmes et étiquettes par la recherche de petits programmes tels que "multiples d'un nombre", "puissances successives d'un nombre" etc...

2. Postérieurement

Passage sur le micro-ordinateur, d'où initiation au langage BASIC pour la traduction. Etude d'autres programmes : générateur de nombres premiers, recherche du plus petit diviseur, autre que 1, d'un nombre.

II DEROULEMENT DANS LE CONTENU ET DANS LA FORME

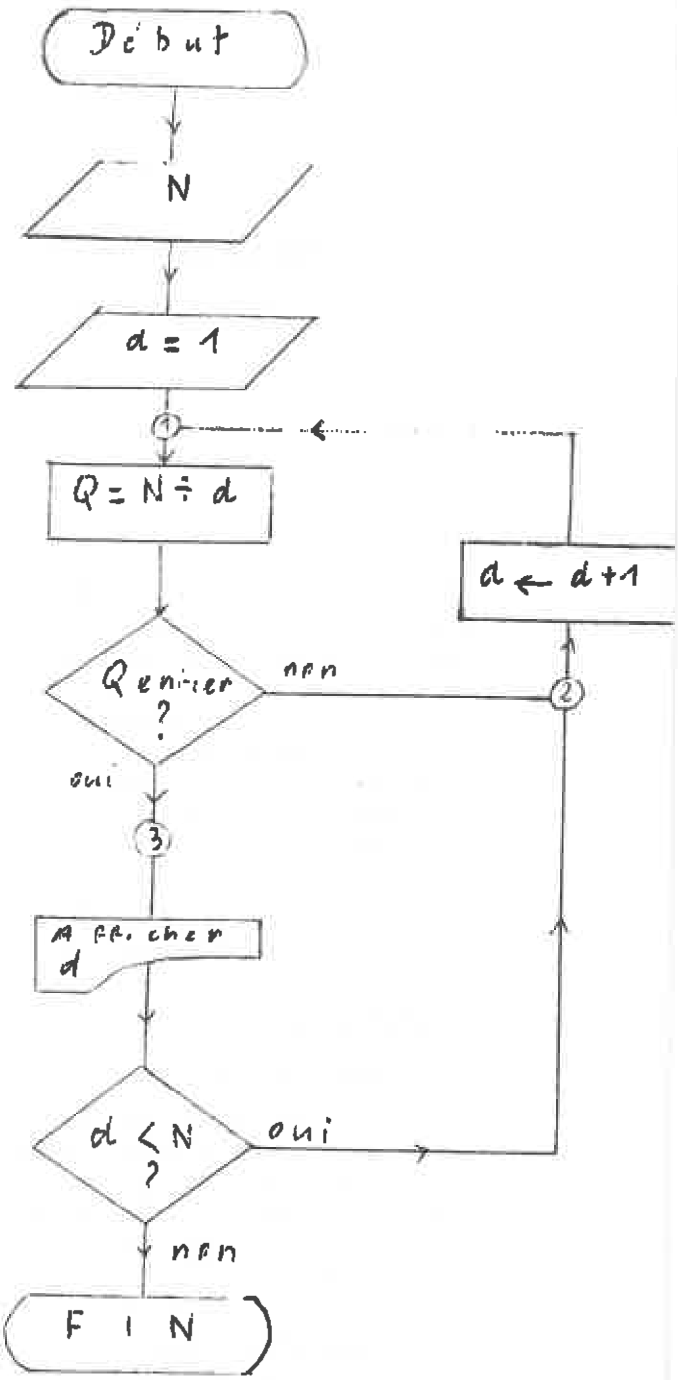
Dans la forme

Recherche par équipes de 3 ou 4 puis synthèse collective.
Plusieurs mises au point ont été nécessaires, elles ont été provoquées par les réactions des élèves :
- sens du mot "diviseur" : diviseur de la division, diviseur du nombre
- comment représenter la fin du calcul programmé (solution adoptée : afficher Ø)
- le problème des tests

Dans le contenu

1. Organigramme :
(analyse du problème : objectif pédagogique important).
La synthèse a donné l'organigramme suivant :
N : nombre à étudier
d : diviseur (division)
(1) : étiquette pour les sous-programmes

...



Dans un premier temps recherche individuelle puis par équipes (mise en commun).
La synthèse collective suscite des remarques :

2° Programme :

- nécessité de stocker dans des mémoires le nombre à étudier et le diviseur de la division (changement à chaque boucle)
- introduction d'étiquettes pour les renvois aux sous-programmes (ces étiquettes ont alors été introduites dans l'organigramme : voir ci-dessus)
-2nd pause est choisi plutôt que R/S pour afficher les diviseurs de N.

et des questions

- comment effectuer le test "Q est-il entier" ?

Ici abandon provisoire de la recherche du programme pour étudier de nouvelles touches de la machine.

...

Manipulations :

Sur plusieurs exemples découverte du rôle des touches (mode de calcul) : 2nd Int et INV 2nd Int.

Conclusion : comparer la partie "fractionnaire" du quotient et zéro.

Reprise de la recherche collective du programme : apparaît alors un problème qui a quelque peu dérouté les élèves

Pour que toute la classe ait une connaissance profonde du programme, un "jeu de rôle" est organisé avec plusieurs exemples (nombres pas trop grands), les partenaires changeant à chaque fois, le rôle des spectateurs étant de critiquer tout en effectuant le programme pas à pas sur la machine (touche SST en mode calcul) :

- un élève joue le rôle de donneur d'ordres (le pointeur)
- d'autres ceux de trois mémoires : M1 pour N, M Ø pour d, t pour les tests, chacun ayant en main un carton où il note les résultats appropriés.
- un autre joue enfin le rôle d'exécutant : il va chercher le contenu des mémoires, effectue les opérations commandées, échange certains contenus (x ⇄ t)...

Cette recherche particulière provoque par la suite des remarques qui sont exploitées en commun :

- possibilité de gains de temps par un test entre d et N/2 puis quand le diviseur "rejoint" le quotient.
- utilisation du calcul direct en mémoire : " 1 SUM Ø"
- affichages successifs de d et de Q.

Les transformations sont effectuées petit à petit mais elles soulèvent d'autres problèmes :

Deux tests sont effectués, l'un par rapport à zéro, l'autre par rapport à N. Comme il n'existe qu'un seul registre $\boxed{t}$ il est nécessaire à certains moments d'effacer le contenu de ce registre (touches 2nd Ct)

Le programme apparaît alors ainsi :

	Commentaires
STO 1	N est stocké en mémoire n° 1 (M1)
1	
STO Ø	d (diviseur de la division)
2nd LBL 1	étiquette (1)
RCL 1	
÷	division : Q = N ÷ d
RCL Ø	
=	
INV 2nd Int	Partie "fractionnaire" de Q
2nd Ct	efface le registre t
2nd x = t	la partie "fractionnaire" de Q est-elle nulle ?
GTO 3	si oui, aller au sous-programme (3)
2nd LBL 2	étiquette 2
RCL Ø	
+	
1	incrémentation de d
=	
STO Ø	
GTO 1	aller en (1)
2nd LBL 3	étiquette (3)
RCL 1	Rappel de N
x ⇄ t	N en t
RCL Ø	Rappel de d
2nd Pause	Affichage de d
2nd x = t	d = N ?
GTO 4	si oui aller en (4)
GTO 2	si non aller en (2)
2nd LBL 4	
Ø	Ø est affiché à la fin
R/S	
RST	pour étudier un nouveau nombre

- le calcul direct en mémoire nécessite l'effacement en fin de programme du contenu de ces mémoires (INV 2nd Ct) pour l'étude d'un nouveau nombre.
- les affichages de d et de Q provoquent pour des nombres tels que 64,9...l'apparition d'un double affichage de leur racine carrée, d'où l'introduction d'un nouveau test entre d et Q.

...

- pour 72 par exemple, le couple (9,8) est affiché puis le couple (8,9), pour l'émiminer on introduit le test entre Q et (d + 1) (sous - programme 2)

Ce qui aboutit au programme suivant :

STO 1	
2nd LBL 1	
1	} Incrémentation directe
SUM Ø	} de M Ø
RCL 1	
÷	
RCL Ø	
=	
STO 2	Q est stocké en M2
INV 2nd INT	
2nd Ct	
INV 2nd x = t	x est-il différent de Ø ?
GTO 3	si oui aller en (3)
RCL 2	} sinon
2nd Pause	} afficher Q
x ⇆ t	Q est envoyé en t
RCL Ø	rappel de d.
2nd x = t	d est-il égal à Q ?
GTO 4	si oui aller à la fin (évite répétitions)
2nd Pause	sinon affichage de d
2nd LBL 2	
+	}
1	} calcul de (d+1)
=	}
INV 2nd x ≥ t	d + 1 < Q ?
GTO 1	si oui aller en (1)
GTO 4	sinon aller en (4) : évite répétitions de couples
2nd LBL 3	
RCL 2	
x ⇄ t	Q en t
RCL Ø	
GTO 2	
2nd LBL 4	
Ø	Ø est affiché pour marquer la fin ;
INV 2nd Ct	efface les mémoires pour l'
R/S	étude d'un nouveau
RST	nombre

Les instructions sont élaborées individuellement

3. Instructions :

a. mettre la machine en mode programme : L R N

b. introduire le programme

c. revenir en mode calcul : L R N

...

d. taper le nombre N

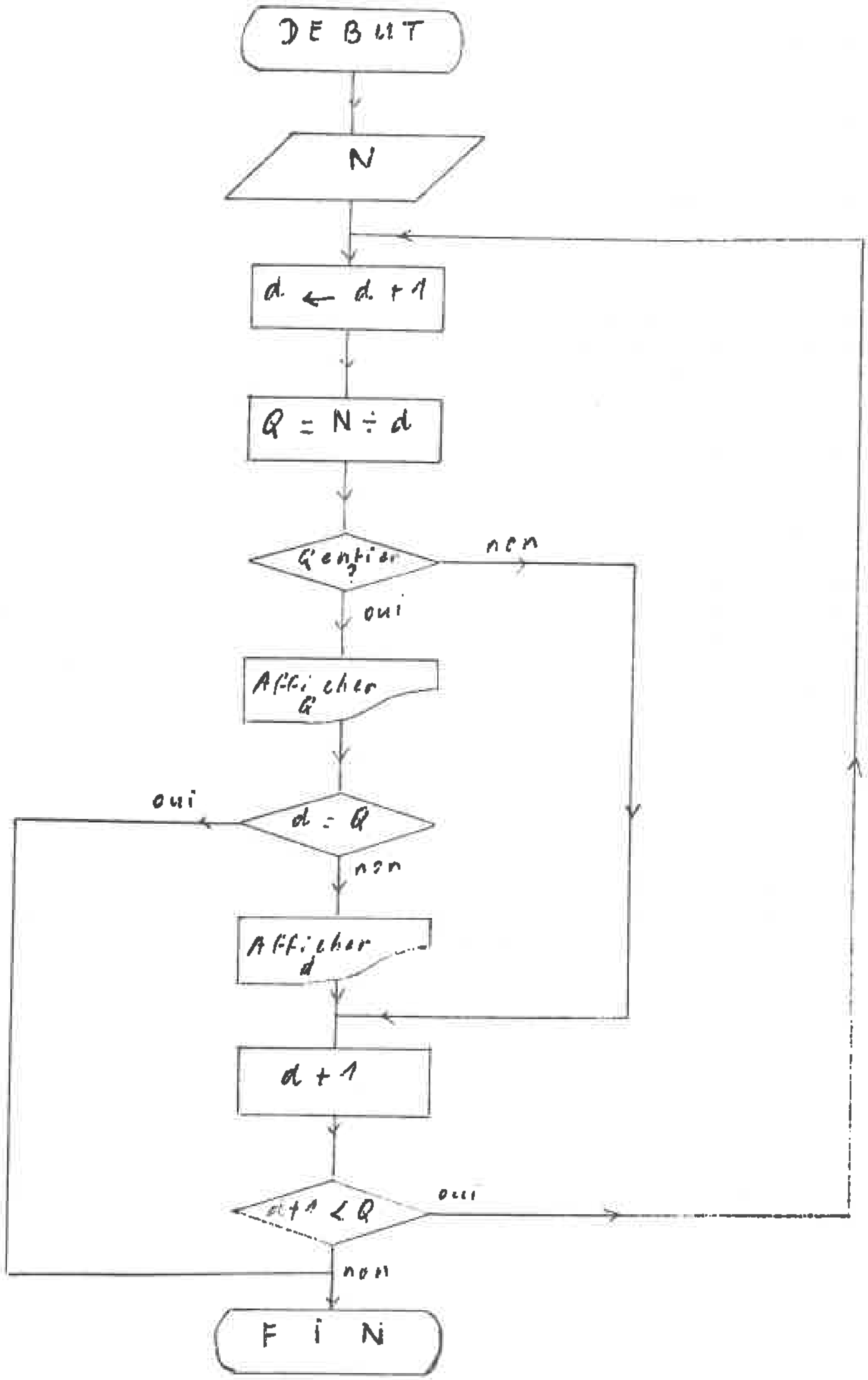
e. initialiser: R S T

f. lancer le calcul: R / S

Pour l'étude d'un nouveau nombre :
1. taper ce nombre

2. lancer le calcul: R/S

<u>Organigramme correspondant au dernier programme</u>



EXERCICES ET (à ?) HISTOIRE

La lecture d'un mot rapide de Jean HOUDEBINE (IREM de RENNES) rappelant aux participants du groupe 18 (analyse des erreurs) des Journées Nationales APMEP de Reims, une promesse d'échanges ultérieurs restée sans effet ; une quinzaine de jours de cours sans "thème exhaltant" pour un dévote de 1ère C ; deux raisons conjuguées qui m'ont conduit à proposer aux élèves le texte donné en annexe, accompagné des conditions suivantes :

- Liberté de fournir durant trois semaines toute solution fractionnée
- Possibilité de rendre au cours des trois semaines autant de solutions que chacun le désire pour chaque exercice.
- Notation du devoir simplement indicative du nombre d'exercices solutionnés.

Les différents exercices ont été (en principe) choisis pour observer et corriger des erreurs de typologie habituelle, mais dans un contexte en apparence détaché de l'apprentissage immédiat du cours, et des situations de répétition qu'un tel apprentissage engendre.

En bref, je souhaitais que la réflexion prenne le pas sur l'automaticité des réponses"en reflet", conformes à des modèles déjà rencontrés.

Premières observations :

- Pourquoi avoir choisi quelques textes de mathématiciens historiquement célèbres ? Peut-être parce que l'histoire des mathématiques est dans "l'air du temps" ; mais aussi certainement de manière inavouée parce que ce choix donne une apparence de sérieux à ce type de texte dont on n'est pas sûr qu'il ne suscite des réactions mitigées.

- La motivation au niveau des élèves a été nettement supérieure à ce qu'elle est pour un devoir habituel. Certains d'entre eux y ont consacré beaucoup de temps et ont fourni plusieurs solutions. L'idée de "textes historiques" a suscité un réel intérêt et soulevé de nombreuses questions.

- Curieusement les élèves ont accepté de ne pas trouver de solutions à certains exercices, sans essayer de reproduire servilement les solutions des autres. (le nombre moyen d'exercices traités par élève étant compris entre 3 , 4 ou 5).

- Un sous produit devenu inhabituel : la mise à contribution de parents (après tout Euler....ce n'est sans doute pas des maths modernes !), mais aussi celle de collègues (qui ont fourni eux aussi des solutions), les élèves ne faisant finalement confiance à quelques exceptions près qu'à leur propre jugement.

- Les avis des élèves sont partagés sur l'éventualité d'autres textes de cette nature dans l'année : "cela réclame beaucoup de travail" "il faut réfléchir"(sic) "cela permet de voir si on est malin" "c'est bien, mais juste une fois comme ça" "Et puis si on nous donne ça en devoir surveillé...". En fait, certains d'entre eux, souvent studieux, se trouvent insécurisés pas de tels exercices qui les entraînent leur semble-t-il hors de situations déjà connues.

...

LES SOLUTIONS QUI M'ONT ETE PROPOSEES :

EXERCICE A - Une dizaine de solutions diverses ! La présentation de la figure guidait vers une solution de type algébrique, mais l'éventualité de constuctions "à la règle et au compas" avait également été signalée.

- Les solutions algébriques :

1. on pose $\begin{cases} OM = x \\ ON = y \end{cases}$ par équivalence on est conduit à $\begin{cases} xy - a(x+y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1^2 \end{cases}$

2. on pose $\begin{cases} IM = x \\ KN = y \end{cases}$ on a immédiatement $xy = a^2$ on détermine $x + y$

3. on pose $\begin{cases} JM = x \\ JN = y \end{cases}$ on a immédiatment $x + y = 1$ on détermine xy

4. on pose $b = \text{mes } (\widehat{OMN})$ on prend comme inconnue $t = \text{tg}b$ (plus difficile ; la symétrie des solutions par rapport à la droite OJ aurait pu conduire à prendre comme inconnue auxiliaire $x = t + 1/t$)

5. utiliser la trigonométrie et déterminer cos b et sin b ($b = \text{mes } (\widehat{OMN})$)

Dans ces solutions algébriques deux difficultés sont apparues :

- En posant S somme des inconnues S se présentait comme solution d'une équation du second degré. Personne n'a jugé nécessaire de justifier le choix de la seule solution positive.
- le problème était paramétré. La figure jointe au texte, avec son existence de figure "vraie et fausse" a provoqué le refus de discussion : pourquoi discuter puisque le dessin prouve qu'il y a des solutions ! (la condition $1 \geqslant 2a\sqrt{2}$ n'apparaitra dans aucune copie. Ah, si le paramètre s'appelait m...)

- Une solution intermédiaire :

On pose $\vec{OI} = \vec{i}$ $\vec{OJ} = \vec{j}$ on prend pour repère $(J, \vec{i}, \vec{j})$. Soit L quatrième sommet du rectangle MONL. L a pour coordonnées x, y , L est alors point d'intersection éventuel du cercle (C) de centre O et rayon 1 (mesuré avec a pour unité !) et de la branche d'hyperbole (construite point par point)

$$\begin{cases} y = 1/x \\ x \quad 0 \end{cases}$$

Solution intéressante qui a induit pour 1 la nécessité d'être "assez grand" sans autre précision.

- Solutions géométriques :

J'ai également reçu quatre solutions de type "construction à la règle et au compas" de facturestrès différentes (et il en existe d'autres : n'hésitez pas, ressortez vos compas !).

Deux remarques sur ces solutions :

a. utilisation difficile du raisonnement par analyse-synthèse ("Ah bon, ça sert aussi en géométrie ?"). Dans tous les cas la figure du texte a servi de figure d'analyse. Sur la copie, ne figure que la synthèse (remise "au propre") en général sans explications ni justifications (on réussit la constmction, c'est donc que "cela marche"). Dans une seule copie figurait quelques reprises d'analyse en cours de synthèse. Là non plus aucune discussion sur l'existence de solutions (s'était-on arrangé pour que la construction s'achève bien ?).

...

b. La plus grosse difficulté pour ce type de constuction est la recherche "d'étapes clef" simples conduisant à la solution.

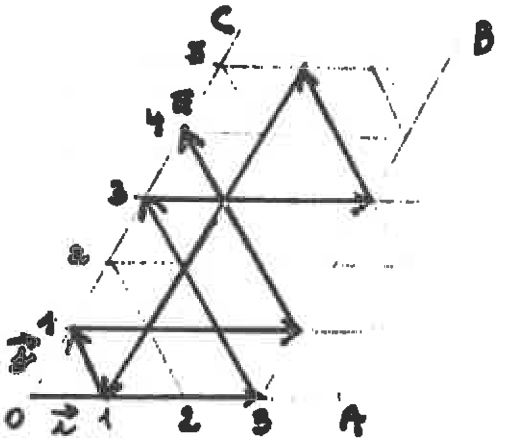
EXERCICE B - Aucune remarque sinon que seul un élève a vu l'utilisation astucieuse du point H de (AC) tel que $BH \perp AC$. C'est un exercice bien traité, de même que l'exercice E.

EXERCICE C - C'est un exercice que les élèves ont trouvé simple. Ils l'ont résolu par tatonnement. Personne n'a cherché de "méthode générale" (c'était sans doute inutile ici). La présentation d'une simulation par ricochets d'une boule sur un billard a pourtant soulevé de l'intérêt lors de la correction :

V_3, V_5, V_8 désignent les vases de capacités 3l, 5l, 8l. Désignons par x le contenu de V_3, y celui de V_5 , le contenu de V_8 est alors $8 - (x+y)$ avec $x \in \{0,1,2,3\}$ et $y \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
Considérons le point M de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(M désigne la future boule).

Quand on transvase de V_5 dans V_8 et réciproquement x reste constant ;
Quand on transvase de V_3 dans V_8 et réciproquement y reste constant ;
Quand on transvase de V_3 dans V_5 et réciproquement x+y reste constant ;

On privilégie aussi trois directions : celle des droites d'équations :
$x = k$, $y = k'$, $x+y = k''$. Pour que ces directions jouent des rôles analogues prenons $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et mes $(\vec{i}, \vec{j}) = 60°$



Tous les points M = (x,y) sont des sommets de mailles dans le "billard (OABC)". Le problème se résoud par "richochets" : on place la boule en (0,0), puis... (cf dessin), on s'arrête quand la boule passe par E.

V_3	0	3	0	3	1	1	0	3	$\boxed{0}$
V_5	0	0	3	3	5	0	1	1	$\boxed{4}$
V_8	8	5	5	2	2	7	7	4	$\boxed{4}$

Y a-t-il d'autres solutions ?
Quelle est la plus courte ?

EXERCICE D - Tous les élèves ont trouvé la solution, après beaucoup de discussions sur des ambiguités du texte. Le bon sens a prévalu : ne coupons pas les louis en quatre ! Autrement dit le texte suggère de résoudre dans $\mathbb{N}^3$. La présentation de la résolution se fait alors de manière plus ou moins astucieuse.

En conclusion, de tels problèmes présentent-ils de l'intérêt ? oui ? non ? Peu importe, j'ai corrigé ces devoirs avec un réel plaisir et cela aussi n'est pas nécessairement habituel...

N.B. A propos de l'exercice A la figure d'analyse complétée par symétrie par rapport à (OJ) se prête à de nombreux développements. Si le coeur vous en dit...
A bientôt pour les exprimer dans le bulletin IREM.

J.C. DANIEL
Antenne IREM Chaumont
Lycée de Chaumont
Bd Voltaire - 52000 Chaumont

EXERCICES PROPOSES EN CLASSE DE 2nde A . REACTIONS D'ELEVES

Exercice 1

Toto a mis dans une boite des araignées et des mouches. Il y en a 10 en tout. En comptant les pattes, il a trouvé 74. Combien y a-t-il de mouches ?

La seule difficulté rencontrée par les élèves a été de savoir combien chaque animal avait de pattes. Le choix de l'inconnue et la mise en équation ont été facilement réalisés.

Exercice 2

André Sanfrapé rencontre Gérard Manvusat et lui demande des nouvelles de sa famille :

- "Quel âge ont tes trois enfants ? "
- "Le produit de leurs âges est égal à 36", répond Gérard .
- "Ca ne me renseigne guère !".
- "C'est vrai ; mais la somme de leurs âges est justement le numéro de la maison devant laquelle nous nous trouvons".
- "Je ne peux toujours pas conclure".
- "J'ajoute que l'aîné mange du couscous".
- "Alors je sais !" s'exclame André".

Et vous, savez-vous quel est l'âge de chaque enfant et le numéro de la maison ?

Lecture de l'énoncé qui amène beaucoup de sourires puis les premières réactions suivantes :

- "Que viennent faire dans ce problème le "numéro de la maison" et le "couscous" ?
- "Ca ne me paraît guère possible car il n'y a pas assez de nombres dans l'énoncé"
- "Faut-il aussi donner l'âge du capitaine ?"
- "S'agit-il de personnes de nationalité algérienne ?".

Après qu'un élève eut lancé l'idée d'écrire toutes les décompositions du nombre 36 en produit de trois naturels, le problème a été alors assez facilement résolu, encore que le rôle du "numéro de la maison" n'ait pas été compris à la première explication par tous les élèves.

Exercice 3

Un tracteur a des roues avant de 60 cm de diamètre et des roues arrière de 1,10 m de diamètre. Quand la roue avant a fait 50 tours de plus que la roue arrière, de combien a avancé le tracteur ?

Cet exercice a paru très difficile aux élèves : aussi bien le choix de l'inconnue que la mise en équation et les calculs.

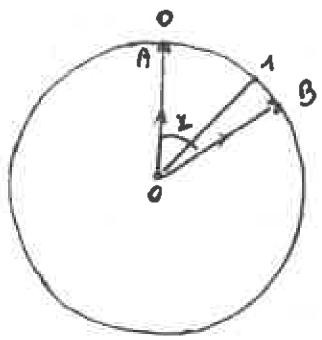
...

Exercice 4

A O heure les aiguilles d'une montre sont superposées. A quelle heure le seront-elles de nouveau ?

Après la lecture de l'énoncé, réponse immédiate d'un élève : " a 1 h 5 mn". Réaction d'un autre élève : "Non ! un peu après 1 h 5 mn, plutôt 1 h 6 mn". L'ensemble de la classe reconnait alors la nécessité de faire une étude mathématique du problème.

La solution ci-dessous a posé beaucoup de problèmes de compréhension aux élèves :



soit X : mesure en degrés de $\widehat{AOB}$

$$60 + \frac{60\,X}{360} = 12 \times 60\,\frac{X}{360}$$

$$X = \frac{360}{11}$$

Temps écoulé entre 0 heure et l'heure de la première nouvelle superposition des aiguilles : $\frac{720 \text{ mn}}{11}$ soit 65 mn 27 " 2727....

soit 1 h 5 mn 27 sec. 2727....

Exercice 5

Une poule et demi pond un oeuf et demi en un jour et demi. Combien pondent neuf poules en neuf jours ?

Réponse intuitive d'un élève : "Il y a proportionalité donc : 1 poule pond 1 oeuf en 1 jour et donc (après quelques calculs) 9 poules pondent 81 oeufs en 9 jours".

On écrit alors au tableau :

1/2 poule pond 1 1/2 oeuf en 1 1/2 jour (énoncé)
1 poule pond 1 oeuf en 1 jour (première réponse de l'élève)
9 poules pondent 81 oeufs en 9 jours (2ème réponse de l'élève)

Un autre élève remarque : "S'il y avait proportionalité, on devrait avoir :

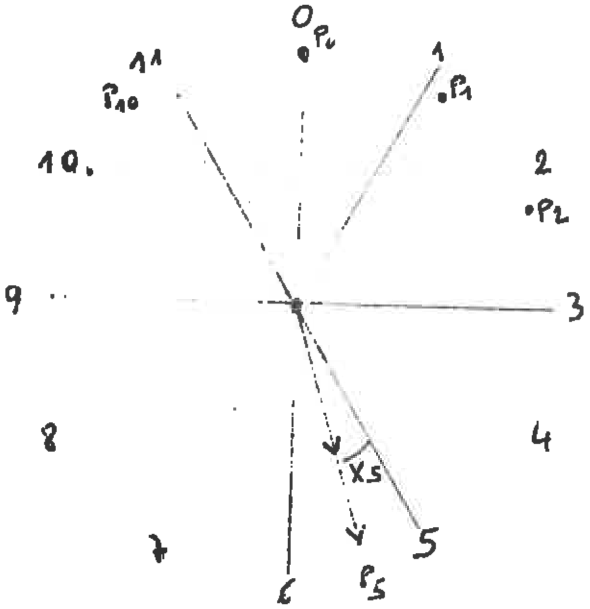
"9 poules pondent 9 oeufs en 9 jours".

Les élèves acceptent alors qu'il n'y a pas proportionalité sur les trois variables : poule - oeuf - jour, mais sur deux seulement, la troisième étant constante (mais pas n'importe lesquelles !)

Généralisation de l'exercice 4 (non proposé aux élèves).

Déterminer toutes les dates entre 0 h et 12 h, où les deux aiguilles d'une montre sont superposées.

...



Soit P_n la position de coïncidence des deux aiguilles, située entre l'heure n et l'heure (n + 1), $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots 10.$

Il y a 11 superpositions.

Soit X_n la mesure en degré de l'angle que fait "l'heure n" avec P_n :

$$\frac{X_n}{30} = \frac{(n \times 30) + X_n}{360}$$

d'où

$$X_n = \frac{30}{11} \times n$$

Temps écoulé entre l'heure n et l'heure de coïncidence P_n

en mn : $5n + \frac{60 \times X_n}{360}$ soit $\frac{60n}{11}$

soit 5 mn 27 sec. 2727.....

Les dates de coïncidence sont :

$\left(\frac{60n}{11}\right)'$, $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots 10$, d'où

P_0 = 0 h
P_1 = 1 h 5 mn 27 " 2727....
P_2 = 2 h 10 mn 54 " 5454....
....
P_{10} = 10 h 54 mn 32 " 7272...

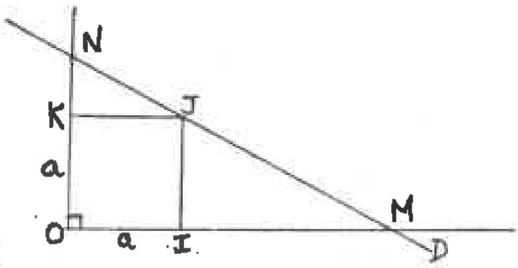
P. BRESSON
Antenne IREM (Chaumont)
Professeur de Math
Lycée Polyvalent
BD Voltaire - 52000 CHAUMONT

Problèmes proposés par P. BRESSON

A. - PROBLEME DE PAPPUS (Mathématicien de l'école d'Alexandre 4ème siècle après J.C.)

On considère le carré (OIJK) de côté a. Une droite D, passant par J coupe les 1/2 droites ox et oy en M et N.

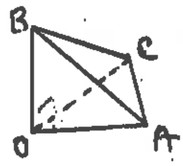
Peut-on déterminer cette droite de façon que le segment [MN] ait une longueur donnée 1 ?



B. - A PROPOS D'UN PARALLELEPIPEDE

On considère dans l'espace le "coin" de parallélépipède rectange O,A,B,C, avec OA = a, OB = b, OC = c. On désigne par S_1, S_2, S_3, S_4 les aires des triangles OBC, OAC, OAB et ABC.

Etablir que $S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.



C. - PROBLEME DE TARTAGLIA ("Le bègue") mathématicien italien (16e siècle)

Un vase de 8 litres est rempli d'eau. On dispose de deux autres vases vides de 5 et 3 litres. Pouvez-vous obtenir par transvasement deux fois 4 litres ?

D. - PROBLEME DE L. EULER (1707-1783)

Trois personnes jouent ensemble. A la première partie, la première personne perd au profit des deux autres autant d'argent que chacun d'eux en possède. A la deuxième partie, la deuxième personne perd au profit des deux autres autant d'argent qu'elles en ont à présent. Enfin à la troisième partie, la première et la deuxième personne gagnent chacune sur la troisième autant d'argent qu'elles en avaient avant.
La partie se termine alors et les joueurs découvrent qu'ils ont tous une somme égale, soit 24 louis chacun. Combien chacun avait-il d'argent en venant jouer ?

E. - PROBLEME CONTEMPORAIN

Un puits de pétrole est foré en plaine dans un champ rectangulaire en un point situé exactement à 2100 mètres d'un coin, 1800 mètres du coin opposé et 600 mètres d'un troisième coin. A quelle distance du 4ème coin se trouve ce point ? Les lecteurs qui résoudront ce problème rencontreront une formule générale d'une "délicieuse simplicité".

SUR LES QUATERNIONS

J.P. CORTIER
Animateur IREM
Professeur Lycée M. de Champagne - Troyes

Aujourd'hui les quaternions interviennent de deux façons : la première en tant que fournissant un corps non commutatif, extension de $\mathbb{R}$, de degré 4 ; ce n'est probablement pas la plus importante. Le rôle des quaternions à cet égard est clarifié par un théorème de FROBENIUS (1849 - 1917) qui est l'objet de cet exposé. Une démonstration plus savante se trouve dans BOURBAKI [1].

La deuxième voie par laquelle les quaternions entrent dans l'activité scientifique est liée au fait qu'il existe sur S^3 (la sphère unité de $\mathbb{R}^4$) une structure de groupe, lequel se rattache à la définition par la considération du groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 : ce groupe est "presque" isomorphe au groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ en un sens qui sera précisé par la suite (pourcela voir II).

Enfin, les quaternions ont une importance considérable en mécanique quantique.

On se propose de développer quatre points :

I - Historique des quaternions

II - Quaternions et rotations

III - Quaternions et mécanique quantique

IV - Démonstration du théorème de FROBENIUS.

.../...

I - HISTORIQUE

Le créateur des quaternions, Sir HAMILTON William Rowan né à Dublin (1805 - 1865) s'est penché (outre ses travaux sur les irrationnels) sur l'algèbre des couples.

HAMILTON, dans son livre "Algebra as the Science of Pure Time", développe les nombres complexes en terme de couples de nombres réels, d'une manière identique à celle utilisée aujourd'hui : il introduit les opérations suivantes sur les couples de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \\ (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', a'b + ab') \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2, +, \times)$ ainsi créé donne le corps des nombres complexes $(\mathbb{C}, +, \times)$ avec (a, b) équivalent à la notation connue $a + ib$.

Il est à noter qu'il n'existe pas de structure de corps sur $\mathbb{R}^3$ (l'addition provenant de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$). Pour cela, on pourra consulter (2). HAMILTON porte ses efforts sur la recherche d'un corps qui soit un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, l'addition étant commune aux deux structures. C'est ainsi qu'il découvre et construit le corps H des quaternions (Lectures on Quaternions, 1853).

Si $(1, i, j, k)$ est une base de l'espace vectoriel H sur $\mathbb{R}$, il associe à l'élément (t, x, y, z) de $\mathbb{R}^4$ le quaternion $q = t + xi + yj + zk$; $\mathbb{R}$ se trouve alors identifié au sous-espace de H engendré par 1 et les opérations sont définies par :

$$\begin{cases} (t, x, y, z) + (t', x', y', z') = (t + t', x + x', y+y', z+z') \\ \text{et} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ ; \ ij = k = -ji \ ; \ jk = -kj = i \\ \qquad ki = j = -ik \end{cases}$$

.../...

Alors H est un corps non commutatif dont le centre (le centre d'un anneau (A, +, x) est l'ensemble des éléments de A qui commutent au sens de la multiplication avec tous les éléments de A) est $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est donc un sous-corps de H dont la dimension en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est 4 ; on dit que H est une extension de $\mathbb{R}$ de degré 4.

Remarquons que H contient une infinité de sous-corps isomorphes à $\mathbb{C}$: par exemple les sous-corps $\mathbb{R}[i]$, $\mathbb{R}[j]$, et $\mathbb{R}[k]$ où, si $a \in H$, $\mathbb{R}[a]$ désigne le sous-corps engendré par 1 et a. ($\mathbb{R}[a]$ est encore le plus petit sous-corps de H, au sens de l'inclusion, contenant 1 et a).

Notons enfin que, de même que l'on présente, dans certains manuels du 2ème cycle, $\mathbb{C}$ comme un sous-ensemble de $(\mathcal{M}(2, \mathbb{R}), +, \times)$ avec $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, l'on peut représenter H comme le sous-espace de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

II - QUATERNIONS ET ROTATIONS

Un des intérêts des quaternions est de représenter paramétriquement le groupe $O^+(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ (de même que $U = S^1 = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$ donne une représentation de $O^+(2)$. En effet, comme l'indique M. BERGER dans [3], les paramétrisations facilitent le calcul de la composée de rotations de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on identifie H à $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\, i \oplus \mathbb{R}\, j \oplus \mathbb{R}\, k$ et $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}\, i \oplus \mathbb{R}\, j \oplus \mathbb{R}\, k$.

Si $q = t + xi + yj + zk$ est un élément de H, on note $\bar{q} = t - xi - yj - zk$, et $q \longmapsto \|q\| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q\bar{q}}$ est une norme sur H dérivant du produit scalaire $q.r = \frac{1}{2}\left[\bar{q}r + \bar{r}q\right]$ qui munit H d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

$S^3 = \{ q \in H, \|q\| = 1 \}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $H^* = H / \{o\}$ ce qui permet d'affirmer que S^3, la sphère unité de $\mathbb{R}^4$, peut être munie d'une structure de groupe et on a le théorème :

THEOREME : Soit $s \in S^3$ et φ_s l'endomorphisme de H défini par
$\varphi_s(q) = sqs^{-1}$

- Alors φ_s laisse $\mathbb{R}^3$ stable et $\rho_s = \varphi_s/_{R^3}$ est un élément de $O^+(3)$
- L'application $\left| \begin{array}{l} S^3 \longrightarrow O^+(3) \\ s \longmapsto \rho_s \end{array} \right.$ est un homomorphisme surjectif de groupe de noyau $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{-1, 1\}$
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in R^3 - \{o\}$ et $s = \alpha + u$ avec $s \in S^3$.

  L'axe de la rotation ρ_s est la droite de $\mathbb{R}u$ et la mesure de l'angle θ de ρ_s est donnée par $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\|u\|}{|\alpha|}$ si $\alpha \neq 0$,

  et $\theta = \pi$ si $\alpha = 0$.

  $\theta \in [0, \pi]$

Pour la démonstration, on pourra consulter (3).

Par exemple : si $s = k$ on obtient la rotation de π autour de l'axe des z,

et si $s' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)$, $\rho_{s'}$ est la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des z.

Réciproquement, si r désigne la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe la droite $\mathbb{R}u$ avec $u = i + j + k$, et de mesure $\frac{\pi}{3}$, on peut écrire $r = \rho_{s_1}$ avec $s_1 = \frac{1}{\sqrt{12}}(3 + i + j + k)$.

.../...

Par suite, si on note $r' = \rho_{s'}$ avec $s' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)$, on a, en appliquant le théorème :

$$r' o r = \rho_{s'} o \rho_{s_1} = \rho_{s's_1} \quad \text{avec} \quad s's_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 + j + 2k)$$

$r' o r$ est donc la rotation d'axe $\mathbb{R}\,(j + 2k)$ et d'angle de mesure θ avec $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{5}$.

III - QUATERNIONS ET MECANIQUE QUANTIQUE.

L'homomorphisme $S^3 \longmapsto O^+(3)$ décrit dans le théorème énoncé en (II) a présenté une importance considérable en mécanique quantique (PAULI-DIRAC vers 1927) où elle est indispensable à la description du Spin S d'un électron. Pour plus de précision on peut consulter n'importe quel livre de mécanique quantique.

En particulier, il est souvent commode d'introduire dans cette théorie, l'opérateur σ tel que $S = \frac{h}{2}\sigma$ où h est la constante de PLANCK, dont les composantes sont les matrices de PAULI

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où } i \in \mathbb{C}.$$

Elles vérifient les relations :

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \\ \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i \end{cases}$$

et celles qui s'en déduisent par permutation circulaire et l'application $t + xi + yj + zk \longmapsto \frac{1}{i}\begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix}$ définit un isomorphisme de H sur le corps des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes du type ci-dessus.

IV - THEOREME DE FROBENIUS.

Il est proposé ici une démonstration simple, sans doute non originale, du théorème de FROBENIUS.

.../...

THEOREME : Soit K un corps non commutatif de centre le corps des nombres réels et de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Alors K est isomorphe au corps des quaternions.

Rappelons tout d'abord :

Si K et L sont deux corps tels que L soit un sous-corps de K, on dit que K est une extension de L. On peut alors considérer K comme un espace vectoriel sur L ; la dimension de cet espace, lorsqu'elle est finie, est notée $[K : L]$, et s'appelle le degré de K sur L. Nous démontrons auparavant un résultat qui sera utilisé dans la démonstration du Théorème.

LEMME : Tout corps commutatif K admettant $\mathbb{R}$ comme sous-corps et de degré fini sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$.

Preuve du LEMME :

Posons $[K : \mathbb{R}] = n$ et soit $x \in K$. $\mathcal{S} = \{1, x, ---, x^n\}$ est un système de n+ 1 vecteurs de K, donc $\mathcal{S}$ est un système lié. On a déduit l'existence de $(\alpha_0, ---, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tel que $\alpha_0 + \alpha_1 x + --- + \alpha_n x^n = 0$. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ (anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels). On a $P(x) = 0$. De $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{C}$ corps algébriquement clos on tire $P(X) = a \prod_{j=0}^{n} (X - a_j)$ avec a et a_j éléments de $\mathbb{C}$. Mais $0 = P(a_j) = \overline{P(a_j)} = \overline{P}(\overline{a_j}) = P(\overline{a_j})$ car $P \in \mathbb{R}[X]$, d'où si a_j est une solution dans $\mathbb{C}$ de $P(X) = 0$, $\overline{a_j}$ l'est aussi, ce qui permet, en regroupant les termes, d'écrire

$P(X) = a \prod_k (X^2 + s_k X + t_k) \prod_\ell (X - \alpha_\ell)$ avec

$(s_k, t_k) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$. Comme $P(x) = 0$, x annule un terme de la forme $X - \alpha_\ell$ ou de la forme $X^2 + s_k X + t_k$:

.../...

dans le premier cas $x = \alpha_\ell \in \mathbb{R}$,

dans le deuxième cas : $x^2 + s_k x + t_k = 0$.

.Si tous les éléments x de K vérifient le premier cas, on a $K = \mathbb{R}$.

. S'il existe un élément x de K, qui n'est pas dans $\mathbb{R}$, il vérifie alors nécessairement le 2ème cas.

Soit x_o un tel élément. On a :

$$x_o^2 + s_k x_o + t_k = 0 = \left(x_o + \frac{s_k}{2}\right)^2 + t_k - \left(\frac{s_k}{2}\right)^2$$

donc x_o vérifie $\left(x_o + \frac{s_k}{2}\right)^2 = \left(\frac{s_k}{2}\right)^2 - t_k = \alpha \in \mathbb{R}_-^*$

Puisque $x_o \notin \mathbb{R}$, et par suite il existe un élément

$$c = \frac{x_o + \frac{s_k}{2}}{\sqrt{-\alpha}}$$

dans k tel que $c^2 = 1$.

Il est clair alors que $\mathbb{R}[c] \subset K$ et tout élément de K est dans $\mathbb{R}[c]$.

En effet, si $x \in K$, x est élément de $\mathbb{R}$ sinon il vérifie une équation du type $x^2 + ax + b = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et en reprenant le raisonnement on a :

$(x + \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 - b \in \mathbb{R}_-^*$, c'est-à-dire $(x + \frac{a}{2})^2 = -\alpha'$ avec $\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$ et $x = -\frac{a}{2} + \epsilon c\sqrt{\alpha'} \in \mathbb{R}[c]$ $(\epsilon = \pm 1)$, ce qui termine la démonstration du lemme.

<u>Preuve du Théorème de FROBENIUS</u> :

Soit K un corps non commutatif répondant aux hypothèses du Théorème.

(1) <u>Il existe un élément a de $K \setminus \mathbb{R}$ tel que $a^2 \in \mathbb{R}$</u>

Soit $a' \in K \setminus \mathbb{R}$. On considère $\mathbb{R}[a']$ le plus petit sous-corps de K contenant $\mathbb{R}$ et a'.

$\mathbb{R}[a']$ est une extension commutative de $\mathbb{R}$ d'où, d'après le lemme,

$[\mathbb{R}[a'] : \mathbb{R}] = 2$

($\mathbb{R}[a']$ est une extension de degré finie de $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[a'] \subset K$, et $a' \notin \mathbb{R}$); a' vérifie une équation du type $a'^2 + ra' + s = 0$ avec $(r, s) \in R^2$; or :
$a'^2 + ra' + s = \left[a' + \frac{r}{2}\right]^2 + s - \frac{r^2}{4}$, d'où, en posant $a = a' + \frac{r}{2}$, $\mathbb{R}[a'] = \mathbb{R}[a]$ avec $a^2 = \frac{r^2}{4} - s \in \mathbb{R}$. Dans ce qui suit, a est un élément fixe de $K \setminus \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 \in \mathbb{R}$.

(2) Soit σ l'automorphisme intérieur de K défini par

$K \longrightarrow K$

$x \longmapsto \sigma(x) = axa^{-1}$

σ possède les propriétés suivantes : pour tout (x, y) de K^2 :

(i) $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$

(ii) $\sigma(xy) = \sigma(x)\,\sigma(y)$

(iii) $\sigma/_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$

(iv) $\sigma^2 = id_K$

σ est en particulier un automorphisme d'espaces vectoriels réels.

Seul (iv) nécessite une démonstration :

$\sigma^2(x) = a\,(ax\,a^{-1})a^{-1} = a^2x\,(a^{-1})^2$;

Or $a^2 \in \mathbb{R}$ qui est le centre de H, d'où $\sigma^2(x) = xa^2\,(a^{-1})^2 = x$.

σ étant en particulier un automorphisme involutif d'espace vectoriel, on est amené à poser : $K+ = \{x \in K, \sigma(x) = x\}$,

$K- = \{x \in K, \sigma(x) = -x\}$;

d'où $K = K+ \oplus K$:

En effet, $K+ = \mathrm{Ker}(\sigma - id_K)$ et $K- = \mathrm{Ker}(\sigma + id_K)$ sont deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel K ; d'autre part, $K+ \cap K- = \{0\}$ et de $x = \frac{x + \sigma(x)}{2} + \frac{x - \sigma(x)}{2}$ on déduit $K = K+ \oplus K-$. On remarque que K+ est un sous-corps de K, corps des éléments invariants par σ.

3 - K- est un K+ espace vectoriel de dimension 1 sur K+.

En effet, $K+ \times K- \longrightarrow K-$
$(x, x') \longmapsto xx'$

car $\sigma(xx') = \sigma(x)\ \sigma(x') = x\ (-x') = -xx'$

Donc, muni de cette multiplication externe K- est un K+ espace vectoriel. K- contient au moins un élément non nul b, sinon $K- = \{0\}$ et $K = K+ \oplus K- = K+$ ce qui donne, pour tout x de K, $\sigma(x) = ax\ a^{-1} = x$, ou encore $xa = ax$; donc a est élément du centre de K, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, ce qui est exclu.

Soit $b \in K- \setminus \{0\}$ et $y \in K-$, alors :
$y\ b^{-1} \in K+$, car $\sigma(y\ b^{-1}) = \sigma(y)\ \sigma(b^{-1})$ avec
$\sigma(b^{-1}) = (\sigma(b))^{-1}$ donc :
$\sigma(y\ b^{-1}) = \sigma(y)\ (\sigma(b))^{-1} = -y\ (-b)^{-1} = y\ b^{-1}$.
Pour tout y de K-, on a : $y\ b^{-1} \in K+$, ce qui assure : $K- = K+\ b$.

4 - $K+ = \mathbb{R}[a]$.

En effet, K+ est un corps qui contient $\mathbb{R}$ et a ($\sigma(a) = a$) donc $\mathbb{R}[a] \subset K+$.

Soit $c \in K+ \setminus \mathbb{R}[a]$, alors $ac = ca$.

Soit $\mathbb{R}[a, c]$ le plus petit sous-corps de K contenant $\mathbb{R}$, a, et c. $\mathbb{R}[a, c]$ est un corps commutatif, car $ac = ca$, et l'on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[a, c] \subset K$. Donc $\mathbb{R}[a, c]$ est de degré fini sur $\mathbb{R}$. D'après le lemme $[\mathbb{R}[a, c] : \mathbb{R}] = 2$ car $\mathbb{R}[a] \subset \mathbb{R}[a,c]$. D'autre part, comme $[\mathbb{R}[a] : \mathbb{R}] = 2$, on a $\mathbb{R}[a, c] = \mathbb{R}[a]$ d'où $c \in \mathbb{R}[a]$ ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $K+ = \mathbb{R}[a]$, $[K+ : \mathbb{R}] = 2$ et

$K+ = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a$, car K+ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

.../...

(5) - CONCLUSION -

On en conclut que :

$K = K_+ \oplus K_- = K_+ \oplus K_+ b = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \mathbb{R}ab$, ce qui implique que K est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont une base est (1, a, b, ab).

On a $\in K \setminus \mathbb{R}$ et $a^2 \in \mathbb{R}$ donc $a^2 = \alpha \in \mathbb{R}_-^*$.

L'élément b de $K_- = K_+ b$ vérifie $ab = -ba$ d'où :

$ab^2 = -bab = -b(-ba) = b^2a$, donc $b^2 \in K_+ = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a$.

D'autre part, $\mathbb{R}[b]$ étant un corps commutatif de degré fini sur $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[b] \subset K$, $\mathbb{R}[b]$ est de degré fini sur $\mathbb{R}$ donc de degré 1 ou 2 d'après le lemme. Comme $b \notin \mathbb{R}$ (car $b \in K_-$) on a $[\mathbb{R}[b] : \mathbb{R}] = 2$ et par suite $\mathbb{R}[b] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}b$; b^2 s'écrit donc :

$b^2 = x + ya = x' + y'b$ avec $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$. Puisque (1, a, b, ab) est une base de K sur H, on obtient :

$x = x'$, $y = y' = 0$ d'où $b^2 = x = x' \in R$ et de même, puisque $b \notin \mathbb{R}$, $b^2 = \beta \in \mathbb{R}_-^*$.

Posons : $i = \dfrac{a}{\sqrt{|\alpha|}}$, $j = \dfrac{b}{\sqrt{|\beta|}}$ et $k = i.j$

Alors : $i^2 = \dfrac{a^2}{|\alpha|} = -1 \quad j^2 = \dfrac{b^2}{|\beta|} = -1$

$$ij = \frac{ab}{\sqrt{|\alpha|}\sqrt{|\beta|}} = \frac{-ba}{\sqrt{|\beta|}\sqrt{|\alpha|}} = -ji$$

$$k^2 = i\,j\,i\,j = i\,(j\,i)\,j = i\,(-\,i\,j)\,j = -1$$

$$ik = i\,(ij) = i^2\,j = -\,j = -\,ki\ ;$$

$$j\,k = j\,(ij) = -\,ij\,j = i = -\,kj$$

ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] BOURBAKI , Algèbre, chapitre 8, Modules et anneaux semi simples

[2] DIEUDONNE J. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, HERMANN,1964

[3] BERGER M. Géométrie, Volume 2, Cedic NATHAN.

PROGRAMMES, INSTRUCTIONS : BIBLIOGRAPHIE

par M. MARECHAL
Animateur IREM
Professeur EN Charleville

Vous possédez une calculatrice de poche. Vous n'osez pas vous lancer dans les calculatrices programmables. Vous voulez exploiter à fond les possibilités de votre TI : Ces ouvrages peuvent vous intéresser.

1. MATHEMATIQUES ET CALCULATRICE DE POCHE G. NOEL-J. BASTIER
Technique et Vulgarisation

Excellent ! Rédigé par des collègues de l'IREM de Bordeaux. De nombreuses parties accessibles sans calculatrice programmable. Nécessite une bonne connaissance de sa machine.

2. LRN, TOUT UN PROGRAMME R. DIDI - M. FERRANT - BORDAS

Très intéressant. S'adresse aux possesseurs de TI. L'étude des différentes touches s'effectue de manière progressive. De nombreux exemples de programmes.

3. PROGRAMMEZ VOTRE CALCULATRICE DE POCHE R. CHASSINAT - Technique et Vulgarisation

Intéressant mais la présentation en rend la lecture difficile.

4. AVENTURES AVEC VOTRE CALCULATEUR adaptation M. GLAYMAN - CEDIC

Une mine de situations à explorer. Contient les réponses et des commentaires.

5. TENTEZ VOTRE CHANCE AVEC VOTRE CALCULATEUR PROGRAMMABLE
adaptation M. GLAYMAN - CEDIC

Une excellente introduction aux probabilités et à la statistique. Problèmes et commentaires.

6. PUBLICATIONS APM n° 20, 24 et 31

Caractère essentiellement pédagogique.

7. a. JEUX ET STRATEGIE (bimensuel)

b. SCIENCE ET VIE (mensuel)

Rubriques informatiques.

B I B L I O T H E Q U E

ABONNEMENTS REVUES

- REVUE FRANCAISE DE PEDAGOGIE - PARIS
- JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION - USA
- EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS - HOLLANDE
- PETIT ARCHIMEDE - AMIENS

ABONNEMENT CULTURE : CEDIC

OUVRAGES- NOUVELLES ACQUISITIONS

- (AUTO) CRITIQUE DE LA SCIENCE - par A.Jaubert/J.M.Levy-Leblond-Sciences
- PHILOSOPHIE DE LA PHYSIQUE - par Mario Bunge - Editions du Seuil
- "HAHA" OU L'ECLAIR DE LA COMPREHENSION MATHEMATIQUE - par M. GARDNER
- OBSERVER POUR EDUQUER - par J.M. DE KETELE - Coll. Explor.Rech. Sciences Ed.
- PREMIERES LECONS DE PROGRAMMATION - par J. Arsac - CEDIC
- LES ORDINATEURS - par W. Mercouroff - CEDIC
- LIRE BASIC - par F.M. Blondel - CEDIC
- LIRE LSE - par C. Lafond - CEDIC
- DE THALES A EINSTEIN - par J. Rosmorduc - Ed. Etudes Vivantes
- CONTRE LA METHODE - par P. Feyerabend - Coll. Sciences Ouvertes - Seuil
- LE HASARD ET LA NECESSITE - Par J. Monod - Coll. Points - Ed. Seuil
- LA RECHERCHE EN ASTROPHYSIQUE - Coll. Points - Ed, Seuil
- ECHEC ET MATHS - par Stella BARUK - Ed. Seuil
- FABRICE OU L'ECOLE DES MATHS - par S. Baruk - Coll. Sciences ouvertes - Seuil
- L'IDEOLOGIE DE/DANS LA SCIENCE - par Hulary Rose - Coll. Sciences Ouvertes -
- LES CASSE TETE MATHEMATIQUES de Sam LOYD - par M. Gardner - Dunod
- LES JEUX MATHEMATIQUES D'EUREKA - DUNOD
- LES CASSE TETE LOGIQUES DE BAILLIF - Dunod
- LA MAGIE DES PARADOXES - par M. Gardner - Belin
- LA NOUVELLE ALLIANCE - par Progogine et Stengers - Gallimard
- HISTOIRE GENERALE DES SCIENCES - La Science Moderne - PUF
- L'INFORMATISATION DE LA SOCIETE - Simon Nora Alain Minc - Points
- PRATIQUE et ANALYSE DES ENQUETES PAR SONDAGE - A.M. DUSSAIX
- THEMES MATHEMATIQUES ET CALCULATRICES - Algèbre linéaire - Géom.plane - R. DIDI
- A L'ECOLE DU GROUPE - Heurs et malheurs d'une innovation éducative - M. GORIN - DUNOD
- LA PRATIQUE DU TRAVAIL EN GROUPE - Gilles FERRY - DUNOD
- LES DEFAUTS DE L'ENFANT - par André Berge - pbp
- LES IDEES MODERNES SUR LES ENFANTS - par A. BINET - Flammarion
- PSYCHOLOGIE ET PEDAGOGIE -par Jean Piaget - Médiations

PUBLICATIONS DES I.R.E.M.

RUBRIQUES	I.R.E.M.	BROCHURES
ECOLE ELEMENTAIRE	BORDEAUX	"MATH-CP" Tome II 1980
	PARIS-NORD	Activités géométriques en El.et 1er cycle 2e trimestre 80
	PARIS-NORD	PANIREM SPECIAL - INFORMATIQUE A L'ECOLE 2e trim. 80-81
	LILLE	Situation-Problèmes au cycle moyen - 1980
	ROUEN	Situation-problèmes - école élémentaire
	LILLE	Faire un problème - une expérience au cycle moyen - 1980
	MONTPELLIER	Expérience pédagogique à l'école él. 3e fasc.
	POITIERS	Situations-problèmes au cycle moyen.Fév.81
	PARIS-NORD	Activités géométriques en el.et 1er cycle
PREMIER CYCLE	RENNES	Colloque GEDEOP-Vannes30-31 mai 80,C.R. oct.80
	TOULOUSE	Géométrie - classe de 3e
	TOULOUSE	Algèbre - classe de 3e
	TOULOUSE	Fiches d'exercices d'approche et de dessin algèbre géométrie - 3e
	PARIS-NORD	Activités géométriques en El.et 1er cycle
	LILLE	Géométrie de 4e - programme 1978
	RENNES	Fractions et rationnels, des partages, des opérations, des équations
	RENNES	Fractions et rationnels - 1979-1980
	BESANCON	Exercice pour la classe de 5ème-sept. 80
	PARIS-NORD	Activités géométriques en El. et 1er cycle
	PARIS-NORD	Bilan d'un groupe "Voie III"F.Delarue déc.80
NOUVEAUX PROGRAM-MES DE 2NDE	RENNES	Colloque GEDEOP-Vannes 30-31 mai 80.C.R.oct.80
	LILLE	MATHEMACTIVES n° 1 - 1980
	CLERMONT	Mise à l'essai des nouveaux programmes 2de Rapport d'expérience 1er trimestre 80-81
	ORLEANS	Xème Rencontre GEDEOP Orléans 21-22.11.80 C.R.
ANALYSE	CLERMONT	Un concept récent pour l'analyse et l'optimisation des fonctions non différentiables - mai 80 par J.B.HIRIART-URRUTY
	TOULOUSE	Quelques triangles analogues à celui de Pascal R. de Biasi oct. 80
	LIMOGES	A L'APPROCHE DU NOMBRE π - année 79-80
	LYON	ZOOM AVANT 17 - Ecoles Normales - Fév.81
	LILLE	A LA POURSUITE DES REELS - 79-80 A.Michel-Tison
	GRENOBLE	ACTIVITES POUR LE SECOND CYCLE(analyse)79-80
	PARIS-NORD	MESURE D'IRRATIONALITE ET DE TRANSCENDANCE R. APERY
CALCULATRICES	POITIERS	PROGRAMME D'UNE CALCULATRICE - 4e trimestre 80
	LILLE	Activités du groupe Lille-Arith.s/calculette
	LILLE	DES PROGRAMMES POUR LE TI 57 1980/81

...

INFORMATIQUE	ROUEN	UNE APPROCHE ALGORITHMIQUE DE L'ECRITURE DES NOMBRES
GEOMETRIE	CLERMONT	ANGLES - Module A - 3e
	TOULOUSE	Les pavages réguliers et leurs duaux R.de Biasi
	TOULOUSE	La Cycloïde- de Biasi - nov.80
	CLERMONT	GEOMETRIE - groupes du premier degré
	PARIS-SUD	RECURRENCE Fév.81 M.A. Girodet et N. Picard
	PARIS SUD	REPRODUCTION DE TEXTES ANCIENS-leçons sur certaines questions de géométrie él.F.Klein
	BORDEAUX	ACTIVITES GEOMETRIQUES EN CLASSE DE 2de Géométrie plane 1981
	CLERMONT	JOURNEES SUR L'Enseignement géométrie dans l'espace - Mars 81
	PARIS-SUD	FRISES - par A. Deledicq - janvier 81
UNIVERSITE	PARIS-SUD	Bulletin liaison prof.math.bibliographie Nov.80
LOGIQUE	POITIERS	"Initiation à la logique mathématique" juin 80 par Louis Jeremy
	LILLE	La formation du raisonnement - 1980
	PARIS-NORD	Bases d'une théorie du hasard-J.Maurin
	PARIS-NORD	Mathématique constructive - R.Apery
	PARIS-NORD	Dans la philosophie et la mathématique grecques Marc Krasner
DIDACTIQUE	BORDEAUX	Création d'un code à l'école maternelle - étude d'un saut informationnel juin 1980 J-M Digneau
	BORDEAUX	C-R des recherches à l'école maternelle J.Michelet 1979-80 - G.Jousson J.Perès A.Remy
	BORDEAUX	Apprentissage en math. Etude et critique du processus psychodynamique d'apprentissage selon Dienes, Nov. 79
	STRASBOURG	EPISTEMOLOGIE et didactique - cours 3e cycle G. Glaeser
	NANCY	Rapport DEA de didact.des maths. Elaboration d'un livret auto-correctif - J.C. Régnier
	NANCY	RAPPORTS et diplomes élaborés pour le DEA de didactique des maths.tomes1et2. - 1979/80
	PARIS-SUD	Thèse doctorat 3e cycle en didactique des maths p/C.Blanchard-Laville - les étudiants en psychologie face à l'ens.de statistique Nov.80
PEDAGOGIE	CLERMONT	Sociométrie et travail en groupe - oct. 79R.Bard
JEUX MATHEMATIQUES	PARIS-SUD	Le cube Hongrois-mode d'emploi A.Deledicq
	APMEP POITIERS	Commission J.E.M.-Jeux et maths.sept. 79
	LORRAINE	Autour d'un cube
HISTOIRE DES MATHS	DIJON	Groupe histoire des maths pour nos élèves octobre 80 - comptes grecs
	TOULOUSE	Equations du troisième degré - 1980
	NANTES	Colloque ens.histoire des sciences - oct.80
MATHS-PHYSIQUE	CLERMONT	Binômes maths-physique tome II sept. 80
	NANTES	Math et physique en 2de- Launay,Carnec,Seroux
	POITIERS	Math-Physique - alete à l'entropie - essais de coord.vécue - J.P. Guichard - juin 80
	PARIS-SUD	Climatisons les mathématiques

...

MATHS-ECONOMIE	POITIERS	Math 6-5 - Super marché - janvier 1981
BULLETINS DE LIAISON	CLERMONT	N° 11 - sept.octobre 80
		N° 12 - novembre-décembre 80
	TOULOUSE	L'Autan pour tous n° 2. nov.-décembre 80
	PARIS-NORD	PANIREM n° 13 - janvier 1981
	LYON	ZOOM AVANT - Ecole normale n° 16 - nov.80
	RENNES	Bulletin information - décembre 80
	GRENOBLE	Feuille de chou - janvier 1981- n° 7
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 8 - janvier 81
	STRASBOURG	L'Ouvert n° 22 - octobre 80
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 9 - janvier 81
	PARIS	PANIREM n° 14 - février 81
	LILLE	Bulletin n° 10 - janvier 80
	LILLE	Bulletin n° 11 - juin 80
	LILLE	Bulletin n° 12 - décembre 80
	TOULOUSE	Bulletin n° 1 - janvier 81
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 10 - février 81
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 11 - février 81
	CLERMONT	7e Colloque Prof. E.N. - Confolant mai 80
	LYON	ZOOM AVANT 17 - Ecoles Normales Février 81
	TOULOUSE	L'Autan pour tous n° 3 - février 81
	LILLE	Bulletin n° 12 - décembre 80
	PARIS	IREM INFORMATIONS - N° 14 - février 81
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 12 - février 80
	CLERMONT	N° 13 - janvier-février 81
	PARIS	PANIREM n° 15 - mars 1981
	AIX-MARSEILLE	Information mathématique
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 13
	LIMOGES	N° 16 - Spécial informatique
	NICE	La Ratatouille n° 3 - mars 1981
	GRENOBLE	Feuille de chou n° 14 - mars 81
	STRASBOURG	L'Ouvert n° 23
	PARIS-NORD	PANIREM n° 16 - avril 81

Liste des Documents élaborés par l'IREM de REIMS

encore disponibles

- Etudes Pégagogiques - MATHEMATIQUES - PHYSIQUE HARMONISATION AU NIVEAU du Second Cycle - Facicule n° 3

- Groupe Interdisciplinaire : informatique et enseignement secondaire
  ETUDES PEDAGOGIQUES - choisir un minicalculateur
  - la méthode informatique appliquée à la résolution d'une question grammaticale : l'accord du participe passé

- ETUDES PEDAGOGIQUES - Les minicalculatrices programmables en classe

- EVALUATION - DOCIMOLOGIE - ORIENTATION - TAXINOMIE 1977

- 5ème COLLOQUE NATIONAL DES PROFESSEURS D'ECOLE NORMALE 1978

- LE VECU DES MATHEMATIQUES CHEZ DES JEUNES FRANCAIS ET QUEBECOIS - Essais d'Analyse Factorielle et Clinique - 1979

BULLETIN INTER IREM N°19

EN VENTE à L'I.R.E.M. au prix de 9 Francs

A PARAITRE COURANT JUIN 2 autres numéros : ANALYSE
ACTIVITES en classe de seconde