I. R. E. M.

IREM DE REIMS ET IUFM DE REIMS

GROUPE DE TRAVAIL EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

ANNEE 1992 - 1993

Université de Reims
IREM DE REIMS

Moulin de la Housse -BP 347
51062 REIMS CEDEX

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FORMATION DES MAITRES DE L'ACADÉMIE DE REIMS

SIEGE :
32, rue Ledru Rollin - B.P. 515
51068 REIMS CEDEX

I. R. E. M.

IREM DE REIMS ET IUFM DE REIMS

GROUPE DE TRAVAIL EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

ANNEE 1992 - 1993

Université de Reims

IREM DE REIMS

Moulin de la Housse -BP 347
51062 REIMS CEDEX

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FORMATION DES MAITRES DE L'ACADÉMIE DE REIMS

SIEGE :
32, rue Ledru Rollin - B.P. 515
51068 REIMS CEDEX

En septembre 1992, L'I.R.E.M. et l'I.U.F.M. de Reims ont décidé d'organiser conjointement un groupe de travail en didactique des mathématiques, ouvert à tous les formateurs d'enseignants intéressés de l'académie, tant au niveau de l'enseignement élémentaire que secondaire. Ce groupe s'est constitué autour de deux objectifs :

- contribuer à la formation didactique de ses membres, en particulier aider à compléter et structurer une formation s'étant le plus souvent faite sur le tas, au fur et à mesure des besoins ressentis,
- réfléchir sur les pratiques de formation didactique et développer des travaux didactiques en liaison avec la formation des enseignants.

Le groupe "didactique" a réuni une trentaine de participants une fois par trimestre pour une longue après-midi de travail. Chacune de ces après-midi comportait à la fois une partie formation - groupe de travail et une partie séminaire consacrée à la présentation de travaux de recherche récents.

Dans la première partie de l'après-midi, nous avons abordé sous des formes diverses : exposés de synthèse, analyse d'une séance de classe magnétoscopée, analyse de textes didactiques - les thèmes suivants :

- la didactique des mathématiques, domaine de recherche et la formation des enseignants,
- l'observation et l'analyse didactique de situations d'enseignement,
- la prise en compte de l'élève en didactique des mathématiques.

Dans la seconde partie : le séminaire, trois chercheurs sont venus nous présenter leurs travaux :

- Isabelle Tenaud nous a présenté son travail de thèse portant sur l'enseignement de la géométrie en terminale C et les possibilités offertes par l'enseignement de méthodes et la pratique du travail en petits groupes, dans ce domaine,
- Jean Michel Bazin, chercheur en intelligence artificielle, nous a présenté son travail de thèse en cours, concernant la réalisation d'un système informatique de résolution de problèmes de géométrie de quatrième, fondé sur l'analyse des procédures de résolution d'enseignants, et les questions d'ordre didactique soulevées par ce travail,
- Marie-Jeanne Perrin, enfin, s'est appuyée sur son travail de thèse portant sur des "classes faibles" pour nous présenter une analyse des contraintes de fonctionnement des enseignants de collège et des phénomènes didactiques que ces contraintes tendent à produire.

Par ailleurs, dans le cadre de ce groupe didactique, un sous-groupe s'est constitué pour analyser les copies du premier concours des professeurs d'école (juin 1992) et déterminer ce que ces copies nous apprenaient sur le rapport aux mathématiques et le rapport à la didactique des candidat(e)s, ainsi que sur l'effet de la formation dispensée en première année d'I.U.F.M.

Nous avons regroupé dans cette brochure, qui constitue la trace de la première année de vie du groupe, les résultats de l'analyse effectuée des copies du concours PE et les trois exposés du séminaire.

Michèle Artigue
I.U.F.M. de Reims

Hélène Authier
I.R.E.M. de Reims

ANALYSE DES COPIES DU CONCOURS DES PROFESSEURS D'ECOLE - ACADEMIE DE REIMS - JUIN 1992

Michèle Artigue et Jean Vincent, IUFM. de Reims
Hélène Authier, IREM, Université de Reims

avec la collaboration de :
Yvonne Excoffon, Daniel Vaulon, Chantal Vincent
IUFM de Reims

TABLE DES MATIERES

Sommaire

I. INTRODUCTION

En 1992, le nouveau concours de recrutement des professeurs des écoles s'est mis en place avec, à l'écrit, des épreuves conjuguant une partie strictement disciplinaire (évaluée sur 12 points) et une partie de didactique de la discipline (évaluée sur 8 points). Notre attention, dans l'académie de Reims, a été alertée par le pourcentage important de notes éliminatoires attribuées à l'épreuve de mathématiques (environ 30%) et ce, sur un sujet qui, a priori, semblait tout à fait raisonnable. De là est né le projet de constituer, dans le cadre de la formation didactique de formateurs mise en place conjointement par l'IREM et l'IUFM de Reims, un groupe de travail qui analyserait les copies de ce premier concours en essayant de préciser :

- quelles informations sur le rapport aux mathématiques des candidat(e)s nous donnaient leurs productions écrites,
- s'il existait des relations entre le traitement par les candidat(e)s de la partie strictement mathématique et de la partie didactique, et si oui, des relations de quelle nature,
- si les différents publics concernés par ce concours se différenciaient ou non par leurs productions et si oui, comment,
- si l'on pouvait repérer un impact de la formation de première année à l'IUFM ou identifier des lacunes évidentes de cette formation qu'il serait important de prendre en compte dans les plans de formation ultérieurs.

Dans ce texte, nous présenterons successivement :

- le sujet du concours, en précisant les parties que nous avons retenues pour l'analyse et les types d'information que nous espérons pouvoir retirer de cette analyse,
- l'analyse des réponses à la partie mathématique,
- l'analyse des réponses à la partie didactique,
- l'articulation des deux analyses.

Pour cette dernière partie, nous avons eu recours à des méthodes statistiques d'analyse des données. Il s'agissait pour nous d'essayer de cerner plus précisément les similarités et implications existant entre telle ou telle catégorie de réponse à telle ou telle question, d'essayer aussi de mieux cerner les profils des différentes populations concernées : étudiants de première année d'IUFM (PE1 - effectif : 174), étudiants en formation professionnelle (FP - effectif : 27), instituteurs en exercice (effectif : 22), autres candidats (effectif : 104).

II. LE SUJET DU CONCOURS

Le sujet du concours était donc composé de deux parties. Il va sans dire qu'il n'avait pas été conçu dans une quelconque perspective de recherche. Ceci, on le verra, limite de manière évidente la qualité des informations que l'on peut tirer des productions des candidat(e)s.

Nous présenterons successivement la partie mathématique puis la partie didactique. Le sujet complet et son barème détaillé sont reproduits en annexe.

A. LA PARTIE MATHEMATIQUE DU SUJET

Cette partie était constituée d'un problème et de deux exercices, conformément aux instructions du concours. Les exercices relevaient l'un de la géométrie, l'autre de l'arithmétique. Il s'agissait dans le premier cas d'un problème de construction, dans le second d'un problème de congruences. Le problème concernait lui la proportionnalité, sous ses aspects numériques, algébriques et graphiques. Le point de départ en était une situation de la vie quotidienne : le calcul des impôts sur le revenu.

Nous avons choisi de faire porter notre analyse sur les réponses au problème. En effet, la proportionnalité dont l'enseignement débute dès l'école élémentaire et se poursuit sur tout le collège, est un concept central des mathématiques élémentaires. Il semble raisonnable d'attendre de l'école obligatoire qu'elle produise des individus capables de maîtriser raisonnablement ce concept et de l'engager dans la réflexion sur des situations non strictement mathématiques, situations de la vie courante ou situations techniques, dans les trois cadres de fonctionnement cités plus haut : numérique, algébrique, graphique. Ceci suppose que les enseignants eux-mêmes, en particulier ceux de l'école élémentaire, maîtrisent correctement ce concept. Rien n'est moins sûr, de nombreux travaux ayant montré les carences manifestées par beaucoup d'adultes dans ce domaine[1]. Il nous a semblé donc particulièrement pertinent de chercher à déterminer ce que les productions des candidat(e)s nous disaient de leur rapport à ce concept clef qu'en tant que professeurs d'école, ils auraient à enseigner.

Il est évident que ce problème de concours ne constitue pas cependant un sujet idéal pour l'étude du rapport à la proportionnalité visée : il est formé de questions non indépendantes, le cadre graphique d'expression de la proportionnalité n'y apparaît que tardivement... De plus, on sait très bien qu'une situation de concours est une situation en soi très particulière, sans doute pas la mieux à même de nous permettre de dresser le portrait cognitif d'un individu relativement à un domaine donné.

Nous préciserons, en suivant le fil du problème, les caractéristiques des productions qu'il nous a cependant semblé intéressant de repérer. Elles concernent bien sûr la proportionnalité, mais aussi d'autres aspects du rapport aux mathématiques des candidat(e)s mis en jeu dans la résolution du problème.

[1]. Le lecteur pourra consulter à ce sujet par exemple la thèse de M. Pezard dont les sujets expérimentaux sont justement aussi de futurs instituteurs - M. Pezard (1985) : Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux futurs instituteurs, thèse, Université Paris VII.

1. Question 1 :

Le support du problème est le calcul des impôts sur le revenu. On s'y situe dans le cas le plus simple : une personne célibataire sans personne à charge. Une partie des informations données au départ pour expliquer le calcul des impôts est donc ici inutile.

La première question peut être vue comme une question d'entrée dans le problème. Il s'agit de passer du revenu au revenu imposable en prenant en compte les abattements de 20% et 10%, puis de calculer l'impôt dans un cas précis.

La réussite suppose la capacité de gérer un problème simple de pourcentages, de repérer ensuite la tranche concernée dans le barème fourni et de substituer la valeur du revenu imposable dans la formule correspondant à cette tranche. Le cadre essentiel est le cadre numérique, le travail algébrique se limite au travail de substitution d'une valeur numérique à une lettre dans une formule du premier degré.

On peut s'attendre à une réussite massive mais il nous a semblé intéressant ici de distinguer deux types de traitement : un traitement "soustractif" et un traitement "multiplicatif". Le premier suit la formulation donnée : calculer les 20%, soustraire, calculer les 10%, soustraire... Le second consiste à interpréter directement une réduction de 20% comme une multiplication par 0,8 et les deux abattements successifs comme une multiplication par 0,8 × 0,9 soit 0,72 du salaire initial.

Nous faisons l'hypothèse que la seconde stratégie traduit un rapport plus élaboré à ce type de question.

Il nous a semblé intéressant également de nous intéresser aux formulations proposées par les candidat(e)s et, en particulier, de repérer les formulations que nous avons qualifiées d' « abréviations littérales », de la forme :

$$120000 - 10\% = 120000 - 12000 = 108000$$
$$108000 - 20\% = 108000 - 21600 = 86400\,F$$

Ces formulations peuvent laisser augurer d'un rapport relativement fruste au littéral perçu comme moyen d'abréviation, mais non véritablement engagé dans une structure opératoire. Elles pourraient faire obstacle à une maîtrise de la proportionnalité dans le cadre algébrique.

2. Question 2 :

La question 2 oblige à passer du cadre numérique au cadre algébrique et fait apparaître explicitement la proportionnalité puisque l'on demande la traduction sous forme littérale de la relation existant entre salaire et revenu imposable et qu'il s'agit ensuite de montrer que cette relation est une relation de proportionnalité (la question étant posée sous forme ouverte).

On peut penser que les candidat(e)s qui ont traité multiplicativement la première question seront ici favorisés et qu'en revanche ceux qui ont utilisé des abréviations littérales auront du mal à remanier de façon adéquate leurs premières formulations. De toute façon, il y a là un saut qualitatif, psychologique autant que technique : il faut accepter de rentrer dans le domaine de l'algèbre en produisant soi-même une formule.

Il nous a donc semblé intéressant de repérer ceux des candidats qui étaient capables de fonctionner à ce niveau algébrique et d'essayer de repérer également à quel niveau réel se situait le travail algébrique fourni. Pour établir la formule par exemple, les candidat(e)s raisonnaient-ils de façon tout à fait générale à partir des pourcentages donnés ou avaient-ils un fonctionnement plus local et attaché au numérique consistant à supposer de fait l'existence d'un rapport constant entre salaire et revenu imposable et à calculer ce rapport à partir de l'exemple initial ? Même s'ils avaient obtenu la formule correcte, étaient-ils capables ensuite d'y voir la preuve de la proportionnalité ou développaient-ils une preuve de niveau empirique basée sur la vérification à partir de quelques exemples numériques ?
D'autre part, il nous a semblé intéressant de repérer toutes les justifications qui pourraient laisser penser que, pour les candidat(e)s, le modèle proportionnel était abusivement le modèle de la dépendance ou tout au moins de la dépendance croissante. Nous l'avons cherché à travers des justifications comme : "C'est proportionnel parce que l'impôt dépend du salaire" ou "C'est proportionnel parce que l'impôt augmente avec le salaire".
Enfin, sur un plan plus technique, nous avons essayé de cerner l'aisance de manipulation du langage algébrique via le nombre d'écritures intermédiaires nécessaires pour arriver à la formule.

3. Question 3 :

Dans la question 3, c'est le problème inverse qui est posé : calculer le salaire connaissant les impôts. Deux cas sont à traiter : celui de Bernard et celui de Nicole. Il s'agit donc de remonter de l'impôt au revenu imposable, puis du revenu imposable au salaire. L'impôt payé par Bernard est proche de celui calculé pour Antoine dans la première question, ce qui permet de supposer que les deux sont dans la même tranche et de limiter le test à cette tranche. Colette a un impôt inférieur et il est raisonnable d'essayer la tranche inférieure qui convient de fait. Le premier passage peut donc se faire relativement économiquement du point de vue des calculs. Il nous a semblé intéressant de repérer dans cette partie, au delà des seuls résultats, le fait qu'il y ait ou non contrôle a priori ou a posteriori du choix de tranches effectué.
Le second passage suppose l'inversion de la relation de proportionnalité, facile pour ceux qui ont établi la formule, plus délicate pour les autres qui peuvent être tentés de remonter par addition en ajoutant successivement 20% et 10% au revenu imposable.

Il nous a semblé intéressant par rapport à la proportionnalité de repérer dans les réponses à cette question, le dernier phénomène cité, ainsi que les cas, s'ils se produisaient, de remontée directe de l'impôt au salaire par proportionnalité, le coefficient de proportionnalité étant calculé à partir de l'exemple numérique de la question 1.

4. Question 4 :

La question 4 s'attaque à une erreur fort répandue : le changement de taux d'imposition au changement de tranche est perçu comme se répercutant par un saut au niveau des impôts eux-mêmes. On peut se demander si les candidat(e)s vont répondre ici en répercutant simplement l'opinion commune ou s'ils vont effectuer les calculs et en tirer les conséquences qui s'imposent. Soulignons également que les calculs, s'ils sont effectués, peuvent amener à prendre conscience d'erreurs dans la question précédente. En effet, on obtient des résultats aberrants si l'on a oublié de changer de tranche pour Colette, si l'on a remonté en rajoutant successivement 20% et 10% ou si l'on a effectué une remontée directe par proportionnalité. On peut se demander si les candidat(e)s qui seront dans ce cas vont être sensibles à ces aberrations et, si oui, quelle sera leur attitude.

Ici donc, comme dans la question précédente, on cherche si les candidat(e)s soumettent leur activité mathématique à des impératif de contrôle, de vraisemblance ou si, comme beaucoup d'élèves, ils n'y voient qu'une activité détachée de tout réel qui n'a pas à être signifiante.

5. Question 5 :

Avec la question 5, apparaît le cadre graphique. Cette entrée tardive du graphique dans le problème n'a rien d'étonnant en soi. Elle reflète bien le statut du graphique dans l'enseignement, instrument de représentation de résultats obtenus par ailleurs, instrument de synthèse plus qu'instrument de travail. Il se peut fort bien que beaucoup de candidat(e)s n'abordent pas cette question, non pour des raisons d'inaccessibilité mais pour de simples raisons de gestion du temps.

Il nous a semblé intéressant de repérer les compétences graphiques qui pouvaient être mises en évidence par cette question.

Soulignons tout d'abord que si l'on veut représenter l'ensemble des tranches avec les indications d'échelle données, on est obligé de ne pas commencer la graduation de l'axe des abscisses à zéro. Ceci peut perturber les candidat(e)s peu familiers avec ce registre symbolique. S'ils graduent à partir de zéro, ils devront renoncer à représenter les dernières tranches. Les tracés produits peuvent être examinés sous différents aspects :

<u>- Graduations, échelles :</u>

Les échelles sont-elles régulières, conformes aux indications données ? A-t-on fait preuve de la souplesse nécessaire en ne commençant pas à zéro ? A-t-on, inversement, résolu le problème posé en tassant l'échelle du côté des grands nombres pour tout faire rentrer à partir de zéro ?

- Points placés, liaison entre les points :

Les points placés témoignent-ils d'un usage correct des coordonnées ? Sont-ils liés par des segments de droite conformément aux formules données ? Trouve-t-on des tracés discontinus conformes à l'opinion commune ? Trouve-t-on des tracés où l'on a lissé les points anguleux et joint par des courbes ?

6. Question 6 :

La question posée est celle de la proportionnalité entre salaire et impôt. Cette fois-ci, la relation n'est plus proportionnelle et il sera intéressant de mettre en rapport les réponses fournies à cette question et à la question 2. On peut s'attendre ici a priori à des réponses correctes ou erronées et à des justifications de nature diverse, en particulier, pour une réponse correcte :

- une justification graphique : le graphe n'est pas une droite passant par l'origine,
- une justification numérique : il suffit de considérer deux des trois cas déjà considérés pour obtenir un contre exemple,
- une justification algébrique : plusieurs formules correspondant à des fonctions affines par morceaux non linéaires,

et, pour une réponse erronée :

- une confusion fonction affine / fonction linéaire,
- une confusion croissance / proportionnalité,
- une confusion dépendance fonctionnelle / proportionnalité.

Mais ici encore, on peut penser que le taux de non-réponse sera élevé et que la question nous apportera beaucoup moins d'information qu'elle ne pourrait théoriquement le faire.

B. PARTIE DIDACTIQUE

La situation proposée dans la partie didactique est adaptée d'une activité proposée dans le ERMEL[2], dans le cadre de l'apprentissage de la numération. Elle est constituée de deux phases : la première est une phase d'action. Les élèves doivent anticiper les assemblages de carreaux nécessaires pour couvrir des grilles rectangulaires, les assemblages prévus (carreaux isolés, rectangles 1×10 et 2×5) favorisant le passage à un comptage par dizaines. La deuxième phase impose l'utilisation des dizaines par l'interdiction faite aux vendeurs de donner plus de neuf carreaux isolés, elle oblige aussi les enfants à formuler puisque les acheteurs ont à préparer un bon de commande.

[2] Apprentissages numériques - CP - ERMEL - I.N.R.P. édité par Hatier.

Précisons que le ERMEL fait partie de la bibliographie distribuée aux PE1, donc que cette situation fait partie de celles qu'ils ont éventuellement rencontrées dans le cadre de leur préparation au concours.
Comme pour la partie mathématique, nous suivrons le fil des questions, en précisant dans chaque cas les caractéristiques des réponses qu'il nous a paru pertinent de repérer.

1. Question 1 :

Il s'agit de décrire les objectifs visés par cette activité. On attend que l'étudiant fasse le lien entre cette activité et l'apprentissage de la numération, en précisant notamment les points suivants :

- mettre en évidence l'économie du comptage par paquets par rapport au comptage un par un,
- travailler sur les paquets de dix et la notion de dizaine,
- établir un lien entre la place des chiffres dans l'écriture d'un nombre en base dix et leur signification (deuxième phase).

Il nous semble important de repérer si cette activité va être correctement interprétée comme une activité de numération et si les candidat(e)s, au delà de cette reconnaissance globale, sauront préciser les différentes composantes citées ci-dessus. On peut s'attendre ici a priori à une réussite massive vu le nombre d'indices présents dans le texte. Des interprétations erronées semblent cependant possibles :

- peut-être certains candidat(e)s se laisseront-ils piéger par le matériel géométrique utilisé et le problème posé en termes de pavage pour, au premier degré, voir là une situation de mesure d'aires,
- peut-être y aura-t-il également confusion avec les activités de dénombrement de grilles rectangulaires maintenant classiques dans l'introduction de la multiplication.

Dans la suite, nous désignerons par "déviation géométrique" et "déviation multiplicative" ces deux interprétations erronées.

Enfin, il nous semble intéressant de repérer si des objectifs plus transversaux sont ajoutés à ces objectifs purement notionnels, quel est l'équilibre éventuel entre objectifs notionnels et transversaux, de repérer aussi si les réponses données sont bien des réponses formulées en termes d'objectifs, ou si l'on a affaire à un discours pédagogique plus vague.

2. Question 2 :

La deuxième question demande de situer, de façon justifiée, cette activité dans la scolarité :

"A quel moment de la scolarité est-elle bien adaptée ? Y a-t-il des indices dans le document qui permettent d'étayer cette réponse ?"

On attend que les candidat(e)s situent l'activité entre le milieu et la fin du CP en s'appuyant sur les objectifs identifiés ainsi que sur les indices suivants :

- l'introduction précise que l'activité est proposée à des élèves qui connaissent la comptine jusqu'à 60 environ et savent écrire les nombres correspondants,
- dans la deuxième phase, il est précisé que les enfants reçoivent plusieurs pièces à recouvrir, avec des nombres de carreaux inférieurs à 99,
- la nature des bons de commande fabriqués par les élèves qui témoignent de compétences en lecture et écriture.

On cherchera si les réponses témoignent de cette connaissance de la progression de l'enseignement.

3. Question 3 :

Il s'agit dans cette question de décider si des grilles de taille donnée (3×9, 6×10; 5×7, 11×4, 3×4, 7×7) sont adaptées ou non à l'activité.

Vu l'objectif de la situation, les grilles proposées aux élèves devraient être choisies pour favoriser l'utilisation de paquets de 10 carreaux. Il semble donc raisonnable que les grilles comportent suffisamment de carreaux pour que l'économie du comptage par 10 soit réelle, d'autre part que la forme géométrique de la grille permette le pavage avec les assemblages donnés.

Toutes les grilles citées dans cette question comportent moins de 60 carreaux et se situent donc dans le champ de comptage des élèves. On peut estimer que, pour aucune d'elles, le saut informationnel n'est pas en soi suffisant pour provoquer le passage spontané aux dizaines, et donc qu'elles sont toutes inadaptées. De fait, la description fournie de l'activité montre que les auteurs ne cherchent pas à provoquer le passage aux dizaines en jouant uniquement sur la variable : "taille des grilles" : ils introduisent dans la deuxième phase des consignes qui forcent ce passage.

On cherchera ici à savoir si les candidat(e)s font des choix raisonnables par rapport à l'activité telle qu'elle est proposée et non telle qu'elle pourrait être envisagée. Ils devraient, nous semble-t-il, écarter les grilles 3×9 et 3×4 qui comportent peu de carreaux et ne sont pas pavables avec les assemblages de 10 carreaux, juger bien adaptées les grilles 6×10 et 11×4 qui favorisent le passage aux dizaines, la première de manière évidente, la seconde parce qu'elle est la seule à avoir une dimension supérieure à 10, avoir éventuellement des avis plus diversifiés sur les grilles 5×7 et surtout 7×7 ; la première en effet suscite le comptage par 5 et donc l'utilisation des assemblages 2×5 mais elle comporte peu de carreaux ; pour la seconde, le

pavage, possible, n'a cependant rien d'évident et des difficultés géométriques peuvent donc entraver la réalisation des objectifs.
Nous sommes cependant conscients que des choix contradictoires peuvent être ici argumentés, qu'il risque d'être difficile d'interpréter certaines réponses et qu'il faut nécessairement prendre en compte les justifications qui les accompagnent.

4. Questions 4 et 5 :

Nous n'avons finalement pas pris en compte ces questions pour l'analyse, les réponses nous paraissant plus difficilement exploitables : difficulté d'interprétation des réponses à la question 4, difficulté de caractériser les réponses discours à la question 5.

III. LES REPONSES A LA PARTIE MATHEMATIQUE

Nous donnerons d'abord les pourcentages de réponse et de réponse correcte pour chaque question, en distinguant les différentes catégories de populations répertoriées : instituteurs, étudiants de première année d'IUFM allocataires ou non allocataires, étudiants en formation professionnelle première année (FP1) ou deuxième année (FP2), autres candidats. Il convient de considérer ces pourcentages avec précaution, les effectifs de certaines catégories (FP1, FP2, instituteurs) étant faibles voire très faibles. Dans l'analyse question par question, nous ne séparerons d'ailleurs pas les populations FP1 et FP2.
Nous présenterons ensuite les résultats, de façon détaillée, question par question.

A. ANALYSE GLOBALE DES RESULTATS

	Origines →	Insti-tu-teurs	Etudiants en première année d'I.U.F.M.			Etudiants en Formation Professionnelle			Au-tres	Total
			Total	Alloc	Autres	Total	FP1	FP2		
Questions ↓	Effectifs →	22	174	91	83	27	5	22	104	327
1. Calcul du revenu imposable	Réponse correcte	91	93	98	88	96	100	95	89	92
Calcul de l'impôt	Réponse correcte	95	91	95	87	89	100	86	88	90
2 Calcul de la formule R = f(A)	Réponse	82	85	84	87	89	80	91	80	83
	Réponse correcte	77	59	64	54	48	60	45	46	55
R est proportionnel au salaire	Réponse	55	55	64	46	56	60	55	42	51
	Réponse correcte	55	48	56	39	41	60	36	33	43
3 Revenu imposable de Bernard et Colette	Réponse	82	76	75	77	74	80	73	75	76
	Réponse correcte	77	48	52	43	52	80	45	59	54
Calcul des salaires	Réponse	77	72	70	75	56	60	55	71	71
	Réponse correcte	55	34	35	33	33	60	27	38	37
4 Avec 100 F de moins...	Réponse	82	61	62	60	56	40	59	69	65
	Réponse correcte	45	30	36	23	33	0	41	31	31
5 Graphique	Réponse	86	56	53	59	56	60	55	63	60
	Graphique correct	45	28	30	27	22	20	23	32	30
6 L'impôt est-il proportionnel au salaire ?	Réponse	86	52	56	48	41	40	41	56	55
	Réponse correcte	77	32	38	24	19	0	23	25	31
Pourcentage de réponses correctes :		69	53	58	48	49	53	48	50	53

Tableau I : <u>Pourcentages de réponses et de réponses correctes</u>

Comme l'on pouvait s'y attendre, la question 1, qui ne nécessite que le calcul de deux pourcentages simples et la substitution de valeurs numériques dans des formules données, est massivement réussie. Mais dès la deuxième question, l'obligation d'utiliser l'algèbre élémentaire fait chuter le pourcentage de réussite à 55%. Il restera ensuite systématiquement inférieur. Ces résultats montrent clairement que les candidat(e)s, très majoritairement, ne sont pas à l'aise avec la proportionnalité.

En fait, on peut classer les questions en trois groupes :

- la question 1 qui est très réussie (90%)
- les questions 2 et 3 moyennement réussies (autour de 50%)
- les questions 4, 5 et 6 avec un fort taux d'échec (30%)

Ce classement suit l'ordre des questions. Ceci est logique car d'une part, les questions sont de difficulté croissante, d'autre part, elles ne sont pas totalement indépendantes.

En ce qui concerne le pourcentage de questions correctes par rapport aux origines des candidats, il apparaît que les instituteurs ont, de loin, les meilleurs résultats, suivis des PE, et plus précisément des PE allocataires (l'obligation d'assister aux cours y est-elle pour quelque chose ?), les autres catégories étant très proches. L'âge moyen des instituteurs étant plus élevé (35 ans) que celui des autres catégories (30 ans), il est permis de penser que le caractère concret de l'épreuve les a favorisés. De plus, le fait de se présenter au concours correspond pour eux, à un choix volontaire qui n'engage pas leur carrière.

B. ANALYSE QUESTION PAR QUESTION.

1. Question 1 :

Le tableau 2 ci-après précise, pour chaque catégorie, le pourcentage des candidat(e)s ayant traité cette question 1 de façon multiplicative, ou ayant eu recours à des abréviations littérales (cf. l'analyse du sujet)

	Calcul du revenu imposable	
	traitement multiplicatif	présence d'abréviation littérale
Instituteurs	5	23
PE	36	18
Alloc.	44	19
Non alloc.	27	18
FP	4	26
FP1	0	40

FP2	5	23
Autres	13	27
Total	24	22

Tableau 2 : Procédures utilisées

Les candidat(e)s, on l'a vu, réussissent massivement cette question (92% en moyenne avec des pourcentages compris entre 88% et 96%). Ce que nous montre le tableau 2, c'est que la stratégie majoritaire pour le calcul du revenu imposable est de façon évidente la stratégie soustractive. On note cependant une différence entre les PE et les autres catégories : les PE (36%), et surtout les allocataires (44%), utilisent beaucoup plus la décomposition multiplicative que les autres (de 4 à 13%). Il est raisonnable de voir là un effet direct de l'enseignement de première année d'IUFM. Pour ce qui est des abréviations littérales, les pourcentages sont plus équilibrés, mais les PE y ont légèrement moins recours que les autres catégories, ce qui là encore ne doit pas surprendre après une année de formation.

Le calcul de l'impôt ne pose pas de problèmes aux candidats ayant réussi la première question. Le travail algébrique minimal que suppose ce calcul est, comme l'on pouvait s'y attendre, bien maîtrisé. Notons que l'on retrouve ici encore des abréviations littérales qui nous semblent pouvoir faire obstacle au traitement algébrique de la proportionnalité exigé dans la suite du problème.

$$\begin{aligned}(R \times 0{,}384) - (17178 \times N) &= (\text{si } N = 1)\ 0{,}384\,R - 17178 \\ &= 33177{,}60 - 17178 \\ &= 15999{,}60\ F\end{aligned}$$

2. Question 2 :

Cette question, on l'a vu, s'accompagne d'une baisse importante des pourcentages de réussite qui se situent entre 45% et 77% pour l'établissement de la formule et entre 33% et 56% pour la déduction de proportionnalité, avec des moyennes respectives de 55% et 43%. Nous précisons ces résultats dans le tableau 3 ci-après, en fournissant les pourcentages correspondant aux types de procédures et de justifications répertoriées dans l'analyse a priori du sujet du concours. Soulignons que tous ceux qui se sont engagés dans une preuve générale ou se sont basés sur l'exemple de départ sont comptabilisés dans les colonnes 3 et 4, même s'ils n'ont pas abouti et que, dans la colonne 5, les réponses affirmant la proportionnalité, qu'elles soient justifiées ou non, sont comptabilisées comme correctes. Les types de justification éventuellement proposées sont donnés dans les deux dernières colonnes.

	Calcul de la formule R = 0,72 A			R proportionnel au salaire ?		
		Type de procédure			Justification	
	correct	preuve générale	sur un exemple	correct	par exemple numérique	par formule
Instituteurs	77	55	14	55	14	36
PE	59	60	18	48	7	39
Alloc.	64	63	15	56	5	52
Non alloc.	54	57	20	39	10	24
FP	48	56	11	41	22	33
FP1	60	80	0	60	0	40
FP2	45	50	14	36	27	32
Autres	46	49	13	33	3	27
Total	55	56	15	43	8	34

Tableau 3 : Pourcentages détaillés pour la question 2

Première partie : Calcul de la formule R = 0,72 A.

Comme on pouvait s'y attendre donc, passer du calcul de pourcentages numériques à une formule algébrique de proportionnalité représente un saut qualitatif. Pour beaucoup de candidat(e)s au concours, y compris parmi ceux qui ont passé un an à le préparer, le pas n'est visiblement pas franchi. Et, contrairement à ce que l'on aurait pu penser au vu des réponses à la question 1, les PE qui se trouvaient nettement en tête des procédures multiplicatives, sont distancés ici par les instituteurs.

En ce qui concerne les types de procédure, on notera la domination des preuves générales. Celles-ci sont de longueurs très diverses, de quelques lignes (en particulier pour ceux qui avaient utilisé une procédure multiplicative dans la question 1) comme dans l'exemple ci-après :

$$A \times (1 - 0{,}1) \times (1 - 0{,}2) = R \quad \Leftrightarrow \quad A \times 0{,}9 \times 0{,}8 = R \quad \Leftrightarrow A \times 0{,}72 = R$$

à une page, comme dans celui-ci (reproduit en condensant la présentation) :

$$R = \left(A - \left(\frac{A \times 10}{100}\right)\right) - \left[\frac{\left(A - \frac{A \times 10}{100}\right) \times 20}{100}\right] = \left(A - \frac{A}{10}\right) - \left(\frac{\left(A - \frac{A}{10}\right) \times 20}{100}\right)$$

$$R = \frac{9A}{10} - \frac{\frac{9A}{10} \times 20}{100} = \frac{9A}{10} - \left(\frac{\frac{180A}{10}}{100}\right)$$

$$R = \frac{9A}{10} - \left(\frac{180A}{10} \times \frac{1}{100}\right) = \frac{9A}{10} - \frac{18A}{100} = \frac{90A}{100} - \frac{18A}{100} = \frac{72A}{100}$$

Lorsqu'ils répondent correctement, les PE ont plus souvent des réponses brèves que les autres catégories de candidat(e)s dont le calcul algébrique semble plus bricolé. Sans conteste, il y a là encore, même si c'est dans des proportions bien plus faibles, un effet de la formation.

Tous les candidats n'aboutissent pas et, en particulier, comme nous l'avions supposé, presque tous ceux ayant utilisé une abréviation littérale échouent. Nous donnons ci-après trois exemples d'échecs :

$A - 10\% A = B \Rightarrow 90\% A = B$

$B - 20\% B = R \Rightarrow 80\% B = R$

A = revenu annuel

B = revenu annuel - abattement de 10%

R = revenu imposable

ou :

$R = A - (10\% \times A) - [20\% (A - 10\% \times A)]$

ou encore :

$R = A - (A - 10\%) - (A' - 20\%)$

L'impossibilité de traduire un pourcentage sous une forme mathématique bloque ces candidat(e)s. C'est le cas notamment d'un tiers environ des PE non allocataires, des FP et des "autres".

Les preuves à partir d'exemples sont toujours, comme nous nous y attendions, des preuves à partir de l'exemple numérique de la question 1 qui supposent implicitement la proportionnalité, comme par exemple celle ci-après :

Pour obtenir le revenu imposable R en fonction du revenu annuel A, il faut diviser R par A :

$$\frac{R}{A} = \frac{86\ 400}{120\ 000} = 0,72$$

La formule pour trouver le revenu imposable à partir du revenu annuel est donc la suivante : $f(A) = A \times 0,72$.

Cette fonction est du type $f(x) = ax$ qui est caractéristique des fonctions proportionnelles.

Au plus, dans quelques rares cas, trouve-t-on une vérification à l'aide d'un deuxième exemple.

Deuxième partie : Démontrer la proportionnalité.

On pouvait penser a priori que tous ceux qui obtiendraient une formule correcte concluraient à la proportionnalité. Il n'en est rien, les différences de pourcentage varient de 22% pour les instituteurs et 13% pour la catégorie "Autres" à 8% pour les allocataires et 7% pour les FP. On aurait pu penser aussi que, de confiance, certains affirmeraient la proportionnalité, le modèle linéaire étant le plus prégnant. Ce n'est que rarement le cas, la forme de la question : "en déduire que" a sans doute bloqué ce type de comportement.

Les pourcentages baissent encore sensiblement, en particulier chez les instituteurs, quand on s'intéresse au type de justification apportée. La justification par formule, la seule ici possible, est inférieure à 40%, excepté chez les allocataires.

Nous voulions également repérer les justifications de la proportionnalité du type "croissance" ou "fonctionnalité" (cf. analyse a priori). De fait, elles sont marginales, les pourcentages étant respectivement de 0% pour les instituteurs, 4% pour les PE, 15% pour les FP et 11% pour la catégorie "Autres".

Ainsi donc, si même les candidat(e)s savent traiter certains problèmes numériques qui mathématiquement relèvent de la proportionnalité, la maîtrise qu'ils ont de cette notion semble rester très étroitement enfermée dans des techniques numériques.

3. Question 3 :

On note dans cette question, un pourcentage de réussite faible (inférieur à 40% excepté pour les instituteurs), une nette domination de ces derniers (de l'ordre de 20%) ainsi qu'une baisse importante des pourcentages de réussite entre le passage de l'impôt au revenu imposable et celui du revenu imposable au salaire (respectivement de 77% à 55% pour les instituteurs, de 48% à 34% pour les PE, 52% à 33% pour les FP et 59% à 38% pour la catégorie "Autres").
Le tableau 4 ci-après complète ces données globales, en référence à l'analyse a priori.

	Revenus imposables de Bernard & Colette à partir de l'impôt		Quels étaient leurs salaires ?
	remontée formule et changement de tranche	contrôle du changement	procédure correcte
Instituteurs	77	41	59
PE	48	23	48
Alloc.	52	29	49
Non alloc.	43	17	47
FP	52	19	44
FP1	80	20	60
FP2	45	18	41
Autres	59	24	49
Total	54	24	49

<u>Tableau 4 : Réponses détaillées à la question 3</u>

Première partie : Calculs de revenus imposables à partir de l'impôt.

En fait, 64% des candidats (77% pour les instituteurs, 61% pour les PE, 59% pour les FP et 65% pour les autres) ont été capables de "remonter" la formule de calcul des impôts, ce qui représente une bonne réussite compte-tenu du fait qu'ils devaient résoudre une équation. Il est à noter que plus de 10% des PE ne choisissent pas la bonne formule et ne "changent pas de tranche" alors qu'il le faut pour calculer le revenu imposable de Colette, et qu'en revanche, plus de 5% d'instituteurs changent de tranche alors qu'ils ne réussissent pas à "remonter" la formule. Comme le montre le tableau 4, même lorsque le changement de tranche est effectué correctement, peu de candidat(e)s prennent la peine de vérifier le changement explicitement (la moitié des Instituteurs et des PE qui ont changé de tranche et le tiers des FP ou autres). Ce contrôle peut être a priori mais aussi a posteriori, comme dans l'exemple ci-après, où la "bonne" tranche a été choisie intuitivement :

> *Bernard doit se trouver dans la tranche 8 ($I_{Bernard} \approx I_{Antoine}$) ... Après calcul...*
>
> *Bernard se trouve bien dans la tranche 8 car 72 430 < 86 661,458 < 137 340*
>
> *...Puis...*
>
> *$I_{Colette} < I_{Bernard}$ et $I_{Bernard}$ se situe en début de tranche 8 donc essayons la tranche 7*
>
> *Et même type de vérification que précédemment.*

Quelques-uns ne réussissent pas à "remonter la formule" et, en échec, s'en remettent au modèle qu'ils connaissent le mieux : la proportionnalité, comme dans l'exemple suivant où, après un calcul littéral qui n'aboutit pas ...

> *Mais le problème ici est qu'on ne sait pas dans quelle tranche choisir les valeurs...*

suit un calcul correct pour l'estimation de la tranche puis...

> *Si on prend le cas d'Antoine, on s'aperçoit que son impôt est multiplié par 5,4 pour obtenir son revenu imposable qui est divisé par 0,72 pour obtenir le revenu annuel :*
>
> $I \times 5,4 = R : 0,72 = A$ *donc* $16100 \times 5,4 = 86940 : 0,72 = 120750$ *F*

La même procédure sera ensuite appliquée pour calculer le salaire de Colette.

On retrouve parfois le schéma couramment utilisé lorsqu'il s'agit de proportionnalité :

> *Sachant que pour Antoine le RI était de 86400 :*
>
> $86400 \rightarrow 15999$
>
> $x \rightarrow 16100$

Très peu utilisent le modèle additif, mais il mérite d'être mentionné :

> *Bernard a donné 16100 F d'impôts, soit 100,4 F de plus qu'Antoine, donc Bernard a gagné 120100,4 F pour l'année 1991...*

et de recalculer son revenu imposable à partir de ce résultat en utilisant cette fois les pourcentages.

Enfin, environ 8% des candidats supposent dès le départ que l'impôt est proportionnel au salaire.

Deuxième partie : Calcul des revenus annuels.

Cette partie ne pose pas de problème aux candidats ayant trouvé la formule à la deuxième question. Les autres échouent pratiquement tous, comme le confirme l'analyse implicative avec un indice de 0,9999 (cf. partie V).

Parmi ceux qui n'ont pas trouvé la formule à la question 2 certains utilisent, comme on pouvait s'y attendre, les pourcentages "à l'envers" :

$$96660{,}46 + 20\% = 86660{,}46 + 17332{,}092 = 103992{,}55$$

$$103992{,}55 + 10\% = 114391^{F}{,}81$$

ou, avec plus de raffinement :

$$\left(86661 - \left(86661 \times \frac{-20}{120}\right)\right) = 101104{,}5$$

4. Question 4 :

Comme nous l'avons indiqué dans l'analyse a priori du sujet, cette question était piégeante dans la mesure où il est communément admis que de "sauter une tranche" fait énormément varier l'impôt. Si la question est abordée en moyenne par 65% des candidat(e)s, le taux de réussite lui n'est que de 31%, soit moins de la moitié. Les différences entre les différentes catégories sont un peu plus faibles que dans les questions précédentes puisque les pourcentages de réussite varient entre 30% pour les PE et 45% pour les instituteurs qui sont d'ailleurs beaucoup plus nombreux à répondre.

Un nombre important de candidat(e)s constate le changement de tranche mais, peut-être à cause de l'a priori culturel, certains ne vont pas plus loin, concluant que dans ces conditions, la phrase est vraie. D'autres concluent que Colette paiera moins d'impôts, en supprimant le "beaucoup" de l'énoncé mais sans oser s'avancer davantage (ont-ils fait les calculs au brouillon et obtenu un résultat qui les dérange ?). Même parmi ceux qui mènent les calculs jusqu'au bout sur leur copie et obtiennent une différence d'impôt de l'ordre de 20F, beaucoup n'osent pas conclure franchement. Un petit nombre, enfin, fait des calculs erronés conduisant à des réponses aberrantes, mais ceci reste marginal.

Nous reproduisons ci-après quelques extraits de réponses typiques :

Extrait 1 :

D'après mes calculs, si Colette avait gagné 100 F de moins, elle aurait effectivement "sauté une tranche" et paierait beaucoup moins d'impôts.

Extrait 2 : A la suite d'une erreur de calcul, le candidat trouve que Colette ne change pas de tranche et il conclut :

Il aurait fallu qu'elle gagne 255 F de moins pour pouvoir sauter une tranche et payer moins d'impôts.

Extrait 3 : Ici, une simple erreur de calcul n'est pas détectée et conduit à écrire des énormités :

Ce QF se trouve dans la cinquième tranche, il est vrai qu'elle aurait payé moins d'impôts mais elle aurait sauté 3 tranches.

5. Question 5 :

Dans le codage des réponses à cette question, nous avons considéré le graphique correct quand la graduation était régulière et conforme aux indications données, quand au moins cinq points correspondant à des limites de tranches successives à partir de la première tranche étaient placés et quand la liaison pour chaque tranche était rectiligne. Le taux de réponse baisse très légèrement en moyenne (60%), la baisse étant plus sensible chez les PE allocataires. Le pourcentage de réussite par rapport aux réponses est comparable à celui des questions précédentes (excepté la question 1) : 50%, ce qui donne 30% de réussite. Encore une fois, la réussite est meilleure chez les instituteurs : 45% contre 32% pour les "Autres", 28% pour les PE et seulement 22% pour les FP. Ici, on ne voit pas, comme dans les premières questions, d'effet positif de l'enseignement. Beaucoup d'erreurs viennent d'une mauvaise organisation dans la page avec des points devant se situer à l'extérieur du fait d'un mauvais choix de l'origine et d'un tassement éventuel des graduations sur l'axe des abscisses à droite pour tout faire rentrer (cf. analyse a priori).

Quelques-uns, qui ont des connaissances sur la proportionnalité et ont cru la reconnaître ici, vont jusqu'à faire un graphique faux en le justifiant comme dans l'exemple suivant :

Le graphique représente une droite passant par l'origine et les deux points "Antoine" et "Bernard" qui sont très proches, mais pas par "Colette" avec l'explication :

Normalement, une fonction proportionnelle est linéaire et passe par l'origine. Ce qui semblerait se vérifier en tenant compte des positions de Bernard et Antoine mais pas de Colette...

Il n'y a pas remise en cause de la conception mais une interprétation qui s'adapte à la situation.

6. Question 6 :

Nous fournissons dans le tableau 4 ci-après, des données précisant les procédures de justification utilisées par les candidat(e)s. Dans la colonne intitulée "réponse correcte", la réponse est prise en compte indépendamment de sa justification.

	L'impôt est-il proportionnel au salaire ?			
	réponse	réponse correcte	justification graphique et correcte	justification numérique et correcte
Instituteurs	86	77	45	18
PE	52	32	15	7
Alloc.	56	38	19	7
Non alloc.	48	24	11	8
FP	41	19	7	4
FP1	40	0	0	0
FP2	41	23	9	5
Autres	56	25	11	7
Total	55	31	15	8

Tableau 5 : Réponses détaillées à la question 6

A part les instituteurs qui réussissent bien, moins d'un tiers des candidats fournit une réponse correcte à cette question et encore moins en donne une justification convaincante. Cette dernière est deux fois plus souvent graphique que numérique, ce qui est naturel, vu la question qui précède. On trouve par exemple :

> *Pour un célibataire, l'impôt n'est pas proportionnel au salaire car nous n'obtenons pas une droite dans le graphique, or une relation de proportionnalité se traduit par une droite passant par l'origine.*

Un nombre important de candidat(e)s pense qu'il y a proportionnalité. Certains, en particulier des PE et instituteurs, justifient leur réponse par le fait que la courbe représentative ne comporte que des segments de droites. Ceux qui veulent prouver la proportionnalité cumulent parfois des arguments contradictoires, comme dans les deux exemples ci-après :

Exemple 1 : Il s'agit d'une copie où le candidat témoigne au départ de connaissances mathématiques : il reconnaît, dans les formules données, la forme : I = aR + b, soit le type y = ax + b. Il effectue ensuite une succession de calculs s'appuyant sur deux points et conclut :

> $I = 0{,}35\,R - 14225$ *nous sommes dans un cas de proportionnalité dont* $\dfrac{I}{R} \approx 0{,}35 = constante$

Exemple 2 : Il s'agit de la copie déjà évoquée à la question 5. L'argumentation est la suivante :

> *Si on omet la position de Colette certainement due à une erreur, l'impôt sur le revenu serait proportionnel au salaire. Un revenu de 0F donnant un impôt de 0F.*

Soulignons qu'une grande partie du problème de ce candidat est fausse car il a cru reconnaître une situation de proportionnalité dès le début. Cette identification malheureuse est-elle la manifestation de la conception erronée suivante : toute fonction telle que f(0)=0 est une fonction de proportionnalité ?

D'autres enfin, comme on pouvait s'y attendre, font référence à des a priori culturels de même type que ceux en jeu à la question 4, par exemple :

> *Pour un célibataire, sans personne à charge, l'impôt n'est pas proportionnel au salaire. Il est plus cher. Il compte une part complète, les personnes mariées ou ayant des enfants ont des avantages, paient moins cher d'impôts.*

Cette référence au nombre de parts pour justifier une proportionnalité est plutôt le fait des candidats d'origine inconnue.

IV. LES REPONSES A LA PARTIE DIDACTIQUE

Nous allons ici aussi examiner les réponses question par question, en distinguant les différentes catégories de population répertoriées. Pour des raisons d'effectifs nous ne séparerons pas les FP de première ou de deuxième année. Par ailleurs, rappelons que les effectifs réduits de la catégorie des instituteurs d'une part, des FP de l'autre nécessite de considérer les pourcentages avec précaution.

A. QUESTION 1

1. Objectifs notionnels :

Le tableau 6 ci-après précise pour chaque catégorie, le pourcentage des candidat(e)s ayant fait le lien entre cette activité et l'apprentissage de la numération, en précisant l'un ou l'autre des points attendus :

- référence explicite à la numération,
- mise en évidence de l'économie de comptage par paquets,
- notion de dizaine,
- établissement d'un lien entre la place des chiffres dans l'écriture d'un nombre en base 10 et leur signification.

	ref. numération	économie de comptage.	dizaine	lien avec l'écriture
instituteurs	41	18	82	27
PE	28	16	75	33
allocataires	26	16	70	31
non allocataires	29	14	81	36
FP	4	15	85	22
autres	9	5	44	3
total	20	12	67	22

Tableau 6 : Objectifs cités pour l'activité proposée

La réussite massive attendue est fortement modulée. En effet, il apparaît clairement que les candidat(e)s ont surtout repéré et explicité le travail sur les dizaines. Ce point arrive en effet nettement en tête, loin devant les autres. Le lien avec l'écriture, malgré la demande d'écriture de messages, n'est cité que par 22% des candidat(e)s et l'économie de comptage, susceptible de motiver le comptage par paquets, encore moins. La référence explicite à la numération est, elle aussi, peu présente excepté chez les instituteurs. Peut-être, pour beaucoup de candidat(e)s, va-t-elle de soi et limitent-ils leur explicitation aux aspects précis de la numération en jeu dans l'activité.?

Par ailleurs, on peut noter que les différentes catégories de population explicitement répertoriées (c'est à dire tous les candidats sauf ceux de la catégorie "autres") ont des comportements analogues sur tous les points sauf en ce qui concerne l'explicitation de la numération. On peut noter , dans ce cas une dissociation entre les instituteurs qui sont les plus nombreux à y faire référence, les FP qui sont les moins nombreux et les PE qui ont un comportement médiant.

Le dernier point à noter dans ce tableau est la position des candidats d'origine inconnue. En effet, la notion de dizaine n'est repérée et indiquée que par la moitié d'entre eux et les autres aspects n'apparaissent que marginalement.

On est donc amené à penser que la formation a joué ici un rôle plus important que dans la partie purement mathématique de l'épreuve.

2. Interprétations erronées des indices :

Malgré la multiplicité des indices présents dans le texte, on a vu que la réussite était mitigée et l'on rencontre effectivement les deux interprétations erronées des indices envisagées dans l'analyse a priori du sujet :

- **la déviation géométrique**, c'est à dire l'interprétation des données (matériel, termes du problème) dans le cadre d'une situation de mesure d'aires, comme dans l'extrait ci-après :

Cette activité introduit les rapports de surface, puis les mesures de ces surfaces, les équivalences

- **la déviation "opérations"**, c'est à dire l'interprétation des données en termes d'activités préparatoires à la multiplication ou, plus rarement, à l'apprentissage de la technique d'addition, comme dans les extraits suivants :

Les objectifs sont de montrer que l'on peut remplacer dix unités de 1 carré par une unité de 10 carrés : cela correspond à un travail de l'addition. C'est une propriété de l'addition qui va nous permettre d'aborder la technique additive avec une colonne des dizaines et une colonne des unités

Ou bien :

Les objectifs visés par cette activité sont la connaissance des procédures de l'addition....Le maître pourra également montrer la simplicité de la multiplication par rapport à l'addition dans le cas d'un très grand nombre de carreaux

Ou encore, parmi d'autres objectifs attendus :

- approche du tableau cartésien
- on aborde la technique multiplicative

Ces interprétations erronées sont loin d'être marginales comme le montre le tableau 7 ci-dessous.

	déviation géométrique	déviation " opérations"
instituteurs	23	18
PE	11	25
allocataires	12	26
non allocataires	11	23
FP	7	26
autres	30	43
total	18	30

Tableau 7 : Pourcentage de réponses avec déviation géométrique ou "opérations"

On peut noter, sauf chez les instituteurs, un plus fort pourcentage de déviations "opérations" que de déviations géométriques. Il y a donc plus facilement confusion avec les activités de dénombrement de grilles, souvent utilisées pour introduire la notion de multiplication ou débuter l'apprentissage de la technique opératoire intermédiaire dite per gelosia, qu'avec une situation de mesure d'aires. Cette différence est peut-être partiellement liée à la formation.
On remarque par ailleurs que plus du tiers des candidat(e)s de chaque catégorie est concerné si on admet qu'un même candidat ne cumule pas les deux types de déviations. Ce pourcentage, qui est loin d'être négligeable, montre bien qu'un certain nombre de candidat(e)s s'arrêtent à une lecture de surface des activités proposées, liée au type de matériel utilisé, sans chercher ou parvenir à déterminer plus précisément ce qui peut être réellement en jeu comme connaissances mathématiques pour les élèves concernés dans la situation décrite, ni être sensible à certaines incohérences. Les candidats d'origine inconnue sont, ici encore, ceux qui, de loin, font le plus souvent ces erreurs.

3. Objectifs transversaux :

Les objectifs identifiés par les candidat(e)s ne se réduisent pas nécessairement à des objectifs notionnels. Comme nous l'indiquions dans l'analyse a priori, il nous a semblé intéressant d'étudier quels étaient les objectifs transversaux mentionnés et comment s'articulaient dans les copies, objectifs notionnels et objectifs transversaux.

Les objectifs transversaux sont, tout d'abord, souvent présents (cf. tableau 8 ci-après). Deux types d'objectifs transversaux sont généralement évoqués :

- des objectifs de **type cognitif** : mettre l'élève en situation de recherche, de construction de son propre savoir... (on retrouve ici plus ou moins bien digérées les marques de l'approche constructiviste de l'apprentissage, sans aucun doute introduite en formation),
- des objectifs de **type social** : aider la socialisation de l'élève par le travail en groupes, lui apprendre à communiquer avec autrui, à respecter des consignes précises... (on retrouve là aussi un effet incontestable de la formation).

Dans certains cas , on trouve un mélange structuré et équilibré des différents types d'objectifs (la primeur étant donnée à l'un ou à l'autre des deux types) comme, par exemple, dans les extraits ci-après :

Les objectifs de la séquence:
objectif notionnel: la numération

- *ici on va travailler sur la décomposition du nombre en donnant à l'enfant la notion de dizaine*
- *cette décomposition va permettre à l'enfant de comprendre l'écriture d'un nombre*
- *mémorisation d'une quantité*
- *échange avec ses camarades : but de socialisation qui est un des rôles de l'école*
- *se faire comprendre auprès des autres*

Ou encore :

- *placer un enfant devant un problème (ce qui lui permet de développer son pouvoir créatif et imaginatif). L'enfant va découvrir une nouvelle notion en réponse à ce problème...*
- *faire réaliser des groupements par dix pour faire découvrir à l'enfant la signification des chiffres constituant un nombre*
- *dénombrer une quantité, la coder*
- *compter de dix en dix pour augmenter la vitesse de comptage*

Dans d'autres cas, les objectifs transversaux sont prioritaires, par exemple :

objectifs :
- *un objectif d'anticipation: les enfants ne doivent pas compter carreau par carreau mais utiliser une procédure numérique pour prévoir le nombre de carreaux nécessaires*
- *rendre les enfants capables de justifier une procédure*
- *objectif de socialisation*
- *approche du système de numérotation décimale*

On trouve enfin de véritables "patchworks", par exemple :

objectifs :
- *savoir travailler en groupe*
- *groupement par 10*
- *comptage de 10 en 10*
- *repérage dans un plan*
- *approche de la géométrie*
- *approche de la multiplication*
- *savoir formuler une question*
- *savoir écrire les nombres au moins jusqu'à 60*

Notons que le cas précédent cumule les deux déviations identifiées, mais ceci reste un cas exceptionnel.

Le tableau 8 ci-dessous donne les pourcentages des copies où d'une part les objectifs transversaux sont pris en compte, d'autre part ils sont prioritaires.

	objectifs transversaux	objectifs prioritaires
instituteurs	50	5
PE	39	7
allocataires	45	8
non allocataires	33	7
FP	26	7
autres	43	19
global	40	11

Tableau 8 : Objectifs transversaux

Les objectifs transversaux sont donc souvent présents avec de légères différences selon les catégories. Par contre, ils sont rarement prioritaires et les candidats d'origine inconnue se distinguent encore une fois puisqu'ils sont plus nombreux que les autres à donner la priorité aux objectifs transversaux.

4. Mélange de discours et d'objectifs :

Il faut souligner également que les réponses à cette question ne sont pas toujours formulées en termes d'objectifs. Dans certains cas, les objectifs sont noyés au sein d'un discours "pédagogique" plus ou moins cohérent portant sur l'activité proposée ou d'une description de cette dernière, voire même n'apparaissent pas en tant que tels.

C'est le cas par exemple, dans l'extrait suivant :

- *première phase: dans la première étape, on peut voir si l'enfant est capable de se représenter une surface en pièces détachées, c'est à dire s'il arrive à compter le nombre de carreaux de la pièce puis à ramener ce même nombre de carreaux isolés [..] Dans la deuxième étape, plus de réflexion est demandée car l'enfant doit être capable de demander combien il veut de carreaux.*
- *deuxième phase: l'enfant doit être capable de formuler par écrit ce qu'il veut [...] De plus il doit savoir écrire son prénom et son nom et savoir ce que représente la signature.*

Les deux exemples ci-après illustrent le mélange objectif - discours pédagogique - description de l'activité décrit plus haut.

objectifs de cette activité :

- *C'est un objectif notionnel : il appartient au domaine de la numération*
- *savoir écrire un nombre en utilisant des processus tels que le regroupement par dix*
- *distinguer dans un nombre dizaine-unité, connaître la signification des chiffres selon leur place dans le nombre écrit [...]*
- *Nous sommes bien dans une situation d'apprentissage active: les enfants construisent leur savoir. La situation est didactifiée [...] La situation est bien dévolue [...]*
- *première phase : les élèves se servent de leurs acquis, puis il y a validation*
- *deuxième étape : une variable didactique de plus [...]*
- *deuxième phase : abstraction, écriture du nombre et institutionnalisation.*

Ou bien:

Les objectifs visés dans cette activité sont :

- *Les enfants doivent être capables de mettre en place une stratégie efficace pour quadriller leur rectangle de bristol : compter par paquets de 10*
- *L'enfant doit être capable de créer une rupture cognitive pour pouvoir mettre en place cette nouvelle stratégie*
- *L'enfant va alors comprendre que lorsqu'on choisit un groupement (ici par 10) on ne peut plus le changer : c'est un des cinq principes de la numération.*
- *L'enfant prend conscience que le chiffre de la colonne de gauche représente un groupement de la colonne immédiatement à droite.*

Certains sont complètement hors-sujet : ainsi peut-on lire :

Cette activité permet d'évaluer la capacité des enfants en ce qui concerne la représentation de l'espace.
Elle permet au maître de se rendre compte si les élèves de la classe sont capables de se représenter mentalement un territoire et s'ils réussissent à comprendre qu'un même espace peut être constitué d'une multitude d'autres espaces plus petits.

On trouve aussi des incohérences dans certaines copies, par exemple:

Activité portant sur la multiplication et son caractère de commutativité et d'associativité et sur le comptage des nombres à dizaines. Le but final étant d'augmenter leur connaissance des nombres jusqu'à 99

L'incohérence se situe parfois entre les objectifs identifiés et la situation de l'activité dans la progression scolaire :

D'un point de vue mathématique proprement dit l'approche de la multiplication ou la mise en pratique de la multiplication sont le but recherché. En fait le passage du tâtonnement par l'addition et la visualisation au calcul plus simple de la multiplication [...]

Cette activité est ensuite située à la fin du cycle 1 ou au début du cycle 2 avec ce commentaire :

Le fait que les enfants connaissent leurs chiffres jusqu'à 60 et sachent les écrire permet de penser qu'en effet ils sont aptes, ainsi que le fait qu'ils ont déjà abordé la division puisqu'on leur propose des carrés de 2 × 5 dont ils devront toujours se servir par 2.

De même dans une copie peut-on lire, en ce concerne les objectifs :

Il s'agit pour l'enseignant d'instruire la construction d'une méthode d'approche des propriétés de la multiplication et de la division.

Cette activité est ensuite située au CP.

Nous avons donc examiné, et cela est traduit dans le tableau 9, la fréquence des réponses où l'on trouve autre chose que des objectifs d'une part et de celles où apparaît une incohérence flagrante (soit dans la réponse à la question 1, soit entre les réponses aux questions 1 et 2)

	mélange discours	incohérence
instituteurs	9	0
PE	35	5
allocataires	43	4
non allocataires	27	5
FP	11	7
autres	41	18
global	33	9

Tableau 9 : Discours et objectifs

Deux éléments ressortent de ce tableau : tout d'abord la pratique professionnelle semble aider à ne pas confondre objectifs et discours concernant l'activité. En effet les instituteurs et les FP s'opposent aux autres catégories sur ce point. Peut-être aussi, les PE éprouvent-ils le besoin, dans cette situation d'examen, de montrer leurs connaissances toutes fraîches. Ensuite, s'il y a peu d'incohérences en général, les candidats d'origine inconnue se singularisent par un plus grand pourcentage d'incohérences.

B. QUESTION 2

Dans cette question, on demandait de situer l'activité dans la progression scolaire. Les indices attendus ne sont tous pas également cités. En effet, l'indice le plus fréquemment retenu est la connaissance de la comptine jusqu'à 60, les compétences en lecture et en écriture arrivent en seconde position, le nombre de carreaux inférieur à 99 n'est presque jamais mentionné.

Les indices attendus ne sont pas nécessairement associés au niveau CP : ils peuvent être associés au CE ou, plus rarement au niveau maternelle. Pour le CE1, ceci peut être interprété comme un souci de cohérence, dans le cas de déviation et, en particulier, de déviations de type "opérations" dans la question 1. Par exemple,
- à la suite d'une déviation "multiplicative" :

> *Cette activité doit se situer en classe de CE1. Les indices donnés sont que les enfants connaissent et savent écrire les nombres jusqu'à 60 [...] Les objectifs visés permettent de les situer également à ce niveau.*

- ou à la suite d'une déviation géométrique :

> *Cette activité est praticable en CE1 (les enfants devant connaître la comptine jusqu'à 60 et devant pouvoir écrire les nombres correspondants).*

Dans d'autres cas, les indices sont mal interprétés :
- soit du fait d'un mauvais positionnement des apprentissages correspondants dans la scolarité, par exemple lorsque des candidat(e)s écrivent que les élèves savent compter jusqu'à 60 en maternelle, ou à l'inverse que l'on n'aborde pas les écritures additives avant le CE,

- soit parce que l'on pense que l'activité nécessite plus de connaissances que ce n'est le cas, comme dans l'extrait suivant :

> *Cette activité est bien adaptée au CE1. Il faut que les enfants sachent lire et écrire puisqu'ils doivent remplir des bons de commande.*

Soulignons que pour certains candidat(e)s, la deuxième question déstabilise en quelque sorte la réponse à la première, par exemple dans le cas suivant :

Dans la réponse à la question 1 :

décomposition du nombre en base 10 pour amener à la multiplication

[et partie ajoutée après]

ou bien comprendre le nombre et la place des chiffres le composant

Puis, dans la réponse à la deuxième question :

Si c'est pour la multiplication : CE1 mais les enfants ne sachant compter que jusqu'à 60 appartiendraient plutôt à un CP"

Dans certains cas enfin, aucun indice n'est mentionné ou des indices non pertinents sont retenus, par exemple dans le cas suivant où l'activité est située en maternelle :

La nature des consignes constitue un indice. Il s'agit d'enfants répondant à une consigne orale simple.

Le tableau 10 suivant indique les pourcentages de réponses correctes on non (réponse attendue CP ou milieu à fin CP) et la pertinence des indices retenus.

	CP	milieu-fin CP	indice pertinent bien interprété	indice non pertinent ou mal interprété.
instituteur	68	36	73	23
PE	71	41	71	29
allocataire	77	43	75	26
non allocataire	64	40	66	33
FP	74	33	81	19
autres	34	12	44	44
global	59	31	63	33

Tableau 10 : Réponses à la question 2

Excepté pour la catégorie "autres", le pourcentage de réussite est ici élevé : l'activité est située au niveau CP. En revanche, elle l'est beaucoup plus rarement, de façon précise, en milieu ou fin de CP. Soulignons d'autre part que, quelle que soit la catégorie, on a au moins 20% d'indices non pertinents ou pertinents mal interprétés.

On a vu que ceux qui ne situent pas cette activité en CP la situent le plus souvent en CE (souvent pour maintenir une cohérence avec les objectifs envisagés) et dans ce cas, l'interprétation des indices peut parfois être considérée comme correcte (cf. premier exemple ci-dessus). Ceci explique qu'il y ait une un peu plus grande proportion d'indices pertinents bien interprétés que d'attributions au niveau CP.

On note que, comme dans la question 1, les différentes catégories ont des résultats analogues à l'exception des candidats d'origine inconnue dont la réussite est nettement plus mauvaise (deux fois moins de réponses correctes, deux fois plus d'indices non pertinents ou mal interprétés).

C. QUESTION 3

Dans cette question, il est tout d'abord demandé de choisir des grilles en fonction de leur adaptation à la situation. Le tableau 11 ci-après rend compte des choix effectués.

	G1 3×9	G2 6×10	G3 5×7	G4 11×4	G5 3×4	G6 7×7
instituteur	9	91	78	68	5	45
PE	19	78	55	51	19	40
allocataire	18	76	55	52	16	43
non alloc	20	80	55	51	22	36
FP	4	78	63	70	4	44
autres	14	67	48	35	13	27
global	16	75	55	49	15	36

Tableau 11 : Choix des grilles

Comme cela avait été envisagé dans l'étude a priori, la grille G2 est majoritairement choisie (en particulier par les instituteurs), les grilles G1 et G5 sont écartées (particulièrement par les instituteurs et les FP qui ont une pratique professionnelle). En revanche, les grilles G3 et G4 sont choisies à peu près aussi souvent l'une que l'autre. Nous pensions pourtant a priori que la grille G4 serait jugée aussi bien adaptée que la grille G2 puisqu'elle était la seule à avoir une dimension supérieure à 10. La grille G6, comme prévu, est moins souvent choisie. Toutes les catégories d'étudiants concernés respectent cette hiérarchie des différentes grilles, les candidats d'origine inconnue semblent seulement faire un choix plus restreint.

Nous avons examiné également les arguments utilisés pour justifier ces choix. Avant de présenter en détail ces arguments, nous rendons compte dans le tableau 12 de la conformité des arguments et des objectifs attendus.

	arguments correspondant aux objectifs	déviation par rapport aux objectifs
instituteur	86	18
PE	57	34
allocataires	62	32
non allocataires	53	37
FP	67	19
autres	30	38
global	51	33

Tableau 12 : Cohérence des arguments et objectifs attendus

La seconde colonne montre que les instituteurs et les FP dévient moins souvent que les autres catégories par rapport aux objectifs attendus. La première montre que les instituteurs donnent plus souvent des arguments correspondant aux objectifs que les autres candidat(e)s et surtout que les candidats d'origine inconnue en indiquent beaucoup moins que les autres catégories.

On pourra trouver en annexe les principaux arguments avancés par les candidats. Ils ont été résumés et correspondent généralement à un extrait représentatif. Ils sont classés par grilles avec le nombre d'occurrences et une analyse sommaire de certains arguments.

Dans ce qui suit figure une analyse succincte, grille par grille, des arguments avancés par les candidats puis une analyse par type d'objectifs avec des exemples, les candidats ayant généralement donné des arguments communs à plusieurs grilles.

a) Analyse des arguments grille par grille

Parmi ceux qui ont choisi les grilles 1 et 5, plus de la moitié ne se sont pas rendus compte de l'impossibilité de la remplir, les autres étant répartis, dans l'ordre décroissant, entre déviation multiplicative, géométrique et transversale. Pour la grille 5, nombre de ceux qui l'ont choisie ont été abusés par ses petites dimensions et ont donné comme argument qu'elle était simple pour commencer. La grosse majorité de ceux qui ont rejeté ces deux grilles avancent des arguments attendus.

La grille 2 a été plébiscitée par les candidats pour sa longueur de 10, quels que soient les objectifs avancés. Cependant, 17 candidats se sont prononcés contre avec des arguments acceptables. Ils avancent en effet que le fait d'avoir une largeur de 10 induit trop fortement le comportement de l'enfant, qu'il n'y a plus de problème.

La grille 3 a été choisie pour sa largeur de 5 incitant les élèves à prendre des barres 2×5. Les arguments contre sont peu nombreux.

Pour la grille 4, les arguments ne font que très peu apparaître son intérêt, seuls 17 candidats font allusion aux différentes possibilités de pavage et rares parmi ceux-ci ont perçu que c'était là un avantage compte tenu de l'objectif poursuivi.

Pour la grille 6 peu de candidats ont bien perçu le problème de la difficulté de son pavage et 3 d'entre eux ont rejeté la grille pour cette raison.

b) Analyse des arguments par types

Dans ce qui suit, les arguments sont analysés par type, ils sont très variés et logiquement liés aux objectifs qu'ils ont annoncés. De ce point de vue, nous pouvons classer en trois catégories les arguments selon qu'ils correspondent à des objectifs de numération, des objectifs opératoires ou géométriques. Les candidats ayant donné des objectifs transversaux prioritaires ont cependant généralement choisi les grilles avec des critères mathématiques. Les arguments pédagogiques correspondants se retrouvent ainsi dans les différents types suivants.

Plus du tiers des candidats n'ont pas choisi des grilles leur paraissant adaptées, mais ont fait une analyse, généralement rapide, de toutes les grilles.

(1) La numération comme objectif principal

Parmi les candidats ayant choisi la numération comme objectif de la séquence, certains font une analyse pertinente et concise de toutes les grilles comme dans l'exemple suivant :

Les grilles 2, 3, 4 et 6 sont bien adaptées à cette activité. Ces grilles permettent d'y poser des paquets de 10 (2 × 5 ou 1 × 10). Cependant, seules les grilles 2 et 4 peuvent recevoir les 2 types de plaques. Les autres grilles (1 et 5) ont un arrangement géométrique tel que les plaques de 10 carrés sont impossibles à poser, or, le nombre de carrés proposés est supérieur à 10. Les difficultés arriveront quand, dans la deuxième étape, les enfants ne peuvent demander plus de 9 carrés isolés.

D'autres font des choix plus restreints portant généralement sur les grilles 2 et 3 comme dans l'exemple suivant :

Dans un premier temps les grilles 2 et 3 me paraissent mieux adaptées car l'enfant pourra plus facilement faire des paquets de dix avec les dessins des groupements sur les deux grilles.

La grille 2, et à un degré moindre la 3, ont été plébiscitées avec comme argument que le pavage était facilité car une des dimensions était égale à 5 ou 10.

Certains pensent néanmoins que cet argument est plutôt un défaut et de nombreux candidats ont rejeté la grille 2 car il n'y a pas d'unité ainsi que le montre l'exemple suivant :

Elle est inadaptée puisque les enfants n'auront pas besoin de mettre en place une stratégie pour faire les regroupements par 10 (ils sont tout faits). De plus, il n'y a pas de carreaux isolés, c'est gênant si on veut lui faire comprendre ce que signifie dizaines et unités. Elle peut servir pour des enfants qui ont des difficultés

Un certain nombre de candidats n'ont pas vu l'obstacle géométrique que pouvait constituer la forme des grilles et ont choisi les grilles en fonction d'autres critères:

La dimension : des candidats pensent que les grilles "simples" sont mieux adaptées aux enfants en difficulté comme relevé dans l'exemple suivant :

Les grilles 1 et 5 sont adaptées car elles sont simples et l'enfant voit en photographiant et peut agir. On multiplie les grilles lorsque les petites sont déjà assimilées.

D'autres n'ont pas choisi ainsi que le montre l'exemple suivant :

Parmi les grilles proposées, elles me paraissent toutes bien adaptées à l'activité proposée : les enfants peuvent disposer de 10 carreaux et pas plus de 9 carreaux isolés.

Grille 1 : $3 \times 9 = 27 \rightarrow$ 2 paquets de 10 et 7 carreaux isolés ... et ainsi de suite avec toutes les grilles.

Par contre, certains candidats ont bien vu l'obstacle géométrique mais n'ont pas su le résoudre comme dans l'exemple suivant :

Les grilles 1, 3, 5 et 6 ne semblent pas convenir aux objectifs visés. Seules, les grilles 2 et 4 sont exploitables. Cette affirmation étant justifiée par des dessins avec légendes déclarant que pour la grille 3 *...il reste 15 carreaux isolés* et pour la 6 *il y a 14 carreaux isolés.*

Comme dans ce dernier exemple, de nombreux candidats n'ont certainement pas bien lu l'énoncé et utilisent des bandes de 5 :

...La grille 3 qui permet 7 groupements de 5... La grille 6 plus difficile, qui permet 9 groupements de 5 + 4.

(2) Une opération comme objectif principal

Parmi les candidats ayant trouvé que la situation avait comme objectif la multiplication, un nombre important ont choisi la grille 2 comme dans l'exemple suivant :

La grille 2 serait la plus adaptée car les enfants ont des barres de 10 carreaux. Les enfants pourront arriver à voir que l'on a mis 6 fois le carton de 10 carreaux.

D'autres rejettent la grille 4 qui a une dimension supérieure à 10 comme dans l'exemple suivant :

Il me semble que les grilles 1, 2, 3, 5 et 6 sont bien adaptées à cette activité, à condition que les élèves ne soient pas obligés de savoir la table de multiplication, cela n'est pas encore dans leur programme (CP).

Contrairement à certains qui prennent celle-ci et la grille 2 comme dans l'exemple suivant :

Je pense que la grille 4 est un bon outil pour cette séquence car elle fait intervenir un nombre assez grand (44)... car 11 c'est 1 dizaine et 1 unité et ils vont devoir le faire 4 fois... et la grille 2 qui va les aider dans la technique de la multiplication.

(3) La géométrie comme objectif principal

Parmi les candidats ayant déclaré un objectif géométrique, là encore la grille 2 fait l'unanimité ainsi qu'il l'est écrit dans l'exemple suivant :

Une seule grille me semble adaptée, la grille n° 2, pour aligner des paquets de 10 carrés une fois que le système est compris.

D'autres sont attirés par la grille 6 qui est carrée comme dans l'exemple suivant :

La grille 6 (7 × 7). Le carré étant une surface régulière, les enfants la matérialisent plus rapidement.

Il est apparu tout au long de l'analyse de la partie didactique du sujet que les candidats ayant une pratique d'enseignement (FP et instituteurs) réussissent plutôt mieux que les autres et surtout que les candidats d'origine inconnue (n'ayant pas suivi la formation) s'en tirent beaucoup moins bien (ce qui n'était pas le cas pour la partie mathématique du sujet)

V. ARTICULATION DES ANALYSES MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUES

Dans cette partie, nous nous proposons de compléter les analyses précédemment effectuées pour essayer, d'une part de repérer des liaisons éventuelles entre les réponses aux deux parties de l'épreuve : mathématique et didactique, d'autre part essayer de préciser l'influence de l'origine des candidats sur leurs productions.

Pour effectuer ce travail, nous avons décidé de coder chaque copie en reprenant les principales caractéristiques identifiées dans les analyses précédentes puis de soumettre les codages ainsi réalisés à des analyses statistiques. Compte-tenu des questions posées : recherche de relations de ressemblance et surtout d'implications entre variables, nous avons privilégié deux instruments d'analyse : l'analyse en hiérarchie de similarités développée par Lerman (Lerman, 1981) et l'analyse implicative introduite par R.Gras[3] (Gras, 1978). Rappelons que l'analyse de similarités est basée sur un critère de ressemblance entre variables défini de la façon suivante (Gras, 1992) : "Deux variables a et b se ressemblent d'autant plus que l'effectif des sujets les satisfaisant ($A \cap B$) est important eu égard d'une part à ce qu'il aurait été dans le cas d'absence

---

[3]. Nous renvoyons le lecteur pour une présentation de ces instruments d'analyse statistique à J.C. Lerman (1981) : Classification et analyse ordinale des données, Dunod.

R. Gras (1992) : L'analyse des données : une méthodologie de traitement des questions de didactique, Recherche en Didactique des mathématiques, vol 12, n° 1, 59-72.

de lien a priori entre a et b et d'autre part, aux cardinaux de A et B. On mesure cette ressemblance par la probabilité de son invraisemblance." L'analyse implicative reprend le même principe, en considérant cette fois, pour définir un critère d'implication ($a \Rightarrow b$), la mesure du cardinal de $A \cap \overline{B}$.

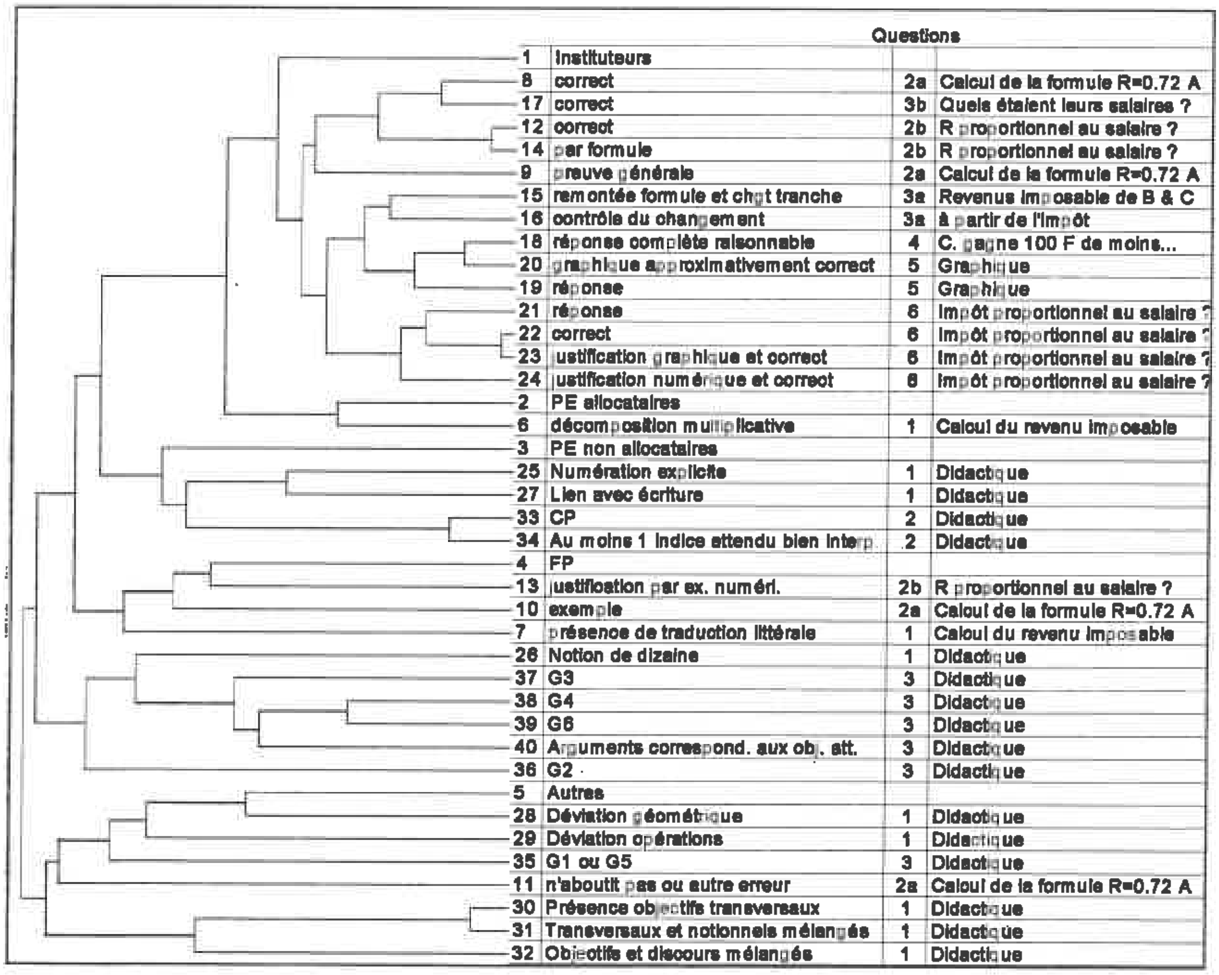
Nous fournissons, dans le tableau 13, la liste des variables binaires retenues. Les cinq premières correspondent aux origines des candidat(e)s, les 19 suivantes à la partie mathématique et les 16 dernières à la partie didactique. Ces dernières variables sont renumérotées de 6 à 21 pour les analyses ne concernant que la partie didactique. Nous rappelons aussi les effectifs et pourcentages de « 1 » correspondants.

Questions	Variables binaires	Numéros	Numéros maths	Numéros didac.	Instituteurs	Alloc.	Non alloc.	FP	Autres	Total
Origines	Instituteurs	1	1	1	22					
	PE allocataires	2	2	2		91				
	PE non allocataires	3	3	3			83			
	FP	4	4	4				27		
	Autres	5	5	5					104	
1 Calcul du revenu imposable	décomposition multiplicative	6	6		5	44	27	4	13	24
	présence de traduction littérale	7	7		23	19	18	26	27	22
2a Calcul de la formule R=0.72 A	correct	8	8		77	64	54	48	46	55
	preuve générale	9	9		55	63	57	56	49	56
	exemple	10	10		14	15	20	11	13	15
	n'aboutit pas ou autre erreur	11	11		9	16	30	37	33	26
2b R proportionnel au salaire ?	correct	12	12		55	56	39	41	33	43
	justification par ex. numéri.	13	13		14	5	10	22	3	8
	par formule	14	14		36	52	24	33	27	34
3a Revenus imposable de B & C à partir de l'impôt	remontée formule et chgt tranche	15	15		77	52	43	52	59	54
	contrôle du changement	16	16		41	29	17	19	24	24
3b Quels étaient leurs salaires ?	correct	17	17		55	35	33	33	38	27
4 C. gagne 100 F de moins...	réponse complète raisonnable	18	18		45	36	23	33	31	31
5 Graphique	réponse	19	19		86	53	59	56	63	60
	graphique approximativement correct	20	20		45	30	27	22	32	30
6 Impôt proportionnel au salaire ?	réponse	21	21		86	56	48	41	56	55
	correct	22	22		77	38	24	19	25	31
	justification graphique et correcte	23	23		45	19	11	7	11	15
	justification numérique et correcte	24	24		18	7	8	4	7	8
1 DIDACTIQUE	Numération explicite	25		6	41	26	29	4	9	20
	Notion de dizaine	26		7	82	70	81	85	44	67
	Lien avec écriture	27		8	27	31	36	22	3	22
	Déviation géométrique	28		9	23	12	11	7	30	18
	Déviation opérations	29		10	18	26	23	26	43	30
	Présence objectifs transversaux	30		11	50	45	33	26	43	40
	Transversaux et notionnels mélangés	31		12	23	24	11	11	18	18
	Objectifs et discours mélangés	32		13	9	43	27	11	41	33
2	CP	33		14	68	77	64	74	34	59
	Au moins 1 indice attendu bien interp.	34		15	73	75	66	81	44	63
3	G1 ou G5	35		16	9	25	28	7	21	22
	G2	36		17	91	76	80	78	67	75
	G3	37		18	73	55	55	63	48	55
	G4	38		19	68	52	51	70	35	49
	G6	39		20	45	43	36	44	27	36
	Arguments correspond. aux obj. att.	40		21	86	62	53	67	30	51

Tableau 13

Nous présenterons dans cette partie les données issues de ces analyses, en nous limitant à ce qui nous semble compléter utilement les analyses déjà effectuées. Le lecteur trouvera en annexe des données supplémentaires, en particulier relatives aux analyses séparées des parties mathématiques et didactiques.

L'analyse hiérarchique des 40 variables retenues (cf. Arbre 1) met clairement en évidence une relative séparation des variables mathématiques et didactiques. En effet, si l'on s'intéresse aux variables associées aux productions, la partie haute de l'arbre est quasiment réservée aux variables mathématiques, la partie basse aux variables didactiques et seules se trouvent imbriquées dans la partie didactique, les variables "négatives" de la partie mathématique : présence de traduction littérale à la question 1, non obtention de la formule de proportionnalité liant salaire et revenu imposable, justifications empiriques dans la question 2.



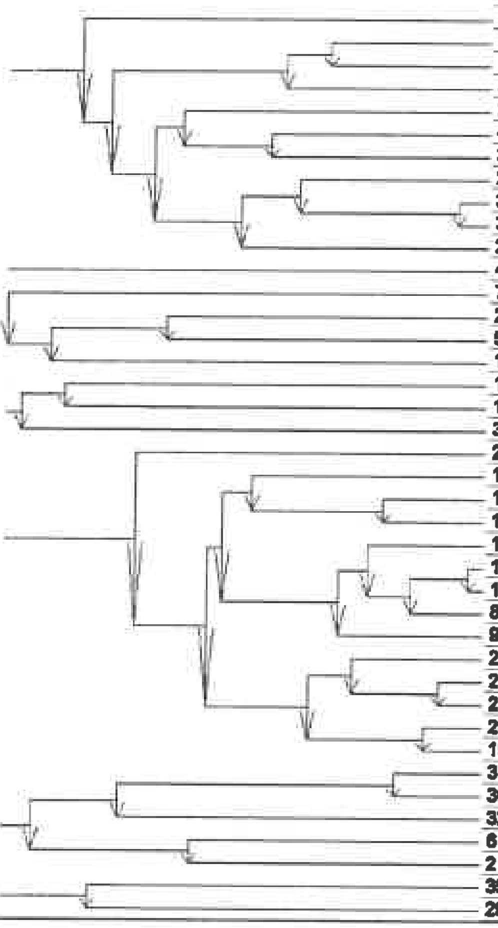
Arbre 1. Mathématiques et didactique : Hiérarchie de similarité des 40 variables.

L'arbre hiérarchique sépare en premier lieu ces variables en deux paquets d'inégale importance. La partie basse regroupe, à l'exception de la variable 11 (non obtention de la formule de proportionnalité en question 2), des variables relatives à la partie didactique qui, sauf la

variable 30 (présence d'objectifs transversaux), sont des variables négatives. En fait, et ceci explique sa position parmi les variables didactiques "négatives", la variable 30 est très proche dans l'arbre de la variable : objectifs transversaux et notionnels mélangés. On notera cependant que les variables 30, 31 et 32 constituent un sous groupe de cette partie basse qui ne se rattache que tardivement au groupe des variables nettement négatives (11, 28, 29, 35).
La partie haute apparaît, elle, constituée de 4 paquets, se regroupant successivement de haut en bas : le paquet le plus haut (H1) regroupe les variables positives de la partie mathématique, le second (H2) les variables positives des deux premières questions didactiques, à l'exception de la variable 26 (reconnaissance de l'objectif : travail sur les dizaines) qui, on l'a vu précédemment, semble correspondre à la forme la plus faible d'identification des objectifs de la tâche et coexiste d'ailleurs parfois avec des déviations de type "opérations". Cette dernière est pour sa part raccrochée à H4. H3 regroupe des variables d'ordre mathématique associées à des difficultés dans la formalisation (variable 7) et des justifications de nature pragmatique (variable 10 et 13 correspondant à la justification de la formule et de la proportionnalité à partir d'un exemple numérique). H4 enfin regroupe, outre la variable 26 déjà citée, les variables positives correspondant aux grilles et l'on notera là encore le regroupement tardif de G2, dont le choix n'est pas, à lui seul, significatif d'une interprétation correcte de la situation.

Si l'on s'intéresse maintenant aux variables caractérisant les origines des candidat(e)s, elles apparaissent nettement séparées dans l'arbre : les instituteurs sont situés tout en haut, associés à la réussite en mathématiques, les PE allocataires se situent à l'extrémité basse de H1 et on notera la liaison forte déjà repérée entre PE allocataires et décomposition multiplicative. Les PE non allocataires, sont situés dans H2 donc reliés semble-t-il un peu plus à la réussite aux premières questions de didactique qu'à la réussite en mathématiques, les FP sont dans H3 donc reliés à un rapport aux mathématiques en jeu peu formalisé et pragmatique, la catégorie "autres" enfin apparaît clairement liée à la partie basse de l'arbre c'est à dire aux variables didactiques négatives et à la non obtention de la formule.

L'arbre associé à la hiérarchie implicative de classes (cf. Arbre 2 page 40) rejoint dans ses grandes lignes la structure que nous venons de décrire, tout en s'en distinguant par certains aspects, ce qui est normal si l'on considère que l'on passe d'une analyse de type symétrique à une analyse de type dissymétrique. Variables mathématiques et didactiques sont encore une fois peu imbriquées. L'arbre, est ici formé de 5 sous-arbres : le plus haut (A1) hiérarchise les variables positives didactiques, le second (A2) deux variables négatives mathématiques (traduction littérale, non obtention de la formule) et une variable négative didactique (déviation géométrique), le troisième (A3) les variables de justification pragmatique, le quatrième les variables positives mathématiques, avec des sous hiérarchies par questions, le quatrième (A4) les trois variables associées à objectifs transversaux et discours ainsi que la décomposition multiplicative de la question 1 et le dernier (A5) deux variables didactiques négatives qui, dans l'arbre de similarités, étaient associées aux variables de A2.



		Questions	
1	Instituteurs		
39	G6	3	Didactique
38	G4	3	Didactique
37	G3	3	Didactique
25	Numération explicite	1	Didactique
40	Arguments correspond. aux obj. att.	3	Didactique
36	G2	3	Didactique
27	Lien avec écriture	1	Didactique
33	CP	2	Didactique
34	Au moins 1 indice attendu bien interp	2	Didactique
26	Notion de dizaine	1	Didactique
4	FP		
7	présence de traduction littérale	1	Calcul du revenu imposable
28	Déviation géométrique	1	Didactique
5	Autres		
11	n'aboutit pas ou autre erreur	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
13	justification par ex. numéri.	2b	R proportionnel au salaire ?
10	exemple	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
3	PE non allocataires		
24	justification numérique et correcte	6	Impôt proportionnel au salaire ?
16	contrôle du changement	3a	à partir de l'impôt
18	réponse complète raisonnable	4	C. gagne 100 F de moins...
15	remontée formule et chgt tranche	3a	Revenus imposable de B & C
17	correct	3b	Quels étaient leurs salaires ?
14	par formule	2b	R proportionnel au salaire ?
12	correct	2b	R proportionnel au salaire ?
8	correct	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
9	preuve générale	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
23	justification graphique et correcte	6	Impôt proportionnel au salaire ?
22	correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
21	réponse	6	Impôt proportionnel au salaire ?
20	graphique approximativement correct	5	Graphique
19	réponse	5	Graphique
31	Transversaux et notionnels mélangés	1	Didactique
30	Présence objectifs transversaux	1	Didactique
32	Objectifs et discours mélangés	1	Didactique
6	décomposition multiplicative	1	Calcul du revenu imposable
2	PE allocataires		
35	G1 ou G5	3	Didactique
29	Déviation opérations	1	Didactique

Arbre 2. Mathématiques et didactique : Hiérarchie implicative de classe.

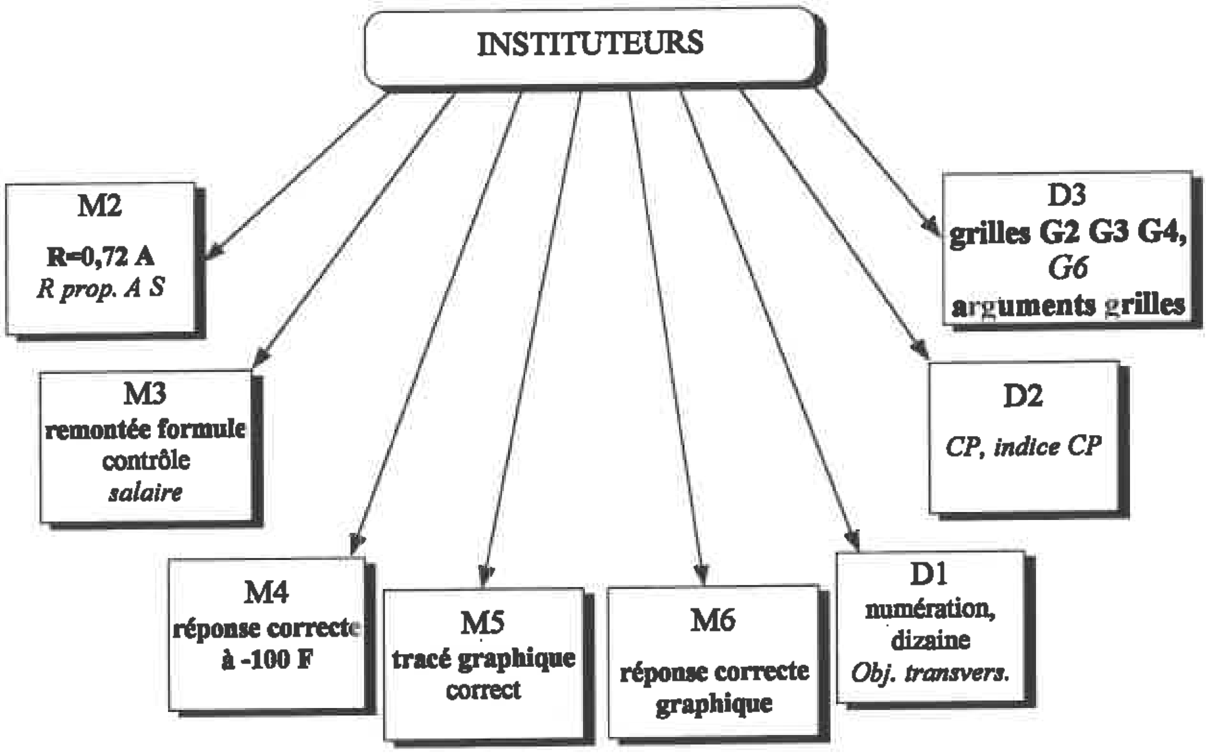
Les différences se situent davantage au niveau du positionnement des variables d'origine : les instituteurs impliquent ici la réussite didactique, les FP ne sont reliés à aucune variable, la catégorie "autres" apparaît dans le groupe A2 donc perd une partie de ses attributs (ceux de A5), les PE non allocataires apparaissent impliqués par des justifications pragmatiques, tandis qu'au niveau des PE allocataires, on retrouve d'une part sous forme implicative, la liaison déjà signalée avec la décomposition multiplicative, mais aussi le fait que la classe constituée par les variables 30, 31 et 32 implique la classe constituée des PE allocataires et de la variable décomposition multiplicative. On voit là confirmée l'analyse question par question qui semblait montrer chez les PE, le souci de restituer ce qu'ils avaient appris en formation, sans une distanciation et une maturité suffisantes pour structurer clairement le discours et séparer ce qui relevait des objectifs de considérations descriptives sur les activités proposées et leur déroulement possible.

Pour essayer de clarifier les relations entre variables d'origine et variables de production, nous avons constitué des sous-graphes relatifs à chaque population suivant le codage suivant : chaque case correspond à une question mathématique ou didactique et nous avons distingué dans le codage trois niveaux d'intensité d'implication :

- codage en italiques : $0,70 < i \leq 0,80$
- codage en écriture normale : $0,80 < i \leq 0,90$
- codage en gras : $0,90 < i$

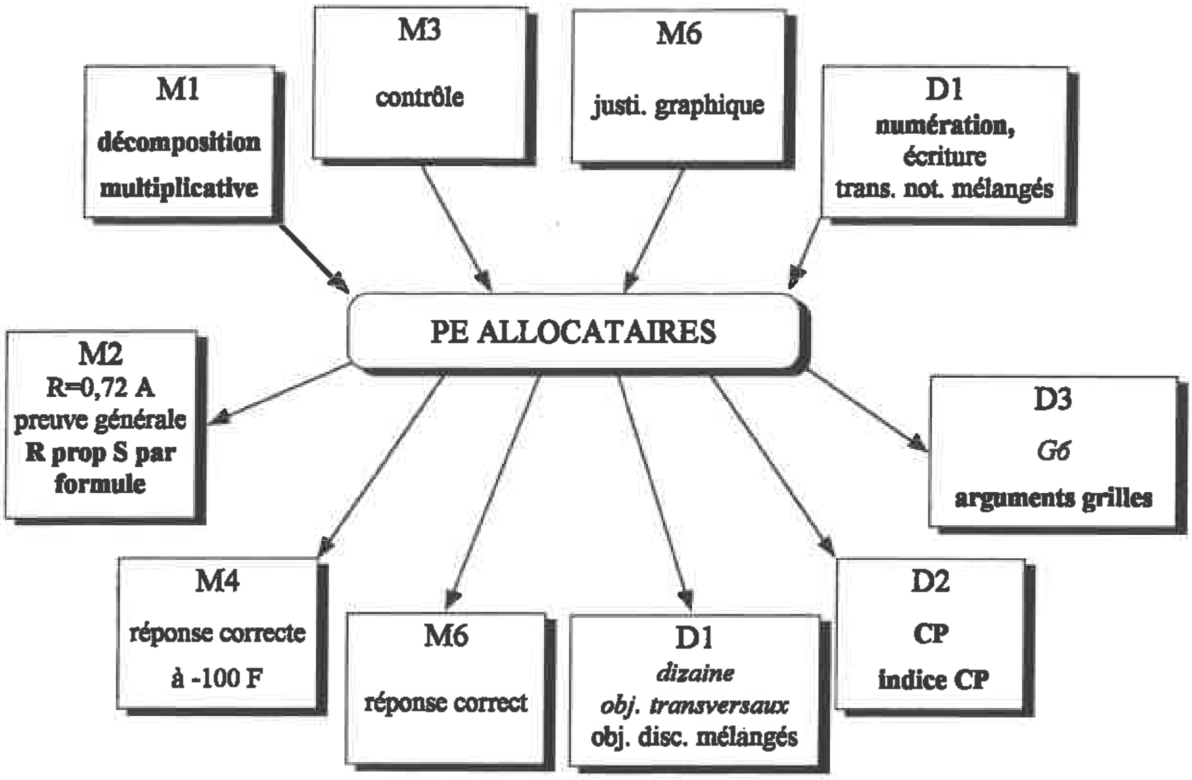
Les cinq graphes correspondants sont fournis pages 41 à 43. Les différences liées à l'origine y apparaissent de façon manifeste. Deux graphes se caractérisent par leur richesse, celui des instituteurs et celui des PE allocataires. Pour les instituteurs, les implications ont toutes pour origine la variable instituteur. Ceci ne doit pas nous étonner, vu l'effectif réduit de cette population et les variables impliquées quand on sait que le calcul de l'intensité d'implication entre deux

Graphe 1 : Instituteurs.



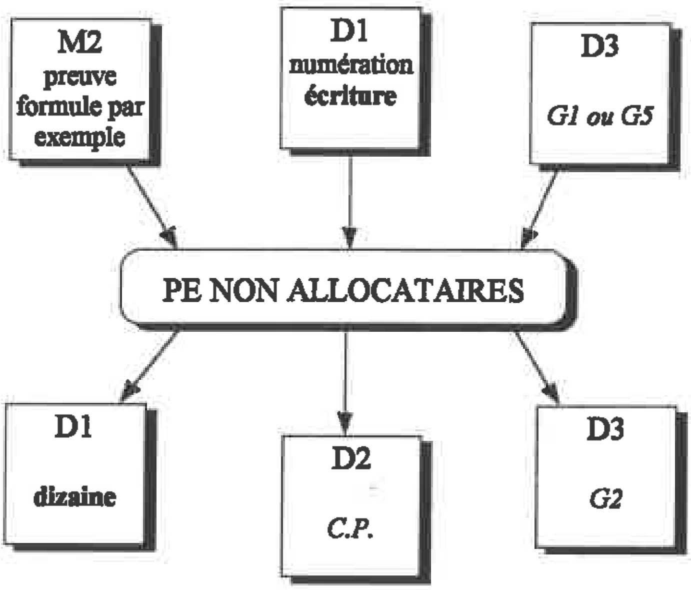
variables a et b ($a \Rightarrow b$) suppose que l'on ait entre les cardinaux A et B des effectifs associés la relation d'ordre A<B. Il est intéressant de comparer les deux graphes. Pour ce qui est des instituteurs, les seules variables impliquées sont des variables positives. On notera cependant sur le plan mathématique que sont absentes les variables 6 (décomposition multiplicative) et les variables qui dans la question 2 traduisent la production de preuves non empiriques. En revanche, ces variables sont présentes dans le graphe des PE allocataires puisque la variable décomposition multiplicative implique à plus de 0,9 la catégorie PE allocataire et cette catégorie implique en retour à plus de 0,8 la variable preuve générale de la formule et à plus de

Graphe 2. PE allocataires.



0,9 la variable justification par recours à la formule de la proportionnalité. Il y a là sans aucun doute, un effet du travail effectué en formation sur la proportionnalité et au delà sur la rationalité mathématique. Les autres implications relatives à la partie mathématique confirment la meilleure réussite déjà constatée des instituteurs. Au niveau de la partie didactique, des différences encore une fois apparaissent entre les deux populations.

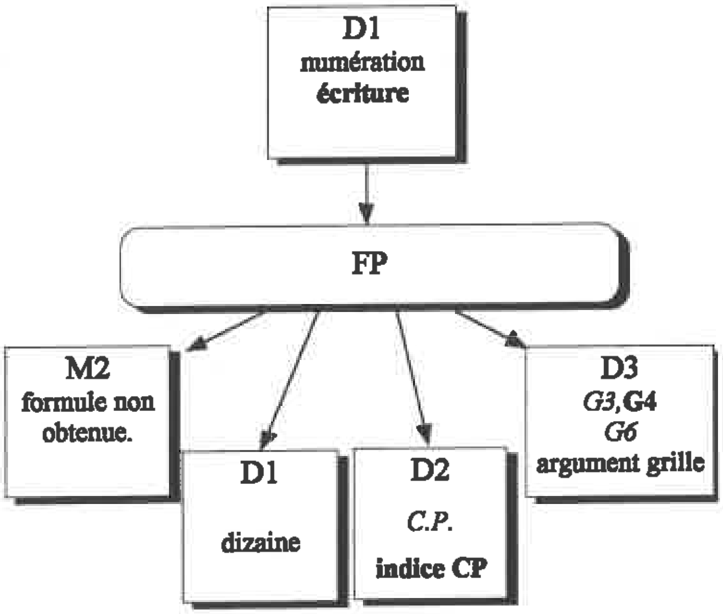
Graphe 3. PE non allocataires



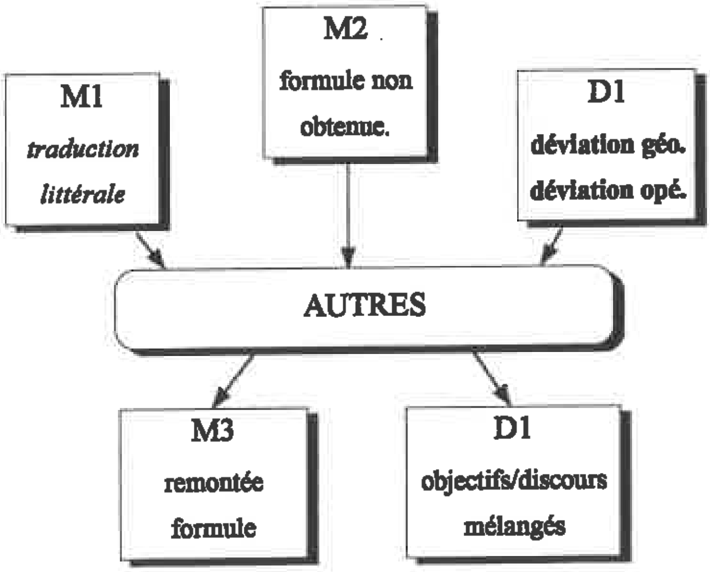
Pour la question 1, on note dans les deux cas des implications avec la présence d'objectifs transversaux, mais dans le cas des instituteurs, il y a implication avec cette seule variable, tandis que dans le cas des PE, on a d'une part l'implication : transversaux notionnels mélangés $\Rightarrow$ PE, à plus de 0,8, d'autre part l'implication : PE $\Rightarrow$ objectifs, discours mélangés, à plus de 0,8. Ceci confirme tout à fait en le précisant ce que nous écrivions plus haut. On notera aussi la forte liaison pour les PE au niveau de la deuxième question et, en revanche, les implications plus faibles en ce qui concerne les grilles que chez les instituteurs. Là encore, on trouve confirmation de ce que laissait supposer l'analyse des productions, une moins grande facilité chez les PE à saisir le jeu des variables numériques de la situation.

A ces deux graphes s'opposent les trois autres graphes, concernant les PE non allocataires, les FP et la catégorie "Autres". Chez les PE non allocataires, comme chez les FP, l'essentiel des implications concernent les variables didactiques, avec visiblement sur ce plan une supériorité des FP, compréhensible du fait de l'expérience professionnelle. On notera en particulier chez les PE non allocataires, au niveau des grilles, le double système d'implication à la fois positif et négatif puisque les grilles inadéquates G1 ou G5 impliquent la catégorie PE non allocataire à plus de 0,7 tandis que cette catégorie implique G2, à plus de 0,7. Ceci tend à confirmer d'ailleurs l'aspect peu significatif du choix de G2. Sur le plan mathématique, on note dans les deux cas le lien avec les preuves pragmatiques, qui oppose donc clairement PE allocataires et non allocataires auquel se rajoute pour les FP l'implication avec la non obtention de la formule de proportionnalité. Enfin, pour la catégorie autre, la seule implication positive concerne la remontée de la formule dans la question 3, toutes les autres implications sont négatives et on retrouve en particulier la forte liaison avec les déviations de type opération ou géométrique au niveau de la tâche.

Graphe 4. FP.



Graphe 5. Origine inconnue.



Ainsi donc, il ressort de ces analyses statistiques, d'une part la séparation globale des variables didactiques et mathématiques caractérisant les productions des candidat(e)s, mais aussi, et ceci nous semble plus intéressant, une sorte de profil des productions par catégorie de candidat(e)s, qui permet de différencier nettement ces catégories. Ces profils opposent avec force en effet les deux catégories PE allocataires et PE non allocataires. Ils tendent à rapprocher en sens inverse d'une part instituteurs et PE allocataires, d'autre part FP et PE non allocataires. Enfin, ils confirment la spécificité de la catégorie "Autres" et sa liaison avec l'échec en mathématiques et en didactique.

VI. CONCLUSION

Nous reviendrons brièvement en conclusion sur les questions posées dans l'introduction. Que ressort-il de cette analyse sur les points suivants :

1 - le rapport à la proportionnalité et plus globalement aux mathématiques des candidat(e)s,

2 - les liens éventuels entre réponses à la partie mathématique et à la partie didactique,

3 - les différences entre les productions des différentes catégories de candidat(e)s,

4 - l'impact de la formation de première année.

Concernant le point 1, force est de constater que le rapport à la proportionnalité des candidat(e)s, y compris de ceux qui ont suivi un an de préparation au concours, n'est pas celui que l'on serait en droit d'attendre de futurs instituteurs. Il reflète plutôt l'inculture mathématique dans laquelle baigne le monde des adultes, y compris des adultes ayant fait des études supérieures. On sait manipuler la proportionnalité directe sur des exemples numériques simples, le passage à son expression algébrique et le travail à partir de cette expression algébrique restent difficiles.

Les approches numériques développées pour résoudre ces problèmes sont d'autre part plus de nature additive et soustractive que multiplicative. Il s'ensuit que si l'on sait calculer un pourcentage, et passer du salaire au revenu imposable, on est relativement démuni pour effectuer le passage inverse du revenu imposable au salaire.

La proportionnalité n'est pas non plus nécessairement reliée dans le cadre graphique à une droite passant par l'origine, mais pour certains semble plutôt liée au fait que la représentation graphique ne fait intervenir que l'objet "droite", ce qui autorise toutes les fonctions affines par morceaux a priori.

Enfin, on note le parasitage du travail mathématique par des convictions erronées liées à la représentation culturelle de la situation des impôts, qui tendent à l'emporter chez certains candidat(e)s : sauts des impôts aux changements de tranche, idée de proportionnalité a priori.

Concernant le point 2, on ne peut affirmer qu'il existe une liaison nette entre réponses à la partie mathématique et réponses à la partie didactique dans l'absolu, ni d'ailleurs non plus d'absence totale de lien. La question, telle qu'elle était initialement posée nous semble maintenant moins pertinente (sans doute la nature du sujet et le fait que la partie didactique ne nécessite que très peu de connaissances mathématiques n'y est pas étrangère). En revanche, il est clair que les différents profils identifiés dans l'analyse se définissent par des caractéristiques portant à la fois sur le mathématique et le didactique.

Si l'on en vient au point 3, c'est sans doute à ce niveau que les résultats obtenus nous semblent en un sens surprenants. Tant l'analyse question par question que l'analyse statistique globale effectuée différencient très nettement les productions des différentes catégories de candidat(e)s. Si la position de la catégorie instituteurs n'a rien de surprenant, compte-tenu de leur expérience professionnelle et du fait qu'il s'agit d'enseignants volontaires, on ne peut manquer d'être frappé par la distinction mise en évidence entre les deux catégories : PE allocataires et PE non allocataires et l'on ne peut manquer de se demander ce qui produit cette différence : différences reflétant les différences ayant conduit à l'attribution des allocations ou, ce qui semble nettement plus probable, différences dans la disponibilité pour la formation, dans le rapport entretenu avec la formation suivant que l'on est ou non, allocataire. Il est clair que les différences constatées doivent nécessairement nous amener à réfléchir de façon plus approfondie à ces questions. Il serait sans doute aussi intéressant d'essayer de mieux comprendre les spécificités du profil FP et en tirer des implications sur la formation à ce niveau.

Concernant le point 4, l'impact de la formation, on ne peut que constater que cet impact est manifeste. Il suffit de comparer les caractéristiques de production des deux catégories n'ayant pas a priori d'expérience d'enseignement : les candidats PE et les candidats "Autres", pour en être convaincu. Passé ce premier constat, il est intéressant de noter certains points particuliers : au niveau mathématique, on voit que la formation favorise nettement une appréhension multiplicative des problèmes de proportionnalité. Il faut en revanche constater que l'effet de la formation dans ce domaine ne va pas jusqu'à assurer de façon solide le passage à l'expression et au traitement algébrique de la proportionnalité. On peut se demander d'autre part, à voir les difficultés rencontrées à la question 3, si le passage à une écriture multiplicative a modifié substantiellement le rapport à la proportionnalité des PE ou s'il faut voir là surtout la manifestation d'une évolution du contrat didactique perçu.
Sur le plan didactique, nous avons largement commenté les productions des PE et leur souci visible de montrer des connaissances fraîchement apprises. Ces connaissances restent sans doute pour beaucoup encore sur un plan culturel, non réellement opérationnel, mais on ne peut sans doute espérer atteindre cette opérationnalité dans le cadre d'une formation qui n'allie pas théorie et pratique. Ceci se manifeste surtout par les mélanges divers observés dans la question 1 et par une argumentation moins pertinente dans le choix des grilles. En revanche, les PE savent aussi bien que les instituteurs situer le niveau scolaire des activités proposées et justifier leurs affirmations à ce sujet par des indices pertinents pris dans l'énoncé. Ils ont acquis une connaissance certaine des enjeux de l'enseignement élémentaire et de la progression des

apprentissages souhaitée par les programmes. Là encore le contraste est flagrant avec la catégorie "Autres".

VII. Annexe 1 : Sujet du concours

ACADEMIE DE REIMS	CONCOURS EXTERNE PROFESSEURS DES ECOLES	TEMPS ALLOUE	3 H
SESSION 1992	EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT	2
		SUJET FEUILLE	1/5

Mathématiques (12 points)

L'usage de la calculette est recommandé.

Problème (8 points)

Note : Les calculs seront effectués au centime près.

Mode de calcul simplifié des impôts de 1991 :

Connaissant le revenu annuel A du foyer, on applique une déduction de 10% à A puis un abattement de 20% au résultat obtenu. On obtient ainsi le revenu imposable R.

Le nombre de parts N est donné par le tableau suivant :

Nombre de parts	Nombre de personnes à charge										
Situation ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mariés	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Célibataires	1	2	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5

On calcule le quotient familial par la formule : $QF = \frac{R}{N}$

L'impôt I est ensuite calculé en utilisant une des formules d'un tableau dont voici un extrait :

Tranche	QF supérieur à :	QF inférieur ou égal à :	Montant I de l'impôt :
2	19 530	23 150	(R x 0,096) - (1 832,88 x N)
3	23 150	36 590	(R x 0,144) - (2 944,08 x N)
4	36 590	47 030	(R x 0,192) - (4 700,40 x N)
5	47 030	59 040	(R x 0,240) - (6 957,84 x N)
6	59 040	71 450	(R x 0,288) - (9 791,76 x N)
7	71 450	82 430	(R x 0,336) - (13 221,36 x N)
8	82 430	137 340	(R x 0,384) - (17 178 x N)
9	137 340	188 900	(R x 0,432) - (23 770,32 x N)

Dans tout le problème, on se limite au cas de célibataires sans personne à charge.

1) Antoine a gagné 120000 F en 1991.

- **Calculer son revenu imposable.**
- **Calculer son impôt.**

2) Calculer la formule donnant le revenu imposable R en fonction du revenu annuel A. En déduire que le revenu imposable est proportionnel au salaire.

3) Bernard et Colette ont payé respectivement 16100 F et 10800 F.

- Quels étaient leurs revenus imposables ?
- Combien ont-ils gagné en 1991 ?

4) Colette prétend que si elle avait gagné 100 F de moins, elle aurait "sauté une tranche" et paierait donc beaucoup moins d'impôts. Qu'y a t-il de vrai dans ces affirmations ?

5) Faire un graphique représentant l'impôt en fonction d'un revenu imposable variant entre 36590 F et 137340 F, pour un célibataire sans personne à charge. Retrouver graphiquement les résultats précédents. (Le graphique sera effectué sur papier millimétré, grand axe horizontal. On prendra 1 cm pour 5000 F en abscisse et 1 cm pour 2500 F en ordonnée).

6) Pour un célibataire sans personne à charge, l'impôt est-il proportionnel au salaire ? Justifier la réponse.

Exercice 1 *(2 points)*

1) Retrouver les deux chiffres a et b manquants dans le nombre 37a28b pour qu'il soit divisible à la fois par 6 et par 45.

2) Trouver le chiffre des unités de 3548^{28}

Exercice 2 *(2 points)*

a) Construire à la règle non graduée et au compas, un pentagone ABCDE satisfaisant les conditions suivantes :

1) Tous les côtés du pentagone sont de même longueur

2) I étant le milieu du segment [AB], les angles AIE ET BIC valent 45°

3) Les angles AED et BCD sont droits

On justifiera soigneusement la construction effectuée

b) Ce pentagone est-il régulier ?

ACADEMIE DE REIMS	CONCOURS EXTERNE PROFESSEURS DES ECOLES	TEMPS ALLOUE	3 H
SESSION 1992	EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT	2
		SUJET FEUILLE	3/5

Didactique *(8 points)*

Voir document annexe (pages 4 et 5)

1) Quels sont les objectifs visés par cette activité ?

2) A quel moment de la scolarité est-elle bien adaptée ?
Y-a-t-il des indices dans le document qui permettent d'étayer cette réponse ?

3) Parmi les grilles suivantes, lesquelles vous paraissent bien adaptées à cette activité, compte tenu des objectifs poursuivis et pourquoi ?

grille 1 : 3x9	grille 2 : 6x10	grille 3 : 5x7
grille 4 : 11x4	grille 5 : 3x4	grille 6 : 7x7

4) Etudier les intérêts comparés des deux bons de commande dans la deuxième phase par rapport aux objectifs poursuivis.

5) Quelle synthèse feriez-vous avec les élèves de cette activité, à l'issue de la phase 2.

DOCUMENT ANNEXE

Description d'activité

L'activité se déroule sur 5 à 6 séances en 4 phases, la description porte sur les deux premières phases. Elle est proposée à des élèves qui connaissent la comptine numérique jusqu'à 60 environ.et savent écrire les nombres correspondants.

Matériel utilisé.

Des rectangles de bristol quadrillé à 1 cm de différentes tailles.
Des carrés de bristol de 1 cm de côté.
Des assemblages de 10 carrés de bristol sous la forme de rectangles 1x10 et 2x5.

Première phase.

Première étape.

Les enfants travaillent en groupes de deux. Chaque groupe reçoit un rectangle de bristol quadrillé du matériel ci-dessus. Les paquets de dix carreaux sont dans une boîte, les carrés isolés dans une autre. Ces deux boîtes sont accessibles aux enfants.

Consigne : *"Vous allez chercher, en une seule fois, juste ce qu'il faut de carreaux pour recouvrir toute la pièce. Vous pouvez prendre des carreaux isolés ou des paquets de dix, comme vous voulez. Un seul des deux enfants se déplacera pour prendre lui-même les carreaux".*

Pendant la réalisation, le maître observe les procédures de résolution des enfants.

La validation se fait par comptage du nombre total de carreaux obtenus et/ou par recouvrement. La mise en commun permet de mettre en évidence les réussites, les échecs et leurs causes.

Deuxième étape.

Consigne : *"Aujourd'hui, il y aura deux enfants qui seront les vendeurs de carreaux. L'enfant chargé d'aller chercher les carreaux devra leur demander ce qu'il veut, au lieu de se servir lui-même. De plus, pour que chaque équipe puisse avoir assez de carreaux, les vendeurs refuseront de donner plus de neuf carreaux isolés."*

Lorsque les groupes ont terminé, le maître fait observer quelques réalisations et analyser réussites et échecs. Les vendeurs sont amenés à faire part de ce qu'ils ont constaté.

Deuxième phase.

Le maître propose l'écriture d'un bon de commande à remettre au vendeur qui pourra préparer les commandes.

Les enfants trouvent deux formes de ce bon qui permettront la satisfaction des demandes :

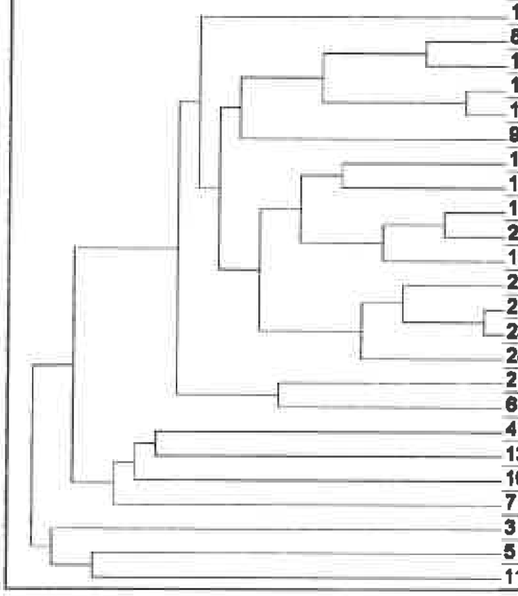
Bon n° 1	Bon n° 2
Je commande : .... paquets de dix. .... carrés isolés Nom et prénom : Signature :	Il me faut ....carreaux, je commande : .... paquets de dix. .... carrés isolés Nom et prénom : Signature :

Les enfants choisissent un des deux bons. Au cours de la séquence, les enfants reçoivent plusieurs pièces à recouvrir, avec des nombres de carreaux inférieurs à 99.

Cette séquence est reprise deux ou trois fois. Chaque fois, on compare, pour certains cas, les bons de commande et les réalisations correspondantes.

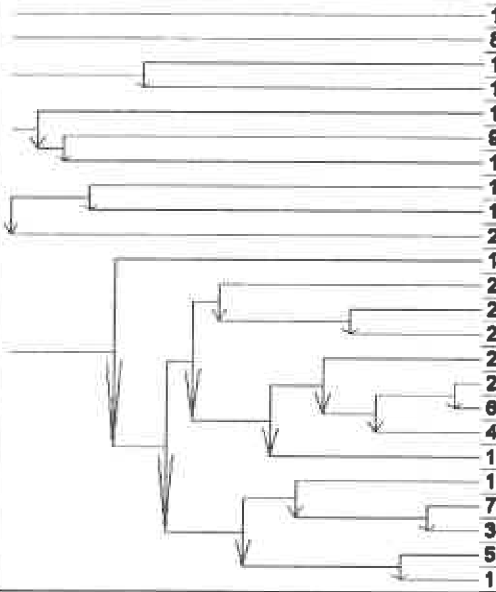
VIII. ANNEXE 2 : ARBRES HIERARCHIQUES ET GRAPHES DE LA PARTIE MATHEMATIQUE.

Mathématiques : Hiérarchie de similarités des 24 variables.

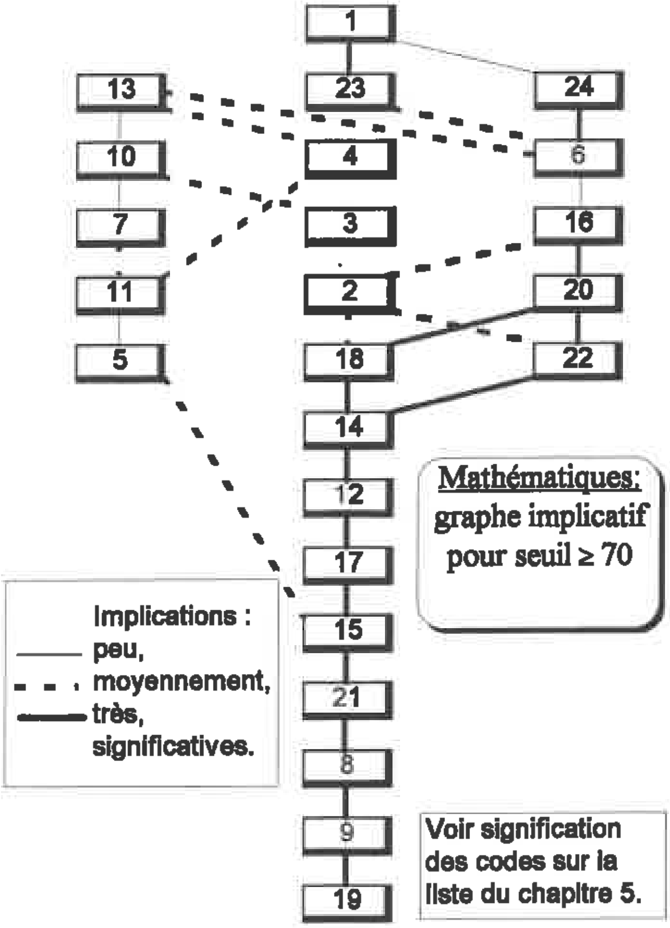


		Questions	
1	Instituteurs		
8	correct	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
17	correct	3b	Quels étaient leurs salaires ?
12	correct	2b	R proportionnel au salaire ?
14	par formule	2b	R proportionnel au salaire ?
9	preuve générale	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
15	remontée formule et chgt tranche	3a	Revenus imposable de B & C
16	contrôle du changement	3a	à partir de l'impôt
18	réponse complète raisonnable	4	C. gagne 100 F de moins...
20	graphique approximativement correct	5	Graphique
19	réponse	5	Graphique
21	réponse	6	Impôt proportionnel au salaire ?
22	correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
23	justification graphique et correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
24	justification numérique et correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
2	PE allocataires		
6	décomposition multiplicative	1	Calcul du revenu imposable
4	FP		
13	justification par ex. numéri.	2b	R proportionnel au salaire ?
10	exemple	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
7	présence de traduction littérale	1	Calcul du revenu imposable
3	PE non allocataires		
5	Autres		
11	n'aboutit pas ou autre erreur	2a	Calcul de la formule R=0.72 A

Mathématiques : Hiérarchie implicative de classes des 24 variables.

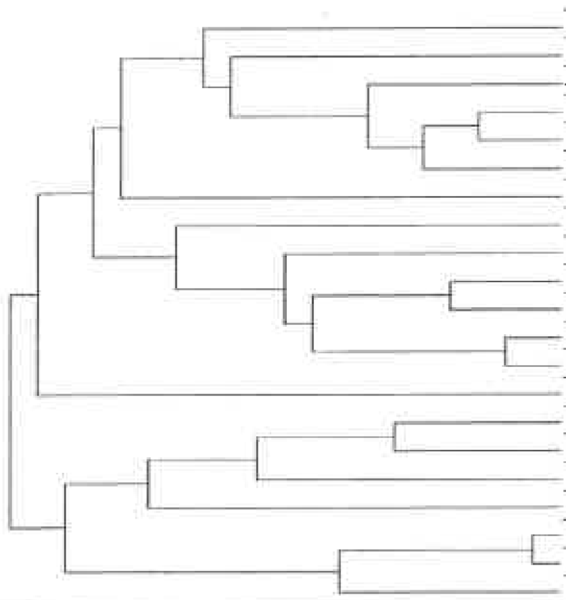


		Questions	
1	Instituteurs		
8	correct	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
17	correct	3b	Quels étaient leurs salaires ?
12	correct	2b	R proportionnel au salaire ?
14	par formule	2b	R proportionnel au salaire ?
9	preuve générale	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
15	remontée formule et chgt tranche	3a	Revenus imposable de B & C
16	contrôle du changement	3a	à partir de l'impôt
18	réponse complète raisonnable	4	C. gagne 100 F de moins...
20	graphique approximativement correct	5	Graphique
19	réponse	5	Graphique
21	réponse	6	Impôt proportionnel au salaire ?
22	correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
23	justification graphique et correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
24	justification numérique et correct	6	Impôt proportionnel au salaire ?
2	PE allocataires		
6	décomposition multiplicative	1	Calcul du revenu imposable
4	FP		
13	justification par ex. numéri.	2b	R proportionnel au salaire ?
10	exemple	2a	Calcul de la formule R=0.72 A
7	présence de traduction littérale	1	Calcul du revenu imposable
3	PE non allocataires		
5	Autres		
11	n'aboutit pas ou autre erreur	2a	Calcul de la formule R=0.72 A



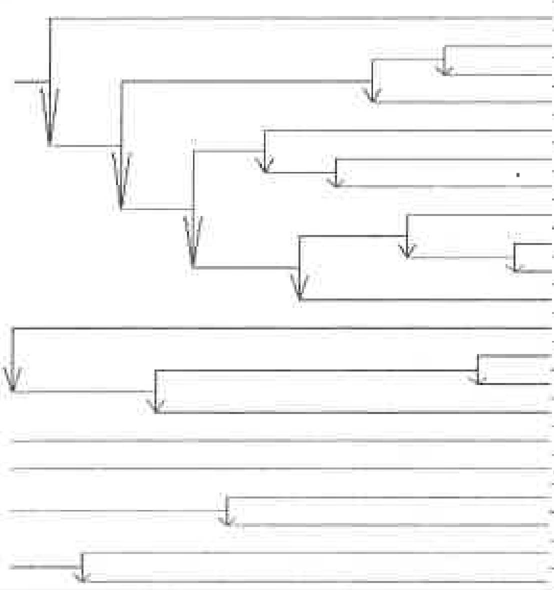
IX. Annexe 3 : arbres hierarchiques et graphes de la partie didactique

Didactique : Hiérarchie de similarité des 21 variables.

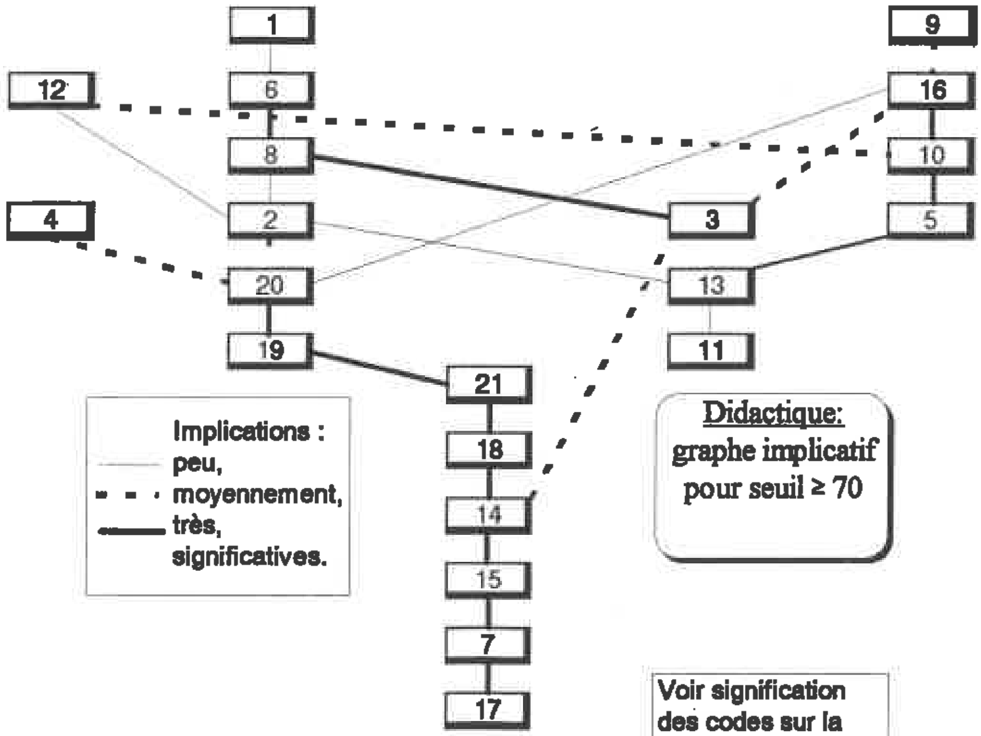


		Questions
1	Instituteurs	
7	Notion de dizaine	1
18	G3	3
19	G4	3
20	G6	3
21	Arguments correspond. aux obj. att.	3
17	G2	3
2	PE allocataires	
3	PE non allocataires	
6	Numération explicite	1
8	Lien avec écriture	1
14	CP	2
15	Au moins 1 indice attendu bien interp.	2
4	FP	
5	Autres	
9	Déviation géométrique	1
10	Déviation opérations	1
16	G1 ou G5	3
11	Présence objectifs transversaux	1
12	Transversaux et notionnels mélangés	1
13	Objectifs et discours mélangés	1

Didactique : Hiérarchie implicative de classes des 21 variables.



		Questions
1	Instituteurs	
20	G6	3
19	G4	3
18	G3	3
6	Numération explicite	1
21	Arguments correspond. aux obj. att.	3
17	G2	3
8	Lien avec écriture	1
14	CP	2
15	Au moins 1 indice attendu bien interp.	2
7	Notion de dizaine	1
2	PE allocataires	
12	Transversaux et notionnels mélangés	1
11	Présence objectifs transversaux	1
13	Objectifs et discours mélangés	1
3	PE non allocataires	
4	FP	
9	Déviation géométrique	1
5	Autres	
16	G1 ou G5	3
10	Déviation opérations	1



Didactique:
graphe implicatif
pour seuil ≥ 70

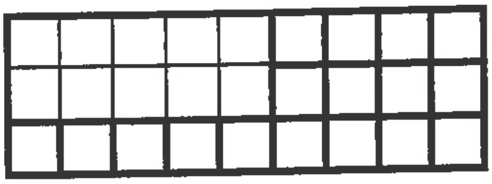
Voir signification des codes sur la liste du chapitre 5.

X. ANNEXE 4 : TABLEAUX DES ARGUMENTS POUR LA QUESTION DIDACTIQUE 3

Certains arguments ont été utilisés par leurs auteurs pour plusieurs grilles, parfois pour, parfois contre. Certains étant censés, d'autres relevant de la plus grande fantaisie, voir de la provocation, nous les avons regroupés dans le tableau ci-dessous.

	Arguments	**Commentaires**
Contre	Car nombre inférieur à 60. (pour toutes les grilles)	Cet argument représente une critique intéressante de la situation dans la mesure où les enfants n'ont pas effectivement l'obligation de décomposer les nombres pour en garder la mémoire.
Pour	Car il y a des unités (sauf la deuxième grille)	Argument montrant que l'enjeu de la situation n'a pas été compris.
Pour	Car comptage fastidieux, car nombre de carreaux supérieur à 20. Grilles 1, 3, 4, 5 et 6	
Pour	On peut faire a paquets de b ou b paquets de a (pour une grille a × b)	Ne tient pas compte de la consigne.
Pour	Amène la notion de distributivité. y=a diz + r unités	Erreur sur la notion de distributivité.
Pour	L'enfant doit engager ses connaissances, construire lui-même son savoir. (pour toutes les grilles)	Déviation vers un objectif exclusivement transversal.
Pour	Plus grande (grilles 2, 3, 4 et 6)	Argument difficilement interprétable, ces grilles correspondent effectivement à celles utilisables.
Pour	Comme a et b contiennent des multiples communs, plus de décomposition possible.	Y compris pour a=b=7. Difficilement interprétable.
Pour	Parfaite (grilles 3 et 4)	
Pour	Nombre impair (1, 2, 3 et 6)	Argument ininterprétable, surtout pour la grille 2.
	Au hasard	Provocation

Grille 1 3×9



Arguments "pour"

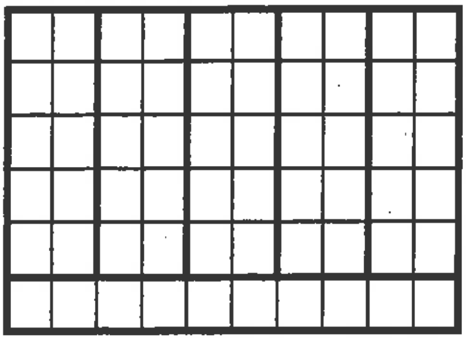
Arguments non pertinents	Commentaires	Nb.
Amène l'enfant à utiliser 2 plaques de dix et 7 carrés.	Ne tiennent pas compte des consignes.	21
Permet de découvrir la table des 3.	Déviation multiplicative.	11
Permet d'élaborer des stratégies d'anticipation.	Déviation vers objectif transversal.	1
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Peut s'assembler avec grille 6 (7×7).	Déviation géométrique et erreur de grille.	1
Bien pour la deuxième phase.	Ne tiennent pas compte des consignes.	1
Structure négative $3 \times 9 = 3 \times 10 - 3$ intéressante, nécessite plus de réflexion et échange de carreaux.		1
Avec 3 grilles on peut obtenir 99.	Erreur de calcul ou de notation (9×9)	1

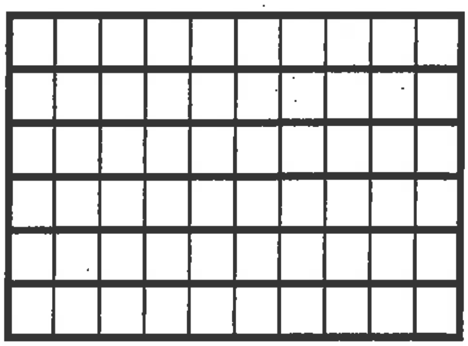
Arguments "contre"

Arguments attendus	Commentaires	Nb.
Ne permet pas de respecter la consigne $u \leq 9$.	Correspond à la réponse attendue.	40
Ne correspond pas à l'objectif des groupements .		7
Obstacle géométrique.		2
Pas d'intérêt à réaliser des groupements par 10.	Cet argument peut être employé pour chaque grille car les enfants savent compter jusqu'à 60.	2
Ne permet pas 1×10.	L'utilisation des barres de 1×10 peut apparaître comme plus adaptée que les barres 2×5.	3

Arguments non pertinents	Commentaires	Nb.
Trop facile.	Ne tient pas compte des consignes.	2
Prédéterminée : l'enfant va chercher 3 fois 9 carreaux.		1
Oblige à découper les barres.		4
Regroupement par 10 trop compliqué.		3
Unités d'ordre 0. Non multiple de 10.	Déviation multiplicative.	3
Pas d'intérêt pour la stratégie du maniement des rectangles. Pas adapté à l'appropriation de la surface.	Déviation géométrique.	2
Au CP, les enfants apprennent à additionner.	Déviation additive.	1

Grille 2 $\quad 6 \times 10$





Arguments "pour"

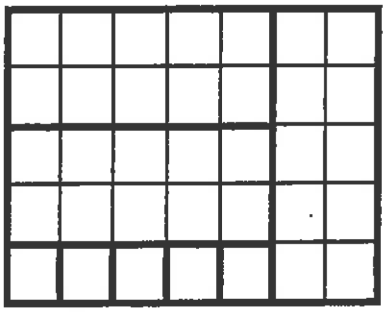
Arguments attendus	Commentaires	Nb.
Groupements par 10 nettement identifiables. Met en valeur la notion de dizaine.	Ces arguments mettent en avant la caractéristique de la grille.	124
Arguments acceptables	**Commentaires**	**Nb.**
Permet l'utilisation du matériel et de respecter la consigne.	Ces arguments particularisent moins la grille donnée.	32
Permet d'utiliser les 2 types de rectangle.		4
Parfaite, permet aux enfants de comprendre l'utilité du 0.		1
Les 2 pavages sont possibles, mais l'enfant ne doit disposer que d'un type de barre pour ne pas parasiter l'apprentissage pour des raisons de disposition.	Analyse pertinente des problèmes posés par la situation, modification de la situation.	1

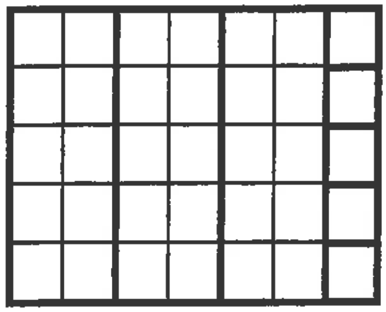
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Les enfants savent compter jusqu'à 60.	Compte-tenu de l'objectif, ces arguments seraient plutôt une critique des grilles.	10
Les enfants au CP savent faire des paquets de 10.		1
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Plusieurs paquets de 10 et quelques carreaux isolés.	Erreur d'observation ou d'inattention .	3
Peut permettre différentes écritures.		1
Figures géométriques différentes.	Déviation géométrique.	1
Nécessite 6 bristols de 10 $\Rightarrow$ reconnaissance de l'espace après découpage.		1
Bien adapté si les élèves ne sont pas obligés de savoir la table de multiplication.	Déviation multiplicative.	20
Permet à l'élève de chercher par le calcul.		1
On peut faire 6 paquets de 10 ou 10 paquets de 6.	Ne tient pas compte des consignes.	1
Fait intervenir des groupements supérieurs à 9.		1
$6 \times 10 = 6 \times (5 \times 2) = (5 \times 2) + \ldots$ découvre différentes façons et propriétés des opérations.		1
Comme 6 et dix contiennent des multiples communs, combinaisons plus importantes.	Arguments inclassables.	1
Amène la notion de distributivité $y=a$ diz $+ r$ unités.		1

Arguments "contre"

Arguments acceptables	**Commentaires**	**Nb.**
Il n'y a pas de petits carrés.	Argument recevable.	9
Prédéterminé : l'enfant va chercher 6 paquets de 10.	Argument recevable.	2
Trop facile, pas de réel problème car multiple de 10.	Certainement trop facile géométriquement.	5
Ne dépasse pas 60.	Pourrait être intéressant en étant développé.	1
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Ne permet d'utiliser que les paquets de 10.	Déviation multiplicative.	1
Multiplication à 2 chiffres.	Inclassable.	1
Nombre de carreaux dépassant 99.		1

Grille 3 5×7





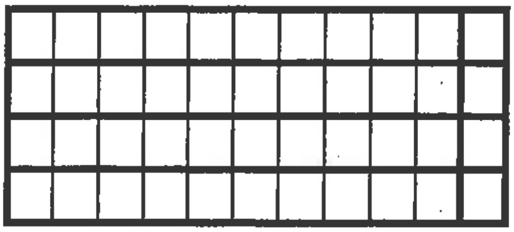
Arguments "pour"

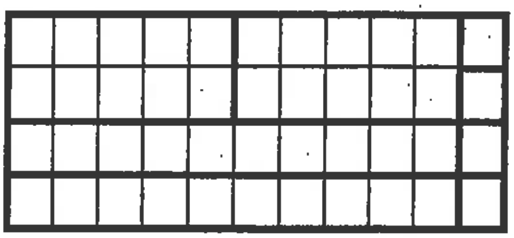
Arguments attendus	**Commentaires**	**Nb.**
Permet l'utilisation du matériel, le respect de la consigne. Correspond bien à l'objectif.	Sous différentes formes, expriment la possibilité de respecter la consigne et la facilité de pavage.	38
Arguments acceptables	**Commentaires**	**Nb.**
Induit le regroupement par 10.	Arguments acceptables mais n'étant pas suffisamment spécifiques de la grille.	1
Utilisable avec 3 rectangles 2×5 et 5 carrés isolés.		40
Permet de décomposer en dizaines et unités.		2
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Incite le pavage préparant au dénombrement.	Le dénombrement est préalable à la situation.	1
Comptage fastidieux car nombre de carreaux supérieur à 20.	Incompréhension de l'enjeu.	1
Rejoint l'objectif de manipulation des relations entre 5 et 10.		1
Activité de recherche insuffisante.		1
Permet 7 groupes de 5.	Ne tiennent pas compte des consignes.	2
Bien pour la multiplication.	Déviation multiplicative.	12
Elles permettent à l'enfant de remplir des rectangles sans laisser de reste.	Déviation géométrique.	2
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
5 est un multiple de 10.	Quelques erreurs mathématiques et sur la faisabilité de la consigne.	1
1 pavage possible.		1
Permet d'utiliser les rectangles 2×5 ou 1×10.		3
On peut utiliser les deux matériels, quadrillage efficace.		2

Arguments "contre"

Arguments non pertinents	Commentaires	Nb.
Ne permet pas l'utilisation des barres de 10 × 1.	Argument mettant l'accent sur la manipulation.	1
Trop facile car multiple de 5.		1
Non multiple de 10.	Déviation multiplicative.	1
Car non pavable exactement (sans unités).		1
Pas adapté à l'appropriation de la surface si on ne donne pas plus de 9 unités .	Déviation géométrique.	1
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Regroupement par 10 trop compliqué.	Erreurs sur la faisabilité de la consigne.	2
Car non pavable.		2
Restent 35 unités sans possibilité de groupement.		1

Grille 4 4×11





Arguments "pour" .

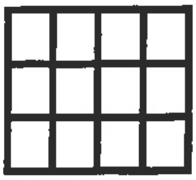
Arguments attendus	Commentaires	Nb.
Permet de respecter la consigne avec dizaines et unités.	Mais rares sont les candidats ayant mis en avant les	32
Pavable avec les 2 types de rectangle.	deux arguments.	17
Arguments acceptables	**Commentaires**	**Nb.**
Pour voir que les deux 4 de 44 n'ont pas la même valeur.	Argumentation incomplète.	1
4 paquets de 10 et 4 isolés.		22
Car doivent décomposer 11 en 10 + 1, 4 fois donc bien comprendre la décomposition de 44.	Cette procédure n'est pas la seule possible.	3
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Paquets de 10 bien visibles.	Ils le sont bien plus avec d'autres grilles.	18
Beaucoup de possibilités d'écriture.		1
Compréhension de la soustraction.	Déviation soustractive.	1

Figures géométriques différentes.	Déviation géométrique.	1
Aborder la table des 11.	Déviation multiplicative.	1
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
A cause de la dizaine (10 barres de $4 + 1$ barre de 4).	Arguments surprenants.	1
Différentes façons d'écrire 44 : $11 \times 4 = 44 = 4 \times 10 = (5 \times 2) \times 4 = \ldots = (10 + 1) \times 4$.		1
Plus complexe à paver. Nécessite plus de réflexion, erreurs possibles de mauvais encadrement $11 \times 4 = 44$ $43<44<45$.		1
On peut utiliser 2 fois 2×5 et le reste en séparés.		1
Permet de décomposer 11×4 en $(10 + 4) + (1 \times 4)$ et 4 commun avec grille de 5 pour assemblage.		1

Arguments "contre" grille 4

Arguments acceptables	**Commentaires**	**Nb.**
Ne dépasse pas 60	Argument valable pour toutes les grilles.	1
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Pas adaptée au travail en base 10		1
Trop compliqué pour le CP		3
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Car pas pavable exactement sans unités d'ordre 0	Déviation multiplicative	4
Ne permet pas d'utiliser les assemblages	Erreurs manifestes	1
Dépasse la centaine		1
Pas adaptée aux formes données		1
Trop d'isolés		1

Grille 5 3×4



Arguments "pour" grille 5

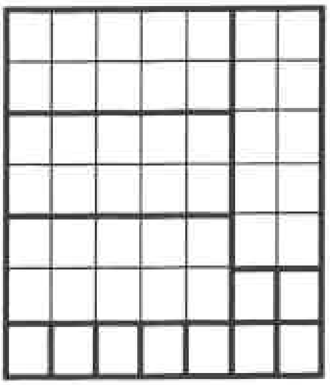
Arguments non pertinents	Commentaires	Nb.
Simple. Pour enfants en difficulté (pas beaucoup de carreaux).	Argument prévu : oubli de l'enjeu pour mettre l'accent sur la simplicité des petits nombres.	7
Car on ne peut pas utiliser les barres, voir si l'enfant pense directement à prendre des isolés.	Le contre-exemple ne semble pas convenir à la situation.	1
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Bien adapté car 1 dizaine et 2 unités		5
Tombe juste		1
Car on peut additionner $2+8$ pour faire 10, construire une dizaine soustraire 10 à 12 et constater qu'il lui reste 2 unités		1
Pour le calcul par comptage		1
Permet de décomposer le nombre de dizaines et d'unités nécessaires		1
Peut s'assembler avec la grille 1	Déviation géométrique.	1
Permet de compléter en plusieurs fois		1
$12=3 \times 4$ ou 4×3 ou $4(2+1)$ 4×3 carrés isolés	Déviation multiplicative.	1
Facile car ont appris la table de 3		1
Découverte de la table de 3		3
Car 2 paquets de 10 et 2 isolés		1
Structure additive $3 \times 4=10+2$ nécessite plus de réflexion et échange de carreaux		1
Permet de décomposer 3×4 en $(2+2) \times 3$ et 4 en commun avec la grille 4		1
Comptage fastidieux car nombre de carreaux supérieur à 20		1
Il y a des unités		2
Permet d'utiliser les rectangles		1

Arguments "contre"

Arguments attendus	Commentaires	Nb.

Ne permet pas de respecter la consigne.	Arguments montrant l'impossibilité de respecter la consigne.	25
L'enfant est obligé de prendre plus de dix carreaux isolés.		20
Pas de pavage possible.		17
Arguments acceptables	**Commentaires**	**Nb.**
Trop simple. Nombre trop petit.		5
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Une bande doit être coupée 2 carreaux ne peuvent être recouverts.	Argument montrant l'oubli de la consigne.	2 1
Pas adaptée à l'appropriation de la surface si on ne donne pas plus de 9 unités	Déviation géométrique	1
Regroupement par 10 trop compliqué.		1
Pas d'intérêt à réaliser des groupements par 10.		1
Non multiple de 10		2

Grille 6 7×7



Arguments "pour" grille 6

Arguments attendus	**Commentaires**	**Nb.**
Utilisable, mais difficile car les rectangles ne sont pas tous dans le même sens.	Arguments montrant que la difficulté géométrique du pavage pouvait être un obstacle.	4
Pavable avec 4 paquets 2×5 et 9 unités	Les auteurs de ces arguments ont vu que cette grille était utilisable mais n'ont pas exprimé les difficultés pouvant être rencontrées par les enfants.	26
Permet l'utilisation du matériel, de respecter la consigne		13
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Met en évidence les paquets de 10		5

Figures géométriques différentes	Déviation géométrique.	2
Bien pour la multiplication	Déviation multiplicative.	4
Possibilité d'introduire des nombres carrés		2
Arguments inattendus	**Commentaires**	**Nb.**
Nécessite 7 carrés de 1×1 $\Rightarrow$ reconnaissance espace après découpage	Déviation géométrique et erreur de calcul.	1
Oui car 7 barres de 5 et 14 isolés	Ces candidats n'ont pas réussi à paver correctement la grille, ce qui montre sa difficulté.	1
Car pavable et obligation de prendre 2×5 et de découper		1
Car 4 barres 2×5 et 7 isolés	Erreur de calcul	2
Permet d'utiliser des rectangles 2×5 ou 1×10	Erreur de pavage.	2
Dans deuxième phase car impossible à remplir		1
Permet 9 groupes de 5 et 4 unités	Mauvaise compréhension de la consigne.	1
Car un peu + difficile (49 proche de 50)	Arguments difficilement interprétables.	1
Plus facile à manipuler car grosse		1
A utiliser quand les enfants ont compris le comptage de 10 en 10 $7 \times 7 = 49 + 1$		1
Oui mais dizaines moins évidentes. Mais l'enfant pourra utiliser des carrés 5×5 pour isoler les dizaines		1

Arguments "contre" grille 6

Arguments attendus	**Commentaires**	**Nb.**
Pavable mais la 4ème plaque risque de poser problème, d'induire les enfants en erreur et ce n'est pas le but.	Cet argument montre une bonne compréhension des objectifs de la situation.	3
Trop compliquée pour le CP, ne sert pas les objectifs.		6
Arguments non pertinents	**Commentaires**	**Nb.**
Ne mettent pas en relief les groupements par 10		5
Pas adaptée à l'appropriation de la surface si on ne donne pas plus de 9 unités	Déviation géométrique	1
Car non pavable exactement (sans unités)	Déviation multiplicative.	2
Carré alors qu'on veut rectangle	Déviation géométrique (carré non rectangle).	3
Non pavable, pas adaptée aux formes données.	Difficultés géométriques pour les candidats.	8

UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE EN TERMINALE C : ENSEIGNEMENT DE METHODES ET TRAVAIL EN PETITS GROUPES

Isabelle Tenaud
I.R.E.M., Université Paris 7 Denis Diderot

UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE EN TERMINALE C :
Enseignement de méthode et travail en petits groupes

Isabelle TENAUD - IREM Paris 7

INTRODUCTION

Cet exposé concerne un travail de recherche qui a abouti à une thèse, dirigée par Aline Robert.

C'est un problème d'enseignement qui en est l'origine : le malaise que je ressentais dans l'enseignement de la géométrie en TC. Les élèves semblaient paralysés pour utiliser leurs connaissances (nombreuses en Terminale C), en particulier pour démarrer un exercice.

Ce travail s'inscrit dans le cadre des hypothèses générales sur l'enseignement post-obligatoire avancées par A. Robert et plus précisément sur celle-ci : l'association d'un enseignement de type "métamathématique" et de mises en situation des élèves propres à leur faire utiliser cet enseignement dans des résolutions de problèmes peut être propice aux apprentissages en mathématiques.

Dans ce cadre, l'hypothèse précise qui sert de base à cette thèse est la suivante :

En terminale C, en géométrie, une interaction entre un enseignement de méthodes explicite et explicité en tant que tel, et un travail régulier en petits groupes sur des exercices adéquats avec un contrat spécifique - l'enseignant ayant des représentations en cohérence avec ces différents points - favorise l'acquisition d'une démarche méthodique chez un grand nombre d'élèves pour résoudre les problèmes de géométrie, et s'accompagne d'un enrichissement de leurs représentations.

Je développerai dans cet exposé successivement trois parties :

* le scénario choisi,
* la méthodologie utilisée,
* les résultats de l'analyse du matériel et l'évaluation que l'on peut faire de cette expérience.

I. LE SCENARIO

I.1. Travail en petits groupes

Pendant toute l'année scolaire, une heure par semaine (pendant l'heure de travaux pratiques où la classe est dédoublée) les élèves ont travaillé en groupes de 3 ou 4. Rien n'a été imposé pour la formation de ces groupes, les élèves se sont groupés par affinité, et ces groupes sont restés stables toute l'année.

Les exercices proposés pendant ces séances ont été des exercices où on ne donnait pas d'indications et où plusieurs méthodes pouvaient être envisagées. Les groupes travaillaient à leur rythme et la synthèse était faite en classe entière lors du cours suivant, toutes les méthodes utilisées étant proposées.

Le contrat en vigueur pendant ces séances de travail en petits groupes a changé au cours de la première année. Tout d'abord je passais tout à tour dans chaque groupe pour voir où en étaient les élèves et j'intervenais à mon gré. L'écoute de certains enregistrements où les interventions du professeur paraissaient mal venues a amené à proposer explicitement aux élèves un autre contrat : le professeur n'intervient dans un groupe que s'il est appelé, et les élèves doivent l'appeler s'ils sont bloqués, s'ils ont une question à poser à laquelle ils n'ont pas su répondre dans leur groupe, ou enfin s'ils ont une solution à proposer.

I.2. Enseignement de méthodes

Plutôt que de parachuter aux élèves des heuristiques générales (comme celles de Polya) qui auraient pu paraître un nouveau contenu à apprendre et surtout qui auraient encore été imposées de l'extérieur aux élèves, j'ai plutôt cherché à reconstruire un enseignement de méthodes à partir des expériences des élèves. Ainsi j'ai cherché des points de repère très proches des élèves, qu'ils puissent reconnaître dans ce qu'ils faisaient et qu'ils puissent compléter par eux-mêmes.

L'enseignement explicite de méthodes a commencé après cinq séances de recherche en petits groupes d'exercices de géométrie, une séance de synthèse a alors permis de souligner des éléments de méthodes. A partir de ce que les élèves avaient proposé pour ces cinq exercices, on a pu ainsi mettre en évidence :

** des changements de points de vue (par exemple pour démontrer que trois droites sont concourantes on peut montrer que les trois droites passent par le même point ou démontrer que le point d'intersection de deux d'entre elles se trouve sur la troisième), de cadres, de stratégies,*

** des points de repères : types de problème (alignement, construction, lieu ...), configurations de base, outils pour résoudre un type de problème donné .... .*

Ces éléments de méthodes sont complétés tout au long de l'année par la classe. Et l'ensemble du travail fait en géométrie (travaux pratiques, cours, devoirs, exercices) permet un réinvestissement et un enrichissement de cette démarche.

II. METHODOLOGIE / RECUEIL DE MATERIEL ET ANALYSE

Pour évaluer cette expérience qui a duré quatre ans, j'ai choisi d'étudier précisément ce qui se passe dans certains petits groupes et d'analyser quelques productions écrites.

Pour cela j'ai recueilli les enregistrements de quatre groupes d'élèves (volontaires) pendant les séances de travail en groupes durant toute une année scolaire. J'en ai décrypté treize et je les ai analysés.

L'analyse de ces transcriptions a été faite de trois façons :
1) j'ai relevé ce qui me semblait important dans le fonctionnement social du groupe (nombre d'interventions, de questions, de hors-sujets) et j'ai pris en compte particulièrement ce qui est au centre de cette recherche c'est-à-dire les interventions portant sur les méthodes, en essayant de les différencier suivant leur qualité. trois niveaux ont ainsi été distingués :

(M1) : réflexions imprécises et sans rapport direct avec le problème,
(M2) : réflexions précises mais sans ancrage dans le problème,
(M3) : réflexions précises avec au moins un ancrage dans le problème.

2) J'ai analysé la démarche de recherche du groupe et l'élaboration des démonstrations.

3) J'ai analysé le rôle du professeur et de ses interventions.

De plus j'ai recueilli un autre matériel : un paquet de copies sur un exercice un peu particulier et des questionnaires, le premier à la suite des copies précédentes et les autres à la fin de chacune des quatre années.

Mais il ne faut pas oublier que les résultats obtenus portent sur des effectifs faibles, voire très faibles pour certaines classifications, que pour les enregistrements l'étude faite est centrée sur un groupe, le groupe 1, pour lequel j'ai étudié sept séances réparties sur l'année entière et que je n'ai pu faire que peu de comparaisons (seulement une par type de tâche : alignement, lieu, construction et analyse), et enfin que peu d'enregistrements des groupes 2, 3 et 4, ont pu être étudiés.

III. RESULTATS

III.1. Travail en petits groupes

a) Fonctionnement du groupe et interventions méthodologiques

En ce qui concerne les groupes, on observe des structures variées, et les élèves prennent la parole très différemment : mais pour un même groupe, certaines régularités apparaisssent : par exemple, c'est toujours le même élève qui parle le plus dans le groupe 1 et c'est toujours la même élève qui parle le moins dans le groupe 4. Cependant les rôles ne sont pas fixes et on peut se demander si ces changements sont liés à la tâche.
Ceci est valable pour les prises de parole, mais aussi pour les questions et pour les interventions méthodologiques.

Des comparaisons ont été faites entre les comportements des groupes suivant le type d'exercice proposé : un exercice de géométrie donné au baccalauréat avec beaucoup d'indications, ou un exercice d'analyse provoque beaucoup moins d'interventions méthodologiques qu'un exercice de géométrie donné sans indications.

Pour le groupe 1, qui a été étudié sur plusieurs séances, on peut faire plusieurs remarques.
D'un point de vue quantitatif, on observe qu'il y a une augmentation au cours de l'année de la proportion des interventions méthodologiques, et que, parmi ces interventions, il y a aussi une augmentation des interventions précises et en rapport avec le problème par rapport aux deux autres catégories. La répartition des interventions méthodologiques entre les trois élèves varie peu.

On constate que globablement la démarche méthodologique des élèves du groupe 1 s'améliore au fil des mois. Les élèves ont recours plus vite à des méthodes adaptées et savent mieux les utiliser effectivement dans les exercices ; ainsi plus on avance dans l'année, plus il y a de questions résolues au cours des séances de TP. Chaque élève garde certes son profil, ses spécificités, mais l'ensemble progresse.

D'autre part, toujours en ce qui concerne le groupe 1, on constate une évolution dans l'utilisation de la démarche méthodologique, notamment une amélioration qualitative de l'adéquation entre les propositions du groupe et ce qu'il y a à faire. Ceci correspond à une plus grande utilisation du niveau (M3). On peut donc dire, pour ce groupe, qu'il y a un certain apprentissage réussi. Et, en ce qui concerne l'efficacité de la démarche méthodologique - et c'est cette démarche qui, je le rappelle, était l'objet de l'expérience - elle augmente notablement, sans que l'on puisse être sûr que ce soit uniquement à elle que soit due l'amélioration des performances.

Les autres groupes sont différents. Il est plus difficile d'évaluer exactement ce qui s'est passé car il n'y a pas eu assez d'enregistrements étudiés pour faire une évaluation analogue. Globalement toutefois, on a pu remarquer que la réussite était corrélée à une plus grande utilisation de la démarche méthodologique.
Cependant la comparaison avec les autres groupes analysés amène à penser qu'il peut y avoir des variations selon les groupes et selon les tâches, ces variations ne mettant toutefois pas en défaut les conclusions ; par exemple, il existe des seuils de connaissances (liés donc à la composition du groupe) au-dessous desquels les élèves, malgré la démarche, ne réussissent pas à démarrer.

On peut dire finalement que, dans les exercices de géométrie proposés sans indications de méthode, les élèves des groupes que nous avons étudiés utilisent relativement fréquemment (21 % des interventions en moyenne) des argumentations méthodologiques. On peut dire que les élèves se sont appropriés le recours à la méthode.

b) Analyse de l'élaboration des démonstrations

Il apparaît, dans les séances que j'ai analysées, que le travail en groupe suscite l'apparition de plusieurs phénomènes qui n'auraient sans doute pas eu lieu aussi souvent dans une recherche individuelle.

* Il y a toujours eu plusieurs méthodes proposées par les différents élèves. Au cours du temps, cette variété, cette possibilité de choix est attendue et même réclamée par les élèves.

* Il y a toujours des dicussions et des critiques à propos des méthodes. A propos de leur adaptation au problème, de leur mise en oeuvre plus ou moins délicate (choix d'un repère, recherche d'une isométrie ...), le choix, nécessaire si plusieurs méthodes sont proposées simultanément, entraîne une comparaison et une évaluation des différentes propositions, toutes choses beaucoup plus rares dans un travail individuel.

* Chaque élève est amené, à un moment ou un autre, à adopter l'idée, la méthode ou la démonstration d'un autre élève. L'élève ne peut pas répéter constamment le même type de démonstration et chacun à son tour est conduit par le groupe à utiliser des démarches qui lui sont spontanément moins familières.

* Le groupe, par ses questions et ses critiques, révèle les connaissances peu sûres et les incompréhensions de sens. Chaque élève est poussé par les autres à préciser sa pensée et à approfondir ce qu'il y a d'implicite dans ses propositions. Un élève seul n'a pas ce recul face à sa propre démarche.

* Certains arguments vagues sont moins utilisés, on rencontre moins d'affirmations sans justifications.

c) Interaction professeur-élèves et rôle du professeur

- *avec le premier contrat :*

Dans ce contrat implicite, le professeur arrive à l'improviste. Cela signifie que le rôle du professeur est de surveiller l'activité des élèves, la progression dans la résolution de l'exercice, le rythme et l'intensité du travail. Il n'a pas un rôle spécifique dans le déroulement de la recherche. De plus les points sur lesquels le professeur est amené à intervenir sont aléatoires, les élèves n'en sont pas maîtres et les interventions du professeur ne s'inscrivent pas toujours dans le travail du groupe.

- *avec le deuxième contrat :*

Ici le professeur a un rôle tout à fait spécifique dans le travail du groupe. Ce sont les élèves qui ont l'initiative des moments et du contenu des interactions entre eux et le professeur. Il est complètement intégré à la démarche du groupe. Implicitement le professeur n'a plus en charge la surveillance du travail et de son rythme. Son rôle s'est déplacé.
Ce qui nous apparaît essentiel du côté des élèves c'est qu'ils doivent savoir où ils en sont, ils doivent prendre conscience qu'ils sont bloqués, qu'ils ont fait une hypothèse ou qu'ils ont démontré quelque chose ; ensuite ils sont amenés à formuler explicitement le motif de leur appel. Un certain contrôle de l'activité du groupe par lui-même est donc nécessaire et s'est manifesté naturellement même s'il n'en a pas été fait état explicitement dans la classe. Le rôle des élèves s'est enrichi.

En résumé, c'est dans la plus grande adéquation entre le moment de l'intervention du professeur et la démarche du groupe d'une part, entre la nature de l'intervention du professeur et la demande du groupe d'autre part, que l'on peut voir les spécificités positives de ce troisième contrat.

III.2 Résultats à travers les copies et les questionnaires

Voici d'abord de quel matériel il s'agit.
Il y a d'abord un paquet de copies concernant un devoir à la maison dont le sujet était le suivant :

> *A et B sont deux points fixes d'un cercle fixe C. M décrit ce cercle ; soit P le point de la demi-droite issue de B passant par M tel que BP = AM. Quel est le lieu de P ?.*

Dans cet exercice, une partie des points sera attribuée à l'exposé de la recherche que vous avez faite avant de rédiger (que vous ayez trouvé ou non). On vous demande d'indiquer les arguments méthodologiques que vous vous êtes dits, même si cela ne vous a pas permis de résoudre l'exercice.

D'autre part, trois séries de questionnaires ont été recueillies :

- un premier questionnaire, posé à la suite du devoir précédent ; les élèves ayant tout à fait compris ce qui était attendu, j'ai essayé de leur faire préciser ce qu'ils en pensaient,
- à la fin des trois premières années de l'expérience, le questionnaire suivant a été proposé aux élèves :

  1°) Y a-t-il des problèmes de géométrie que vous trouvez plus difficiles que d'autres ? Précisez.
  2°) Pouvez-vous résumer le cours de géométrie en précisant les points qui vous semblent importants (10 lignes maximum).
  3°) Quelles sont les interventions du professeur ou les formes de travail qui vous ont le plus aidé ?
  4°) Y a-t-il des différences dans la façon dont vous abordez les problèmes de géométrie par rapport à la 1ère S ?
  5°) A la fin de cette année, aimez-vous la géométrie ?

- et enfin, à la fin de la quatrième année de l'expérience, le questionnaire a été le suivant:

  1°) Que pensez-vous du travail en groupe ?
  2°) Que pensez-vous des exercices sans indications ?

Voici maintenant quelques commentaires généraux issus de ce matériel.

a) Les copies"AM = BP" et les réponses aux différents questionnaires montrent que presque tous les élèves sont individuellement très conscients de mes objectifs de professeur et de mon attente, au niveau de la démarche méthodologique, de la pratique du travail en petits groupes et du transfert à la recherche individuelle.

b) Ils en sont suffisamment conscients pour être capables de faire la démarche demandée dans un devoir écrit et reconnaître a posteriori l'avoir effectivement appliquée dans les recherches en petits groupes, en donnant eux-mêmes des explications sur le fonctionnement des groupes, en s'appuyant sur des arguments qui sont cohérents avec les analyses des enregistrements.

c) Les élèves sont capables de parler à bon escient de ce qu'ils ont fait : ils donnent des réponses qui concordent avec les pratiques de l'année et sont satisfaits dans l'ensemble.

d) J'ai été frappée par l'honnêteté des élèves qui reconnaissent eux-mêmes l'existence d'une distance entre ce qu'ils font et ce qu'ils disent qu'il serait bien de faire : ce qui me paraît important est qu'ils expliquent pourquoi ils se limitent ainsi (temps, sujet d'examen, etc...). Ils ont donc conscience de certaines contraintes qui sont réellement des obstacles à un enseignement plus qualitatif.

On peut bien sûr se demander dans quelle mesure ces réponses ont été faites plus ou moins consciemment pour me faire plaisir, ou encore si la bonne adéquation entre les réponses attendues et les réponses recueillies est due à certaines explications que j'ai pu faire en classe, celle des élèves n'étant qu'une reprise, un reflet, une répétition.
On peut se demander aussi si leurs réponses favorables sur l'aide de l'enseignement de méthodes et du travail en petits groupes ne viennent pas simplement du fait, d'une part que ces deux formes de travail avaient probablement l'attrait de la nouveauté pour la majorité des élèves, d'autre part que, implicitement dans le questionnaire de fin d'année, j'attendais des réponses sur ces deux points dans la mesure où il s'agissait là des seules différences avec un enseignement plus traditionnel (par exemple un élève a répondu au questionnaire 2 : "*ce n'est pas le travail en groupe qui m'a le plus aidé*").

Cependant, dans les réponses, on observe que les élèves ont employé leurs propres mots, de façon non stéréotypée et très variée, et qu'ils ont retenu des choses différentes. Certaines réponses montrent une grande cohérence entre les difficultés rencontrées dans la recherche d'un exercice et ce qu'a pu apporter l'enseignement méthodologique ; les moments où il est inutile sont aussi évoqués très franchement.

Le troisième questionnaire a permis de préciser les réactions des élèves par rapport au travail en groupe (puisqu'ici la question était directement posée) et on observe, comme je l'ai déjà dit, que les arguments sont tout à fait cohérents avec ce qui a pu réellement se passer dans les groupes d'après l'analyse des enregistrements.

IV. CONCLUSION : Les résultats, leurs limites, les généralisations éventuelles

En réunissant les résultats sur les enregistrements et sur le matériel écrit, les conclusions générales que l'on peut tirer de cette recherche sont les suivantes.

D'abord on a pu élaborer et réaliser effectivement plusieurs années de suite un scénario permettant aux élèves de mieux aborder les exercices de géométrie un peu difficiles (et sans indications).
Les élèves ont été satisfaits, et conscients des intentions du professeur et des avantages de la démarche proposée.

L'ensemble de ce travail confirme notre hypothèse de départ : une interaction entre un enseignement de "métaconnaissances" et une utilisation de celles-ci par les élèves dans des situations adaptées peut faciliter certains apprentissages.
Cette hypothèse peut être lue autrement : chercher moins d'exercices, et des exercices plus difficiles dans la mesure où il n'y a pas d'indications, mais en s'appropriant les clés de cette recherche, pourrait donner des résultats au moins équivalents à chercher plus d'exercices (dans le même temps) sans décoller de l'application du théorème qui sert ou de l'énoncé qui guide. L'introduction du qualitatif au détriment du quantitatif peut être positive.

Des questions restent posées : les élèves se réapproprient-ils cette démarche ? Le font-ils tous de la même façon ? Cela a-t-il une influence sur les apprentissages ?
De plus j'ai disposé de peu d'éléments sur les représentations des élèves et la question du début sur l'enrichissement de ces représentations reste posée.

Si l'on voulait aller plus loin dans cette direction de recherche, il y aurait plusieurs voies possibles :
- changer de professeur,
- changer de classe, c'est-à-dire choisir un autre niveau que la TC,
- changer de sujet, c'est-à-dire choisir autre chose que la géométrie, mais il faudrait bien sûr alors adapter le scénario.

Ici le scénario dans ses détails est très spécifique de l'enseignement de la géométrie en TC au moment de l'expérience (1986/1990, depuis le programme a changé et la place de la géométrie est moins importante) avec ses avantages et ses inconvénients : les connaissances des élèves en géométrie sont suffisantes pour proposer rapidement la recherche d'exercices assez complexes pour qu'il y ait lieu d'utiliser des méthodes pour leur démarrage.
Or nous avons vu l'importance dans le scénario de cette première phase, qui permet de commencer l'enseignement de méthodes. Si les élèves ont moins de connaissances, on ne peut pas initialiser de la même façon l'interaction entre le cours et les activités, on ne sait même pas dans quelle mesure il est opportun d'introduire des méthodes sur des connaissances trop restreintes.

D'autre part on ne sait pas s'il est intéressant de mettre au point un enseignement de méthodes dans tous les domaines à enseigner, on ne sait pas non plus s'il n'y a pas lieu de laisser les élèves trouver tout seuls les méthodes dans certains cas ...
On a vu également que l'apport d'un enseignement de type métamathématique n'est pas toujours suffisant, cela dépend fortement des connaissances mobilisables et donc du moment où a lieu l'intervention métamathématique.

Par ailleurs, il est vraisemblable que le contrat à adopter dans un scénario analogue dépend des élèves concernés et peut-être de l'enseignant. Les élèves de terminale ont un examen à la fin de l'année, et le professeur les prépare à cet examen : professeur et élèves sont "du même côté" par rapport à l'évaluation finale. Si on est en classe de seconde par exemple, il y a lieu de supposer que le premier contrat sera indispensable pendant un certain temps : dans cette classe, les élèves ont encore besoin d'une certaine surveillance, leur motivation et leur niveau sont très différents.

Mais en terminale C, la perspective de l'examen final est un inconvénient, les exercices sont proposés à l'examen avec des indications, et ceci limite la portée de l'expérience, aussi bien en ce qui concerne le temps que l'on va y consacrer que l'importance que les élèves vont lui attribuer (comme ils l'expriment fort bien eux-mêmes).

La généralisation éventuelle de ce scénario ne concerne pas le détail des situations, mais les interactions qui peuvent avoir lieu.

Pour terminer, je reviens ici à mon point de départ, c'est-à-dire à ma position en tant que professeur et non plus en tant que chercheuse.
La position que j'ai eue tout au long de ce travail : professeur, expérimentatrice et chercheuse, est délicate, sans doute même le travail de recherche est-il impossible sans le concours d'une autre personne qui n'a aucune interaction avec la classe ; on peut cependant se demander si cette situation n'a pas aussi certains avantages. En effet, par-delà la recherche, mes objectifs initiaux étaient ceux d'un professeur. Et ce travail, s'il a bien répondu en partie aux questions de didactique que nous avons posées, m'a aussi apporté des éléments de réflexion plus vastes, en rapport avec ma pratique d'enseignante.

J'ai découvert le rôle joué par le temps dans le travail des élèves. Le scénario leur a permis de travailler à leur rythme, qui est, de fait, beaucoup plus lent que le rythme habituel de la classe.
Par ailleurs, faire une conjecture, chercher et rédiger sont apparus aussi vraiment comme des activités bien distinctes, avec chacune son apprentissage spécifique, on ne peut pas tout faire à la fois.
Je reprendrai certaines des remarques qu'ils ont faites dans les questionnaires : comme eux, j'ai eu paradoxalement l'impression de mieux m'occuper d'eux individuellement pendant le travail en petits groupes que pendant les autres séances où ils travaillent individuellement, et j'ai eu aussi l'impression de les connaître autrement.
Et j'ai eu la possibilité de les observer davantage, à la fois pendant le travail en groupe et aussi bien sûr par l'étude des enregistrements.

J'ai été étonnée par la qualité des réflexions que font les élèves dans les groupes. Le travail assez stéréotypé de rédaction, qui est d'habitude demandé aux élèves ne révèle pas cette richesse chez la plupart des élèves. Par leurs argumentations et leurs questions ainsi que par les quelques moments de contrôle que nous avons observés, j'ai aussi été étonnée par leur compréhension de la partie métamathématique de ce que je disais.

Enfin, ce travail m'a permis de constater que les élèves peuvent comprendre un certain discours "métamathématique" et se l'approprier mieux que je ne le pensais. Mais aussi, son explication m'a permis d'observer qu'une partie de ce discours est vraiment faite de détours, plus ou moins nécessaires suivant les élèves, suivant les personnes. Et enseigner des méthodes permet de donner beaucoup de pistes, de repères pour chercher, mais ces éléments peuvent se fondre (et disparaître ?) dans l'ensemble de l'activité des élèves.

REFERENCES :

I.Tenaud (1991) : Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE EN TERMINALE C : ENSEIGNEMENT DE METHODES ET TRAVAIL EN PETITS GROUPES

Isabelle Tenaud
I.R.E.M., Université Paris 7 Denis Diderot

UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE EN TERMINALE C :
Enseignement de méthode et travail en petits groupes

Isabelle TENAUD - IREM Paris 7

INTRODUCTION

Cet exposé concerne un travail de recherche qui a abouti à une thèse, dirigée par Aline Robert.

C'est un problème d'enseignement qui en est l'origine : le malaise que je ressentais dans l'enseignement de la géométrie en TC. Les élèves semblaient paralysés pour utiliser leurs connaissances (nombreuses en Terminale C), en particulier pour démarrer un exercice.

Ce travail s'inscrit dans le cadre des hypothèses générales sur l'enseignement post-obligatoire avancées par A. Robert et plus précisément sur celle-ci : l'association d'un enseignement de type "métamathématique" et de mises en situation des élèves propres à leur faire utiliser cet enseignement dans des résolutions de problèmes peut être propice aux apprentissages en mathématiques.

Dans ce cadre, l'hypothèse précise qui sert de base à cette thèse est la suivante :

En terminale C, en géométrie, une interaction entre un enseignement de méthodes explicite et explicité en tant que tel, et un travail régulier en petits groupes sur des exercices adéquats avec un contrat spécifique - l'enseignant ayant des représentations en cohérence avec ces différents points - favorise l'acquisition d'une démarche méthodique chez un grand nombre d'élèves pour résoudre les problèmes de géométrie, et s'accompagne d'un enrichissement de leurs représentations.

Je développerai dans cet exposé successivement trois parties :

* le scénario choisi,
* la méthodologie utilisée,
* les résultats de l'analyse du matériel et l'évaluation que l'on peut faire de cette expérience.

I. LE SCENARIO

I.1. Travail en petits groupes

Pendant toute l'année scolaire, une heure par semaine (pendant l'heure de travaux pratiques où la classe est dédoublée) les élèves ont travaillé en groupes de 3 ou 4. Rien n'a été imposé pour la formation de ces groupes, les élèves se sont groupés par affinité, et ces groupes sont restés stables toute l'année.

Les exercices proposés pendant ces séances ont été des exercices où on ne donnait pas d'indications et où plusieurs méthodes pouvaient être envisagées. Les groupes travaillaient à leur rythme et la synthèse était faite en classe entière lors du cours suivant, toutes les méthodes utilisées étant proposées.

Le contrat en vigueur pendant ces séances de travail en petits groupes a changé au cours de la première année. Tout d'abord je passais tout à tour dans chaque groupe pour voir où en étaient les élèves et j'intervenais à mon gré. L'écoute de certains enregistrements où les interventions du professeur paraissaient mal venues a amené à proposer explicitement aux élèves un autre contrat : le professeur n'intervient dans un groupe que s'il est appelé, et les élèves doivent l'appeler s'ils sont bloqués, s'ils ont une question à poser à laquelle ils n'ont pas su répondre dans leur groupe, ou enfin s'ils ont une solution à proposer.

I.2. Enseignement de méthodes

Plutôt que de parachuter aux élèves des heuristiques générales (comme celles de Polya) qui auraient pu paraître un nouveau contenu à apprendre et surtout qui auraient encore été imposées de l'extérieur aux élèves, j'ai plutôt cherché à reconstruire un enseignement de méthodes à partir des expériences des élèves. Ainsi j'ai cherché des points de repère très proches des élèves, qu'ils puissent reconnaître dans ce qu'ils faisaient et qu'ils puissent compléter par eux-mêmes.

L'enseignement explicite de méthodes a commencé après cinq séances de recherche en petits groupes d'exercices de géométrie, une séance de synthèse a alors permis de souligner des éléments de méthodes. A partir de ce que les élèves avaient proposé pour ces cinq exercices, on a pu ainsi mettre en évidence :

** des changements de points de vue (par exemple pour démontrer que trois droites sont concourantes on peut montrer que les trois droites passent par le même point ou démontrer que le point d'intersection de deux d'entre elles se trouve sur la troisième), de cadres, de stratégies,*

** des points de repères : types de problème (alignement, construction, lieu ...), configurations de base, outils pour résoudre un type de problème donné ... .*

Ces éléments de méthodes sont complétés tout au long de l'année par la classe. Et l'ensemble du travail fait en géométrie (travaux pratiques, cours, devoirs, exercices) permet un réinvestissement et un enrichissement de cette démarche.

II. METHODOLOGIE / RECUEIL DE MATERIEL ET ANALYSE

Pour évaluer cette expérience qui a duré quatre ans, j'ai choisi d'étudier précisément ce qui se passe dans certains petits groupes et d'analyser quelques productions écrites.

Pour cela j'ai recueilli les enregistrements de quatre groupes d'élèves (volontaires) pendant les séances de travail en groupes durant toute une année scolaire. J'en ai décrypté treize et je les ai analysés.

L'analyse de ces transcriptions a été faite de trois façons :
1) j'ai relevé ce qui me semblait important dans le fonctionnement social du groupe (nombre d'interventions, de questions, de hors-sujets) et j'ai pris en compte particulièrement ce qui est au centre de cette recherche c'est-à-dire les interventions portant sur les méthodes, en essayant de les différencier suivant leur qualité. trois niveaux ont ainsi été distingués :

(M1) : réflexions imprécises et sans rapport direct avec le problème,
(M2) : réflexions précises mais sans ancrage dans le problème,
(M3) : réflexions précises avec au moins un ancrage dans le problème.

2) J'ai analysé la démarche de recherche du groupe et l'élaboration des démonstrations.

3) J'ai analysé le rôle du professeur et de ses interventions.

De plus j'ai recueilli un autre matériel : un paquet de copies sur un exercice un peu particulier et des questionnaires, le premier à la suite des copies précédentes et les autres à la fin de chacune des quatre années.

Mais il ne faut pas oublier que les résultats obtenus portent sur des effectifs faibles, voire très faibles pour certaines classifications, que pour les enregistrements l'étude faite est centrée sur un groupe, le groupe 1, pour lequel j'ai étudié sept séances réparties sur l'année entière et que je n'ai pu faire que peu de comparaisons (seulement une par type de tâche : alignement, lieu, construction et analyse), et enfin que peu d'enregistrements des groupes 2, 3 et 4, ont pu être étudiés.

III. RESULTATS

III.1. Travail en petits groupes

a) Fonctionnement du groupe et interventions méthodologiques

En ce qui concerne les groupes, on observe des structures variées, et les élèves prennent la parole très différemment : mais pour un même groupe, certaines régularités apparaisssent : par exemple, c'est toujours le même élève qui parle le plus dans le groupe 1 et c'est toujours la même élève qui parle le moins dans le groupe 4. Cependant les rôles ne sont pas fixes et on peut se demander si ces changements sont liés à la tâche.
Ceci est valable pour les prises de parole, mais aussi pour les questions et pour les interventions méthodologiques.

Des comparaisons ont été faites entre les comportements des groupes suivant le type d'exercice proposé : un exercice de géométrie donné au baccalauréat avec beaucoup d'indications, ou un exercice d'analyse provoque beaucoup moins d'interventions méthodologiques qu'un exercice de géométrie donné sans indications.

Pour le groupe 1, qui a été étudié sur plusieurs séances, on peut faire plusieurs remarques.
D'un point de vue quantitatif, on observe qu'il y a une augmentation au cours de l'année de la proportion des interventions méthodologiques, et que, parmi ces interventions, il y a aussi une augmentation des interventions précises et en rapport avec le problème par rapport aux deux autres catégories. La répartition des interventions méthodologiques entre les trois élèves varie peu.

On constate que globablement la démarche méthodologique des élèves du groupe 1 s'améliore au fil des mois. Les élèves ont recours plus vite à des méthodes adaptées et savent mieux les utiliser effectivement dans les exercices ; ainsi plus on avance dans l'année, plus il y a de questions résolues au cours des séances de TP. Chaque élève garde certes son profil, ses spécificités, mais l'ensemble progresse.

D'autre part, toujours en ce qui concerne le groupe 1, on constate une évolution dans l'utilisation de la démarche méthodologique, notamment une amélioration qualitative de l'adéquation entre les propositions du groupe et ce qu'il y a à faire. Ceci correspond à une plus grande utilisation du niveau (M3). On peut donc dire, pour ce groupe, qu'il y a un certain apprentissage réussi. Et, en ce qui concerne l'efficacité de la démarche méthodologique - et c'est cette démarche qui, je le rappelle, était l'objet de l'expérience - elle augmente notablement, sans que l'on puisse être sûr que ce soit uniquement à elle que soit due l'amélioration des performances.

Les autres groupes sont différents. Il est plus difficile d'évaluer exactement ce qui s'est passé car il n'y a pas eu assez d'enregistrements étudiés pour faire une évaluation analogue. Globalement toutefois, on a pu remarquer que la réussite était corrélée à une plus grande utilisation de la démarche méthodologique.
Cependant la comparaison avec les autres groupes analysés amène à penser qu'il peut y avoir des variations selon les groupes et selon les tâches, ces variations ne mettant toutefois pas en défaut les conclusions ; par exemple, il existe des seuils de connaissances (liés donc à la composition du groupe) au-dessous desquels les élèves, malgré la démarche, ne réussissent pas à démarrer.

On peut dire finalement que, dans les exercices de géométrie proposés sans indications de méthode, les élèves des groupes que nous avons étudiés utilisent relativement fréquemment (21 % des interventions en moyenne) des argumentations méthodologiques. On peut dire que les élèves se sont appropriés le recours à la méthode.

b) Analyse de l'élaboration des démonstrations

Il apparaît, dans les séances que j'ai analysées, que le travail en groupe suscite l'apparition de plusieurs phénomènes qui n'auraient sans doute pas eu lieu aussi souvent dans une recherche individuelle.

* Il y a toujours eu plusieurs méthodes proposées par les différents élèves. Au cours du temps, cette variété, cette possibilité de choix est attendue et même réclamée par les élèves.
* Il y a toujours des dicussions et des critiques à propos des méthodes. A propos de leur adaptation au problème, de leur mise en oeuvre plus ou moins délicate (choix d'un repère, recherche d'une isométrie ...), le choix, nécessaire si plusieurs méthodes sont proposées simultanément, entraîne une comparaison et une évaluation des différentes propositions, toutes choses beaucoup plus rares dans un travail individuel.
* Chaque élève est amené, à un moment ou un autre, à adopter l'idée, la méthode ou la démonstration d'un autre élève. L'élève ne peut pas répéter constamment le même type de démonstration et chacun à son tour est conduit par le groupe à utiliser des démarches qui lui sont spontanément moins familières.
* Le groupe, par ses questions et ses critiques, révèle les connaissances peu sûres et les incompréhensions de sens. Chaque élève est poussé par les autres à préciser sa pensée et à approfondir ce qu'il y a d'implicite dans ses propositions. Un élève seul n'a pas ce recul face à sa propre démarche.
* Certains arguments vagues sont moins utilisés, on rencontre moins d'affirmations sans justifications.

c) Interaction professeur-élèves et rôle du professeur

- *avec le premier contrat :*

Dans ce contrat implicite, le professeur arrive à l'improviste. Cela signifie que le rôle du professeur est de surveiller l'activité des élèves, la progression dans la résolution de l'exercice, le rythme et l'intensité du travail. Il n'a pas un rôle spécifique dans le déroulement de la recherche. De plus les points sur lesquels le professeur est amené à intervenir sont aléatoires, les élèves n'en sont pas maîtres et les interventions du professeur ne s'inscrivent pas toujours dans le travail du groupe.

- *avec le deuxième contrat :*

Ici le professeur a un rôle tout à fait spécifique dans le travail du groupe. Ce sont les élèves qui ont l'initiative des moments et du contenu des interactions entre eux et le professeur. Il est complètement intégré à la démarche du groupe. Implicitement le professeur n'a plus en charge la surveillance du travail et de son rythme. Son rôle s'est déplacé.
Ce qui nous apparaît essentiel du côté des élèves c'est qu'ils doivent savoir où ils en sont, ils doivent prendre conscience qu'ils sont bloqués, qu'ils ont fait une hypothèse ou qu'ils ont démontré quelque chose ; ensuite ils sont amenés à formuler explicitement le motif de leur appel. Un certain contrôle de l'activité du groupe par lui-même est donc nécessaire et s'est manifesté naturellement même s'il n'en a pas été fait état explicitement dans la classe. Le rôle des élèves s'est enrichi.

En résumé, c'est dans la plus grande adéquation entre le moment de l'intervention du professeur et la démarche du groupe d'une part, entre la nature de l'intervention du professeur et la demande du groupe d'autre part, que l'on peut voir les spécificités positives de ce troisième contrat.

III.2 Résultats à travers les copies et les questionnaires

Voici d'abord de quel matériel il s'agit.
Il y a d'abord un paquet de copies concernant un devoir à la maison dont le sujet était le suivant :

A et B sont deux points fixes d'un cercle fixe C. M décrit ce cercle ; soit P le point de la demi-droite issue de B passant par M tel que BP = AM. Quel est le lieu de P ?.

Dans cet exercice, une partie des points sera attribuée à l'exposé de la recherche que vous avez faite avant de rédiger (que vous ayez trouvé ou non). On vous demande d'indiquer les arguments méthodologiques que vous vous êtes dits, même si cela ne vous a pas permis de résoudre l'exercice.

D'autre part, trois séries de questionnaires ont été recueillies :

- un premier questionnaire, posé à la suite du devoir précédent ; les élèves ayant tout à fait compris ce qui était attendu, j'ai essayé de leur faire préciser ce qu'ils en pensaient,
- à la fin des trois premières années de l'expérience, le questionnaire suivant a été proposé aux élèves :
  1°) Y a-t-il des problèmes de géométrie que vous trouvez plus difficiles que d'autres ? Précisez.
  2°) Pouvez-vous résumer le cours de géométrie en précisant les points qui vous semblent importants (10 lignes maximum).
  3°) Quelles sont les interventions du professeur ou les formes de travail qui vous ont le plus aidé ?
  4°) Y a-t-il des différences dans la façon dont vous abordez les problèmes de géométrie par rapport à la 1ère S ?
  5°) A la fin de cette année, aimez-vous la géométrie ?

- et enfin, à la fin de la quatrième année de l'expérience, le questionnaire a été le suivant:
  1°) Que pensez-vous du travail en groupe ?
  2°) Que pensez-vous des exercices sans indications ?

Voici maintenant quelques commentaires généraux issus de ce matériel.

a) Les copies"AM = BP" et les réponses aux différents questionnaires montrent que presque tous les élèves sont individuellement très conscients de mes objectifs de professeur et de mon attente, au niveau de la démarche méthodologique, de la pratique du travail en petits groupes et du transfert à la recherche individuelle.

b) Ils en sont suffisamment conscients pour être capables de faire la démarche demandée dans un devoir écrit et reconnaître a posteriori l'avoir effectivement appliquée dans les recherches en petits groupes, en donnant eux-mêmes des explications sur le fonctionnement des groupes, en s'appuyant sur des arguments qui sont cohérents avec les analyses des enregistrements.

c) Les élèves sont capables de parler à bon escient de ce qu'ils ont fait : ils donnent des réponses qui concordent avec les pratiques de l'année et sont satisfaits dans l'ensemble.

d) J'ai été frappée par l'honnêteté des élèves qui reconnaissent eux-mêmes l'existence d'une distance entre ce qu'ils font et ce qu'ils disent qu'il serait bien de faire : ce qui me paraît important est qu'ils expliquent pourquoi ils se limitent ainsi (temps, sujet d'examen, etc...). Ils ont donc conscience de certaines contraintes qui sont réellement des obstacles à un enseignement plus qualitatif.

On peut bien sûr se demander dans quelle mesure ces réponses ont été faites plus ou moins consciemment pour me faire plaisir, ou encore si la bonne adéquation entre les réponses attendues et les réponses recueillies est due à certaines explications que j'ai pu faire en classe, celle des élèves n'étant qu'une reprise, un reflet, une répétition.
On peut se demander aussi si leurs réponses favorables sur l'aide de l'enseignement de méthodes et du travail en petits groupes ne viennent pas simplement du fait, d'une part que ces deux formes de travail avaient probablement l'attrait de la nouveauté pour la majorité des élèves, d'autre part que, implicitement dans le questionnaire de fin d'année, j'attendais des réponses sur ces deux points dans la mesure où il s'agissait là des seules différences avec un enseignement plus traditionnel (par exemple un élève a répondu au questionnaire 2 : *"ce n'est pas le travail en groupe qui m'a le plus aidé"*).

Cependant, dans les réponses, on observe que les élèves ont employé leurs propres mots, de façon non stéréotypée et très variée, et qu'ils ont retenu des choses différentes. Certaines réponses montrent une grande cohérence entre les difficultés rencontrées dans la recherche d'un exercice et ce qu'a pu apporter l'enseignement méthodologique ; les moments où il est inutile sont aussi évoqués très franchement.

Le troisième questionnaire a permis de préciser les réactions des élèves par rapport au travail en groupe (puisqu'ici la question était directement posée) et on observe, comme je l'ai déjà dit, que les arguments sont tout à fait cohérents avec ce qui a pu réellement se passer dans les groupes d'après l'analyse des enregistrements.

IV. CONCLUSION : Les résultats, leurs limites, les généralisations éventuelles

En réunissant les résultats sur les enregistrements et sur le matériel écrit, les conclusions générales que l'on peut tirer de cette recherche sont les suivantes.

D'abord on a pu élaborer et réaliser effectivement plusieurs années de suite un scénario permettant aux élèves de mieux aborder les exercices de géométrie un peu difficiles (et sans indications).
Les élèves ont été satisfaits, et conscients des intentions du professeur et des avantages de la démarche proposée.

L'ensemble de ce travail confirme notre hypothèse de départ : une interaction entre un enseignement de "métaconnaissances" et une utilisation de celles-ci par les élèves dans des situations adaptées peut faciliter certains apprentissages.
Cette hypothèse peut être lue autrement : chercher moins d'exercices, et des exercices plus difficiles dans la mesure où il n'y a pas d'indications, mais en s'appropriant les clés de cette recherche, pourrait donner des résultats au moins équivalents à chercher plus d'exercices (dans le même temps) sans décoller de l'application du théorème qui sert ou de l'énoncé qui guide. L'introduction du qualitatif au détriment du quantitatif peut être positive.

Des questions restent posées : les élèves se réapproprient-ils cette démarche ? Le font-ils tous de la même façon ? Cela a-t-il une influence sur les apprentissages ?
De plus j'ai disposé de peu d'éléments sur les représentations des élèves et la question du début sur l'enrichissement de ces représentations reste posée.

Si l'on voulait aller plus loin dans cette direction de recherche, il y aurait plusieurs voies possibles :
- changer de professeur,
- changer de classe, c'est-à-dire choisir un autre niveau que la TC,
- changer de sujet, c'est-à-dire choisir autre chose que la géométrie, mais il faudrait bien sûr alors adapter le scénario.

Ici le scénario dans ses détails est très spécifique de l'enseignement de la géométrie en TC au moment de l'expérience (1986/1990, depuis le programme a changé et la place de la géométrie est moins importante) avec ses avantages et ses inconvénients : les connaisances des élèves en géométrie sont suffisantes pour proposer rapidement la recherche d'exercices assez complexes pour qu'il y ait lieu d'utiliser des méthodes pour leur démarrage.
Or nous avons vu l'importance dans le scénario de cette première phase, qui permet de commencer l'enseignement de méthodes. Si les élèves ont moins de connaissances, on ne peut pas initialiser de la même façon l'interaction entre le cours et les activités, on ne sait même pas dans quelle mesure il est opportun d'introduire des méthodes sur des connaissances trop restreintes.

D'autre part on ne sait pas s'il est intéressant de mettre au point un enseignement de méthodes dans tous les domaines à enseigner, on ne sait pas non plus s'il n'y a pas lieu de laisser les élèves trouver tout seuls les méthodes dans certains cas ...
On a vu également que l'apport d'un enseignement de type métamathématique n'est pas toujours suffisant, cela dépend fortement des connaissances mobilisables et donc du moment où a lieu l'intervention métamathématique.

Par ailleurs, il est vraisemblable que le contrat à adopter dans un scénario analogue dépend des élèves concernés et peut-être de l'enseignant. Les élèves de terminale ont un examen à la fin de l'année, et le professeur les prépare à cet examen : professeur et élèves sont "du même côté" par rapport à l'évaluation finale. Si on est en classe de seconde par exemple, il y a lieu de supposer que le premier contrat sera indispensable pendant un certain temps : dans cette classe, les élèves ont encore besoin d'une certaine surveillance, leur motivation et leur niveau sont très différents.

Mais en terminale C, la perspective de l'examen final est un inconvénient, les exercices sont proposés à l'examen avec des indications, et ceci limite la portée de l'expérience, aussi bien en ce qui concerne le temps que l'on va y consacrer que l'importance que les élèves vont lui attribuer (comme ils l'expriment fort bien eux-mêmes).

La généralisation éventuelle de ce scénario ne concerne pas le détail des situations, mais les interactions qui peuvent avoir lieu.

Pour terminer, je reviens ici à mon point de départ, c'est-à-dire à ma position en tant que professeur et non plus en tant que chercheuse.
La position que j'ai eue tout au long de ce travail : professeur, expérimentatrice et chercheuse, est délicate, sans doute même le travail de recherche est-il impossible sans le concours d'une autre personne qui n'a aucune interaction avec la classe ; on peut cependant se demander si cette situation n'a pas aussi certains avantages. En effet, par-delà la recherche, mes objectifs initiaux étaient ceux d'un professeur. Et ce travail, s'il a bien répondu en partie aux questions de didactique que nous avons posées, m'a aussi apporté des éléments de réflexion plus vastes, en rapport avec ma pratique d'enseignante.

J'ai découvert le rôle joué par le temps dans le travail des élèves. Le scénario leur a permis de travailler à leur rythme, qui est, de fait, beaucoup plus lent que le rythme habituel de la classe.
Par ailleurs, faire une conjecture, chercher et rédiger sont apparus aussi vraiment comme des activités bien distinctes, avec chacune son apprentissage spécifique, on ne peut pas tout faire à la fois.
Je reprendrai certaines des remarques qu'ils ont faites dans les questionnaires : comme eux, j'ai eu paradoxalement l'impression de mieux m'occuper d'eux individuellement pendant le travail en petits groupes que pendant les autres séances où ils travaillent individuellement, et j'ai eu aussi l'impression de les connaître autrement.
Et j'ai eu la possibilité de les observer davantage, à la fois pendant le travail en groupe et aussi bien sûr par l'étude des enregistrements.

J'ai été étonnée par la qualité des réflexions que font les élèves dans les groupes. Le travail assez stéréotypé de rédaction, qui est d'habitude demandé aux élèves ne révèle pas cette richesse chez la plupart des élèves. Par leurs argumentations et leurs questions ainsi que par les quelques moments de contrôle que nous avons observés, j'ai aussi été étonnée par leur compréhension de la partie métamathématique de ce que je disais.

Enfin, ce travail m'a permis de constater que les élèves peuvent comprendre un certain discours "métamathématique" et se l'approprier mieux que je ne le pensais. Mais aussi, son explication m'a permis d'observer qu'une partie de ce discours est vraiment faite de détours, plus ou moins nécessaires suivant les élèves, suivant les personnes. Et enseigner des méthodes permet de donner beaucoup de pistes, de repères pour chercher, mais ces éléments peuvent se fondre (et disparaître ?) dans l'ensemble de l'activité des élèves.

REFERENCES :

I.Tenaud (1991) : Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

UN SYSTEME INFORMATIQUE DE RESOLUTION DE PROBLEMES QUI S'INSPIRE DU COMPORTEMENT HUMAIN

Jean Michel Bazin
U.F.R. de Sciences, Université de Reims

Un système informatique de résolution de problèmes qui s'inspire du comportement humain.

J.M.Bazin

U. F. R. de sciences exactes et naturelles.

51 100 REIMS

Introduction

Comment concevoir un système informatique capable de résoudre des exercices de géométrie élémentaires ?

L'observation de professeurs de collège en phase de résolution d'exercice permet de déterminer des pistes de recherches. On présente ici une réalisation informatique qui s'inspire du comportement humain pour résoudre des exercices de géométrie de quatrième.

On décrira tout d'abord (section 1) la résolution fournie par le système sur un exercice préliminaire, puis on examinera (section 2) le mécanisme d'analyse de la figure s'appuyant sur l'extraction de sous-figures. L'activation des connaissances à partir du problème posé et l'algorithme de résolution utilisé est exposé à la section 3, enfin dans la section 4 on étudie les raisonnements implicites et les mécanismes visuels mis en jeu dans la résolution d'un exercice.

1. Exemple préliminaire

1.1. Exercice :

Soient C1 et C2 deux cercles de centre O1 et O2 sécants en A et M.

Soient [AB] et [AC] deux diamètres de C1 et C2.

Montrez que B,M,C sont alignés.

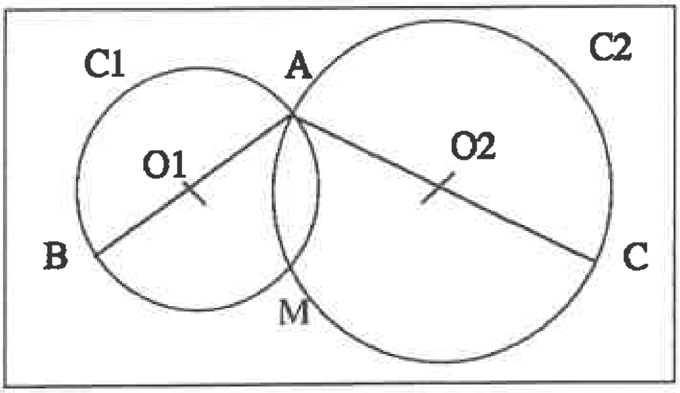


Figure 1.

Pour résoudre cet exercice, diverses connaissances sont mises en oeuvre. On rappelle d'abord quelques théorèmes avant de montrer comment ces théorèmes sont utilisés dans la résolution de l'exercice posé.

1.2. Rappels de quelques théorèmes

On rappelle les deux théorèmes suivants appelés communément "théorèmes de la droite des milieux".

Théorème **DTM1** .

Soit un triangle (ABC)

Si

I et J sont les milieux de [AB] et [AC]

alors

(IJ) est parallèle à (BC) et IJ = 1/2 BC

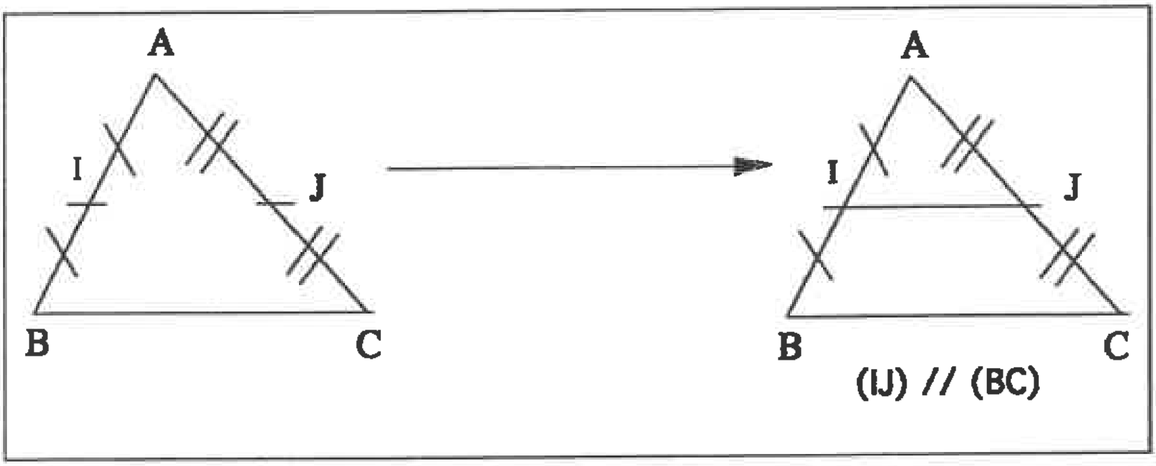


Figure 2.

Théorème **DTM2** .

Soit un triangle (ABC)

Si

I est le milieu de [AB]

et

J est un point de [AC] tel que (IJ) est parallèle à (BC)

alors

J est le milieu de [AC]

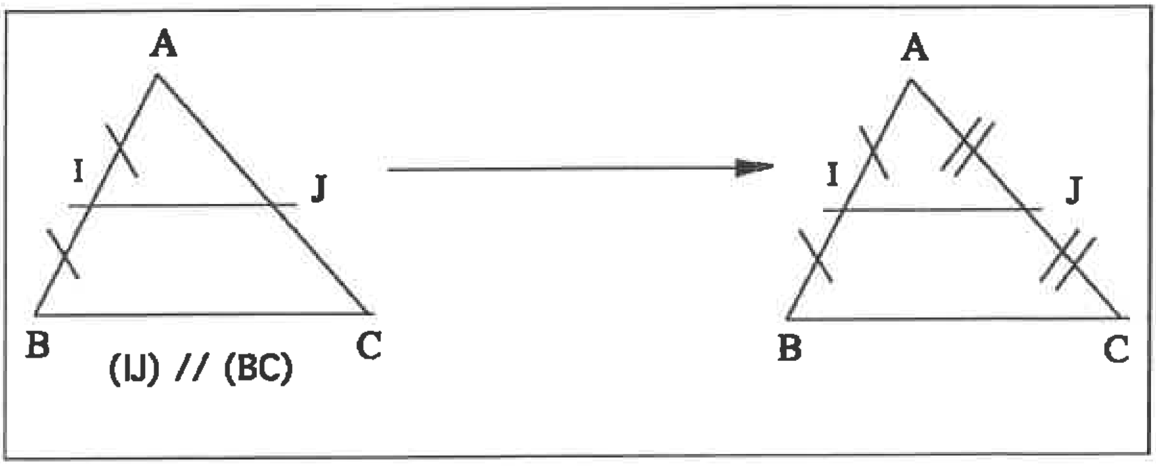


Figure 3.

Dans toute la suite de notre travail, nous désignerons par "les connaissances sur la droite des milieux" ces deux théorèmes.

De façon analogue, on appellera "ensemble des connaissances sur les triangles rectangles" les théorèmes et conseils suivants :

Théorème **TR1**

Si

le triangle (ABC) est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [BC]

alors

ce triangle est rectangle en A.

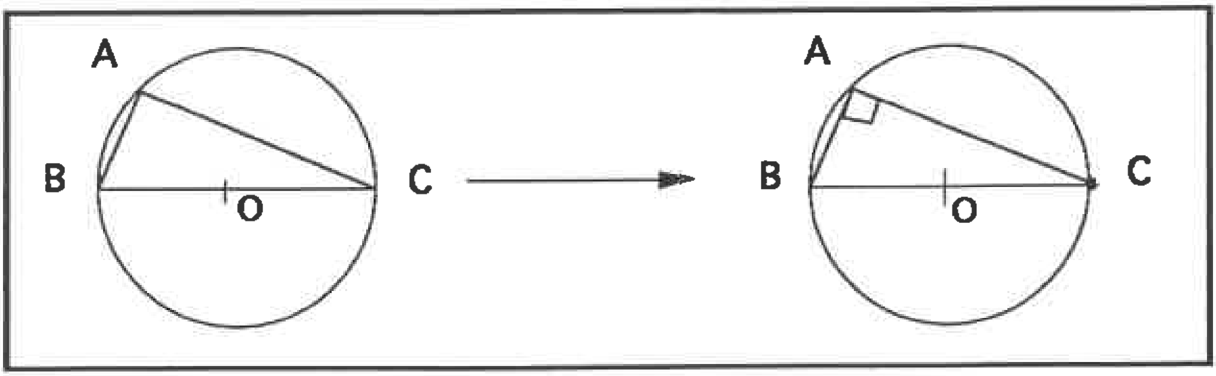


Figure 4.

Théorème **TR2** .

Soit le triangle (ABC) et soit I le milieu de [BC]

Si

IA = IB = IC

alors

le triangle ABC est rectangle en A.

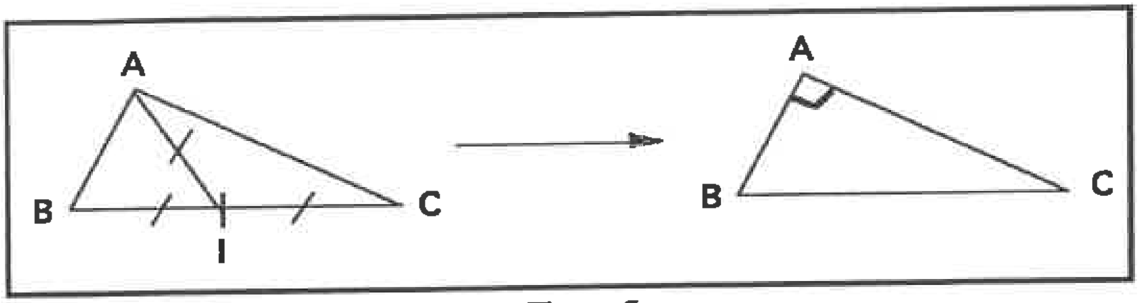


Figure 5.

Conseil **CTR1**

Si une figure d'un problème de géométrie contient la configuration suivante (figure 6.1) alors il est utile de tracer le segment [AC].(figure 6.2)

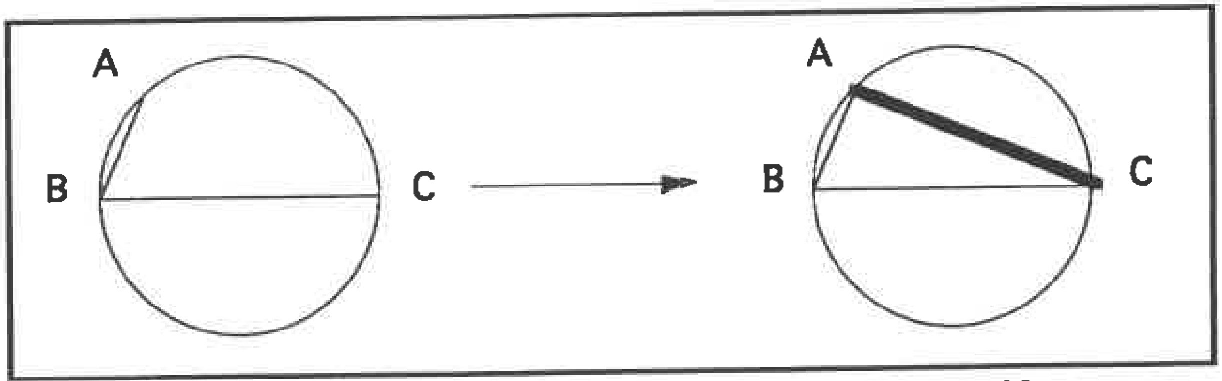


Figure 6.1. Figure 6.2

On appellera "ensemble des connaissances sur les parallélogrammes" les théorèmes et conseils suivants :

Théorème **PARGRM1** .

Si

les segments [AC] et [BD] ont même milieu

alors

(A B C D) est un parallélogramme.

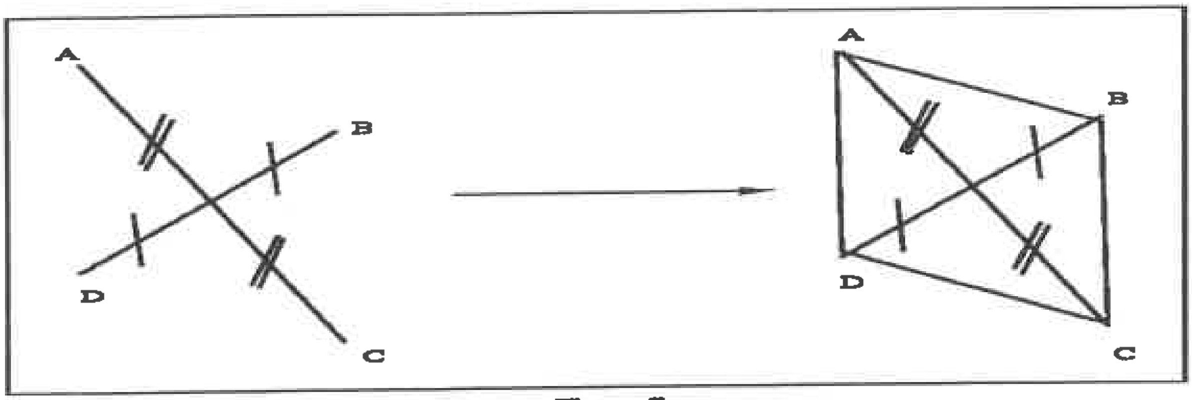


Figure 7.

Théorème **PARGRM2**

Si

(A B C D) est un parallélogramme

alors

(AB) est parallèle à (CD) et (AD) est parallèle à (BC).

Conseil **CPARGRM1**

Si

(A B C D) est un parallélogramme

et

une diagonale du parallélogramme est tracée sur la figure

alors

il est utile de tracer la seconde diagonale du parallélogramme et

il est utile de “considérer” le point d'intersection de [AC] et [BD].

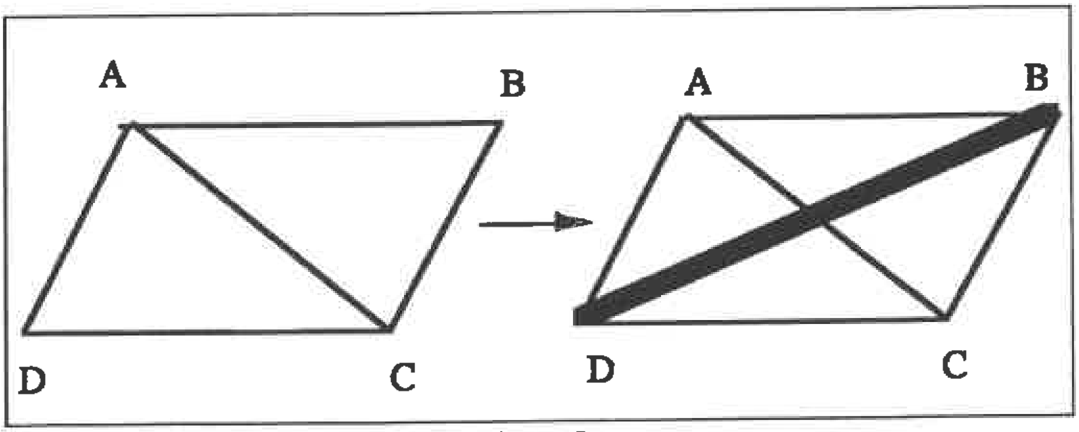


Figure 8.

1.3. Solution de l'exercice fournie par le système.

L'énoncé de l'exercice étudié est le suivant :

Soient C1 et C2 deux cercles de centre O1 et O2 sécants en A et M.

Soient [AB] et [AC] deux diamètres de C1 et C2.

Montrez que B,M,C sont alignés.

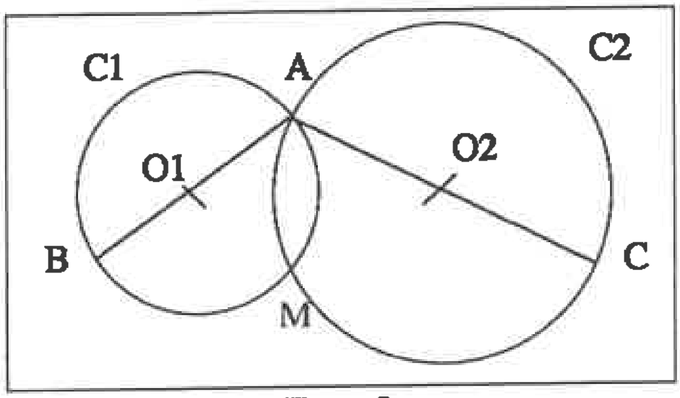


Figure 9.

Le travail fournit par le système peut être décomposé en plusieurs étapes :

Etape 1 : Construction de la représentation interne de la figure sous forme d'une description.

Au cours de cette construction, diverses connaissances élémentaires sont mises en oeuvre. Ainsi l'hypothèse "[AB] diamètre du cercle C1 de centre O1" est exploitée immédiatement pour en déduire que O1 est le milieu de [AB].

Etape 2.1 : Analyse de la figure : le système décide de traiter le problème à l'aide des connaissances sur la droite des milieux.

Etape 2.2 : Le système charge les connaissances sur la droite des milieux dans son espace de travail.(DTM1, DTM2).

Etape 2.3 : A l'aide de ces connaissances, le système produit l'arbre de déduction suivant :

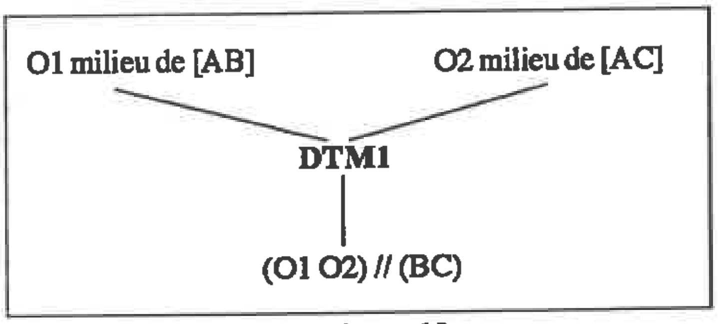


Figure 10.

Ce n'est pas la conclusion demandée !

Etape 3.0 : Analyse de la figure : le système décide de traiter le problème avec les connaissances sur les triangles rectangles .

Etape 3.1 : Appel des connaissances sur les triangles rectangles dans l'espace de travail.(TR1, TR2, CTR1).

Etape 3.2 : Application de ces connaissances : le système produit la déduction suivante :

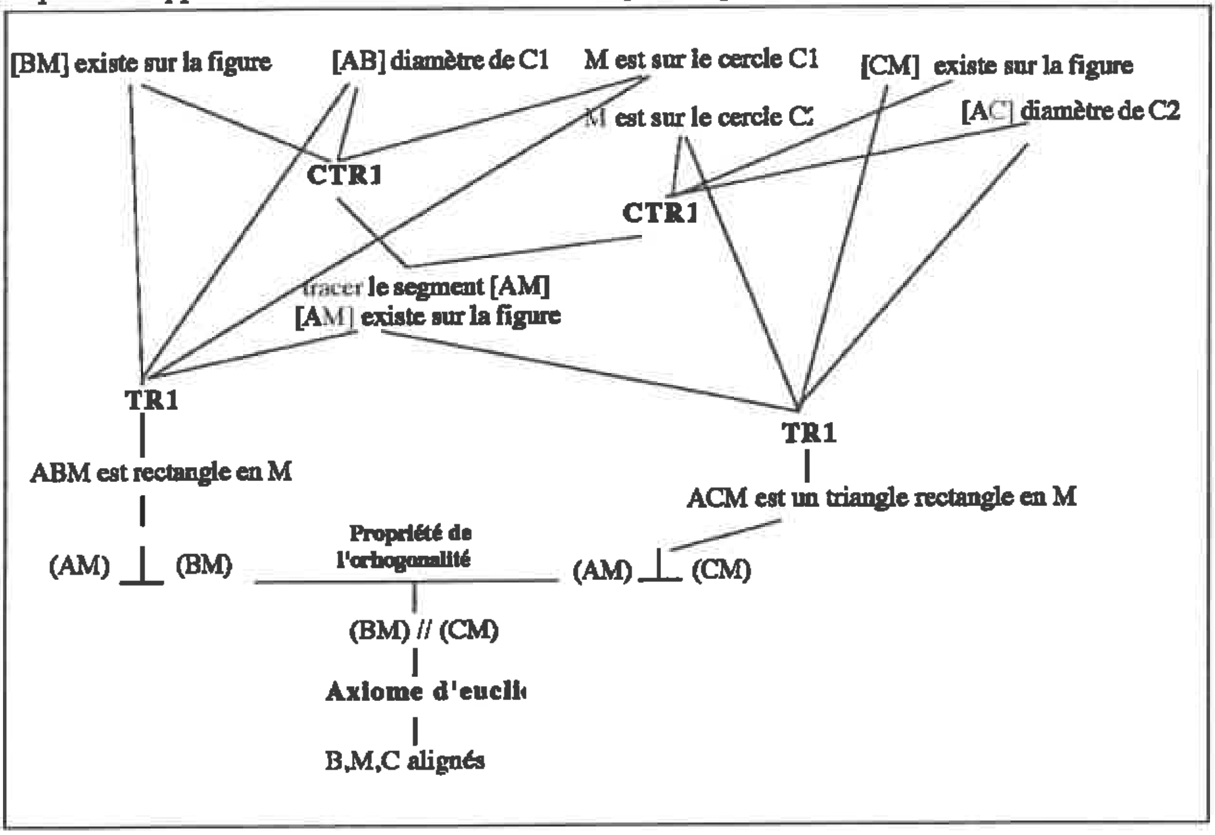


Figure 11.

Dans cet exemple, le système a analysé la figure et a appelé d'abord un ensemble de connaissances inutiles pour l'obtention du résultat demandé, puis a appelé le bon ensemble de connaissances, ce qui lui a permis de conclure. Remarquons que le fait "[BM] existe sur la figure" est une prémisse nécessaire au déclenchement de la règle **CTR1**. Un humain résolvant ce problème ne spécifiera jamais cette prémisse. L'hypothèse "[BM] existe sur la figure" est une hypothèse nécessaire **au fonctionnement** du système, mais ce n'est pas une hypothèse au **sens mathématique.**

Dans l'exemple que nous avons décrit, le système a analysé la figure, a appelé successivement les connaissances qu'il estimait pertinentes pour le problème, et a appliqué ces connaissances sur les données du problème pour en déduire le but recherché. Ces étapes (Analyse, Appel de connaissances, Application des connaissances sélectionnées) correspondent au déclenchement de divers groupes de règles. La phase d'observation, de décision, d'appel de connaissances met en jeux des **règles de métaconnaissances**, la phase d'application met en jeux des **règles de connaissances**. On remarquera que certaines connaissances sont appelées par les règles de métaconnaissances (ce sont les règles correspondant aux connaissances du "cours de quatrième"). En revanche certaines règles sont résidentes dans le système. Ce sont les connaissances élémentaires qu'est sensé connaitre un élève de quatrième. C'est le cas pour les propriétés de l'orthogonalité ou l'axiome d'euclide.

2. Sous-figures

On se propose ici de décrire dans le détail comment le système réalise l'analyse de la figure et comment il décide de sélectionner des connaissances. L'analyse se fait par **extraction de sous-figures**, ou configurations caractéristiques. A chaque sous-figure est associé une **étiquette** de problème, qui est associée à un ensemble de connaissances. Lorsque plusieurs étiquettes sont candidates, le système dispose d'un mécanisme d'arbitrage partiel des étiquettes.

2.1. Figure de l'énoncé et figure codée

L'énoncé du problème est constitué d'un ensemble d'hypothèses définissant la figure suivante :

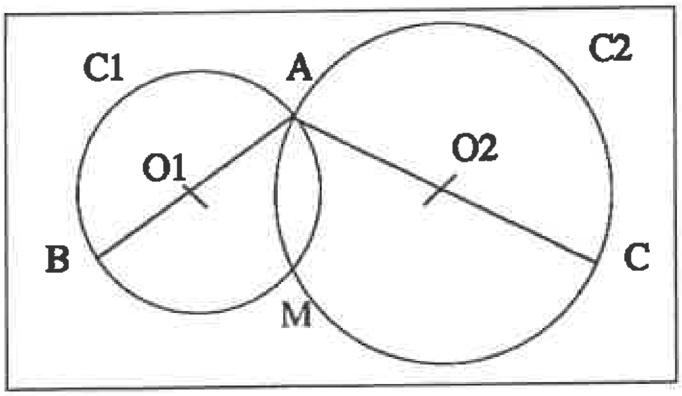


Figure 12.

Il est donc bien clair, que l'ensemble des hypothèses du problème **ne mentionne pas** l'existence des droite (BM) (MC) et (BC). C'est **la question posée** qui conduit à tracer sur la figure ces différentes droites puis à tenter de démontrer qu'elles sont confondues.

La figure effectivement manipulée par le système est la suivante :

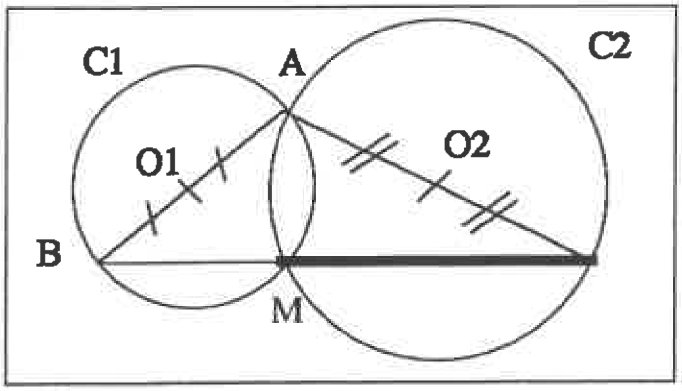


Figure 13.

La figure est analysée, et le système extrait les sous-figures suivantes :

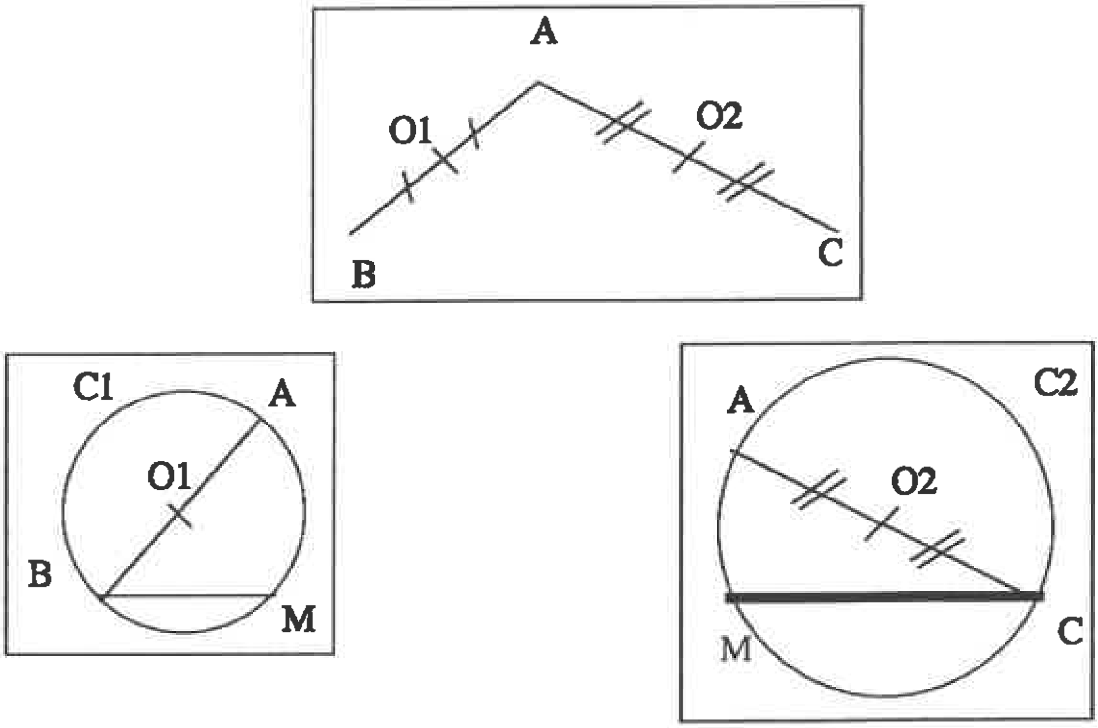


Figure 14.

La lecture structurée et le codage graphique qui l'accompagne, permettent de faire jouer à la figure le rôle d'un condensé de sens, d'un "réservoir d'hypothèses", celles-ci étant plus

directement et plus **rapidement** accessibles par la vision directe sur le dessin. Cette notion est à rapprocher de l'idée de paraphrase graphique évoquée dans [Allen,90], qui considère en outre que les hypothèses du problème sont comprises par l'élève si il a été capable de tracer une figure correcte vis-à-vis des spécifications de l'énoncé.

Ces sous-figures sont des figures prototypes, ou configurations caractéristiques. [Guin88] Elles permettent au système de donner au problème une **étiquette**.

2.2. Etiquette de problème

J'appelle **étiquette de problème,** le titre que l'expert donne au problème lorsqu'il dit "ce problème se traite lorsqu'on fait la leçon sur les parallélogrammes". **Dans la pratique, une étiquette est le titre d'un chapitre ou sous-chapitre du cours de la classe de quatrième.** Le système dispose d'un ensemble de règles d'étiquetage, qui associent à chaque sous-figure prototype une étiquette.

Les étiquettes utilisées par le système sont par exemple : Droite-des-milieux, Triangle-rectangle, Parallélogramme.

Le schéma suivant illustre les liens existants entre quelques sous-figures et leurs étiquettes correspondantes.

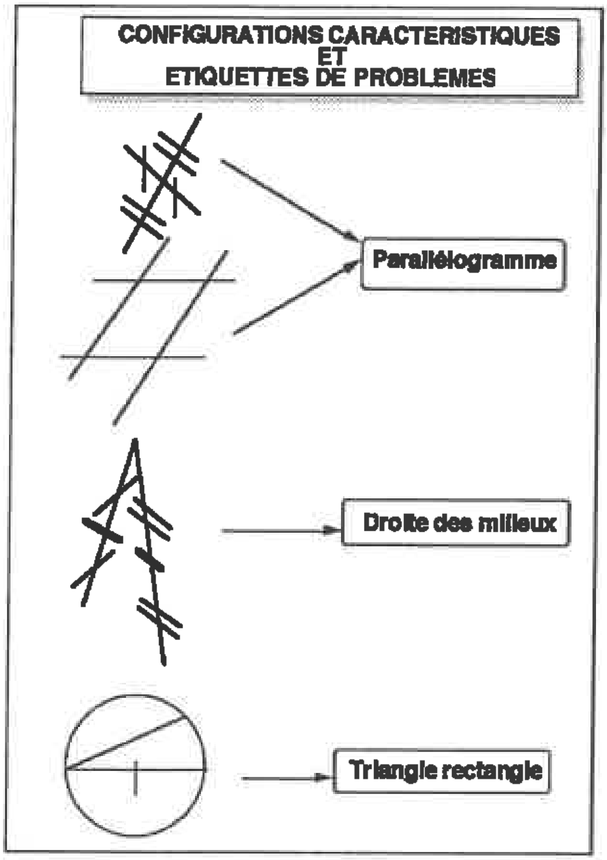


figure 15

Précisons que les associations (sous-figures, étiquettes de problèmes) sont données par le concepteur sous forme de règles. Elles concrétisent une expertise mathématique d'enseignant, et peuvent être aisément modifiées.

2.3. Interêt et rôle de l'étiquette

Une étiquette de problème est un pointeur vers des connaissances associées à l'étiquette.

Les connaissances associées à une étiquette ne sont pas uniquement constituées des connaissances du chapitre d'un manuel de quatrième. Il est nécessaire de prendre en compte aussi, les savoir-faire heuristiques et les méthodes que l'expert connait, pour la classe de problèmes considérés.

Dans l'exemple préliminaire proposé , les théorèmes TR1 et TR2 sont des théorèmes du <u>cours</u> qu'on trouve dans tout chapitre "triangle rectangle" d'un manuel.

En revanche, le conseil CTR1 est l'expression d'un savoir-faire, et <u>ne se trouve pas dans un manuel</u> en tant que théorème explicite. Le schéma suivant illustre le lien entre étiquettes et connaissances.

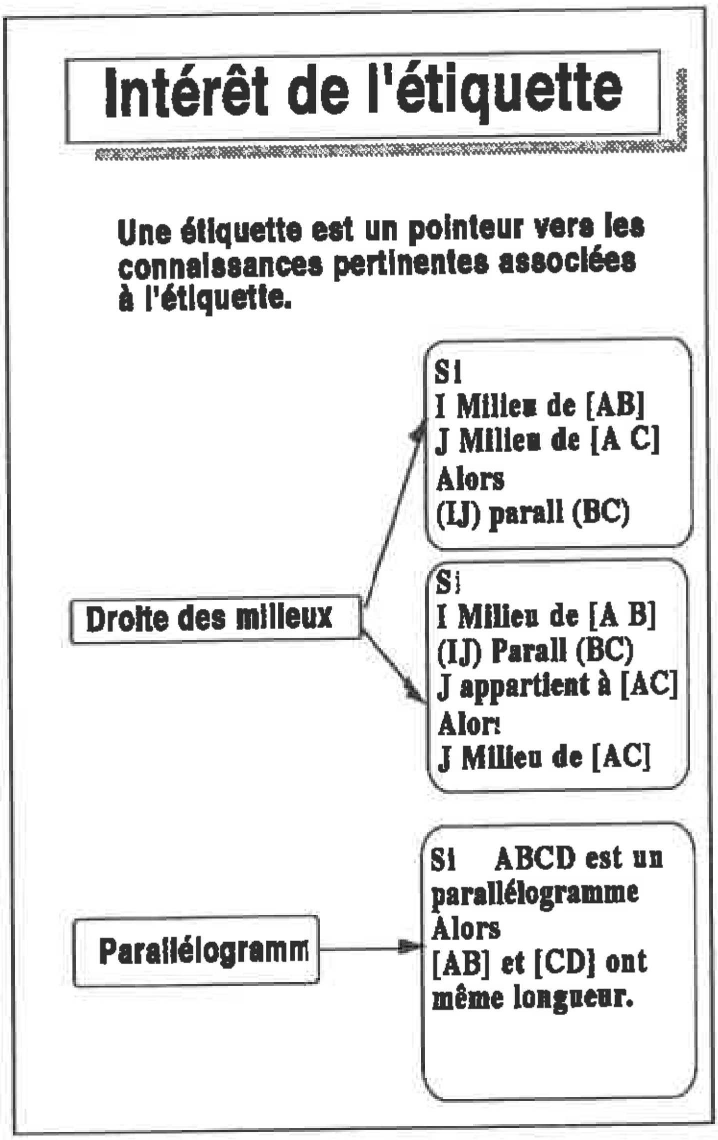


Figure 16.

Le schéma suivant récapitule le lien entre les sous-figures, les étiquettes de problème et l'activation des connaissances. A chaque sous-figure est associée une étiquette, et à chaque étiquette est associée un ensemble de connaissances. L'intérêt majeur de ce mécanisme est de considérer les sous-figures comme des **indicateurs** permettant d'activer des connaissances.

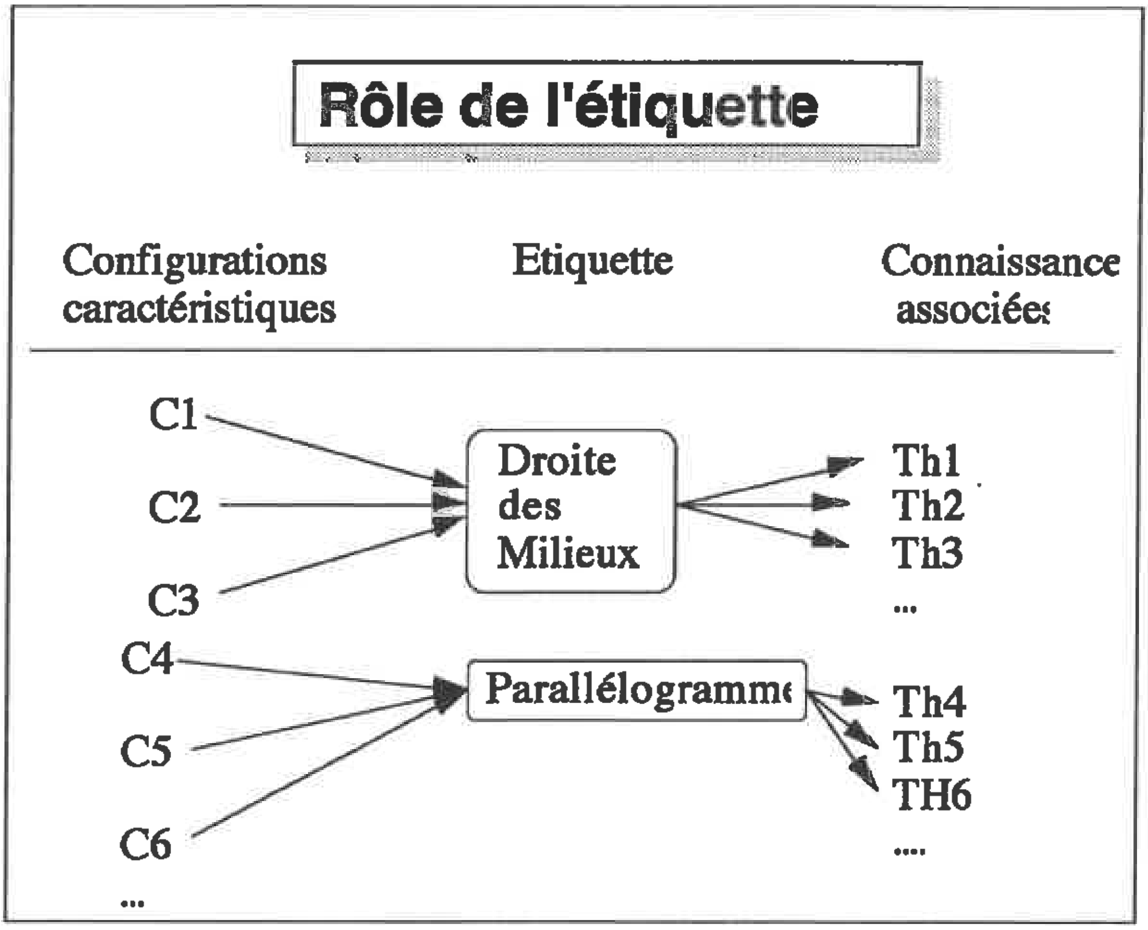


Figure 17.

Dans un même problème, plusieurs étiquettes peuvent apparaitre. La question de la gestion des étiquettes multiples se pose alors.

2.4 Le cas des étiquettes multiples.

Rappelons qu'une étiquette est le titre d'un chapitre ou sous-chapitre du cours de géométrie de la classe de quatrième. Les étiquettes sont hiérarchisées et représentées en machine sous forme d'un graphe orienté dont les noeuds sont les étiquettes (figure 18). A chaque étiquette est associé un ensemble de connaissances ; certaines étiquettes correspondent à des conditions de plus en plus fortes portant sur un concept initial : le rectangle est un parallélogramme particulier, le carré est un rectangle particulier etc. Nous dirons alors que "carré" est plus spécialisé que "rectangle", et de même que "rectangle" est plus spécialisé que "parallélogramme". Ainsi, la place d'une étiquette dans le graphe est un indicateur sur sa spécialisation : les étiquettes les plus spécialisées sont les feuilles terminales du graphe.

A chaque étiquette est associé un ensemble de connaissances. Il est clair que le triangle isocèle est un triangle particulier. A ce titre, les connaissances associées à l'étiquette "Triangle isocèle" seront constituées par l'union des connaissances générales du triangle et des connaissances spécifiques du triangle isocèle. C'est au moment où le système appelle les connaissances associées à une étiquette, qu'il appelle les connaissances spécifiques de l'étiquette, **ainsi que les connaissances de tous ses ascendants.**

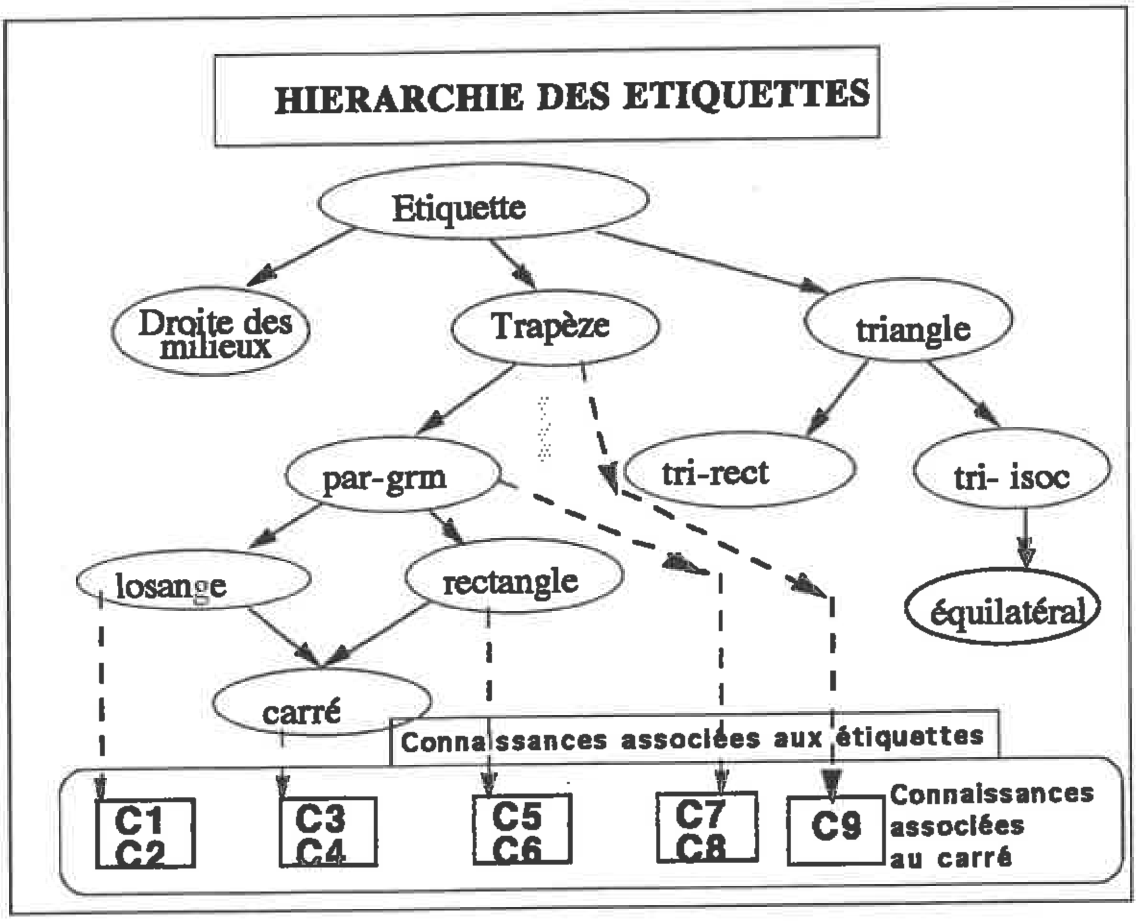


Figure 18.

Dans ce schéma, les connaissances C3 et C4 sont les connaissances spécifiquement associées au carré (heuristiques particulières), lorsque le système appelle les connaissances associées au carré, il appelle aussi toutes les connaissances des ascendants du carré.

3. Mécanisme de résolution de problème

3.1. Problème enrichi

La figure utilisée par l'expert est une figure codée. Ses sous-figures permettent d'étiqueter le problème et ainsi d'activer les connaissances pertinentes pour le problème posé.

Le système construit ainsi ce que nous appellons **un problème enrichi,** constitué de l'énoncé, de la représentation interne de la figure, des objets introduits par la question posée, de l'étiquette de problème, et des connaissances associées à l'étiquette.

Exemple de problème enrichi :

- Le problème suivant :

"On considère le triangle (ABC) et le point I milieu de [BC].
La parallèle à (AC) passant par I coupe [AB] en J. K est le symétrique de I par rapport à J.
Montrez que (BK) est parallèle à (AI)".

est enrichi par :

- La figure codée :

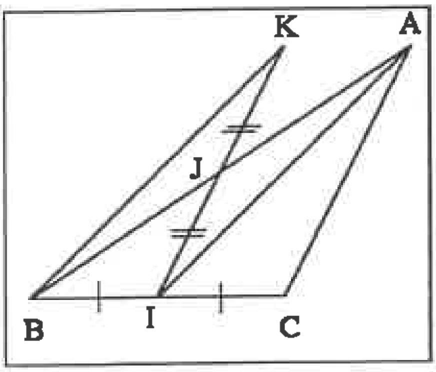


Figure 20.

-La sous-figure prototype :

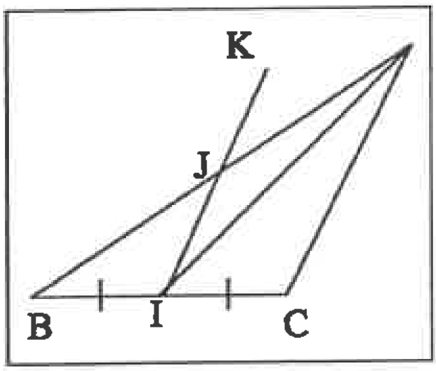


Figure 21.

- l'étiquette :DROITE-DES-MILIEUX.

-Connaissances associées : {DTM1, DTM2}.

Rappellons que c'est à l'aide du lien (sous-figure, étiquette) et (étiquette, connaissances) que le système enrichit progressivement le problème. Cet enrichissement permet au système d'appliquer les connaissances associées et lui permet d'en déduire le but recherché.

3.2. Algorithme de résolution

La recherche de solution peut être modélisée par un **cycle de base** constitué de deux phases :

<u>Phase 1</u> :Application des théorèmes sélectionnés sur les objets, ou configurations extraites pendant la phase d'étiquetage. A l'issue de cette phase, le problème a été modifié, ou résolu.

Si le problème n'est pas résolu, on considère que les applications des connaissances ont modifié le problème par l'ajout de nouvelles hypothèses et transformation de la figure. L'expert se retrouve alors devant un problème enrichi. On peut alors considérer que les mécanismes décrits précédemment agissent sur le problème enrichi **comme si c'était un nouveau problème, avec une nouvelle figure.**

<u>Phase 2</u> :Analyse de la nouvelle figure par des mécanismes identiques à ceux mis en oeuvre dans la phase de lecture initiale. Nouvelle étiquette éventuelle, appel de nouvelles connaissances, sélection de nouveaux objets et retour à la phase 1.

On peut schématiser la recherche de solutions, par le schéma suivant :

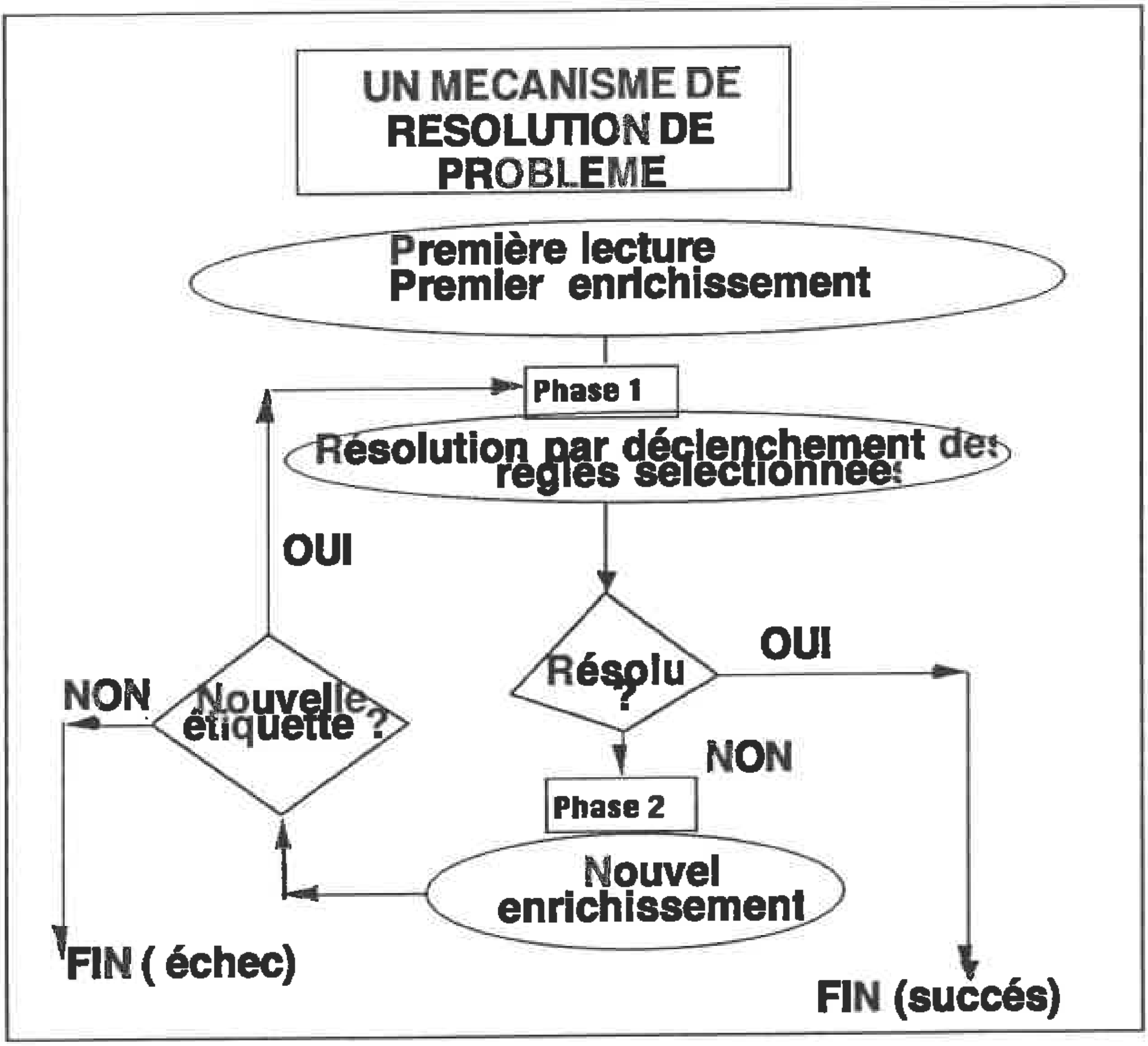


Figure 23

Le mécanisme d'enrichissement est proposé pour un niveau donné (ici la classe de Quatrième). Les problèmes posés et enrichis par ce mécanisme sont des problèmes "pédagogiques" posés dans le cadre du contrat didactique, et donc adaptés à la classe de Quatrième. A ce titre, dans ces problèmes, le nombre d'étiquettes possibles et la complexité des figures sont relativement limités.

Dans le cas de problèmes de classes différentes (droite de Simpson en Terminale C par exemple) mettant en jeu des constructions élaborées, ce mécanisme serait à perfectionner. La méthode d'étiquetage proposée ici suppose que le problème contient **au moins** une configuration caractéristique, et que **l'une au moins** de ces configurations caractéristiques est un indice valable pour résoudre le problème.

4. Implicite et visuel

En analysant la résolution de deux exercices on se propose de mettre en évidence le rôle de l'observation visuelle et le rôle des raisonnements implicites dans la démonstration.

4.1. Exemple 1.

Soient A, I ,J , B quatre points alignés tels que AI = IJ = JB.
Soit O le milieu de [AB].
Montrez que O est le milieu de [IJ].

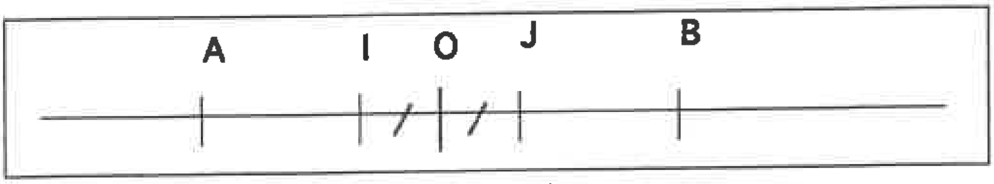


Figure 24.

Solution :

(1) O est milieu de [IJ], donc OI = OJ.

(2) OI = OJ et IA = JB, donc OI + IA = OJ + JB

(3) OI + IA = OJ + JB, donc OA = OB

(4) OA = OB donc O es le milieu de [AB].

La solution proposée s'appuie sur un implicite trés important : les points A, I, J, B sont supposés distincts !
Dans le cas ou le point A est confondu avec le point J (figure 25) le raisonnement devient incorrect.

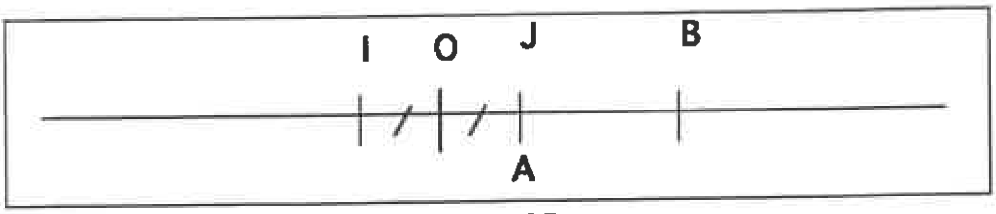


Figure 25.

La solution proposée ci-dessus est valide pour les lignes (1) (2), mais la déduction de la ligne (3) est incorrecte. L'implicite de l'énoncé est le suivant : ***"Des objets cités dans l'énoncé avec des noms distincts sont distincts sur la figure"***. **L'observation** de la figure permet de valider ou d'invalider la déduction de la ligne (3).

La résolution "*rigoureuse*" (en un sens qui reste à définir précisément) de cet exercice pourrait être la suivante :

(0) *On suppose que A, I, J, B sont tous distincts.*

(1) *O milieu de [IJ] don OI = OJ*

(2) OI = OJ et IA = JB, donc OI + IA = OJ + JB

(3) I est compris entre O et A, J est compris entre O et B

(4) (2) et OI+IA = OJ + JB, donc OA = OB.

(5) [IJ] est inclus dans [AB], donc O appartient à [AB].

(6) (5) et OA = OB, donc O est milieu de [AB]

On notera que les affirmations topologiques de la ligne (3) **ne sont pas spécifiées** dans l'énoncé, et et **ne sont pas déductibles** de l'énoncé avec les connaissances de quatrième. De plus la déduction de la ligne (5) passe sous silence la déduction *"O milieu de [IJ] donc O est sur [IJ]"*

Dans cet exercice, et plus généralement dans le cadre de la géométrie de quatrième, les informations visuelles et les raisonnements implicites peuvent être passées sous silence. Le raisonnement présenté au début du paragraphe 4.1. peut être considéré comme correct dans une perspective purement didactique : on ne formule pas toutes les étapes d'un raisonnement avec des élèves sous peine de perdre le "fil directeur" de la démonstration.

Dans l'exercice suivant, l'observation **visuelle** doit être explicitée sous peine de rendre le raisonnement incorrect.

4.2 Exemple 2 :

Soit (ABCD) un parallélogramme, et soient I, et J les milieux de [AD] et [BC].

Montrez que (DJ) est parallèle à (BI).

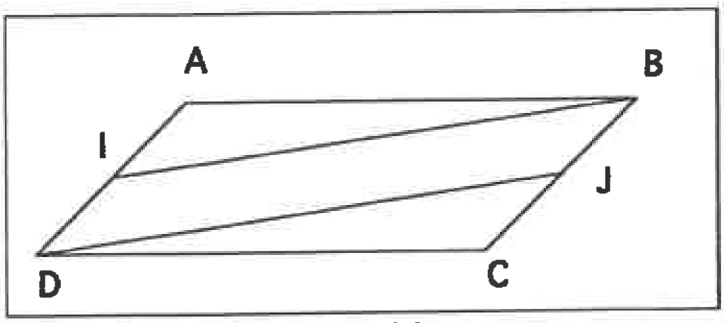


Figure 26.

Solution :

(1) [AD] // [BC] donc [DI] // [BJ]

(2) (ABCD) parallélogramme donc AD = BC

(3) I milieu de [AD], J milieu de [BC] donc JB = ID

(4) Le quadrilatère (DIBJ) est non croisé, et il a deux cotés parallèles et égaux, donc (DIBJ) est un parallélogramme.

(5) (DIBJ) est un parallélogramme, donc [DJ] // [BI].

Analyse :

Ici plusieurs implicites sont mis en oeuvre : I est milieu de [AD] donc (AI), (ID), (AD) sont parallèles. De même pour J et [BC].De même, la compatibilité de la division avec l'égalité ligne (3). est utilisée implicitement.

En outre, on constate l'utilisation de l'hypothèse "*(DIBJ) non croisé*" . C'est une évidence, certe, mais comment la justifier ? Le fait "(DIBJ) non croisé" est affirmé sans justification, et **on ne peut le déduire des hypothèses à l'aide des connaissances de quatrième**. La démonstration rigoureuse de cette propriété demanderait un raisonnement complexe sur la convexité avec des outils théoriques dépassant largement le niveau des classes secondaires. Ainsi, à la différence de l'exercice précédent, **la correction du raisonnement impose ici l'explicitation d'un fait non justifié et <u>non justifiable</u> !**.

Cette remarque conduit à poser une question d'ordre épistémologique : pourquoi accepter le fait "(DIBJ) non croisé" comme un **fait visuel admis** et refuser le fait "(DJ) parallèle à (BI)" comme un fait visuel non admis qu'**il convient** de démontrer !

On touche ici à une difficulté fondamentale de la réalisation informatique d'un résolveur de géométrie : la "démonstration" telle qu'elle est pratiquée en quatrième avec les outils théoriques dont on dispose dans ce niveau scolaire, est un objet hybride qui contient des déductions mathématiques, des raisonnements implicites, et des hyptohèses visuelles justifiés uniquement par la lecture de la figure. Il est donc nécéssaire de donner au système informatique des métaconnaissances lui permettant de gérer ces différentes composantes de la démonstration.

Conclusion

On a proposé un mécanisme de résolution de problèmes s'appuyant sur les configurations caractéristiques de la figure. L'étiquette de problème permet de mettre en relation des sous-figures et des connaissances pertinentes pour résoudre le problème. Les connaissances ainsi sélectionnées ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes. La résolution de problème necessite l'utilisation de raisonnements implicites et de faits visuels observés sur la figure. **La règle du jeu** qui permet au professeur de différencier ce qui est admis par l'observation de la figure, ce qui est admis par des raisonnements implicites, et ce qui doit être démontré dans le cadre du problème est **un élément du contrat didactique.**

La figure est -elle un auxilliaire heuristique permettant de guider le raisonnement formel ? On a vu que cette conception de la figure est trop restrictive. Nous pensons que la figure est un objet mathématique "à part entière" dont les propriétés et le mode d'utilisation doivent être précisés dans le cadre du contrat didactique. Un important travail reste à effectuer afin de préciser **"le contenu mathématique"** de la figure, et d'expliciter les termes du contrat didactique dans l'utilisation des informations véhiculées par la figure. Cette réflexion permettra d'avancer dans la conception d'un résolveur susceptible de travailler sur un ensemble ouvert de problèmes. La collaboration entre les chercheurs en Intelligence Artificielle et les didacticiens est plus que jamais à l'ordre du jour.

REFERENCE

[ALLEN,90] : *'Sur la correction de la figure en géométrie'*
Actes de l'Université d'été. P 109-125 Toulouse 90. IREM Toulouse.

CONTRAINTES DE FONCTIONNEMENT DES ENSEIGNANTS EN COLLEGE : CE QUE NOUS APPREND L'ETUDE DE CLASSES FAIBLES

Marie Jeanne Perrin
Equipe DIDIREMUniversité Paris 7 Denis Diderot

Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de "classes faibles"

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN,
Equipe DIDIREM, Université PARIS 7 Denis Diderot.

Introduction

Le présent article s'appuie sur une partie de mon travail de thèse[1] qui portait sur l'enseignement des mathématiques dans des classes où beaucoup d'élèves rencontrent des difficultés scolaires. Précisons tout de suite que ce travail se situe essentiellement au niveau du diagnostic et de l'analyse et qu'il ne prétend pas apporter de solution. Les réflexions que je voudrais présenter ici concernent en fait l'enseignement des mathématiques dans n'importe quelle classe de collège. En effet, en se plaçant dans des conditions particulières de fonctionnement du système didactique, on peut observer avec un certain grossissement et par là mieux comprendre des phénomènes généraux d'enseignement qui, dans le cas de classes dites faibles, s'imbriquent et contribuent au non-apprentissage d'un certain nombre d'élèves, notamment d'une bonne partie de ceux qui sont issus d'un milieu socio-culturel défavorisé. C'est sur ces phénomènes généraux que je voudrais me centrer même si pour cela, je dois faire un détour par l'analyse des difficultés des élèves et dire un mot des observations sur lesquelles je m'appuie de façon à situer les conclusions dans le contexte du travail. Je commencerai par ce dernier point avant d'illustrer les difficultés des élèves à partir d'une étude de cas puis d'en rechercher une première interprétation. Je replacerai ensuite cette analyse par rapport à certains concepts de la théorie des situations didactiques avant de dégager des contraintes contradictoires qui pèsent sur la gestion de l'enseignement au collège.

1. Les observations sur lesquelles je m'appuie.

Il me faut tout de suite préciser ce que j'entends ici par "classe faible". Ce sont des classes où la majorité des élèves ont déjà acquis au moins un an de retard scolaire, qu'elles aient été fabriquées intentionnellement (classe de niveau) ou qu'elles se soient constituées par hasard dans une école géographiquement défavorisée. Il ne s'agit donc pas de classes spéciales ni nécessairement de classes très difficiles où la possibilité même d'enseigner n'est pas toujours assurée.

Voici, succinctement présentées en 3 étapes, les observations sur lesquelles s'est appuyée ma thèse et qui sont à l'origine de la présente réflexion.

Etape 1. Observations en classe dans une expérimentation de type ingénierie didactique : années 1983-1984 et 1984-1985. J'ai repris dans des classes de CM2 et de 6ème des

[1] voir aussi l'article paru dans Recherches en didactique des mathématiques n°13/1.2.

ingénieries didactiques sur les décimaux et sur les aires qui avaient déjà été expérimentées[2] et qui avaient en quelque sorte "fait leurs preuves" avec l'idée que si l'on donnait aux élèves l'occasion de construire les notions enseignées avec suffisamment de sens, l'apprentissage se ferait.

J'ai arrêté l'expérimentation après deux ans pour recourir à d'autres moyens d'investigation. Certains résultats positifs ont été obtenus : les élèves de CM2 ont eu des résultats bien meilleurs à des tests sur fractions et décimaux que des élèves de 6ème de même recrutement social. Mais ces résultats positifs concernaient surtout l'une des classes de CM2 et l'ensemble de l'expérimentation me laissait insatisfaite. D'abord les élèves ne semblaient pas acquérir un savoir réutilisable : même si une situation didactique avait permis d'obtenir les résultats escomptés, les élèves ne pouvaient pas réinvestir les acquis dans une autre situation, quelques semaines plus tard. On avait le sentiment de repartir toujours de zéro. D'autre part, l'observation assez sommaire des classes m'a permis de repérer assez vite, surtout en sixième où j'ai arrêté la première forme d'expérimentation au bout d'un trimestre, un dysfonctionnement des ingénieries didactiques : les situations traitées en classe n'étaient souvent pas celles que je pensais prévues. La première année, j'attribuais les distorsions observées à une incompréhension des enseignants, due essentiellement à mes mauvaises explications, ainsi qu'à ma connaissance trop imprécise des difficultés des élèves. L'année suivante, j'ai fait des efforts d'explicitation en même temps que je prenais quelques mesures pour recueillir plus de productions écrites des élèves. Il s'est néanmoins avéré qu'il n'était pas facile de retrouver un équilibre en modifiant le fonctionnement habituel des classes.

J'ai alors opéré un changement de problématique qui a consisté d'une part à prendre ces distorsions comme objet d'étude et à chercher des raisons pour lesquelles les enseignants faisaient autre chose que ce qui semblait convenu entre nous, d'autre part à essayer d'analyser plus précisément les difficultés des élèves, tout en élargissant le champ de questionnement.

Etape 2. Questionnaires et entretiens informels auprès d'élèves et d'enseignants :

* auprès des élèves du CM2 en juin 1985 sur l'utilité de l'école et des mathématiques.
* auprès d'élèves-instituteurs inscrits à l'option "mathématiques" du DEUG 1er degré en 1985 sur leurs représentations des mathématiques, de l'enseignement des mathématiques et leur vécu en mathématiques.
* auprès de professeurs de 4ème fréquentant un stage de l'IREM, sur leurs pratiques à propos de l'enseignement des réels et rationnels, en mai 1985
* auprès de professeurs de collège sur la place faite à la graduation d'une demi-droite dans leur pratique de l'enseignement des nombres, en mai 1986
* Discussion dans un stage en octobre 1987 sur la base d'un questionnaire portant sur les pratiques de classe et les représentations des mathématiques.

[2] voir par exemple Brochure 62 de l'IREM Paris 7 sur les décimaux, articles dans Petit x n°6 et n°8 sur les aires.

* Observation d'un élève de CM1 en travail individuel hors du système scolaire, entre septembre 1987 et mars 1988.

Cette étape transitoire m'a amenée à formuler des hypothèses sur certaines composantes des représentations des enseignants et des élèves et à élaborer les questionnaires de l'étape 3.

Etape 3. Questionnaires écrits et entretiens auprès d'élèves et d'enseignants et reprise d'une expérimentation :

* Questionnaire écrit à des élèves de CM1 et CM2 de milieu social contrasté, portant à la fois sur les représentations des mathématiques et la résolution d'exercices (en mars 1988).
* Entretiens individuels avec des élèves de CE1 comportant également un questionnaire général et la résolution d'exercices (en juin 1988).
* Reprise d'une expérimentation en 6ème et entretiens avec les élèves à deux reprises (septembre 1988, février 1989).
* Entretiens avec 4 instituteurs et 4 professeurs de collège entre juin 1989 et juin 1990 (enseignants des classes expérimentées ou animateurs IREM).
* Observation d'élèves volontaires de 6ème en travail individuel ou en petits groupes hors de la classe dans des séances de soutien en 1989-1990.

C'est la répétition de phénomènes observés dans les premières expérimentations, aussi bien du côté des élèves que des enseignants, qui m'a amenée à rechercher des explications théoriques et à examiner la question en termes de régularités et de contraintes.

2. Illustration des difficultés des élèves à partir d'une étude de cas.

J'ai été frappée par ***l'irrégularité des performances*** de l'élève de CM1 que j'ai observé en privé pendant 6 mois et que nous appellerons Didier. Il peut réussir un exercice qu'il ne réussit plus en fin de séance ou quelques jours plus tard. On pourrait résumer la description en disant que Didier a des *connaissances à la fois floues et rigides, sans véritable organisation :*

* floues parce qu'il est rarement sûr de lui "je vais essayer ça", "j'ai dit au hasard'...
* rigides parce qu'il a beaucoup de mal à changer de point de vue, de stratégie et qu'il ne peut pas saisir les indications qu'on lui donne : les informations qui ne rentrent pas dans sa procédure le déstabilisent et il commence à dire n'importe quoi.

Un autre fait caractéristique est justement cette ***facilité à perdre le fil*** dès qu'on lui pose une question ou même dès qu'il doit lui-même s'interrompre pour rechercher le résultat d'un calcul ou pour vérifier quelque chose. Cela explique sans doute sa ***réticence à s'engager dans un processus long pour résoudre un problème dont il ne voit pas comment trouver la solution en une ou deux opérations***. Par exemple, il peut faire des additions répétées pour trouver la solution d'une division quand les nombres sont simples et qu'il peut trouver tout de suite le résultat mais il ne peut pas engager un processus à partir de cette méthode quand les nombres sont plus compliqués. En même temps, ce refus des processus longs a pour conséquence un manque d'entraînement à l'organisation et à la mémorisation de résultats intermédiaires en cours de résolution. On a ainsi une sorte de cercle vicieux : en refusant les processus longs, il n'apprend pas à s'organiser, ce qui fait qu'il perd très facilement le fil de ce qu'il est en train de chercher, et qu'il est incapable de mener à bien des processus longs.

Par ailleurs, Didier est un enfant qui ***recherche les algorithmes,*** plus sécurisants et moins fatigants. On peut voir cela comme une conséquence du point précédent : il a de cette façon un moyen d'avoir une réponse rapide qui ne demande pas de s'organiser et de réfléchir.

De plus —surtout peut-être— les algorithmes le libèrent de la responsabilité de ce qu'il avance. En effet, d'après les réflexions qu'il fait à plusieurs reprises sur ce que dit la maîtresse, on peut penser qu'*il redoute de prendre la responsabilité de ses connaissances et préfère se référer à une autorité* : "la maîtresse dit de faire comme ça". Remarquons cependant que les allusions à ce que dit la maîtresse sont peut-être aussi un moyen de me faire savoir ce qu'il est légitime de faire en classe, qui n'est peut-être pas identique à ce qu'il est légitime de faire avec moi.

A travers ce qu'il en dit, on peut penser que Didier perçoit le discours de la maîtresse comme une *suite de recommandations et de règles sur la conduite à tenir*. Son rôle à lui, même s'il n'arrive pas toujours à bien le remplir, est d'écouter et de faire ce que dit la maîtresse. C'est sans doute d'ailleurs le cas de beaucoup d'élèves du même âge qui ne sont pas nécessairement en situation d'échec. Ce n'est donc pas le seul fait de se référer au discours de la maîtresse qui nous paraît caractéristique mais de le faire *en guise de justification.*

Donnons quelques exemples d'extraits de protocoles :

1. Il reconnaît une situation multiplicative, mais il ne s'inquiète pas de savoir si 978 représente des chocolats ou des boîtes ou plutôt, il évite de s'en inquiéter pour pouvoir donner rapidement une réponse au problème. Il tord éventuellement le texte du problème et le lit de façon qu'il relève du modèle qu'il a reconnu :

> M. On va faire un problème. Un patissier fait des chocolats qu'il met dans des boîtes de 20. Le patissier a fabriqué 978 chocolats. Combien remplit-il de boîtes?
> D. J'ai trouvé ce qu'il faut faire. Une multiplication, 978 X 20
> M. Pourquoi ?
> D. Il y a plusieurs boîtes... C'étaient 978 boîtes ou 978 chocolats?
> M. 978 chocolats
> D. Parce qu'il y a plusieurs chocolats
> M. Oui, il y en a 978, ça fait plusieurs et alors ? Quelle est la question que je t'ai posée ?
> D. Combien de chocolats ?
> M. Non, puisque je t'ai dit combien il y avait de chocolats
> D. De boîtes !

2. Recherche d'une règle de calcul.

Il a 9 ans, sa sœur a 2 ans.

Je lui demande quel âge aura sa soeur quand il aura 18 ans, puis quand il aura 35 ans. Il a sans doute une procédure correcte au départ : de 9 pour aller à 18, il reconnaît un double, 9+9 = 18. Mais, c'est de là qu'il repart, de la technique utilisée et non de la question qu'il se posait, ce qui a peut-être été favorisé par le nombre choisi : 35, c'est presque 18+18 comme 18 était 9+9.

> D. 9 ans .... ah non, 11 ans. Je l'ai fait de tête, j'avais déjà les 2 dans la tête, et j'ai compté jusqu'à 18 combien il y avait, et j'ai coupé à la moitié et j'ai rajouté les 2, donc elle aura 11.
> M. Parce qu'il va se passer combien d'années jusqu'à tes 18 ans ?

D. 9 ans.
M. Quand tu auras 35 ans, elle aura quel âge ?
D. A partir de 11 ans ?
M. Non, quand toi , tu auras 35 ans elle aura quel âge ?
D. Elle aura 25 ans ... non ....
`M. Comment on pourrait savoir ?
D. 23 ans, elle aura
M. Comment tu sais ?
D. Parce que j'ai fait .... j'ai partagé 35, ça a fait 25, alors j'ai enlevé 2, ça a fait 23.
...
M. Et pourquoi 25, je t'ai dit 35 !
D. Ben, justement, ça va être la moitié, je vous dis.
M. Et pourquoi il faudrait faire la moitié ?
D. Et après on fait plus 2
M. Et pourquoi la moitié ? Je ne comprends pas
D. Ici j'ai fait la moitié regardez.
M. Ah oui, mais, pourquoi la moité, 18 c'était le double de 9.
D. C'est dur cette fois-ci
M. Si c'est dur, tu peux peut-être chercher des intermédiaires
D. Comment, je ne comprends pas
M. Tu ne vas pas passer directement de 18 ans à 35 ans.
D. Ah non, sûrement pas
M. Il va peut être y avoir des intermédiaires plus faciles à calculer
D. Bon, disons que j'en ai 18. 18 et 18, ça fait combien au fait ... 32 ? non ... 36 ! j'enlève un, ça fait 35, alors si je veux faire la même chose, il faut que ça donne 25, vous comprenez.

3. Didier nous montre une partie de ses difficultés en résolution de problèmes à travers l'énoncé qu'il propose lui-même le 12 mars. "j'ai 36 billes, je veux les mettre dans 20 sacs, combien m'en restera-t-il ?" D'une part il manque une donnée : le nombre de billes par sac, d'autre part, il semble que l'absence d'aisance en calcul mental empêche Didier de faire des prévisions. Au départ, Didier pensait peut-être mettre une bille par sac[3] ou 20 billes dans un sac et faire une soustraction, mais il ne semble pas avoir d'idée très précise sur l'influence du nombre de billes par sac puisque, quand je lui demande comment il met les billes dans les sacs, il répond "une par une par exemple ou bien 4 par 4". Il dessine 20 boîtes et écrit 4 sur chaque et ne prévoit pas encore tout de suite que les 36 billes ne suffiront pas.

Il semble qu'on ait là une contradiction entre une logique concrète où on dispose de données un peu anarchiques : on peut bien avoir n'importe quel nombre de billes et n'importe quel nombre de boîtes et quand même ranger les billes dans des boîtes, et une logique de problème scolaire de mathématiques où il faut que les données soient telles qu'on puisse résoudre le problème avec les opérations dont on dispose, et où il faut donc anticiper la solution pour choisir les données. Didier sait bien que 20 boîtes contenant chacune 4 billes font 80 billes, encore qu'il ne soit pas si sûr de lui —"je vais essayer une multiplication" dit-il— mais il n'a pas pensé qu'il fallait faire cela avant de choisir le nombre de billes.

On reprend son problème avec une autre valeur : 340 billes.

D. Je prends 2 chiffres au dividende. En 34 combien de fois 20 ? je connais pas la table de 20, alors je calcule qu'est ce qui se rapproche le plus de 3 dans la table de 2, c'est 1, ça fait 20, il reste 14, j'abaisse mon zéro et ce qui se rapproche le plus de 14 dans la table de 2 c'est 7, il reste 0.

---

[3] C'est sans doute ce qu'il prévoyait puisqu'il paraît très content un peu plus tard quand je lui pose la question "si tu as 36 billes et 20 boîtes et que tu mets déjà une bille dans chaque boîte, qu'est-ce qui va se passer ?" D. "Ca y est, j'ai trouvé, je crois savoir combien il va lui en rester ! 16 !". Il répond là exactement dans les termes où il avait posé la question au départ, c'est la réponse à son problème.

M. Conclusion ? Tu peux répondre au problème ?
D. Il reste
M. Quelle était la question ?
D. Avec 20 boîtes, est ce que j'aurai assez de billes pour mettre 340 billes ?
M. C'était pas ça la question. 340 c'est quoi ?
D. Des billes
M. et 20 ?
D. Des boîtes
M. Qu'est-ce que tu faisais ?
D. Je rangeais des billes dans des boîtes.
M. Oui, et quelle était la question ?
D. Est ce que j'aurai assez, non ce n'était pas ça. Combien me restera-t-il?
M. Mais 17, c'est la réponse à quelle question ? que représente 17 dans ton problème ?
D. Il représente ce que ça donne, le résultat.
M. De quoi ?
D. Ben de ma division
M. Mais qu'est ce que ça veut dire dans ton problème ... si je te demandais de faire encore un dessin (D. en même temps : j'ai trouvé). Fais un dessin qui représente ton problème.
Il dessine 17 billes qu'il partage en 2 paquets.
M. Où est 340 ?
D. là, les paquets c'est les 340.
M. Je ne comprends plus. Tu avais 340 billes
D. Que je range dans des boîtes de 20
M. Dans des boîtes de 20 ou dans 20 boîtes ?
D. Dans 20 boîtes
M. Tu avais fait tout à l'heure un dessin
D. Oui, mais ça va être embêtant.
M. Dessine tes 20 boîtes. (Il le fait). Et alors qu'est ce que c'est 17 ? ... Tu as 20 boîtes et 340 billes. Je vois les boîtes mais je ne vois pas les billes.
D. Voyons, combien j'en ai ? 17
M. Qu'est ce que c'est 17 ? Des billes ou des boîtes ?
D. Ce qui restera en trop ..... Bien sûr tout à l'heure il en restait 16 et 12.
M. Il en restait 16 et 12 ? (........)
M. Tu as donc 17 billes dans chaque boîte, écris-le.
D. Je ne vais pas écrire 17 partout
M. Ecris 17 dans chaque boîte, enfin quelques fois, et quand tu en as marre, tu t'arrêtes.
Il en écrit 5 et s'arrête
D. Voilà ça fait 340 billes.

L'ensemble de ces caractéristiques se rencontre souvent chez des enfants en difficulté à l'école. Il me semble qu'elles rendent *difficiles la dévolution*[4] *aux élèves d'un problème un peu complexe et la mise en place de jeux de cadres*[5] parce que ces élèves acceptent difficilement de se lancer dans une procédure coûteuse et peu sûre, d'autant plus que le maître, lui, connaît la solution!

Cependant, au cours de mes observations ultérieures, j'ai pu rencontrer aussi un autre type d'élève en difficulté, un peu opposé : c'est ***l'élève qui ne peut accepter des règles ou des algorithmes qu'il ne comprend pas.*** Par exemple, dans des observations d'élèves de 6ème, j'ai vu des enfants qui ne pouvaient accepter la multiplication pour traiter une situation de

[4] Nous reviendrons sur cette notion au § 4. Disons pour le moment que la dévolution est ce par quoi l'enseignant va faire accepter par l'élève d'engager sa responsabilité dans la résolution d'un problème. Voir Brousseau R.D.M. 7.2.

[5] Pour donner à l'élève les moyens de créer de nouveaux outils, l'enseignant peut choisir un problème qui se traduit dans plusieurs domaines mathématiques (ex : géométrie, numérique) entre lesquels les connaissances des élèves ne permettent pas une correspondance parfaite. Le déséquilibre ainsi produit et le désir de rééquilibration pousse les élèves à créer des outils améliorant la correspondance entre les cadres. Voir Douady, R.D.M. 7.2.

proportionnalité dans le cas où ils avaient affaire à des nombres décimaux. Et, en effet, si on n'a compris la proportionnalité que dans le cas de quantités discrètes où l'on peut penser en termes d'addition répétées, il y a fort à faire pour passer aux quantités continues et à la multiplication sur les décimaux.

Par exemple, une élève de 6ème est venue me voir parce qu'elle ne comprenait pas la correction d'un exercice où il s'agissait de trouver le prix d'un rôti de porc de 1,35 kg à 46 F le kg. Elle savait qu'elle paierait entre 46 et 92 F mais ne savait comment faire et ne voyait surtout pas pourquoi il fallait multiplier comme elle l'avait vu à la correction. Elle pouvait parfaitement utiliser la proportionnalité sous forme d'isomorphisme sur les entiers et trouver, quand je le lui ai suggéré, le prix de 500g puis de 100g de rôti. Avec cette aide, elle pouvait même trouver le prix de 1,35 kg en faisant 46 + 3x4,60 + 2,30. Mais elle ne voyait toujours pas le rapport avec 1,35 x 46 qui donnait bien le même résultat, comme elle l'a constaté en effectuant la multiplication. Pour élucider cette coïncidence, il a fallu voir d'abord que 3x4,60 = 0,3x46 et que 2,30 = 0,5x4,60 = 0,05x46, et encore que 46x1,35 = 46x1 + 46x0,3 + 46x0,05. Ce raisonnement n'est pas disponible chez la plupart des élèves de 6ème qui doivent faire un "acte de foi" pour passer au modèle multiplicatif dans le cas où le multiplicateur est un nombre décimal, sans qu'on leur dise en général qu'il y a effectivement quelque chose de non évident à admettre.

Les élèves qui sont dans ce cas ont au contraire tendance à éviter les algorithmes. Leur attitude paraît plus positive, mais ils risquent aussi de se dire rapidement qu'ils ne comprennent rien en mathématiques parce qu'ils ne comprennent pas tout, puis qu'il ne faut pas chercher à comprendre et cela peut enfin les amener au comportement précédent où on recherche l'algorithme à appliquer.

L'évitement des techniques dont on n'est pas très sûr peut parfois aller assez loin. J'ai ainsi observé un élève qui utilisait des processus très complexes et très longs mais n'exigeant que des techniques rudimentaires, ce qui demandait en revanche des prouesses de mémorisation, pour éviter de mettre en œuvre des techniques plus performantes mais d'acquisition plus récente. Pour ce type d'élèves, il semble que le problème ne se situe pas au niveau de la dévolution mais plutôt à celui de *l'institutionnalisation*[6], *qui suppose l'acceptation de renoncer à des méthodes qu'ils connaissent bien pour en essayer de nouvelles qu'ils ne maîtrisent pas encore.*

3. Bilan des difficultés des élèves et interprétation :

3.1. *Un point crucial : capitalisation du savoir et réinvestissement*

Le point qui paraît crucial au niveau des difficultés de beaucoup d'élèves sur le plan de la classe de mathématiques est le manque de capitalisation et la difficulté de réinvestissement des

[6] Nous reviendrons sur cette notion au § 4. Disons pour le moment que l'institutionnalisation est ce par quoi l'enseignant va donner un statut aux connaissances produites ou utilisées dans les activités de la classe.

connaissances. C'est dans ce domaine que les différences les plus grandes apparaissent. En effet, sur les contenus, les difficultés rencontrées par les élèves de ces classes faibles ne sont pas vraiment spécifiques : on retrouve les conceptions erronées déjà répertoriées, même si elles sont plus résistantes. Ce qui paraît le plus caractéristique et source de nouvelles difficultés, c'est qu'il y a souvent, chez les enfants en difficulté beaucoup plus massivement que chez les autres, *un divorce net entre les situations d'action visant à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation qui est faite ensuite par le maître.* Au cours de l'action, dans les premières situations qui tendent à aborder une notion nouvelle, pourvu que le problème permette réellement l'investissement des élèves, on ne voit pas beaucoup de différences dans les procédures que mettent en place les élèves de classes de niveaux différents. En revanche la différence s'accentue très vite dès qu'il s'agit de réutiliser les connaissances introduites à cette occasion.

Cette absence apparente de différence au moment de l'action peut sembler paradoxale compte-tenu des différences observées dans la capitalisation des connaissances. Cependant il faut remarquer qu'au niveau considéré (CM2 et 6ème), les situations d'action utilisées pour introduire un concept nouveau, notamment celles observées au cours de l'expérimentation, permettent souvent de développer des procédures pertinentes en ne nécessitant que des connaissances mathématiques très élémentaires. De plus, la contextualisation choisie laisse généralement une grande place à la manipulation qui permet d'utiliser des connaissances générales liées au contexte. Mais, si on propose une autre situation où il serait pertinent d'utiliser la connaissance nouvelle, les élèves repartent de zéro ou on constate des dérapages dans l'utilisation de la connaissance nouvelle. Il est probable que, pour des niveaux plus élevés, des différences se manifesteraient dès la phase d'action si des outils de base indispensables à l'action, comme par exemple le calcul algébrique, n'étaient pas disponibles.

Par exemple, pour l'introduction des fractions, nous avons utilisé à de nombreuses reprises la situation "segment" qui consiste à demander aux élèves de dessiner un segment arbitraire sur une feuille de papier puis d'envoyer un message à un récepteur qui doit dessiner un segment de même longueur. Les élèves ne peuvent utiliser la règle graduée mais émetteur et récepteur disposent de bandes de papier de même longueur. Cette situation amène toujours les élèves à subdiviser l'unité par pliages en deux successifs pour évaluer la partie qui dépasse un nombre entier de reports, mais dès qu'on passe à l'écriture formelle des fractions, il y a pour certains élèves un dérapage, ils passent à des modèles numériques erronés pour simplifier ou ajouter les fractions (par exemple $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$). Il semble que l'objet mathématique n'ait plus aucun rapport pour eux avec la situation (ou les situations) d'action qui lui a (ont) donné sens et que ces élèves ne paraissent pas pouvoir utiliser comme référence. Ainsi, tout se passe comme si *le savoir institutionnalisé par le maître et décontextualisé était situé dans un registre étanche par rapport aux connaissances utilisées dans la situation d'action.* Ceci fait que, même dans le cas où il est mémorisé, le savoir ne peut fonctionner que dans le registre formel, par exemple numérique pour les fractions, sans que la situation d'introduction puisse servir de contrôle, et il ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Ce que les élèves retiennent, c'est ce qui sort directement de l'institutionnalisation. Ils le répètent tel quel, comme $n x \frac{1}{n} = 1$, mais ne l'utilisent pas pour trouver d'autres résultats comme $n x \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, les règles et les codages qu'ils retiennent ne sont pas précis ; par exemple ils confondent $\frac{171}{2}$ et 171,2. Un autre exemple d'une prise en compte partielle du sens s'observe souvent à propos de la division. Certains élèves ne voient pas la différence entre a : b et b : a. Ils reconnaissent une situation de division et proposent par exemple de faire a : b alors qu'il faudrait faire b : a. Quand, après une demi-heure de travail, on arrive enfin à la bonne méthode, l'élève proteste en disant "je l'avais dit depuis le début!" Il semble que savoir qu'on fait une division leur suffise. Peut-être pensent-ils qu'on divise toujours le plus grand nombre par le plus petit, ou que la division est commutative comme la multiplication et l'addition.

3.2. *Des interprétations possibles côté élèves.*

Une des principales explications que j'avance est que les élèves qui ne rencontrent pas ce genre de difficulté ont en quelque sorte *un projet, le plus souvent implicite, de décontextualisation dès le moment où ils travaillent sur la situation d'action.* Ils savent qu'il y aura peut-être lieu de réutiliser l'expérience acquise et ils cherchent à comprendre ce que la démarche qu'ils mettent au point sur un problème particulier a de généralisable. Ils se créent des *représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé actuellement mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments dans d'autres occasions*, ce qui leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée. Pour d'autres enfants, cela ne se fait pas parce qu'ils ne font que résoudre le problème posé, dans les termes où il est posé, sans avoir de projet de connaissance. Il n'y a pas création de *représentations mentales qui ont déjà valeur symbolique et sur lesquelles on pourra travailler ensuite, à l'occasion d'autres situations.* Ceci contribue à expliquer l'absence, chez ces élèves, de possibilité de réutiliser en les adaptant des outils forgés pour résoudre un problème. D'ailleurs, sur l'exemple de la situation "segment", le dérapage formel se produit pour certains élèves dès le bilan qui suit la phase d'action quand l'enseignant demande si on peut imaginer d'autres pliages et d'autres écritures : des enfants affirment à ce moment là que $\frac{1}{6}$ est le double de $\frac{1}{3}$.

Ces représentations mentales intermédiaires entre l'action et la formulation, permettent sans doute de plus aux élèves de *libérer de la place en mémoire de travail* puisqu'ils ne sont pas obligés de se remémorer tous les détails d'une situation ni de la traiter à nouveau pour retrouver le sens contextualisé d'une connaissance.

De plus, et c'est sans doute lié à l'absence de première décontextualisation au cours même de l'action, il n'y a pas, pour certains élèves, de mises en relation, *d'"accrochage" à l'ancien pour le renforcer ou le remettre en question.* Inversement, le fait de ne pas confronter les expériences nouvelles aux connaissances anciennes contribue en retour à l'absence de représentation mentale de niveau intermédiaire et à l'étanchéité des registres. Les expériences semblent se juxtaposer sans qu'il y ait chez ces élèves, d'interaction entre l'ancien et le nouveau. Chaque expérience est nouvelle, ou plus exactement, *seul le contexte est reconnu :* "on a plié des bandes de papier, on a découpé des rectangles"... Ce phénomène est sans doute lié à l'*absence de connaissances antérieures solides et bien organisées auxquelles se référer,* et contribue à son tour au manque d'organisation et d'intégration des savoirs nouveaux. C'est ainsi que s'installe *un processus cumulatif* : les connaissances antérieures, non activées, n'ont pas l'occasion de se stabiliser, les connaissances nouvelles ne peuvent pas s'ancrer et ont à leur tour peu de chances d'être retenues, et l'élève ne pourra pas faire confiance à ce qu'il sait.

Le manque de fiabilité des connaissances anciennes explique sans doute aussi en partie la *non reconnaissance du véritable enjeu* des situations proposées en classe, l'absence d'identification de l'objet du travail proposé par l'enseignant ce qui empêche aussi l'apprentissage : par exemple, si l'enseignant demande des découpages de rectangles pour travailler sur les fractions alors que, pour l'élève, il s'agit d'apprendre à partager les rectangles, celui-ci ne fait pas de lien entre cette activité et le pliage de bandes de papier. Les fractions utilisées dans les deux contextes n'ont pas de rapport entre elles, les élèves n'ont donc pas de raison de rechercher une cohérence.

La non-reconnaissance de l'enjeu d'enseignement a aussi pour conséquence *l'usure rapide des situations* : les élèves qui identifient la situation à son contexte se lassent avant qu'on puisse avoir une décontextualisation locale suffisante pour un réinvestissement ultérieur des connaissances mises en œuvre dans une situation.

D'autres difficultés se rattachent au plan cognitif ou aux exigences du "métier d'élève". Nous les examinons maintenant.

3.3. *Autres difficultés liées au plan cognitif.*

** Difficulté à changer de point de vue.*

Sur le plan cognitif, il faut ajouter la difficuté à changer de point de vue. Elle se manifeste par exemple lors d'un changement d'activité : des élèves restent sur une consigne précédente ou continuent à utiliser les procédures qui convenaient pour l'activité précédente. De plus, certains élèves ont du mal à tenir compte de deux relations en même temps. Une notion abordée dans un contexte est difficile à réutiliser dans un autre contexte. Cela rend aussi plus difficiles les changements de cadres. La difficulté à changer de cadres n'est pas spécifique : elle nécessite un apprentissage pour tous les élèves et le changement de cadres[7] est le plus souvent à la charge de

[7] voir note 5

l'enseignant. Mais l'utilisation de jeux de cadres est d'autant plus difficile pour certains élèves qu'ils ont des connaissances très peu mobilisables dans un des cadres en jeu. Or ces classes faibles sont en général hétérogènes et les élèves n'ont pas toujours les difficultés les plus profondes dans le même domaine. Par exemple un des élèves de la classe de 6ème de 89-90 réussit très bien dans le domaine géométrique mais a beaucoup de difficultés avec les nombres, il résiste à traduire les problèmes dans le cadre numérique ; pour un autre élève, c'est exactement le contraire. Dans les deux cas, les jeux de cadres entre le numérique et le géométrique sont difficiles mais pour des raisons différentes.

** Rapport avec le réel*

Les problèmes liés à la modélisation consistuent une difficulté qui ne concerne pas que la population plus spécialement étudiée ici mais qui est plutôt spécifique des mathématiques pour les niveaux élémentaires (dans les niveaux plus élevés, elle est plutôt à la charge de la physique). La modélisation demande de gérer les *rapports des mathématiques avec la réalité, du raisonnement mathématique avec la logique du quotidien.*

D'une part, il est important que les élèves aient l'occasion d'utiliser leurs connaissances en mathématiques pour traiter des problèmes concrets ou de se poser des questions d'ordre mathématique à partir de questions issues de la réalité. Cependant ces problèmes demandent à la fois de mettre en relation des connaissances mathématiques avec d'autres qui relèvent d'autres domaines et de trier entre ce qui est pris en compte dans le modèle et ce qui n'est pas pris en compte : on ne demande pas à un modèle de décrire complètement la réalité mais de permettre de prévoir de façon satisfaisante. Par exemple, il est clair que la proportionnalité ne modélise que les courses (à pied) qui se déroulent à vitesse constante et que ce n'est le cas d'aucune course réelle, mais ce modèle permet de prévoir de façon raisonnable le temps qu'on mettrait sur une distance pas trop différente de celle sur laquelle on a couru.

Le fait de travailler sur des situations concrètes nécessite aussi de distinguer ce qui relève de la logique mathématique et de la logique du quotidien qui ne coïncident pas toujours. Cette difficulté existe pour tous les élèves mais les rapports que ceux-ci entretiennent avec les mathématiques, l'école et le savoir en général, leur facilitent plus ou moins cette distinction. Il faut en effet remarquer que les élèves sont très inégalement confrontés à une autre logique dans leurs activités extrascolaires, suivant leur pratique de certains jeux, en particulier jeux pratiqués avec des adultes qui les amènent à apprendre à faire des raisonnements sous hypothèse ou à utiliser des catégories de classement (jeux de stratégie ou jeux de devinette dans un domaine à sérier par exemple).

De plus, on a tendance à avoir davantage recours aux problèmes concrets qui s'appuient sur la réalité quotidienne dans le cas d'élèves en difficulté, et il peut parfois s'installer de ce fait un véritable malentendu et une communication absurde entre le professeur et certains élèves, l'un se plaçant dans la logique mathématique, l'autre dans la logique du quotidien. Ainsi, un élève de 6ème que j'observais en travail individuel avait à résoudre le problème suivant: "Des cahiers sont vendus 4,60 F à l'unité ou par lots de 5 cahiers à 18 F le lot. Un professeur a besoin de 114 cahiers pour les élèves de ses classes. Que doit-il acheter pour payer le moins cher possible ? Combien paiera-t-il ?". Avec une calculatrice, sans pouvoir formuler ce qu'il cherche à chaque étape, il fait la suite d'opérations suivantes : 114 : 5 = 22,8 x 18 = 410,4 et écrit 410,4 sur sa feuille. Je lui fais remarquer qu'on ne peut prendre que des lots entiers. Il fait alors 23x18 = 414. Je lui demande si on ne peut pas payer moins cher en prenant des cahiers à l'unité. Il me répond que 23x5 = 115 et que le professeur gardera le dernier cahier pour lui. Il refuse d'envisager toute autre solution. J'ai pu voir qu'il comprenait le problème et pouvait le résoudre parce que je l'ai observé individuellement. A travers ses productions, on aurait pu penser qu'il ne comprenait pas le problème ou qu'il ne savait pas le traiter. Ainsi on sous-évalue parfois la compréhension de ces élèves parce qu'ils rencontrent aussi beaucoup de problèmes d'expression. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Cela ne veut pas dire que la logique du quotidien ne peut pas être ou même ne doit pas être un point de départ, mais il y aura parfois des oppositions entre les deux ce qui amènera la nécessité de distinguer ce qu'on peut dire en se servant des mathématiques et ce qu'on dirait ou ferait dans la vie. Cela demande de bâtir des situations qui s'appuient sur la réalité familière et permettent de la dépasser en posant aux enfants de véritables problèmes théoriques.

** Sur le plan du langage*

Dans les problèmes liés au langage, il faut en distinguer au moins de deux ordres. Ceux qui sont propres au langage mathématique lui-même interviennent bien sûr dans les difficultés des élèves observés, mais ils ne sont pas spécifiques de cette population. Aussi laissons-nous de côté ces problèmes que vont devoir surmonter tous les élèves et qui ont déjà fait l'objet de plusieurs recherches, par exemple la thèse de Colette Laborde. En revanche, les problèmes plus généraux liés à la maîtrise du français sont souvent importants chez les élèves que j'ai observés. Ils contribuent d'ailleurs à accroître les difficultés propres au langage mathématique et ont des répercussions à plusieurs niveaux :

a) Ils interviennent à l'écrit dans la compréhension des énoncés, par une difficulté à structurer les données par exemple, et aussi dans la formulation des résultats. Ce niveau externe est en relation avec la réussite. Les problèmes de langage s'ajoutent aux difficultés conceptuelles dans les situations complexes. Ainsi, les élèves en difficulté observés retiennent rarement toute l'information contenue dans un énoncé de mathématiques non redondant, notamment la plupart d'entre eux n'arrivent que très difficilement à prendre en compte plusieurs conditions simultanées. Une des difficultés dans la compréhension des énoncés tient aussi à la non reconnaissance de la portée de l'énoncé et de ses éléments, en particulier en ce qui concerne la généralité : quel énoncé est général, quel énoncé est contextualisé, quels sont les éléments de l'énoncé qui sont quantifiés universellement, quels sont ceux qui sont liés au contexte ?

Les difficultés langagières se traduisent aussi dans l'expression, la formulation de résultats ou de questions, ce qui amène d'ailleurs souvent une sous-réussite par rapport aux connaissances réelles de ces élèves.

b) Le maniement du français intervient aussi (avec d'autres facteurs) dans l'interprétation de ce qui se fait en classe. Dans le déroulement de l'enseignement, en effet, le maître utilise plusieurs niveaux de discours qui sont souvent assez imbriqués et que l'élève doit réussir à décoder avec leur signification dans la situation. Dans une même période de discours du maître, il y a souvent passage d'un type de discours à un autre. Les élèves doivent être capables de repérer ces changements de niveau pour tirer profit du discours non mathématique du maître, ce qu'on pourrait appeler le discours périmathématique, pour s'approprier plus facilement le discours mathématique du maître et éventuellement des autres élèves.

c) Les difficultés langagières ont sans doute aussi des répercussions à un niveau plus fondamental, dans le développement du langage intérieur au sens de Vygotsky et de la pensée. Il est certain que les difficultés dues à la langue ne se réduisent pas à la maîtrise du français puisqu'il y a des enfants étrangers qui le maîtrisent très mal et qui ne rencontrent pas de problème de conceptualisation en mathématiques même s'ils sont gênés au niveau externe dont j'ai parlé. J'en ai eu deux exemples dans les classes de 6ème que j'ai observées.

L'imprécision du langage et l'absence d'habitude de se formuler à soi-même les questions et les procédures de résolution engagées pendant la recherche d'un problème contribuent sans doute à la difficulté de certains élèves à se créer les représentations mentales intermédiaires qui seraient des points d'appui de la conceptualisation. Le développement du langage en général et pour la conceptualisation en mathématiques est donc un point très important à considérer dans l'analyse des difficultés des élèves. D'ailleurs cette relation entre le français et les mathématiques est à considérer dans les deux sens. Il est probable que le développement du langage mathématique puisse aussi aider à la maîtrise du français. Cependant, c'est sur ce qui relève de la négociation du contrat didactique plutôt que sur la relation entre le langage et les difficultés en mathématiques que j'ai fait porter ma recherche. Les difficultés d'ordre cognitif que nous avons examinées sont en effet imbriquées avec des difficultés plus générales qui ont des répercussions sur la gestion de la classe.

3.4. *Sur un plan plus général*

Ainsi, l'enseignant rencontre dans ces classes faibles un certain nombre de **difficultés dans la gestion de la classe** qui sont dues au fait que beaucoup d'élèves en grande difficulté à l'école ont, à l'extérieur de l'école, des *problèmes d'ordre affectif* sur lesquels nous n'avons aucune prise. De plus, leur situation d'échec à l'école contribue à *leur donner d'eux-mêmes une image dévalorisée*. Cela peut avoir des répercussions sur l'acceptation de certaines formes de travail, notamment le travail en groupes, et rend difficile les phases de bilan collectif. La difficulté de communication avec ses pairs, liée au manque de socialisation, fait que des élèves faibles ont peur de ne pas pouvoir s'exprimer ou d'avoir le dessous dans un groupe, les décisions y étant souvent prises avec des arguments d'autorité. De plus, il peut être plus difficile d'accepter un savoir venant d'un autre élève : il est normal de ne pas trouver ce que le professeur trouve puisqu'il est censé savoir, il est beaucoup plus dévalorisant de ne pas trouver ou de ne pas comprendre ce qu'un autre élève a trouvé. Ces élèves ont besoin d'être toujours sécurisés et cherchent une relation privilégiée avec l'enseignant. Ils prennent la parole de façon intempestive et n'écoutent pas ce que disent les autres élèves, ce qui fait que, dans des classes faibles, beaucoup de temps se passe à régler des problèmes de discipline. Le temps de travail effectif est donc plus court et la pression du temps sur l'enseignant en est d'autant plus forte.

A cela, il faut ajouter des différences culturelles qui font que certains élèves ont une **vision du "métier d'élève"**, pour reprendre l'expression de Chevallard (1988), plus ou moins bien adaptée au système scolaire. L'enseignement tel qu'il se pratique en général suppose en effet l'adhésion tacite à un bon nombre de présupposés culturels, qui ne sont pas réellement partagés par tous les élèves. Ainsi, suivant leur milieu familial, les élèves auront ou non l'habitude d'argumenter sur des questions de principe (voir par exemple Lautrey, 1980), ils trouveront ou non naturel d'entendre une question qu'on leur pose et la réponse qu'ils ont à faire comme destinée à prouver qu'ils savent et non seulement pour donner une information qui manque à l'interlocuteur. C'est d'ailleurs une explication généralement retenue pour expliquer la différence de réussite à l'école suivant le milieu social d'origine (écart à la norme scolaire).

Cet écart par rapport aux attentes de l'enseignant risque d'être encore plus grand dans le cas d'un enseignement qui se place dans une perspective constructiviste. Pour qu'un élève ait un projet (implicite) d'apprentissage face à une résolution de problème, il est en effet nécessaire qu'il ait une conception de son travail compatible avec la naissance d'un tel projet : ce sera difficile s'il pense qu'un devoir est comme un travail matériel qui doit être fait pour n'être plus à faire et qu'ensuite on l'oublie pour passer à autre chose ou qu'un devoir est fait pour être jugé, témoin qu'on a ou qu'on n'a pas une connaissance qu'il faut alors acquérir en apprenant une leçon. Pour que l'on puisse faire dévolution à un élève d'un problème auquel il ne peut pas fournir de réponse immédiate, il faut qu'il accepte sa responsabilité dans la résolution de ce problème. Or il peut trouver illégitime qu'on lui propose un problème dont on ne lui a pas enseigné la réponse et refuser cette responsabilité. Il peut également considérer que c'est une perte de temps puisque le maître connaît la réponse et pourrait la lui enseigner.

Son **rapport à l'évaluation** peut aussi contribuer à la mise en route d'un cercle vicieux. D'une part, l'élève réclame que tout ce qu'il fait soit évalué parce que toute peine mérite salaire et qu'il ne veut pas travailler pour rien. D'autre part, il sait que l'évaluation sert à le juger, il pense donc que l'important est d'avoir de bonnes notes pour éviter des désagréments à l'école comme à la maison. Mais il lui est difficile d'avoir de bonnes notes en jouant le jeu de la connaissance, jeu dont il n'a peut-être même pas perçu l'existence, il se met alors à la recherche d'indices qui pourraient l'aider à deviner aux moindres frais ce qu'attend le maître. Comme il arrive (assez souvent, somme toute) que le professeur l'aide dans cette entreprise, il peut jusqu'à un certain point produire des réponses justes sans mettre en jeu de connaissances. L'absence d'apprentissage ne se révèle alors que plus tard, à un moment où il peut être plus difficile de redonner à l'élève des occasions d'apprentissage.

Par ailleurs, si l'élève attend de l'école qu'elle le prépare à avoir un métier, il recherche dans ce qu'on lui propose l'utilité par rapport à son projet et ne la trouve pas en général : les détours des carrières scolaires lui sont souvent inconnus. De plus, les enfants en difficulté à l'école ont souvent un projet social très modeste qui ne demande que peu d'études, les savoirs scolaires leur semblent particulièrement déconnectés des savoirs pratiques qui leur paraissent utiles.

4. Une lecture didactique. Dévolution, institutionnalisation et dialectique outil-objet. Des points clé.

La théorie des situations aussi bien que la dialectique outil-objet se situent dans une perspective constructiviste et font une place importante au processus de contextualisation et décontextualisation des connaissances considéré comme un des moteurs de la construction du sens des concepts mathématiques pour les élèves à travers les situations didactiques. Ainsi, G.Brousseau déclare-t-il (R.D.M. 7.2. 1987 p. 51) *"dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation "*. De même, dans la dialectique outil-objet (Douady, 1987), on suppose que les élèves vont s'engager dans la résolution de problèmes pour lesquels ils ne disposent pas encore explicitement des outils performants puisque c'est justement la connaissance visée qui est un outil adapté. Mais ils peuvent aborder ces problèmes et leur donner un sens, parce qu'ils peuvent au moins dire si une réponse proposée est ou non solution du problème.

Dans cette perspective, la dévolution — que Brousseau (1990, p.325) définit comme *l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert"*— est un processus nécessaire à l'intérieur de la situation didactique parce que l'élève n'a pas immédiatement accès à la situation a-didactique: *"La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective"* (R.D.M. 7.2. 1987 p. 50). La dévolution est une condition pour que l'élève fonctionne de façon scientifique et non en réponse à des indices extérieurs à la situation, d'ordre didactique notamment, condition nécessaire si on se place dans l'hypothèse où l'élève construit des connaissances nouvelles en réponse à des problèmes.

A partir de l'observation des élèves en difficulté, on peut se poser plusieurs questions à propos de la dévolution :

- en quoi consiste-t-elle exactement ? comment l'opérer ? comment sait-on qu'elle a réussi ?
- est-elle toujours possible ? quelles conditions doit-elle remplir ?
- si elle n'a pas pu avoir lieu pour certains élèves qui ont suivi les autres ou ont utilisé des indices didactiques, l'apprentissage visé dans la situation peut-il néanmoins se faire ? A quelles conditions ?

Au départ, pour Brousseau, il s'agit essentiellement de faire entrer les élèves dans un fonctionnement mathématique face au problème qu'on veut leur voir résoudre. Mais cela suppose déjà que l'élève est dans une logique d'apprentissage. Il écrit par exemple (R.D.M. 7.2., 1987)*"L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques"*.

Or mes observations sur les élèves en difficulté me laissent penser qu'il n'est pas sûr que les préalables sous-entendus ici soient remplis pour tous les élèves. Suivant leur origine culturelle ou leur expérience scolaire antérieure, certains élèves savent bien en effet qu'il y a toujours un objectif d'apprentissage dans ce qu'on leur propose et on a l'habitude dans l'enseignement de faire comme si cette évidence était partagée. Ce n'est peut-être pas toujours le cas et, même dans le cas où l'élève s'attend à apprendre quelque chose, il peut y avoir méprise sur la nature de la connaissance visée (s'agit-il de savoir résoudre le problème posé ou d'acquérir une connaissance plus générale réutilisable dans d'autres problèmes, même très différents de celui-là ?). La question que je me pose est la suivante : qu'est-ce qui permet à l'élève de "converger vers" la situation a-didactique, qu'est-ce qui fait qu'il met en jeu un savoir mathématique en tentant de résoudre le problème posé par le maître ? quelle dévolution du problème est nécessaire, avant la résolution, pour que l'élève apprenne ? comment faire dévolution de la prise en charge par l'élève de son propre apprentissage (à un niveau général aussi bien qu'au niveau de chaque situation) ?

Une autre question est de savoir si, pour qu'il y ait apprentissage à partir d'une résolution de problème, il est nécessaire que la dévolution soit faite avant la résolution. Je pense pour ma part que *le processus de dévolution peut se poursuivre au-delà de l'action et même au delà de la situation a-didactique*. Je pense en effet qu'il y a, pour certains élèves qui, au cours de l'action, ont fonctionné de façon non scientifique, par exemple en utilisant des indices didactiques ou en s'en remettant à des camarades, une possibilité de "dévolution après coup" par un retour réflexif sur l'action, lors de l'institutionnalisation. Si cette possibilité n'existait pas, la situation serait effectivement désespérée pour certains élèves. La question est alors de savoir comment on peut donner à ces élèves une nouvelle occasion de donner du sens aux notions déjà institutionnalisées ou en cours d'institutionnalisation.

Ceci m'amène à considérer les liens entre dévolution et institutionnalisation. Les hypothèses dominantes actuellement sur l'apprentissage conduisent à demander aux enseignants de s'appuyer sur l'activité des élèves. Et on trouve d'ailleurs maintenant, dans les brochures

IREM ou dans les manuels, des quantités d'activités à proposer aux élèves. Le schéma est grossièrement celui-ci : on propose au départ aux élèves un problème qui met en jeu la notion visée ou qui montre son intérêt. Les élèves mettent au point des procédures plus ou moins adaptées. L'enseignant dégage celles qui sont performantes, le nouvel outil qui était visé, qui est institutionnalisé à ce moment là et qu'on exigera ensuite, notamment dans le contrôle qui suivra. Dans ce schéma, l'institutionnalisation vient après la résolution du problème d'introduction, c'est le cours du professeur.

Or, nous avons dit qu'on constate chez certains élèves une rupture entre la situation d'action et l'institutionnalisation qui est faite par le professeur. Cela laisse penser d'une part que la dévolution ne s'est peut-être pas passée comme on l'espérait, d'autre part que l'institutionnalisation n'est peut-être pas suffisamment reliée au problème réellement traité par les élèves. D'abord, nous avons vu que les élèves ne savent peut-être pas qu'il y a autre chose à apprendre que la résolution d'un problème particulier. Est-ce qu'un discours sur l'enjeu de ce qu'on leur demande peut les aider ? A quel moment le tenir ? Faut-il pointer quelque chose à ce niveau avant la résolution ? après ? quelles interventions ? Ce sont toutes ces questions qu'examinent les recherches sur le "méta", c'est-à-dire le discours non strictement mathématique mais sur les mathématiques que tient l'enseignant en classe (voir Robert et Robinet 1993). La réponse de la théorie des situations (et de la dialectique outil-objet aussi) est plutôt de construire une situation telle que les variables permettent une évolution des connaissances mises en jeu par les élèves : un premier choix doit permettre la dévolution, d'autres permettront de construire le sens des concepts visés. Mais l'institutionnalisation étant le processus par lequel le maître va donner un statut officiel aux connaissances mises en jeu par les élèves, n'est-ce pas déjà une première institutionnalisation que faire savoir aux élèves qu'il y aura quelque chose de général et réutilisable à apprendre de la résolution du problème particulier qu'il leur propose ?

Ces réflexions m'amènent à considérer aussi *l'institutionnalisation comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur de l'avancement du contrat didactique et non comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours*. L'institutionnalisation des connaissances commence dès le tout début de la dévolution puisqu'il faut déjà que le maître donne à l'élève, s'il ne l'a pas, le projet d'acquérir ces connaissances, d'où *l'imbrication des processus de dévolution et d'institutionnalisation qui sont ainsi, dans une certaine mesure, contemporains*. Evidemment, nous trouvons là un des paradoxes du contrat didactique que Brousseau a mis en évidence : le maître ne peut pas parler de la connaissance nouvelle[8] puisque c'est justement l'enjeu de l'apprentissage, cependant il peut dire qu'on va apprendre quelque chose de nouveau et éclairer les élèves sur les connaissances anciennes à mobiliser pour "accrocher" cette connaissance nouvelle. En fait le maître tend à l'institutionnalisation tout au long du processus mais il ne peut dévoiler entièrement son projet sous peine de le faire échouer:

[8] Par "connaissance nouvelle", nous entendons ici aussi un approfondissement ou un nouvel emploi d'une connaissance ancienne.

s'il veut que l'institutionnalisation puisse se faire pour les élèves dans de bonnes conditions avec du sens, il ne peut aller droit au but mais l'a toujours présent à l'esprit pour ménager dès le départ et tout au long du processus d'enseignement les conditions qui vont lui permettre de négocier le contrat didactique dans ce sens. Dévolution et institutionnalisation sont ainsi les deux processus complémentaires par lesquels le maître va essayer de contrôler l'acquisition par les élèves des notions mathématiques avec leur sens : la dévolution pour qu'ils s'engagent réellement dans la résolution des problèmes, l'institutionnalisation pour que les élèves sachent dans ce qu'ils ont mis en jeu ce qui était visé et à retenir.

De plus, *la marge de manœuvre est très étroite, particulièrement dans le cas d'élèves en difficulté où l'équilibre à adopter lors de l'institutionnalisation n'est pas facile à trouver* : si, à l'issue d'une phase de recherche, il n'y a pas d'institutionnalisation, les élèves ne retiennent que le contexte et une partie de l'action sans réflexion sur celle-ci, mais dès qu'il y a institutionnalisation, il y a risque de mise en place d'une règle qui va être utilisée sans référence au sens. On est alors devant la nécessité de déstabiliser ces règles aussitôt qu'elles s'installent, ce qui peut alors détruire toute possibilité de référence à la situation dans la construction de la notion qu'on visait dans cette situation.

Je pense donc que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation - décontextualisation, ce qui conduit à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :

- institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1984) utilise cette expression dans la description de la dialectique outil-objet.
- réinvestissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes,
- cours construit par le professeur, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées par l'exposé des raisons du savoir.

Ces étapes concernent aussi bien des concepts que des pratiques, méthodes et représentations qui leur sont attachées dans les situations rencontrées. De plus, elles ne correspondent pas entièrement à un ordre chronologique, le réinvestissement se plaçant tout au long, avec des degrés de décontextualisation différents : dès que les élèves ont rencontré une première situation sur la notion, ils peuvent réinvestir des pratiques en reconnaissant une analogie entre deux situations, jusqu'après le cours où ils pourront peut-être réinvestir le savoir en tant qu'objet mathématique.

5. Les contraintes de fonctionnement des enseignants. Des pôles contradictoires.

L'interprétation que nous avons donnée des difficultés des élèves, l'analyse que nous venons d'en faire en termes de dévolution et d'institutionnalisation nous conduisent à dégager des contraintes ressenties comme contradictoires par les enseignants, et qui sont particulièrement sensibles dans les classes faibles :

5.1. Quel équilibre entre la construction du sens et l'acquisition d'automatismes de base ?

Faut-il privilégier dans l'enseignement la construction par les élèves du sens des connaissances mathématiques ou l'acquisition de techniques et mécanismes de base ? Cette question est souvent vécue comme un dilemme par les enseignants des classes "faibles". Si tout le monde est convaincu de l'importance de la capitalisation de savoirs décontextualisés disponibles pour traiter des problèmes portant sur des contextes variés, les avis divergent sur la possibilité d'arriver à ce résultat pour tous les élèves et sur les moyens pour y arriver.

D'un côté, on n'est assuré que l'élève dispose d'un concept mathématique avec suffisamment de sens que s'il est capable de résoudre sans aide des problèmes assez complexes où ce concept est à l'œuvre puisque le fait de reconnaître qu'on peut utiliser un concept dans une situation fait partie du sens de ce concept. Pour arriver à ce résultat, il paraît nécessaire que l'élève ait eu au cours de l'apprentissage l'occasion de fonctionner de façon suffisamment "a-didactique" sur ce type de problèmes. D'ailleurs, l'hypothèse selon laquelle l'action de l'élève est importante pour l'acquisition des onnaissances, est actuellement valorisée dans la noosphère comme le montrent les derniers programmes de collège où une large place est faite aux "activités" servant à introduire les notions mathématiques.

Cependant, comme nous avons pu le voir dans le cas de Didier, la résolution de problèmes complexes ne peut se concevoir qu'en s'appuyant sur des connaissances anciennes et des techniques assez solides, même si c'est pour les remettre en question. La mise en place de jeux de cadres demande aussi un minimum de connaissances dans chacun des cadres en jeu.

De plus, les activités où une grande place est laissée à l'initiative des élèves sont grandes consommatrices de temps. Dans ces conditions, les enseignants estiment à un coût si élevé l'acquisition par tous les élèves des notions mathématiques avec suffisamment de sens, en même temps que l'acquisition des mécanismes de base, qu'ils ne croient pas pouvoir poursuivre les deux objectifs dans toutes les classes et se sentent contraints de faire un choix. Ils ne peuvent alors que donner la priorité à l'enseignement des mécanismes de base.

Cependant, le sens et le fonctionnement automatique des connaissances ne s'opposent pas nécessairement : il est même indispensable d'avoir un fonctionnement automatique sur certaines choses pour libérer de la place en mémoire de travail et travailler sur des objets nouveaux. Certaines connaissances sont appelées à avoir un jour un fonctionnement automatique chez les sujets, quand ils arrivent à un niveau suffisant d'expertise. Il en est ainsi notamment des algorithmes, du calcul algébrique... Mais avoir un fonctionnement automatique ne veut pas dire, pour l'expert, ne pas avoir de moyen de contrôle alors que pour l'élève en difficulté, on constate souvent un fonctionnement automatique sans moyen de contrôle.

Une question qui me paraît fondamentale quand on se préoccupe de l'enseignement aux élèves en difficulté est donc celle de l'équilibre entre les pôles apparemment contradictoires du sens et des automatismes. Et comme les questions de temps sont particulièrement importantes dans ce type de classe, il faut se demander si l'on peut travailler la technique en même temps que le sens et comment ? Est-ce que la maîtrise de la technique ne contribue pas aussi au sens ? Par exemple, si on pense au calcul algébrique, il est clair qu'il est nécessaire que les élèves traitent des situations de modélisation pour être capables d'utiliser les techniques de résolution d'équation à bon escient dans la résolution des problèmes mais le travail sur les écritures elles-mêmes n'en est pas moins nécessaire et contribue lui aussi à donner du sens à la résolution des équations, en fournissant des moyens de contrôle d'une autre nature (syntaxiques).

5.2. Comment partir des productions des élèves et leur faire acquérir un savoir mathématique décontextualisé ?

Nous avons déjà signalé l'exiguïté de la marge de manœuvre concernant l'institutionnalisation : d'une part, les élèves ne peuvent pas dégager seuls ce que la démarche qu'ils ont utilisée dans la résolution d'un problème a de général et de réutilisable, d'autre part le risque de dérapage formel est grand dès qu'il y a décontextualisation. Si l'on veut partir des activités des élèves dans des phases de recherche, comment articuler le cours à ce qu'ont fait les élèves ? A quel moment apporter de l'information, sous quelle forme ? Comment garder la maîtrise du déroulement de l'enseignement sans provoquer de rupture avec ce qu'ont produit les élèves ? Comment gérer le bilan et l'institutionnalisation si les élèves ont produit des choses très diverses dans la phase de recherche ?

Il arrive que l'enseignant se méprenne sur la signification réelle des connaissances en jeu pour les élèves et saute des étapes importantes pour que cette décontextualisation se fasse sans perte de sens excessive. Ce phénomène est à rapprocher de l'effet Jourdain identifié par G. Brousseau. En voici un exemple pris dans une classe de 6ème où les élèves avaient travaillé sur les fractions à partir d'aires de rectangles. J'avais posé la question suivante à des élèves avec qui je travaillais en soutien hors de la classe : "Voici un rectangle. Peux-tu fabriquer des quarts de forme différentes ?" Les trois élèves, interrogés individuellement, ont tous produit les dessins des figures 1 et 2 ainsi que celui de la figure 3 pour l'un d'entre eux. Les morceaux de la figure 1, n'étant pas superposables, la question de la validation se posait mais les élèves concernés ne pouvaient pas fournir d'argument.

Je leur ai donc demandé, en laissant apparemment tomber le problème des quarts, s'ils pouvaient fabriquer des huitièmes de formes différentes. J'ai alors eu, entre autres, des productions des types des figures 4 et 5 :

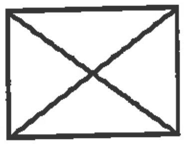


Fig.1

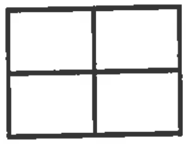


Fig.2

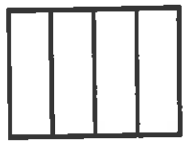


Fig.3

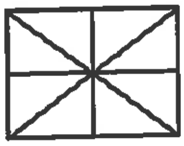


Fig.4

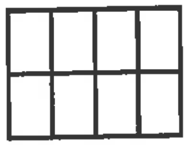


Fig.5

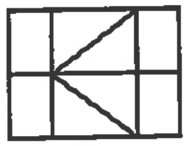


Fig.6

Les élèves pouvaient dire dans chaque cas que $2x\,\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ et conclure à l'égalité des différents quarts de la figure 1. Mais je leur ai alors demandé ce qu'on trouvait en accolant un huitième du premier type et un huitième du deuxième. Les élèves ne savaient plus, pensaient que ça ne devait pas faire $\frac{1}{4}$ mais que pour le savoir, il fallait paver. Ils n'ont pu conclure qu'après avoir réalisé des pavages du type de la figure 6.

Pour eux la détermination d'une fraction était toujours liée à la possibilité de paver alors que pendant ce temps en classe, on était censé travailler au niveau des nombres. Cela semblait raisonnable puisque des figures de formes différentes étaient codées par une même fraction et que les élèves de cette classe avaient aussi travaillé sur les fractions dans le contexte des longueurs. Mais, dans les deux contextes, il s'agissait d'une problématique de reports. Remarquons que la mesure des aires est en jeu aussi dans cet exemple et que l'existence d'une mesure indépendamment de la possibilité de paver n'est pas une chose facile à concevoir pour des élèves de 6ème.

La trop grande rapidité de la décontextualisation peut s'expliquer par la difficulté pour les enseignants à connaître l'état des connaissances réelles des élèves, et aussi par la nécessité où ils se trouvent de faire avancer le temps didactique.

En reprenant les distinctions de Claire Margolinas (1993), nous pouvons analyser ce fait en disant que les enseignants, responsables de la phase de conclusion, s'ils n'ont pas les moyens de faire une phase de validation (c'est-à-dire de faire produire des arguments par les élèves vérifiables ou falsifiables par la situation), par exemple si la situation ne le permet pas, vont conclure par une phase d'évaluation (conclure sous leur propre autorité) et les élèves vont passer directement de l'action à l'évaluation. De plus, il se peut qu'une phase de validation fonctionne de fait comme une phase d'évaluation pour certains élèves.

La conclusion est pourtant nécessaire : les élèves ont besoin de disposer d'une synthèse claire du travail réalisé et de notes réutilisables[9]. Cependant, le lien entre le travail effectivement

[9] voir sur ce point l'article de J.C. Duperret dans Repères-IREM n°13.

réalisé et la synthèse du professeur sera peut-être précaire pour certains élèves. Il nous paraît donc nécessaire de distinguer différents niveaux dans la décontextualisation pour les élèves :
- si le contexte est matériel, pouvoir prévoir ou conclure sans recourir au matériel, en imaginant seulement la manipulation qui est intériorisée,
- utiliser des arguments qui mettent en relation des connaissances qui ne se réfèrent plus forcément au contexte,
- utiliser la connaissance dans un autre contexte.
Cette dernière étape serait aussi à hiérarchiser suivant que la problématique de réinvestissement est proche des problématiques déjà rencontrées ou qu'elle est très nouvelle : par exemple, pour les fractions, la problématique de la mesure des aires planes est relativement proche de celle de la mesure des longueurs de segments même si le passage de l'une à l'autre soulève des problèmes nouveaux et importants (non superposabilité des parties de même mesure) tandis que la problématique de la mesure est différente de celle des codages d'applications linéaires.

5.3. Quels rapports entre réussite et apprentissage ? Comment concilier réussite à court terme et réussite à long terme ?

L'analyse des entretiens que j'ai menés avec des instituteurs et des professeurs de collège a mis en évidence aussi une espèce de contradiction entre d'une part la volonté que les élèves apprennent et assimilent les contenus d'enseignement avec du sens de façon à pouvoir les réinvestir sur le long terme et d'autre part la nécessité d'un minimum de réussite sur le court terme. La pression du côté de la réussite à court terme vient aussi bien des élèves et des parents que des collègues et semble plus forte au collège qu'à l'école élémentaire. Un minimum de réussite des élèves est nécessaire au professeur pour le fonctionnement de sa classe. C'est aussi le principal moyen de valorisation du professeur lui-même. La réussite du professeur peut s'évaluer selon deux critères :
- d'une part, le succès des élèves aux examens ou aux contrôles, notamment s'ils sont communs à plusieurs classes du même niveau (évaluation officielle). C'est d'ailleurs aussi ce qu'attendent les élèves et les parents d'élèves.
- d'autre part, la bonne marche de la classe, l'ambiance propice au travail, avec des élèves intéressés et qui prennent du plaisir à faire des mathématiques. Un indice en est la participation des élèves.

Selon le premier critère, le professeur doit aider le plus possible les élèves à acquérir les contenus qui seront l'objet de l'évaluation importante, celle qui a des conséquences institutionnelles. Pour cela, il faut une gradation bien adaptée des difficultés, des explications claires, voire des explications "modèle" que les élèves pourront reproduire (phrases de résumé écrites dans le cahier, exercices type intégrés dans le cours). Il faut surtout éviter que les élèves fassent des erreurs dans ces évaluations officielles et pour cela il est nécessaire d'abord de corriger toutes les erreurs qui se produisent en cours d'apprentissage (une erreur non corrigée a toutes les chances de se reproduire), et même, autant que possible, de prévenir les erreurs en mettant les élèves en garde, en leur signalant des endroits dangereux.

Pour le deuxième critère, le professeur doit parvenir à motiver les élèves, capter et conserver leur attention, les faire participer. Il n'est plus envisageable de dispenser des cours magistraux, en tous cas au collège. Il faut que les élèves aient une part assez grande d'activité visible. Pour les professeurs, les bons élèves sont ceux qui contribuent aux deux types de réussite. Le professeur se sent responsable des deux types de réussite mais il assure en priorité le second dans l'espoir d'avoir le premier. Mais c'est aussi en assurant le premier, donner aux élèves l'impression que ce qu'il fait est utile pour l'évaluation qu'il va obtenir le second.

5.4. Gestion de la complexité dans les problèmes de recherche : comment trouver des problèmes suffisamment complexes pour que les élèves engagent les notions avec du sens, et cependant abordables ?

Nous avons vu que les élèves en difficulté utilisent difficilement des situations qu'ils ont rencontrées, comme situations de référence pour traiter des questions nouvelles. Une question didactique est l'élaboration de situations qui peuvent jouer ce rôle de référence tout en permettant une *gestion de la complexité des problèmes proposés aux élèves* suivant les différents moments de l'apprentissage.

L'intérêt des *problèmes de référence* est de permettre d'évoquer un contenu à partir d'un contexte avec le sens qu'il avait dans ce contexte au moment où on veut l'utiliser dans un autre. Mais tous les problèmes ne peuvent pas servir de référence. D'une part, un problème de référence doit être assez caractéristique du savoir qu'il met en jeu : celui-ci doit y prendre une signification qu'on retrouve dans beaucoup d'autres problèmes et en même temps donner plusieurs moyens d'accès, par exemple permettre une traduction dans plusieurs cadres. Il doit pour cela avoir une complexité suffisante. D'autre part, et à cause même de cette complexité, il doit demander aux élèves un travail et un investissement significatifs. Pour qu'il puisse jouer son rôle, un tel problème doit donc plaire aux élèves et être facilement mémorisable. Les problèmes de référence ont une fonction bien différente de simples exemples qui sont là pour aider à comprendre mais ne sont pas destinés à être retenus. Ils vont au contraire faire partie intégrante du cours, et même en constituer l'essentiel pendant un certain temps, jusqu'à ce qu'une décontextualisation suffisante soit possible.

Pour des classes composées majoritairement d'élèves en difficulté, la recherche de tels problèmes va être particulièrement importante et délicate. Ils doivent être assez complexes pour que les notions en jeu y prennent suffisamment de sens mais aussi doivent pouvoir être abordés par les élèves sans les décourager. De toute façon, s'ils sont trop complexes, le professeur sera amené à faire des négociations à la baisse et à mener lui-même l'essentiel de la recherche. Cela suppose aussi une gestion de la complexité à étudier soigneusement, d'autant plus que les moyens utilisés habituellement pour cela comme le travail en groupes sont souvent d'un recours plus malaisé dans ce type de classe.

5.5. Gestion de l'évaluation : comment maintenir les exigences sans décourager ?

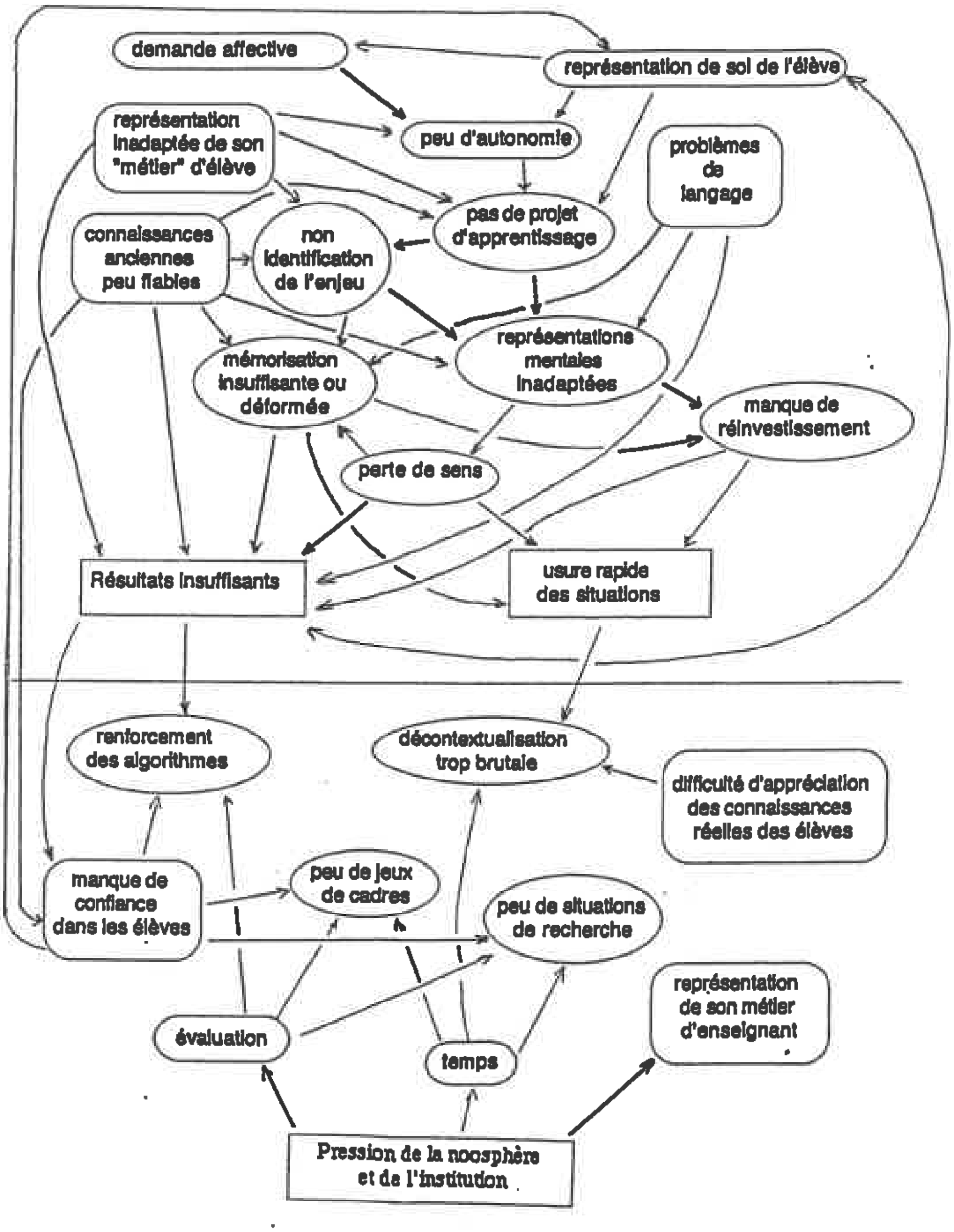
La gestion d'une classe faible pose aussi des problèmes au niveau de l'évaluation. Doit-on faire une évaluation relative à la classe permettant de situer les élèves les uns par rapport aux autres et d'évaluer les progrès en fonction du niveau de départ ou doit-on maintenir les mêmes exigences que dans une classe ordinaire ? Nous avons vu que l'enseignant a besoin d'un minimum de réussite pour gérer convenablement sa classe. Il sera alors tenté de faire le premier choix. Mais alors comment les élèves et les parents accepteront-ils l'orientation de fin d'année si les notes de l'année laissaient espérer autre chose ? S'il fait le deuxième choix, les élèves risquent de se décourager et il a lui même du mal à évaluer l'effet de son enseignement. Doit-on alors pratiquer plusieurs types d'évaluation en parallèle, l'une interne à la classe pour réguler l'enseignement et l'autre, externe (contrôles communs avec d'autres classes par exemple, avec barème commun) pour décider de l'orientation ?

Une autre question se pose aussi : que prendre en compte dans l'évaluation ? Si les élèves travaillent pour avoir de bonnes notes, le contenu des contrôles va déterminer d'autant plus ce qui leur paraît important. Si les contrôles ne comportent que l'application d'algorithmes, le risque est que les élèves se désinvestissent un peu plus des problèmes de recherche et attendent qu'on leur livre la technique à appliquer. S'il y a une véritable partie de recherche, le risque est une mauvaise réussite. Comment noter la recherche d'un problème un peu ouvert ? Peut-on noter séparément l'investissement de l'élève et son résultat ? Ne risque-t-on pas alors de l'encourager à remplir seulement son métier d'élève sans réellement s'investir au niveau du contenu ?

Face à ces systèmes de contraintes opposées et face aux contraintes de temps souvent déterminantes, les enseignants font parfois des choix différents, privilégiant la recherche et l'expression des élèves ou l'avancée du temps didactique et l'entraînement aux techniques. Les systèmes de contrainte que nous avons dégagés ne sont pas indépendants et on peut prévoir que les choix des enseignants ne vont pas se répartir de manière aléatoire. Par exemple, on peut attendre que le souci de faire acquérir des automatismes soit lié à la présentation du savoir décontextualisé et au désir de la réussite à court terme. De plus, il semble que les différences de choix sont accentués dans le cas de classes faibles parce que les enseignants renforcent dans ce cas ce qui leur paraît essentiel à cause de la pression plus forte du temps.

6. Imbrication des difficultés des élèves et des contraintes des enseignants. Enclenchement de cercles vicieux. Paradoxes.

Les difficultés des élèves et les contraintes des enseignants s'imbriquent et produisent des cercles vicieux et des paradoxes que nous allons décrire dans les paragraphes suivants. J'ai tenté de rendre compte de cette imbrication dans le diagramme ci-dessous :



6.1. Simplification des situations et enclenchement d'un cercle vicieux

La difficulté de réinvestissement des élèves est particulièrement grande dans le cas de situations complexes où il y a à identifier un problème connu à l'intérieur d'une situation où interviennent d'autres éléments. Cela renforce l'idée qu'on facilite l'apprentissage en simplifiant le problème, en mettant des paliers intermédiaires. Cela entraîne aussi, chez les enseignants comme chez les élèves, le désir de recourir le plus possible à l'apprentissage de procédures de traitement stéréotypées, plus sécurisantes pour les uns comme pour les autres. En effet, dès qu'ils sortent de la routine, les élèves en difficulté quêtent l'approbation du maître à chaque pas, ils réclament donc des algorithmes. Par ailleurs, du côté des enseignants, on fait moins confiance aux élèves, on a tendance à les aider davantage et on pense, par le renforcement des algorithmes, leur donner le moyen de réussir au moins quelque chose.

Il est vrai que les algorithmes eux-mêmes sont souvent insuffisamment mémorisés par ces élèves. Ceci amène une charge en mémoire insupportable lors de la résolution de problèmes, leur fait perdre le fil de la résolution et encourage donc l'enseignant à donner plus de place encore à l'apprentissage des leçons et des algorithmes. De plus, la pression du temps jointe au manque d'autonomie des élèves donne aux enseignants une double raison d'hésiter à laisser de l'initiative aux élèves dans des classes faibles.

En outre, avec les élèves en difficulté, les professeurs ont tendance à se concentrer sur le cadre numérique en négligeant des activités géométriques ou graphiques qui pourraient leur donner d'autres références. Le fonctionnement d'un jeu de cadres nécessite pour les élèves d'une part un minimum de connaissances solides dans chacun des cadres de cette mise en jeu —même si ce minimum peut être très faible dans l'un des deux, d'autre part un apprentissage : la plupart des élèves ne le font pas spontanément, parce qu'un changement de point de vue est toujours difficile. A cause de ces difficultés, les enseignants pensent généralement que, pour les élèves faibles, il faut faire le moins de mélanges possible. Ils donnent rarement à ces élèves des problèmes où plusieurs cadres ou plusieurs notions sont en jeu. Cela contribue à accroître le déficit de connaissances et à diminuer encore les sources de déséquilibre et donc les occasions d'apprentissage et de mises en relation.

Les difficultés des élèves contribuent ainsi à l'enclenchement d'un cercle vicieux renforcé ensuite par les choix des enseignants : on tend tellement de perches qu'on obtient une réussite qui n'est l'indice d'aucun apprentissage. On assiste alors à un processus boule de neige : les élèves ne se représentent pas les actions, ne perçoivent pas les enjeux → les élèves ne mémorisent pas → le professeur se concentre sur l'apprentissage des résultats du cours et de savoir-faire algorithmisés → les situations proposées aux élèves se résument à la répétition de problèmes d'exécution, du type de ce qu'il demandera lors du contrôle → les élèves ne se représentent pas, ne mettent pas en relation → ... et l'apprentissage se résume au renforcement d'algorithmes dont les conditions d'utilisation ne sont jamais maîtrisées.

6.2. Activités sans conclusion.

On peut avoir un autre phénomène : l'enseignant est soucieux de faire chercher les élèves pour donner du sens aux notions, faire participer les élèves et les motiver. Mais ces activités prennent du temps et la phase de conclusion disparaît ou est très réduite, ce qui fait qu'on ne décolle pas de ce que les élèves savent faire tout seuls ou que le cours s'il a lieu après est déconnecté de la partie recherche. On retrouve là la pression du temps et aussi des difficultés de gestion de la classe au cours d'un bilan collectif : les élèves doivent pouvoir s'écouter les uns les autres tout en engageant personnellement leurs connaissances et en défendant les procédures qu'ils ont mises en œuvre dans l'activité. Il y a ainsi dans certaines classes une pression à limiter les phases de conclusion ou à les remplacer par une conclusion du maître lui-même.

6.3. Gestion des phases de recherche.

Certains élèves, nous l'avons déjà évoqué plusieurs fois, vont pousser l'enseignant à une négociation à la baisse du contrat didactique. Ils vont aussi essayer de trouver des réponses en évitant d'engager leur responsabilité dans la résolution du problème en essayant de fonctionner au seul niveau du contrat. Leur manque d'autonomie et leur besoin d'attirer l'attention du professeur vont augmenter les occasions pour le professeur de donner, éventuellement malgré lui et inconsciemment, ces indices qu'ils recherchent pour réussir au moindre coût cognitif. De plus, les problèmes de discipline et les difficultés de communication entre élèves vont parfois rendre difficile le travail en groupe. Cette difficulté au niveau de l'organisation de la classe va aussi contribuer à pousser l'enseignant à simplifier les problèmes : en collaborant, les élèves pourraient aborder des problèmes plus complexes que ceux qu'ils peuvent aborder seuls. On a ainsi un autre cercle vicieux au niveau de la gestion de la classe : comme les élèves manquent d'autonomie, on va adopter une gestion de la classe qui réduira les occasions d'apprendre l'autonomie.

6.4. Un paradoxe : on est amené à exiger des élèves faibles des arguments et des explications qu'on ne demande pas aux bons élèves.

Ce paradoxe est lié au fait que le professeur fait moins confiance aux élèves dans une classe faible : il arrive ainsi que le professeur reconnaisse ce qu'il attendait dans un début d'explication d'un bon élève, il complète alors souvent lui-même pour gagner du temps, pensant que l'élève aurait pu le faire aussi ; au contraire, quand il n'est pas sûr que l'élève pourrait terminer l'explication lui-même, il va demander plus de détails, de nouvelles raisons ; c'est alors aussi pour lui un moyen d'évaluation, de vérifier que l'élève a bien compris. Par exemple, dans une classe faible de seconde, pour justifier un minimum d'une fonction affine par morceaux, un élève affirme qu'il s'agit d'une parabole parce que c'est symétrique. Le professeur qui a travaillé les paraboles quelque temps avant demande aux élèves d'expliquer pourquoi ça ne peut pas être une parabole : il attend une justification liée à l'équation, du premier degré dans un cas, du second dans l'autre. Il s'avère que les élèves ne sont pas capables de produire cette justification, mais il n'est pas sûr que beaucoup d'élèves de seconde seraient capables de la produire. Dans une bonne classe, on n'aurait sans doute pas eu l'occasion de poser ce problème, soit parce que l'occasion ne s'en serait pas présentée (une telle occasion est le plus souvent provoquée par l'erreur d'un élève), soit parce qu'un élève aurait tout de suite produit la bonne réponse, laissant penser au professeur que c'était clair pour l'ensemble de la classe. Ce phénomène a pour conséquence que, dans une classe faible, la structure d'une séance d'enseignement est en général moins linéaire que dans une bonne classe à cause des digressions nombreuses et diverses (du type de celle que nous venons de signaler mais aussi par le règlement de problèmes de discipline). Il est donc plus difficile de repérer l'objectif d'enseignement et ce qu'il y a à retenir de la séquence.

6.5. La perte de sens par atomisation de la tâche.

De plus, quand l'élève ne trouve pas ou ne fournit pas la réponse attendue, l'enseignant est conduit à poser de nouvelles questions et à décomposer la tâche, ce qui amène à expliciter des étapes intermédiaires qui restent le plus souvent implicites quand les élèves trouvent rapidement. Cette introduction d'étapes intermédiaires contribue à faire perdre de vue le problème initial à des élèves qui ont déjà beaucoup de difficultés à garder le fil de ce qu'ils sont en train de faire. On se trouve un peu dans la même situation que pour la lecture : si on lit un texte en décomposant chaque syllabe, on a du mal à en comprendre le sens, de même, il est difficile de saisir le sens et l'intérêt d'un problème quand on est amené à trop décomposer la tâche. J'ai été très souvent confrontée à ce problème avec l'élève que j'ai observé en travail individuel (voir en annexe, à titre d'illustration, un extrait d'un entretien avec Didier). On voit le même phénomène dans le problème des œufs que relate E. Hébert dans le cahier DIDIREM n° 20 (page 74) au moment du choix de l'inconnue.

7. Des perspectives de recherche.

Face à ces contraintes contradictoires, quelles sont les marges de manœuvre de l'enseignant ? Comment l'aider à faire des choix ?

7.1. Apprendre à gérer la complexité

Nous avons dénoncé le cercle vicieux qui amène à simplifier les problèmes proposés aux élèves faibles jusqu'à les vider de leur sens. Cependant, il n'est pas raisonnable non plus de leur proposer des problèmes qu'ils ne peuvent pas démarrer. On doit prévoir un apprentissage de la résolution de problèmes complexes qui demande notamment la structuration des données, le découpage de problèmes plus simples. Cette question se pose aussi bien pour les situations de réinvestissement que pour les situations d'introduction d'une notion nouvelle.

Diverses stratégies ont été largement expérimentées auprès d'élèves de l'école primaire et du collège pour cet apprentissage, notamment :

- proposition d'une situation qui comporte un grand nombre de données de différentes natures, sans question et demande aux élèves de formuler eux-mêmes des questions auxquelles ils pourraient répondre à partir des données, ou recherche de données nécessaires, éventuellement manquantes, pour répondre à une question qu'ils ont envie de se poser.
- proposition d'une situation complexe sur laquelle on laisse les élèves chercher sans leur fournir la solution, puis proposition d'un problème plus simple qui aide à la solution du

problème précédent. D. Butlen et M. Pézard (1992) ont obtenu des résultats encourageants par cette méthode avec des élèves de CM2 faibles pour des problèmes de produits cartésiens (menus avec des choix multiples).

Cependant, la gestion de la complexité est un problème fondamental en didactique qui est loin d'être résolu. La détermination des variables didactiques et des critères de choix pour les valeurs à leur donner est un point central de la théorie des situations didactiques.

7.2. Conversion de registres et changements de cadres.

Les problèmes complexes peuvent nécessiter des changements de cadres qui sont un des ressorts possibles pour agir sur les conceptions des élèves, les aider à franchir des difficultés résistantes. La définition des jeux de cadres possibles à partir d'un problème nécessite une analyse fine du problème en liaison avec les conceptions actuelles des élèves : suivant le problème et suivant le niveau des élèves, ce ne seront pas toujours les mêmes cadres (au sens mathématique du terme) qu'on aura envie de distinguer. La notion de fenêtre conceptuelle que définit maintenant R. Douady (1992) peut aider à cette analyse.

Une manière de réconcilier le sens et la technique est de travailler les conversions entre registres pour une même notion (Duval, 1988). La notion de registre se distingue de celle de cadre en ceci qu'elle porte sur le signifiant, les représentations sémiotiques liées à un concept, alors que celle de cadre met en jeu le signifié : quand on traduit un problème dans le cadre algébrique ou dans le cadre géométrique, on va utiliser des objets de ce cadre avec leurs propriétés, avec les relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets du cadre : on utilisera des modes de traitement différents mais aussi des objets différents. Par exemple quand on représente graphiquement des équations par des droites, on pourra utiliser des propriétés géométriques comme le parallélisme, les points d'intersection... qui peuvent se traduire dans le cadre algébrique. En revanche quand on passe des écritures fractionnaires aux écritures décimales, on a un changement (ou conversion) de registre à l'intérieur du cadre numérique. Les conversions de registre, par exemple les changements d'écriture des nombres sont des activités qui, tout en développant les techniques contribuent au sens.

7.3. Les occasions de construire le sens.

Un des temps forts dans le processus de dépersonnalisation et décontextualisation des savoirs construits en classe se situe au cours des bilans qui suivent une phase de recherche des élèves. Dans ces bilans, à côté des moments d'institutionnalisation, il y a des moments où le maître cherche à homogénéiser la classe et où s'effectue une première dépersonnalisation des procédures mises au point par les élèves dans la phase de recherche. Mais que se passe-t-il pour les élèves qui n'ont pas produit la connaissance attendue pendant la phase d'action ? ou pour ceux qui ont agi, voire réussi la tâche donnée, mais sans création de représentations mentales ? Comment leur donner l'occasion de le faire ?

Cette occasion peut être donnée en demandant aux élèves de dire ce qui s'est passé dans une situation d'action, peu après, mais un autre jour, ce qui distingue ce rappel du bilan. En essayant de dire collectivement ce qui s'est passé, quel problème a été traité, les élèves sont amenés à repenser le problème, les procédures de traitement envisagées dans la classe. Les élèves qui ne se sont pas construit de représentation mentale lors de la phase d'action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. Il se peut que pour certains élèves l'action soit à nouveau nécessaire mais elle est alors placée dans une nouvelle perspective : il faut agir non seulement pour trouver une solution mais aussi pour pouvoir en parler. D'une part il se produit alors une dépersonnalisation des solutions dans la mesure où elles sont reprises et exposées par d'autres élèves que ceux qui les ont trouvées, d'autre part il se produit une pré-décontextualisation : en reprenant à froid ce qui s'est passé, on élague les détails pour identifier ce qui est important. A cette occasion, le sens caché, le rôle pour l'apprentissage de l'un ou l'autre des problèmes posés peut se révéler à certains élèves. En même temps, par le retour réflexif sur l'action que ces situations supposent, elles favorisent la construction de représentations mentales par les élèves.

Ce premier type de phase de rappel remplit surtout les fonctions de dévolution après-coup, donc d'homogénéisation de la classe et de dépersonnalisation des solutions avec institutionnalisation locale. Il doit permettre d'adapter l'institutionnalisation locale aux conceptions actuelles des élèves.

7.4. Mettre en relation, articuler plusieurs situations

Il est important non seulement que les élèves construisent du sens pour les notions mathématiques à travers la résolution de probèmes bien choisis et qu'ils aient l'occasion de reconnaître ce sens et pas seulement de résoudre le problème, mais il faut encore qu'ils aient l'occasion de mettre en relation des sens différents d'un même concept et aussi des concepts différents qui interviennent dans le même champ. Les moments de rappel peuvent aussi avoir la fonction de relier des sens différents d'une même notion vue dans des contextes différents ou d'articuler différents concepts. Ce deuxième type de rappel porte sur une suite de problèmes sur un thème, par exemple la symétrie orthogonale. Il s'agit pour les élèves de se rappeler plusieurs situations déjà traitées dans des séances précédentes sur un même thème, avec un peu de recul donc : qu'a-t-on appris depuis qu'on travaille sur la symétrie orthogonale ? Quels problèmes a-t-on rencontrés ? Chacun des problèmes traités est alors intégré dans un processus, il est intériorisé avec un sens nouveau. Au cours d'une telle situation, les formulations des élèves évoluent, on peut avoir des retours sur des débats de validation qui ont déjà eu lieu ou rencontrer la nécessité de nouveaux. On n'est pas à proprement parler dans une situation de formulation où il s'agit de produire un nouveau langage, ni dans une situation de validation, mais on retravaille les formulations et les arguments déjà produits.

Ce second type de rappel a surtout une fonction de décontextualisation et d'ancrage des savoirs nouveaux dans les savoirs anciens avec l'institution de diverses relations.

Ces deux types de phases de rappel ont un rôle essentiel dans l'articulation du cours et des activités des élèves. Elles contribuent à l'institutionnalisation des notions et jouent un rôle essentiel dans la constitution de ce que G. Brousseau appelle "la mémoire de la classe". Mais n'introduit-on pas une nouvelle contradiction dans la gestion du temps : ces situations de rappel qui pourraient faire gagner du temps au niveau du sens (sur le long terme) ne risquent-elles pas de trop en faire perdre sur le court terme ?

7.5. Le rôle du maître dans les phases de bilan et de rappel.

Dans les phases de rappel dont nous venons de parler, le rôle du maître est essentiel dans la gestion de la parole des uns et des autres et du temps. Le choix de donner la parole à un élève plutôt qu'à un autre donne à la situation une signification toute différente : s'il veut que la fonction d'homogénéisation et de dépersonnalisation soit remplie, il va donner la parole aux élèves qui n'ont pas trouvé de solution ou qui n'ont pas abouti pour vérifier qu'ils suivent et reprennent à leur compte les méthodes utilisées, s'il veut avancer dans la décontextualisation et la formulation, il va davantage donner la parole aux "leaders", quitte à faire reprendre les nouvelles formulations du problème par l'ensemble de la classe dans le courant de la séance ou ultérieurement. On voit ainsi une évolution par rapport à la phase de bilan où ce sont plutôt les "leaders" qui exposent les méthodes de résolution qu'ils ont trouvées, les "suiveurs" se contentant d'écouter ou d'intervenir sur des points de détail qui sont dans le domaine de l'ancien. Les marges de manœuvre du maître se situent aussi dans le choix des questions, dans ce qu'il reprend ou non des interventions des élèves, dans ses commentaires. Il peut agir sur ces marges pour ancrer "le nouveau" dans les connaissances anciennes et dans ce que les élèves ont réellement fait ou faire avancer la connaissance en s'écartant un peu du problème réellement traité, en proposant un début de généralisation ou de réinvestissement dans un contexte légèrement différent.

Le rôle du maître est essentiel dans le processus d'institutionnalisation, quel que soit le style d'enseignement. Il doit notamment choisir ce qui est à retenir dans chaque séance et décider en même temps quel "ancien" remobiliser, que reprendre dans les activités des élèves, jusqu'où aller dans la décontextualisation. Ces décisions vont dépendre de ce que les élèves ont réellement fait et de l'évaluation qu'en fait le professeur : est-ce que ce qu'il considère comme ancien est réellement acquis par suffisamment d'élèves, est-ce que l'appropriation des méthodes de résolution est suffisamment généralisée dans la classe... Il s'agit là d'une évaluation globale, intuitive des élèves, qui a des liens avec l'évaluation officielle réalisée par ailleurs mais qui ne s'y réduit pas (cf Perrenoud 1984). Cette lecture par le professeur du travail des élèves va faire intervenir les représentations qu'il a sur le savoir visé ainsi que sur la manière d'apprendre, sur son rôle dans l'apprentissage des élèves. De leur côté, les élèves sont inégalement prêts à suivre le maître dans une décontextualisation de ce qui a été vraiment traité. Il revient encore au maître de laisser ou non la possibilité de refaire ce chemin à d'autres moments pour ceux qui n'étaient pas encore prêts.

7.6. Quel rôle peut jouer le discours "métamathématique" de l'enseignant ?

Nous avons eu l'occasion d'aborder plusieurs aspects du rôle du maître : dans le choix des situations, dans la gestion des interventions des élèves et de ses propres interventions sur le contenu. Il faut encore considérer les interventions de l'enseignant sur les mathématiques et les contenus enseignés. Celles-ci contribuent à donner des repères aux élèves et à mettre en relation différents contenus, différentes situations, à mettre en relief l'intérêt d'une méthode ou d'une autre. Des recherches portent actuellement sur les caractéristiques de ce discours non strictement mathématique mais concernant les mathématiques, et sur les variations de ce discours liées aux enseignants, aux contenus, ou au niveau supposé des élèves (voir par exemple Josse et Robert 1993).

Conclusion

Si on les envisage dans l'optique d'une application à l'enseignement, les perspectives que je viens de développer peuvent sembler aggraver certains problèmes, notamment au niveau de la gestion du temps : si on prévoit plus d'étapes dans la décontextualisation, si on demande aux élèves de raconter ce qu'ils ont fait dans les séances précédentes, on va passer beaucoup de temps et accroître la pression à ce niveau. Il ne sera sûrement pas possible de travailler de cette façon sur tous les contenus du programme.

Pour interpréter ce qui est dit ici, il faut se garder de prendre ces perspectives comme des suggestions modèles pour l'enseignement, mais les considérer comme une recherche d'outils d'analyse. Par exemple, à propos des phases de rappel, on identifie différents types de fonctionnement du savoir suivant les élèves et ce qui peut s'y jouer. C'est l'analyse du fonctionnement de la classe et des difficultés des élèves qui nous fait penser qu'il est important pour l'enseignement de donner à certains élèves une nouvelle occasion de construire le sens des notions mises en jeu dans des situations d'action. Mais cela ne veut pas dire que la mise en place systématique de telles phases soit possible ni même efficace dans l'enseignement. Par exemple, si les élèves n'arrivent pas, au cours du bilan ou du rappel, à faire émerger le sens mathématique de la situation d'action, l'enseignant devra le faire pour eux : il faut que les élèves puissent disposer d'une conclusion claire à laquelle ils pourront se référer. Il en est de même pour la mise en relation de situations différentes mettant en jeu différents aspects d'un même concept. Cependant, on peut penser que le fait de demander aux élèves une réflexion a posteriori sur les problèmes résolus, même dans le cas où ils n'arrivent pas à la mener à terme, leur indique que ce travail est important, à leur charge et qu'elle fait partie de l'activité du cours de mathématiques. On peut alors peut-être espérer qu'ils prendront progressivement en charge ce travail de réflexion et par là aussi peut-être leur attitude pendant la résolution de problèmes. Cela n'a pas la même signification

C'est sur les rapports entre recherche et enseignement que je voudrais donc terminer cet article. La didactique dit des choses sur l'enseignement et doit être utile à l'enseignement. L'objet de la didactique est de développer des outils d'analyse qui permettront de mieux décrire, de mieux comprendre, de prévoir ou de reproduire des phénomènes didactiques et elle pourra par là même à terme contribuer à améliorer l'enseignement. Cependant, il faut se garder d'une diffusion trop rapide des résultats de la recherche dans l'enseignement : par nature, la recherche met en relief certains phénomènes qui sont étudiés et laisse dans l'ombre d'autres éléments qui sont pertinents aussi pour l'enseignement. Une application trop rapide des résultats de la recherche à l'enseignement risque donc de surestimer certains facteurs et de produire des déséquilibres, amenant ainsi les effets de balancier bien connus. De plus, les études portant sur le rôle de l'enseignant, qui se développent actuellement, ont encore peu de résultats, ce qui limite les possibilités de contrôle de la reproductibilité des situations.

Bibliographie.

AMIGUES R., CHEVALLARD Y., JOSHUA S., PAOUR J.L., SCHUBAUER-LEONI M.L. (1988) Le contrat didactique : différentes approches. *Interactions didactiques* n°8. Neuchatel et Genève.

BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie* n°84 p.13-19, INRP, Paris.

BEILLEROT J. et collectif (1990) *Savoir et rapport au savoir.* Editions Universitaires, Paris.

BOERO P. (1987) Analyse de quelques facteurs d'erreur dans l'apprentissage des mathématiques dérivant de l'origine socio-culturelle des élèves. *Actes de la réunion CIEAEM Sherbrooke 1987.* Ed. Université de Sherbrooke, 1988.

BONNEVILLE J.F., COMITI C., GRENIER D., LAPIERRE G.(1990) Eléments d'étude des représentations des enseignants de mathématiques. Le métier, les contraintes, l'apprentissage. *Publications de l'Institut de Formation des maîtres, équipe imat* Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, p. 33-115. La pensée sauvage Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en didactique des mathématiques* n° 11.2.

BRUNER J.S. (1983) *Savoir faire, savoir dire.* Presses Universitaires de France, Paris.

BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 12.2.3.

CHARLOT B. (1983) *L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir* Journées Nationales de l'APMEP Lille, 22-24 sept.1983 dans *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques n°342 fev. 1984.*

CHARLOT B. ; BAUTIER E. ; ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues ... et ailleurs* A. Colin.

CHAUVEAU G. (1982) L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire.* n°39 p. 21-39.

CHEVALLARD Y. (1983) *Remarques sur la notion de contrat didactique.* Brochure de l'IREM d'Aix-Marseille repris dans CHEVALLARD (1988b) *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation.* Publication de l'IREM de Marseille n°14.

CHEVALLARD Y. (1988) *Notes sur la question de l'échec scolaire.* Publication de l'IREM de Marseille n°13

C.I.E.A.E.M. (1988) *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique.* Comptes rendus de la 39ème rencontre de la C.E.I.A.E.M., Sherbrooke, Août 1987

DOUADY R. (1987) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 p. 5-31. La pensée sauvage Grenoble.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* n°6.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1986) *Nombres décimaux.* Brochure n° 62 IREM Paris 7.

DUPERRET J.C. Point de vue : objet sans âme, outil sans vie ... *Repères IREM* n°13.

DURU M. (1986) Notation et Orientation. Quelle cohérence, quelles conséquences ? *Revue Française de Pédagogie n°77 oct-nov-dec 1986*

DURU BELLAT M. et MINGAT A. (1989) Analyse de la genèse temporelle des trajectoires scolaires. *Revue Française de pédagogie n°88.*

DUVAL R. (1988) Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* IREM de Strasbourg.

FORQUIN J.C. (1981) *L'approche sociologique de la réussite et de l'échec scolaires* CREFED - ENS Saint-Cloud.

FRANÇOIS F. (1980) Analyse linguistique, normes scolaires et différenciations socioculturelles *Langages n°59 sept 1980*

FREUDENTHAL H. (1984) L'échec des coureurs, conférence aux journées APMEP de Lille, oct 1983, *Bulletin de l'APMEP n°342, fev.84.*

GILLY M. (1980) *Maître - élève. Rôles institutionnels et représentations* Paris P.U.F.

HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de pédagogie* n°84 p.5-12 INRP Paris.

ISAMBERT-JAMATI V. (1990) *Les savoirs scolaires. Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leur réforme.* Ed. Universitaires, collection "Savoir et formation", Paris.

JODELET D. (Ed.) (1989) *Les représentations sociales.* PUF, Paris.

JOSSE E. et ROBERT A. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherches en didactique des mathématiques* vol.13 n°1/2. 119-154. Ed. La pensée sauvage Grenoble

LABORDE C. (1982) : *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université J. Fourier, Grenoble.

LAUTREY J. (1980) *Classe sociale, milieu familial, intelligence.* Paris, PUF.

LEGER A. (1983) *Enseignants du secondaire* P.U.F.

LEGER A. et TRIPIER M. (1986) *Fuir ou construire l'école populaire ?* Méridiens Klincksieck

LEGRAND M. (1990) Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques* n°9.3. p.365-406.

MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Ed. La Pensée sauvage, Grenoble.

NIMIER J. (1988) *Les modes de relation aux mathématiques.* Coll. Psychologie sociale, ed. Méridiens Klincksieck

NOIRFALISE R. (1987) Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* n°7.3. Ed. La pensée sauvage Grenoble

PERRENOUD P. (1984) *La fabrication de l'excellence scolaire* Librairie Droz Genève

PERRET-CLERMONT A.N. (1979) *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. Peter Lang, Genève.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM- 6ème*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7, février 1992.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques* vol.13 n°1/2. Ed. La pensée sauvage Grenoble

PERRIN-GLORIAN M.J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) Elèves en difficulté en classe de 6ème. *Repères-IREM n° 3* p.97-139 Topiques Editions, 54700 Pont-à-Mousson.

PLAISANCE E. (1985) Colloque du C.N.R.S. de 1984 *L'échec scolaire . Nouveaux débats, nouvelles approches*. Editions du C.N.R.S.

ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM* n°1. IREM de PARIS 7.

ROBERT A. et ROBINET J. (1993) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Cahier DIDIREM n°21*. IREM Paris 7

VERGNAUD G. (1991a) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 10.2.3. La pensée sauvage, Grenoble.

VERGNAUD G. (1991b) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie n°96*. p. 79-86, INRP Paris.

VYGOTSKI L.S. (1985) *Pensée et langage*. Editions sociales Messidor, Paris.

Annexe : extrait d'un entretien avec un élève de CM1.

Travail en calcul mental :
Didier essaie de faire 11x15 sans écrire :
D. une fois 5, ça fait 5, une fois 5 encore une fois parce qu'on doit faire comme ça et comme ça, ça fait 5. Après une fois 1, ça fait 1, encore une fois 1, ça fait 1. Moi, j'ai trouvé 15 !
M. Alors, est-ce que tu pourrais trouver 10 fois 15 ?
D. Non, ça peut pas être 150.
M. Pourquoi ?
D. Attendez, il faut que je réfléchisse, parce qu'il faut toujours réfléchir avant de dire une bêtise. Ah, oui, je vais vous dire pourquoi. Parce que moi, je me suis arrêté à 10, 10 fois 15... et je me suis dit avec 11, ça fait 110, avec 12, 120, avec 13, 130, avec 14, ça fait 140, ... ça fait 150.
M. 10x15, ça fait 150, tu en es sûr ? ... Alors, est-ce que tu peux trouver 11 fois 15 ?
D. 151, je dis ça au hasard.
M. Pourquoi 151 ? Ecoute, admettons que tu aies des boîtes de chocolats et il y a 15 chocolats dans chaque boîte.
D. Et il y a combien de boîtes ?
M. 11 boîtes.
D. Ah, là, il faut que je le fasse aussi par l'écrit.
M. Non, tu as déjà fait du travail, vas-y, aujourd'hui, on travaille d'abord par l'oral, je te donnerai le papier et le crayon après.
D. Qu'est-ce-que vous m'avez dit ?
Je répète.
D. 15 et 15 ça fait 30, 30 et 15, ça fait 45. 15 et 40, ça fait 55.
M. On n'en était pas à 40, on était à 45.
D. 40 et 15, ça fait 45.
M. Tu te perds, là, reprends.
D. 15 et 15, ça fait 30, 15 et 30... c'est ça ? Je me rappelle plus.
M. Qu'est-ce que tu cherches à faire ?
D. J'essaie de voir combien ça fait. Je réussis pas. Chaque fois, il faut que je me perds.
M. Pourquoi tu n'y arrives pas ?
D. Parce que je ne réfléchis pas assez.
M. Tu te perds parce que tu ne sais plus où tu en es dans tes +15. Tu fais +15 ... +15, tu rajoutes une boîte à chaque fois. *Est-ce que tu ne connais pas un moyen qui te permette de trouver plus vite le nombre de chocolats parce que le problème, c'est que tu te perds avec tout ça ... Tu ne sais plus combien de boîtes tu as comptées.*
M; (après avoir répété le problème). Qu'est-ce que tu pourrais faire ?
D. une multiplication... non, une addition. A moins que je parte d'un nombre et puis j'en retire 15.
M. Qu'est-ce que c'était ta méthode ?
D. Je voulais faire + + + jusqu'à ce que je trouve le nombre.
M. Vas-y. N'oublie pas de compter les boîtes..
Après avoir ajouté encore 3 fois 15, il perd le fil à nouveau et n'arrive plus à utiliser les méthodes précédentes.
D. 75. J'ai déjà combien de boîtes là ? Je crois que j'en ai 5. Après 75, c'est 85
M. Ah, tu crois, 75 et 15 ?
D. 85
M. Non, 75 et 15
D. C'est pas 95 ?

M. Non plus, regarde 75, pour ajouter 15 qu'est-ce que tu peux faire d'abord ? Essaie que ce soit plus facile ... 15 c'est 10 et 5.
D. Donc je pose déjà le 5, ça fera 80, ça fera 90.
M. Oui
D. ça fera déjà 7 boîtes, ah non, ça fera 6, parce que tout à l'heure j'en étais à 5
M. oui, bon 90, après ?
D. 95
M. C'est 15
D. 100, là c'est dans les 100, 115, 105, je me trompe.
M. 105
D. ça fait 7 boîtes 115 130
M. Tu en étais à 105, 105 et 15 comment tu as fait ?
D. j'ai compté sur mes doigts
M. Ah bon, voilà, tu te trompes toujours quand tu comptes sur tes doigts. C'est trop grand pour que tu comptes sur tes doigts. Comment tu fais pour rajouter 15, on a dit.
D. 105, attendez 125 ça fera.
M. mais non, 105 tu ajoutes déjà 5, ça fait ?
D. 110
M. Et encore ?
D. 10
M. ça fait ?
D. 120
M. Voilà
D. Après c'est 135, après 145
M. Non, 145, regarde, est-ce que ça peut se terminer par un 5 après 135 ?
D. Non, 140
M. 135 et 5 ça fait 140
D. Ah oui, c'est des nombres impairs.
M. Lesquels sont impairs ?
D. Les numéros impairs c'est 1, 3, 5, ... 19
M. D'accord, et là où on en était ?
D. 7 boîtes
M. 7 boîtes, tu te souviens combien c'était ?
D. Non
M. Ah, tu vois, il faut aussi compter les boîtes. On en était à 135, c'est pas 7 boîtes.
D. C'était 105, 7 boîtes
M. 105, 7 boîtes, d'accord, alors 135, c'était combien ?
D. 8 boîtes
M. Non, parce que de 105 à 135, il y a combien ?
D. 15
M. De 105 à 135 il y a 15 ? On l'entend rien qu'au son, 105, 135, combien de plus ?
D. 15, si c'est plus un il y a 15
M. Didier, tu étais à 7 alors on recommence à 7, 105, alors 8, ça fera combien ?
D. 135
M. Non
D. Ah, 105 120
M. 120 pour 8, alors pour 9 ?
D. 135
M. pour 10 ?
D. 145

M. Non .
D. 160
M. 135 et 5, 140 et qu'est-ce que tu dois ajouter ?
D. 150, et 11 c'est .... 150, 155, 160, 170 ....
M. 165. Tu as trouvé le résultat, mais tu t'es fatigué beaucoup. Est-ce que tu n'aurais pas pu trouver plus vite le résultat pour 10 boîtes ? Dans chaque boîte, il y a 15 chocolats, si il y a 10 boîtes, est-ce que tu aurais pu trouver plus vite ?
D. Non, j'aurais pas pu trouver plus vite.
M. Pourquoi ? Tu l'avais pourtant trouvé tout à l'heure
D. Ah si, en comptant les dizaines.
M. Et alors combien de dizaines tu devais trouver ?
D. Ben, je m'en rappelle plus. Oh là là, j'ai une courte mémoire sans doute.
M. Je te rappelle qu'on a 15 chocolats dans chaque boîte et 10 boîtes.
D. Ah, 10, attendez ça fait 110, 120, ... il compte de 10 en 10 jusqu'à 240.
M. Qu'est-ce que tu es en train de chercher ?
D. Moi, je suis en train de chercher si je pouvais trouver plus vite.
M. Dis-moi si c'étaient des boîtes de 10 chocolats et que tu aies 15 boîtes, est-ce que tu aurais trouvé facilement ? Disons qu'on a des sacs de billes. Tu as 10 billes dans chaque sac et tu as 15 sacs, est-ce que tu aurais trouvé facilement ?
D. Non
M. Tu as 10 billes dans un sac, dans 2 tu en aurais combien ?
D. 10 et 10, 20, après 30, 40, 50.
M. Et alors dans 15 sacs, essaie de dire tout de suite.
D. 155
M. 150, pas 155. Comment tu fais pour trouver vite ?
D. 10, 20, 30.... il continue jusqu'à 100 ....
M. Oui, tu ajoutes des 10, et alors là tu avais combien de fois 10 ?
D. 10 fois
M. Non, tu avais 15 fois 10
D. Ah, je croyais que vous me disiez pour ce que je viens de vous dire.
M. Oui, alors est-ce que c'est pareil 10 boîtes avec 15 chocolats dans chaque boîte, ou 15 boîtes avec 10 chocolats dans chaque ....
D. ça fera 150
M. Je peux prendre un chocolat dans chaque boîte et je remplis des petits sacs de 10 chocolats. Combien j'aurai de sacs ?
D. 15
M. Alors est-ce que tu peux trouver facilement 10 fois 15 ?
D. 10 fois 15 ça fait 150

TITRE :	GROUPE DE TRAVAIL EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
AUTEUR :	Michèle ARTIGUE, Hélène AUTHIER, Jean VINCENT
NIVEAU :	Etudiants de 1ère année d'IUFM (PE1), étudiants en formation professionnelle (FP) instituteurs en exercice, Formateurs, tous les Enseignants du primaire, du secondaire et du supérieur.
EDITEUR :	IREM de Reims
DATE :	JUIN 1994
MOTS-CLE : spécialité	ANALYSE DU CONCOURS DES PE
autres	DIDACTIQUE : le "ERMEL" : apprentissage de la numération
	MATHEMATIQUE : géométrie : construction arithmétique : congruences PROPORTIONNALITE : algébrique, graphique et numérique

Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C

Un système informatique de résolution de problèmes

Contraintes de fonctionnement des enseignants de collège

RESUME : En 1992, le nouveau concours de recrutement de professeurs des écoles s'est mis en place avec, à l'écrit, des épreuves conjugant une partie strictement disciplinaire (évaluée sur 12 points) et une partie de didactique de la discipline (évaluée sur 8 points). Notre attention, dans l'Académie de Reims, a été alertée par le pourcentage important de notes éliminatoires attribuées à l'épreuve de mathématiques (environ 30 %) et ce, sur un sujet qui, a priori, semblait tout à fait raisonnable. De là est né le projet de constituer, dans le cadre de la formation didactique de formateurs mise en place conjointement par l'IREM de Reims et l'IUFM de Reims, un groupe de travail qui analyserait les copies de ce premier concours

ISBN 2-910076-05-9

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	135	50 F + 15 F (frais d'envoi)	Re34