IREM DE REIMS

Moulin de la Housse

51100 REIMS

Tél : 26 85 12 21

Tome 2

AUTONOMIE ET MATHEMATIQUES EN SECONDE

PROMENADE AUTOUR DU NOMBRE D'OR

§§§§§§§§§§§§§§

Travail interdisciplinaire effectué par la classe de seconde TES 1 du Lycée GODART ROGER d ' EPERNAY pendant l'année scolaire 1984 - 1985.

avec l'aide de :

Madame ARSENE - Professeur de MATHEMATIQUES

Madame MAYDAT - Professeur de DACTYLOGRAPHIE

2ème EDITION 1986-1987

OBJECTIFS GENERAUX

1 - Utiliser les premières habitudes d'Autonomie prises par les élèves pour les lancer sur un travail plus libre et plus ouvert à la recherche personnelle.

2 - Décloisonner les matières en effectuant un travail commun à plusieurs professeurs (Mathématiques, Dactylographie, Informatique, Français).

3 - Montrer aux élèves que la somme de leurs recherches personnelles, même modestes, peut donner un résultat très intéressant et leur faire prendre conscience de la puissance d'un travail d'équipe.

4 - Faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'une rédaction et d'une présentation correcte pour obtenir un résultat cohérent pour le dossier d'ensemble.

ORGANISATION DU TRAVAIL

1 - Le Professeur de Mathématiques a collectionné tout ce qu'il pouvait trouver sur le nombre d'Or, pendant plusieurs mois, sans avoir d'idée sur ce qu'il en sortirait.

2 - Un premier tri de ces idées a permis de dégager dix thèmes principaux qui ont été classés par niveau de difficulté.(début Janvier)

3 - La classe a été répartie en groupes variant de 2 à 4 élèves. Chaque groupe a reçu une "feuille d'activité" correspondant à l'un des thèmes.
Les thèmes n'ont pas été distribués au hasard. Il a été tenu compte des capacités des élèves et de l'effectif de chaque groupe.
Pour des raisons de mauvaise entente dans un groupe, il a fallu à un moment donné partager un thème en deux parties, ce qui explique les II chapitres.

4 - Le travail devait être réalisé en dehors des heures de cours, mais avec possibilité de demander à tout instant conseil au professeur.
Un premier délai d'un mois a été fixé pour rendre une première ébauche. (début Février)

5 - Le premier résultat était très décevant : travail assez pauvre, mal présenté, sur des feuilles déchirées, rédaction inexistante.... ! Il a fallu à ce moment que les élèves prennent conscience de la nécessité d'une bonne présentation et d'une rédaction correcte. Certains d'entre eux auront plus tard à presenter par exemple des mémoires ou des rapports et il y avait là une bonne occasion d'apprentissage.
Un nouveau délai d'un mois a été fixé pour refaire un travail présentable (certains groupes l'ont refait 3 fois !). (début Mars)

6 - Le résultat a subi une évaluation en Mathématiques. Chaque groupe a obtenu une note établie selon les critères suivants :

- effort de rédaction et de présentation (5 points)
- quantité et qualité du travail (7 points)
- difficulté du sujet (3 points)
- autonomie du groupe ($\neq$ aide du professeur) (5 points)

7 - Le dossier obtenu a été donné au professeur de dactylographie qui a étudié ce qui pouvait être demandé aux élèves dans sa matière (cadrage d'un titre, marges, etc....). Deux concertations d'un quart d'heure entre les deux Professeurs ont suffi pour mettre au point le travail qui pourrait être fait par les élèves en dactylographie.

8 - Un mois plus tard, nous obtenions le résultat présenté en annexe. (Avril)

9 - Conclusion : Les chapîtres, à l'image des groupes, sont de qualité très inégale, mais tous les élèves ont fourni des efforts.

La principale difficulté rencontrée a été de faire prendre conscience aux élèves de la nécessité de rédiger correctement leur travail de façon que celui-ci soit compréhensible par toute personne n'ayant pas participé à la recherche du groupe.

Rédiger un travail, présenter correctement des résultats, expliquer clairement et en bon français ce qui a été cherché...... semblent être des objectifs difficilement acceptés par les élèves et pourtant essentiels à l'ensemble des matières.
Un tel travail interdisciplinaire peut faciliter ces exigences et fournir des motivations pour cet effort qui leur semble inhabituel.

Ce genre de travail est facilité par un apprentissage de l'Autonomie et il est lui-même autonomisant : En effet, après quelques mois, les élèves s'habituent à ne plus attendre tout du professeur et acceptent mieux d'aller chercher eux-mêmes les documents nécessaires. Ils sont moins déroutés par un travail "ouvert" où chaque groupe essaie d'aller le plus loin possible dans la recherche (certains groupes ont dépassé les objectifs fixés dans la feuille d'activité).
Le travail de chacun est valorisé : il n'y a pas deux groupes qui travaillent sur le même sujet, donc pas de comparaison défavorable possible. Le travail de chacun est utile à tous. Chacun apporte sa brique qui permettra la construction de l'édifice.

ANNEXE I :

LES FEUILLES D'ACTIVITE DONNEES AUX ELEVES (résumé)

groupe I : (3 élèves)

Chercher au C.D.I qui est Fibonacci et en quoi consiste la suite qui porte son nom.

Etudier au mieux cette suite à l'aide de la calculatrice.

groupe 2 : (2 élèves)

Dans son livre, "liber Abacci", écrit en 1202, Léonard de Pise pose la question : "Combien de paires de lapins peut engendrer une seule paire pendant une année ? la nature des lapins étant telle qu'à l'age de deux mois une paire peut en engendrer tous les mois une autre".

Comprendre le texte.

Imaginer un schéma qui montre l'évolution du nombre de lapins sur une année.

Etudier la "loi" qui régit l'augmentation du nombre de lapins.

groupe 3 : (4 élèves)

Résolution dans R^+ de $x^2 = x + 1$ ou $x^2 - x - 1 = 0$

a - En posant $x^2 - x - 1 = x(x - 1) - 1$ démontrer que :
si $x > 2$ alors $x(x - 1) - 1 > 0$, donc que l'équation n'a pas de solution dans $[\,2 ; +\infty[$

b - Montrer que si $0 < x < 1$ alors $x^2 - x - 1 < 0$, donc..... pas de solution dans $]\,0 ; 1\,[$

c - Représenter graphiquement $f(x) = x^2 - x - 1$ et vérifier que l'équation a une solution sur $]\,1 ; 2\,[$
Trouver cette solution (en utilisant la calculatrice ou le micro-ordinateur) en procédant par approximations successives.

d - Retrouver le résultat en écrivant $x^2 - x - 1$ sous la forme $(x - a)^2 - b^2$

Groupe 4 : (3 élèves)

A partir d'un carré ABCD de côté 1, on construit un rectangle ABEF de côtés 1 x 2, puis un rectangle BEGH de côtés 2 x 3, puis un rectangle EGIJ de côtés 3 x 5, etc...... en ajoutant chaque fois un nouveau carré et en tournant toujours dans le même sens.

Etudier la loi qui permet de trouver les dimensions des rectangles successifs (calculatrice)

Dessiner la spirale logarithmique.

<u>groupe 5</u> : (6 élèves)

Dessiner un rectangle, le mesurer, ajouter un carré sur le plus grand côté. On obtient un nouveau rectangle, le mesurer. Recommencer (ajouter un carré, etc....) en tournant toujours dans le même sens.

Trouver la loi permettant de trouver les dimensions des rectangles successifs sans les dessiner (calculatrice, micro-ordinateur).

Reprendre le travail à partir de plusieurs rectangles différents.

<u>groupe 6</u> : (4 élèves)

Trois points alignés A, B, C forment une section dorée si $\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{BC}$
En posant AB = 1 et BC = x, montrer qu'on obtient l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ (voir groupe 3)

Construire un triangle rectangle OAB dont les côtés AO et AB mesurent respectivement 1 et 2. Calculer la longueur de son hypoténuse.

Construire le demi cercle de rayon OB et limité par la droite (OA) qui le coupe en C.

Montrer que le rectangle construit sur les points A, B et C est un rectangle d'Or.

Construire un rectangle d'Or, retrouver la spirale logarithmique. Chercher le centre de cette spirale.

<u>groupe 7</u> : (2 élèves)

Etudiez un triangle d'Or (document fourni) et ses propriétés (mesure des angles, rapport des côtés, rôle des bissectrices, etc......)

Expliquer l'expression "l'un est le gnomon de l'autre" dans le partage d'un triangle d'Or en deux triangles d'Or.

Partages successifs en tournant toujours dans le même sens. Propriétés des figures successives (angles, mesures des côtés, parallélisme, etc...). Recherche du point limite.

<u>groupe 8</u> : (2 élèves)

Etude de $\sqrt{5}$ et du nombre d'Or par les fractions continues (document fournissant un exemple sur $\sqrt{2}$)

Utilisation de la calculatrice et du micro-ordinateur.

groupe 9 : (2 élèves)

Approximation de $\sqrt{5}$ par la méthode de Héron (document fournissant un exemple sur $\sqrt{2}$)

groupe 10 : (3 élèves)

Rechercher l'influence du nombre d'Or dans l'Art (peinture, litterature, etc....)

groupe 11 : (4 élèves)

Distribuer à chaque élève de la classe une feuille de papier quadrillé à petits carreaux. Chaque élève doit dessiner sur la feuille un rectangle dont les dimensions lui semblent les plus harmonieuses possibles.

Faire une étude statistique des dimensions des rectangles (longueur L, largeur l et rapport $\frac{L}{l}$).

LE NOMBRE D'OR

CHAPITRE 1

UN PEU D'HISTOIRE

1 - Introduction

Au XVIII siècle, Fibonacci, appelé aussi Leonard de Pise, celui là même qui avait amené en occident les chiffres hindoux au retour d'un long séjour en Algérie, tenta de résoudre le problème de la prolifération des lapins. Il voulait se rendre compte de la puissance de cette prolifération, la formuler, alors qu'elle dépassait très vite l'imagination. Il partit d'un fait qui est très rare dans l'espèce humaine, que des oncles et des neveux soient de même âge. Il imagina donc que dans l'espèce lapine, les parents ont une deuxième descendance contemporaine également de leurs propres descendants, mais que les premiers parents disparaissaient par le fait d'une mort naturelle. C'était envisager un cas très simple, celui où les lapins nés à une certaine époque étaient des descendants directs de ceux de la génération précédente et de ceux de la génération anté-précédente. Ilsupposa en outre pour simplifier, que le nombre des enfants était égal à celui des parents c'est-à-dire à la somme des nombres de lapins des deux générations précédentes.

- En employant la formulation mathématique moderne :

u_n : le nombre de lapins de n. ième génération :

u_{n-1} : celui de la précédente

u_{n-2} : celui de l'anté-précédente

Fibonacci étudiait donc l'hypothèse

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} .$$

Nanti de cette formule, exprimant la loi simple qu'il avait imaginée, le travail de recherche n'est plus qu'un jeu de patience. En supposant par exemple $u_1 = 1$, au commencement et donc $u_2 = 1$,puisque le nombre des descendants est supposé égaler celui des parents, il suffit d'écrire la suite des nombres de naissances à chaque génération en formant chaque fois la somme des deux derniers qui viennent d'être écrits.

(voir chapitre 2)

Conclusion

Le rapport d'un nombre au précédent oscille de part et d'autre de 1,618.. et finit par s'y stabiliser à partir de la onzième génération, tout au moins si on se contente de 3 décimales. La progression du nombre de naissances à chaque génération est donc pratiquement une progression géométrique du type a^n.

L'algèbre peut nous rendre ici un très grand service pour préciser ce nombre dont nous ne connaissons que 3 décimales, les suivantes étant incertaines. En effet du moment que nous avons acquis la certitude morale tout au moins que le rapport d'un nombre au précédent tend vers une valeur limite que nous appellerons k pour l'instant nous pouvons écrire approximativement :

$$U_{n-1} = k \times U_{n-2} \quad \text{donc} \quad U_n = k \times U_{n-1} = k^2 \times U_{n-2}$$

La relation dont est parti Fibonacci s'écrit alors :

$$k^2 \times U_{n-2} = k \times U_{n-2} + U_{n-2}$$

Ce qui impose

$$k^2 = k + 1 \quad \text{ou} \quad k_2 - k - 1 = 0$$

(voir chapitre 3)

Equation du deuxième degré que nous avons à résoudre et dont l'une des racines est :

$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803393$$

Il y a donc accord pour les sept premières décimales dès la vingtième génération. Il faut reconnaître que cet accord est hautement satisfaisant pour l'esprit et que la puissance de l'algèbre se montre ici avec une grande force, d'autant plus qu'on peut démontrer rigoureusement qu'il s'agit bien du même nombre.
Remarquons pour finir que l'algèbre nous prouve également que le résultat eût été le même si, au lieu de partir d'un lapin, nous étions partis d'un nombre quelconque de valeur significative que parce que le rapport d'un nombre au précédent tend vers k; son point de départ est indifférent.
On trouverait d'autres suites possédant les mêmes propriétés mais il faudrait prendre le second terme différent du premier, sinon, on retomberait sur de simples multiples de la suite de Fibonacci.

Programme de calculatrice programmable
qui permet d'afficher les quotients successifs

LRN —>entrée en programme

RCL0 —>sortie de la mémoire 0 } ajouter le

\+ —>addition } contenu de

RCL1 —>sortir de la mémoire 1 } M0 et M1

STO0 —>résultat mis en mémoire 0

: —>diviser par

RCL1 —>contenu de la mémoire 1

PAUSE —>le quotient est affiché

RCL0 —>sortie du contenu de la M0

\+ —>ajoute

RCL1 —>sortie de contenu de M1

= —>calcul de la somme

STO1 —>résultat en M1

: —>divisé par

RCL0 —>contenu de M0

PAUSE —>le quotient est affiché

RST —>retour au début

LRN —>fin du programme

RAPPORT	GENERATION NUMERO	NOMBRE DE DESCENDANTS	RAPPORT	GENERATION NUMERO	NOMBRE DE DESCENDANTS
1	1	1	1,618	51	$2,04436\ 10^{10}$
1	2	1	1,618	52	$3,30832\ 10^{10}$
1,5	3	2	1,618	53	$5,35268\ 10^{10}$
1,666	4	3	1,618	54	$8,661\ 10^{10}$
1,600	5	5	1,618	55	$1,40136\ 10^{11}$
1,625	6	8	1,618	56	$2,26746\ 10^{11}$
1,615	7	13	1,618	57	$3,66882\ 10^{11}$
1,619	8	21	1,618	58	$5,93628\ 10^{11}$
1,617	9	34	1,618	59	$9,6051\ 10^{11}$
1,617	10	55	1,618	60	$1,55413\ 10^{12}$
1,618	11	89	1,618	61	$2,51464\ 10^{12}$
1,618	12	144	1,618	62	$4,06877\ 10^{12}$
1,618	13	233	1,618	63	$6,558314\ 10^{12}$
1,618	14	377	1,618	64	$1,06521\ 10^{13}$
1,618	15	610	1,618	65	$1,722355\ 10^{13}$
1,618	16	987	1,618	66	$2,78876\ 10^{13}$
1,618	17	1597	1,618	67	$4,51112\ 10^{13}$
1,618	18	2584	1,618	68	$7,29988\ 10^{13}$
1,618	19	4181	1,618	69	$1,1811\ 10^{14}$
1,618	20	6765	1,618	70	$1,91108\ 10^{14}$
1,618	21	10946	1,618	71	$3,72208\ 10^{14}$
1,618	22	17711	1,618	72	$5,63316\ 10^{14}$
1,618	23	28657	1,618	73	$9,35524\ 10^{14}$
1,618	24	46368	1,618	74	$1,49884\ 10^{15}$
1,618	25	75025	1,618	75	$2,43436\ 10^{15}$
1,618	26	121393	1,618	76	$3,9332\ 10^{15}$
1,618	27	196418	1,618	77	$6,36756\ 10^{15}$
1,618	28	317811	1,618	78	$1,03007\ 10^{16}$
1,618	29	514229	1,618	79	$1,66683\ 10^{16}$
1,618	30	832040	1,618	80	$2,6969\ 10^{16}$
1,618	31	1346269	1,618	81	$4,36373\ 10^{16}$
1,618	32	2178309	1,618	82	$7,06063\ 10^{16}$
1,618	33	3524578	1,618	83	$1,14243\ 10^{17}$
1,618	34	5702887	1,618	84	$1,84849\ 10^{17}$
1,618	35	9227456	1,618	85	$2,99133\ 10^{17}$
1,618	36	14930352	1,618	86	$4,83982\ 10^{17}$
1,618	37	24157817	1,618	87	$7,83175\ 10^{17}$
1,618	38	39088169	1,618	88	$1,26709\ 10^{18}$
1,618	39	63245986	1,618	89	$2,050271\ 10^{18}$
1,618	40	$1,02334\ 10^{8}$	1,618	90	$3,3173\ 10^{18}$
1,618	41	$1,6558\ 10^{8}$	1,618	91	$5,36751\ 10^{18}$
1,618	42	$2,67914\ 10^{8}$	1,618	92	$8,68481\ 10^{18}$
1,618	43	$4,33494\ 10^{8}$	1,618	93	$1,40523\ 10^{19}$
1,618	44	$7,01408\ 10^{8}$	1,618	94	$2,2737\ 10^{19}$
1,618	45	$1,26396\ 10^{9}$	1,618	95	$3,67894\ 10^{19}$
1,618	46	$2,04436\ 10^{9}$	1,618	96	$5,95265\ 10^{19}$
1,618	47	$2,97711\ 10^{9}$	1,618	97	$9,6316\ 10^{19}$
1,618	48	$4,8342\ 10^{9}$	1,618	98	$1,55842\ 10^{20}$
1,618	49	$7,804\ 10^{9}$	1,618	99	$2,52758\ 10^{20}$
1,618	50	$1,26396\ 10^{10}$	1,618	100	$4,08001\ 10^{20}$

CHAPITRE 2

LA REPRODUCTION DES LAPINS

Dans son livre "Liber Abacci", écrit en 1202, Leonard de Pise dit Leonardo Fibonacci pose la question : "Combien de paires de la lapins peut engendrer une seule paire pendant une année??La nature des lapins étant telle que dès l'âge de 2 mois une paire en engendre tous les mois une autre" :

1° Graphique :

En tenant compte des données du texte de Fibonacci, je suis partie d'un couple de lapins, j'ai noté sa multiplication tous les mois, j'ai recommencé ainsi de suite pour chaque lapin jusqu'à la fin de l'année.

2° Schéma :

Je suis partie d'un couple de lapins. Autour de ce couple, j'ai inscrit les 12 mois de l'année. Puis j'ai dessiné des bulles qui représentent les lapins qui sont nés durant les mois de l'année sachant qu'ils ne peuvent se reproduire qu'à l'âge de 2 mois. De cela j'ai abouti à la loi de reproduction des lapins.

3° Loi :

Pour avoir le nombre de lapins par exemple au mois d'août, on ajoute le nombre des 2 derniers mois passés, ici Juin et Juillet et on trouve le nombre de lapins du mois voulu.

4° Formule :

Soit Ln le nombre de lapins du mois numéro n :
On aura la formule : $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

5° Nombre de lapins sur 3 ans :

	1 an	2ans	3 ans
NOMBRE DE LAPINS	144	30 428	11 216 332

• A partir de 2 ans : résultat

JJ	F	M	A	M	J
233	377	610	987	1 597	2 584
J	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
4 181	6 725	10 946	17 711	28 657	30 428

.A partir de la 5e année : résultat

J	F	M	A
59 085	89 513	148 598	238 111

M	J	J	A
386 709	624 820	1 011 529	1 636 649

S	O	N	D
2 647 878	4 284 227	6 932 105	11 216 332

Programme sur un ordinateur sur le nombre de lapins.

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21...
- Pour avoir un terme, on ajoute les 2 précédents.
- M1, M2 et M3 sont nécessaires (3 mémoires).

Fonctionnement du programme :

1 → M1
1 → M2
M1 + M2 → M3
M2 → M1
M3 → M1

- rentrer les 2 premiers nombres
- ajouter 2 termes consécutifs
- avancer d'un cran puis recommencer

En BASIC :

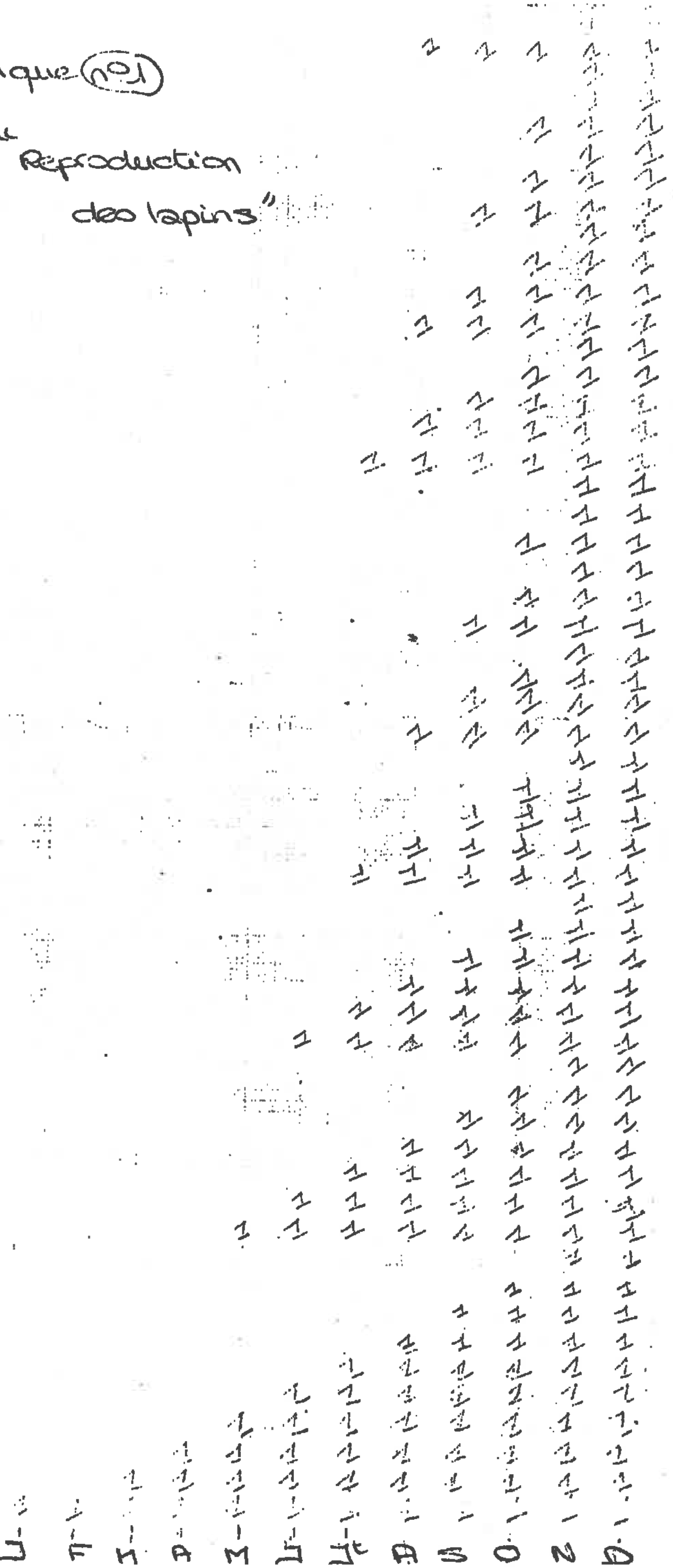
```
10 A = 1
20 M = 1
30 ? M, : ? A
40 B = 1
50 M = 2
60 ? M, : ? B
70 M = 3
80 C = A + B
90 ? M, : ? C
100 A = B
110 B = C
120 M = M + 1
130 GO TO 80  ← IF M = 36
140 END          THEN GO TO 140
```

RESULTAT SUR :

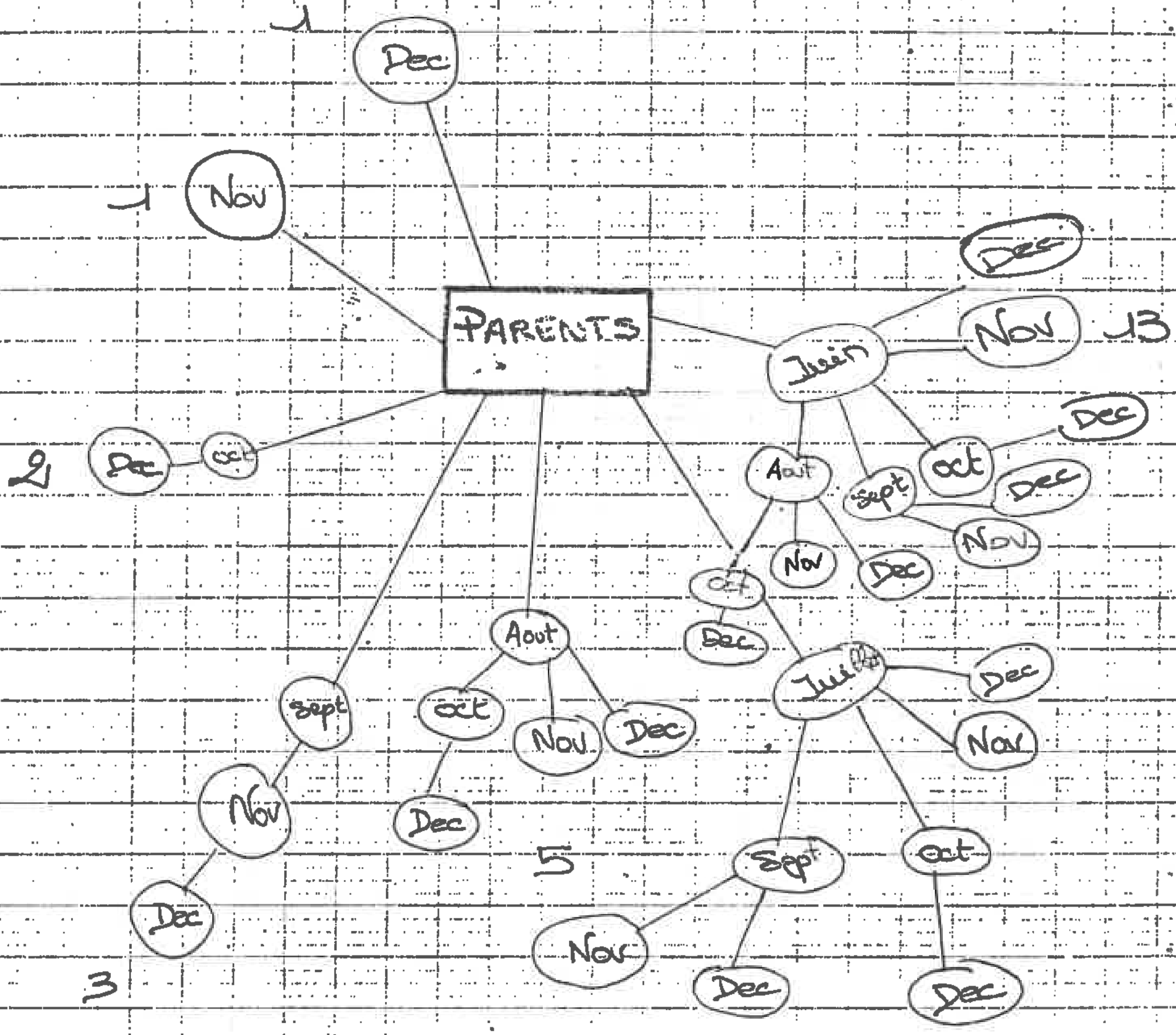
1 MOIS: 1 COUPLE
2 MOIS: 1 COUPLE
8 MOIS: 21 COUPLES
10 MOIS 55 "
15 MOIS 610 "
20 MOIS 6 725 "
30 MOIS 832 040 "
40 MOIS 1 02334 E + 08 "
50 MOIS 1 25863 E + 10 "
100 MOIS 3 54225 E + 20 "

Graphique (n°1)

"Reproduction des lapins"



Dessin n°2



CHAPITRE 3

RESOLUTION DE $x^2 = x + 1$

POSONS LE PROBLEME :

On veut résoudre l'équation (dans $\mathbb{R}^+$) :

$$x^2 = x + 1$$

On peut écrire cette équation :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

I - En posant $x^2 - x - 1 = x(x - 1) - 1$, démontrons que : si $x \geqslant 2$ alors $x(x - 1) - 1 > 0$ donc que l'équation n'a pas de solutions dans $[2 ; +\infty[$:

• Supposons $x \geqslant 2$:

$$x - 1 \geqslant 2 - 1 \Longrightarrow x - 1 \geqslant 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 \geqslant 1 \\ x \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x(x - 1) \geqslant 2$$

$$x(x - 1) - 1 \geqslant 2 - 1$$
$$x(x - 1) - 1 \geqslant 1$$
$$x^2 - x - 1 \geqslant 1$$

Puisque $x^2 - x - 1 \geqslant 1$ alors $x^2 - x - 1$ ne peut être égal à 0. L'équation n'a donc pas de solutions dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$

II - Montrons que si $0 < x < 1$, alors $x^2 - x - 1 < 0$ donc que l'équation n'a pas de solutions dans l'intervalle $]0 ; 1[$:

• Supposons maintenant que : $0 < x < 1$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x^2 < 1 \\ -1 < -x < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -1 < x^2 - x < 1$$

et $-2 < x^2 - x - 1 < 0$

Donc puisque $x^2 - x - 1 < 0$, on ne peut pas avoir :

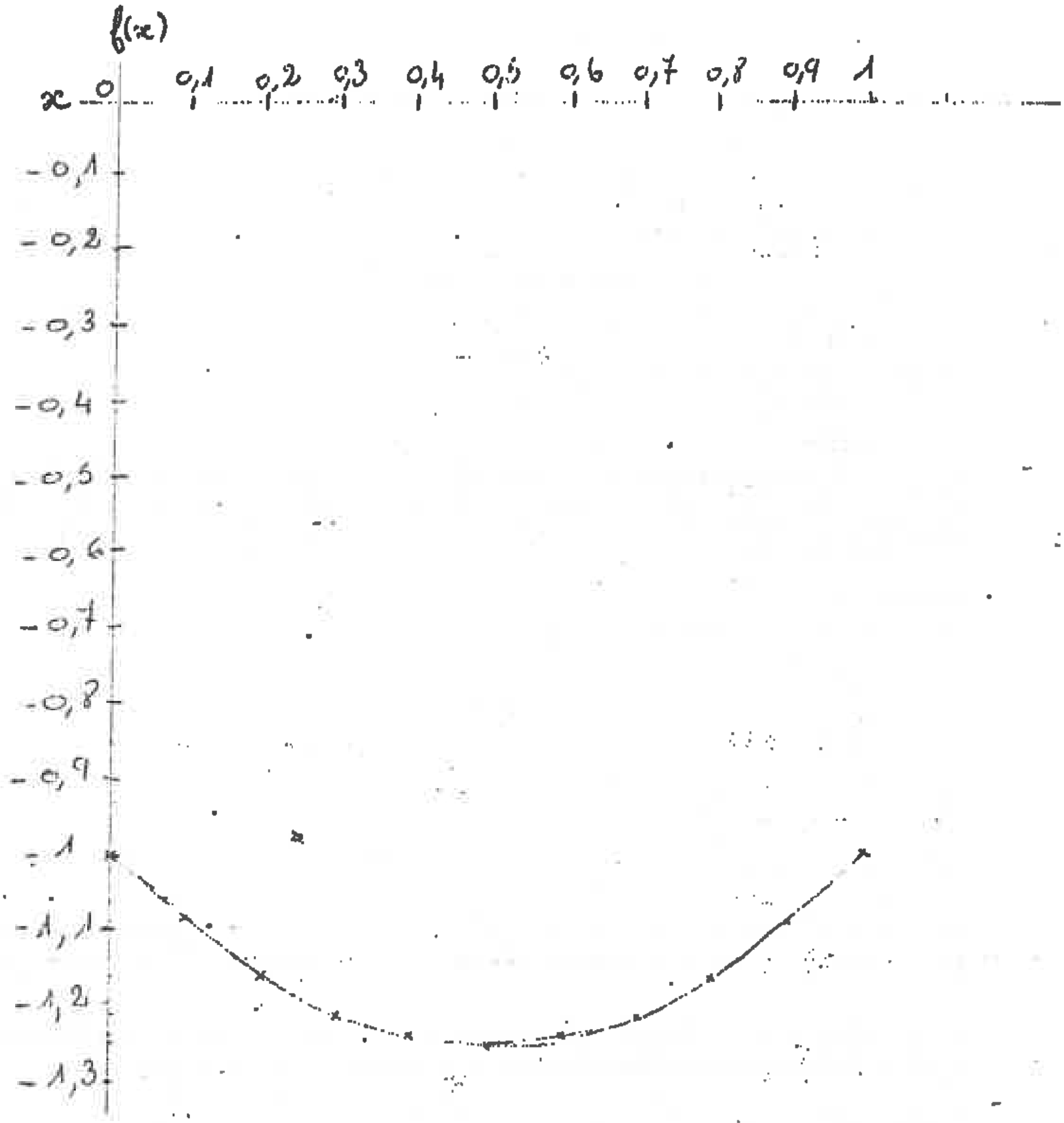
$x^2 - x - 1 = 0$

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ n'a pas de solutions pour $x \in]0 ; 1[$

• Vérification par une représentation graphique :

J'étudie dans un tableau les valeurs de $f(x)$ en fonction de x et je représente graphiquement cette fonction.

valeurs de x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f (x)	- 1	- 1,09	- 1,16	- 1,21	- 1,24	- 1,25	- 1,24	- 1,21	- 1,16	- 1,09	- 1



On voit bien que la courbe ne coupe pas l'axe pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1.

• Programme pour exprimer f **(x) en fonction de x.**

```
10  HOME : CLEAR
20  INPUT "Valeur de x"; A
30  B = A ↑ 2 - A - 1
40  PRINT " Si x = "; A , " f(x) = "; B
50  INPUT " Y-a-t-il d'autres valeurs à calculer"; RP$
60  IF RP$ = "oui" THEN GOTO 20 ELSE END.
```

III – Vérifier que l'équation a une solution sur]1 ; 2[en représentant graphiquement la fonction définie par f (x) = $x^2 - x - 1$ sur cet intervalle :

f (x) a été étudié dans l'intervalle : [2 ; +∞[

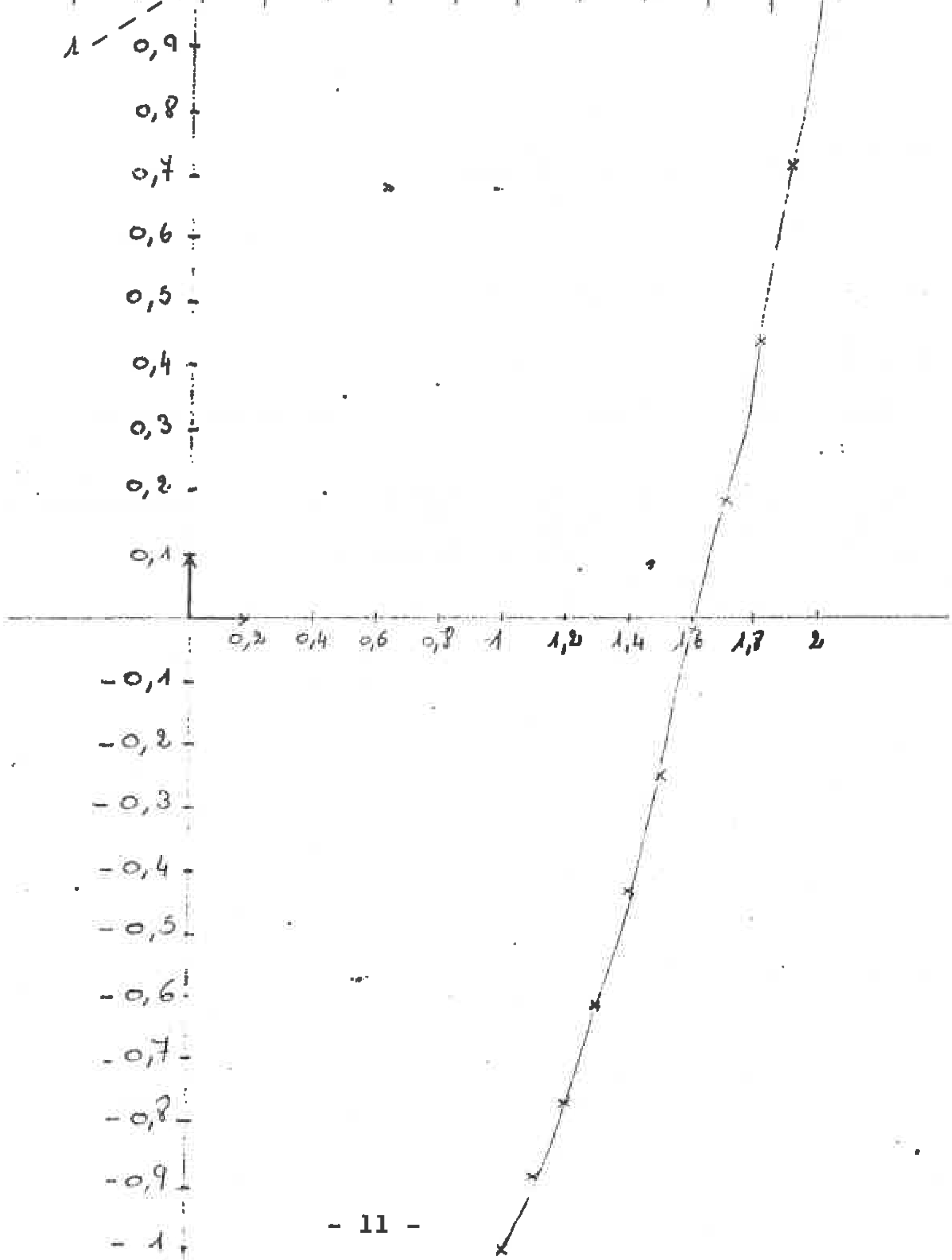
: [0 ; 1]

:]0 ; 1]

Il reste la possibilité de x ∈ [1 ; 2]

• Faisons une étude graphique :

valeur de x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f (x)	-1	-0,89	-0,76	-0,61	-0,44	-0,25	-0,04	0,19	0,44	0,71	1



Lorsque f (x) est égal à 0, x est compris dans l'intervalle $[1,6 ; 1,7]$. L'équation n'a donc pas de solution sur $[2 ; +\infty[$ ni sur $[0 ; 1]$, mais sur $[1 ; 2]$.

IV - Etude plus précise sur l'intervalle $[1,6 ; 1,7]$:

valeur de x	1,6	1,61	1,62
f (x)	-0,04	-0,0179	0,0044

valeur de x	1,61	1,615	1,616	1,617	1,618
f (x)	-0,0179	-0,006775	-0,004544	-0,002311	-0,000076

valeur de x	1,619	1,62
f (x)	0,002161	0,0044

La solution se trouve donc sur cet intervalle:

$S = [1,618 ; 1,619]$

Cette méthode permet une approximation aussi bonne que l'on veut.

V - Montrons que $x^2 - x - 1$ peut s'écrire sous la forme $(x - a)^2 - b^2$ pour deux nombres a et b que l'on déterminera.
En déduire la solution positive de l'équation.
Vérifier le résultat du IV.

$$(x^2 - x - 1) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1$$
$$= \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right) = 0$$

1. $x - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = 0$

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$\boxed{x \simeq 1,618033989}$

Cette solution est celle que l'on approchait par la méthode du IV. C'est le nombre d'or.

$$\text{(2)}\quad x - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\boxed{x = -0{,}618033989}$ L'équation a donc une seconde solution négative.

VI - Approche de x

Programme informatique

On sait que la solution se trouve entre 1,6 et 1,7 et que f (1,6) < 0 et f (1,7) > 0.
On va tester le centre de l'intervalle : $\frac{1{,}6 + 1{,}7}{2}$. Si le résultat est positif, ce nombre remplacera 1,7 sinon il remplacera 1,6 et on recommencera le processus avec le nouvel intervalle. On obtiendra ainsi des encadrements successifs de plus en plus précis de la racine.

```
10 A= 1,6
20 B= 1,7
30 ? A,B
40 C = (A+B) / 2
50 D =C^2 - C - 1
60 IF D >0 THEN B = C : GO TO 30
70 IF D <0 THEN A = C :GO TO 30
```

C H A P I T R E 4

LA SPIRALE LOGARITHMIQUE

I - Explication du dessin et de la spirale

A partir d'un carré A B C D de côté 1, on construit un rectangle A B E F de côtés 1 x 2, puis un rectangle B E G H de côtés 2 x 3, puis un rectangle E G I J de côtés 3 x 5, etc... en ajoutant chaque fois un nouveau carré et en "tournant" toujours dans le même sens...
Pour former la spirale, il suffit, à l'aide d'un compas dont l'écartement correspond à chaque carré, de placer le compas en D et tracer l'arc A C F, ensuite placez-le en A et tracer l'arc F H. Placéz-le en B et tracer l'arc H J. Pointez-le en E pour tracer l'arc J L. Pointez le compas en G pour tracer l'arc L N, etc...

II - La spirale : (voir dessin)

III - Explication pour trouver la longueur d'un rectangle

Pour trouver la longueur d'un rectangle, il suffit d'ajouter les 2 dimensions du rectangle précédent. La longueur du rectangle précédent devient la largeur du rectangle suivant.

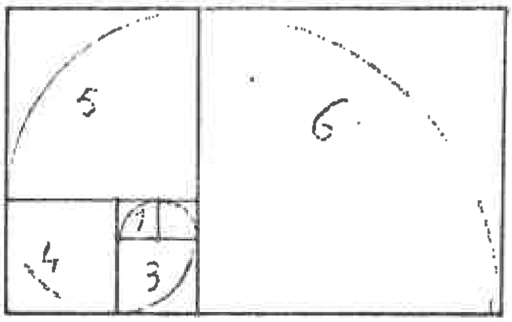


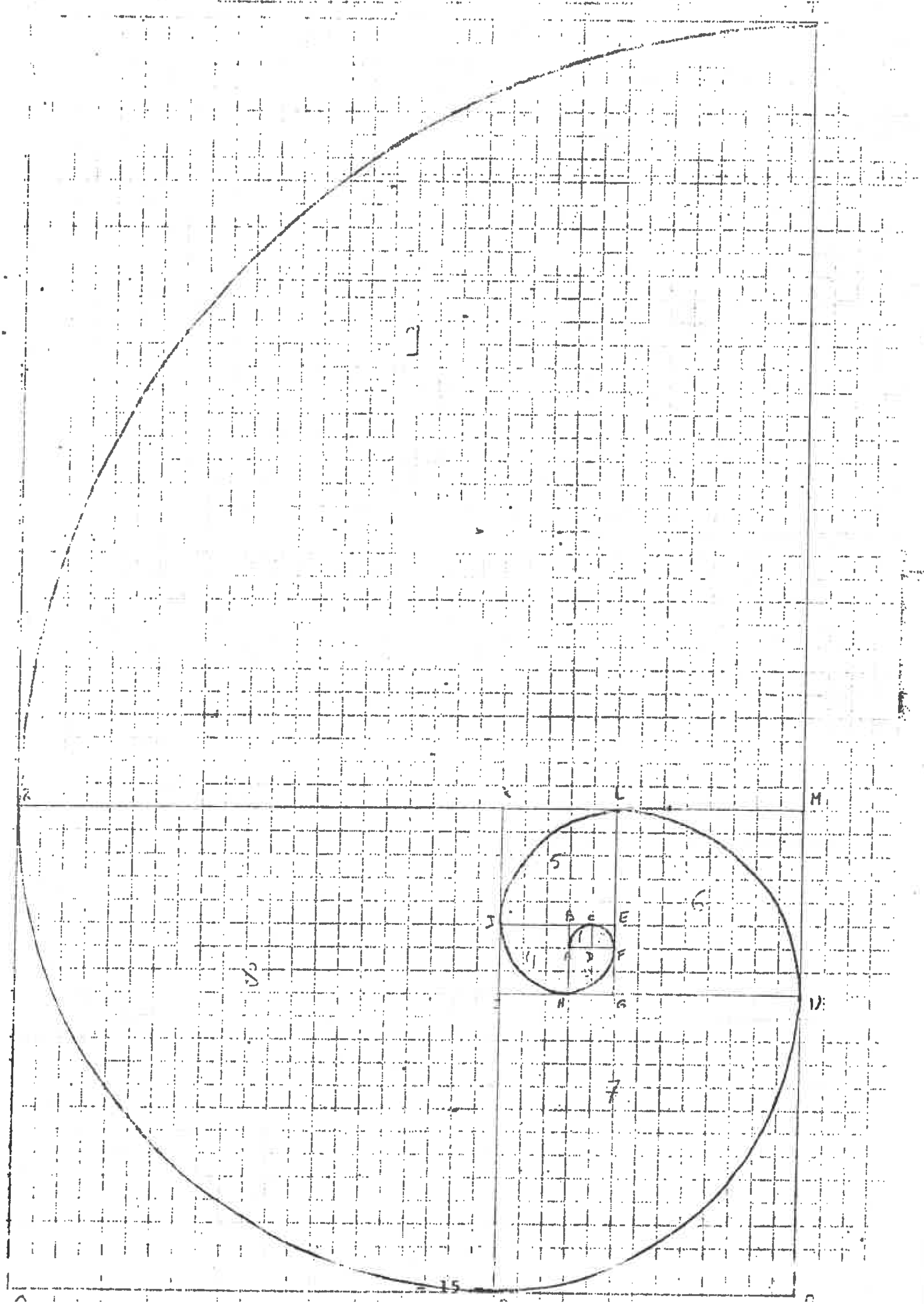
Tableau de mesures, en cm

Longueur	L	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Largeur	ℓ	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Longueur / Largeur	$\frac{L}{\ell}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$
Résultat	$\simeq$	1	2	1,5	1,66	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617

IV - Conclusion

On obtient la suite de Fibonacci. La suite des rapports tend vers le nombre d'or qui est 1,618... ou plus exactement $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

LA SPIRALE LOGARITHMIQUE



CHAPITRE 5

DES RECTANGLES ORDINAIRES... VERS LE RECTANGLE D'OR

Le travail que vous allez découvrir en parcourant les pages suivantes, consiste à s'approcher le plus possible du nombre d'or en partant de rectangles quelconques :

Premièrement, dessinons un (petit) rectangle.

Mesurons-le. Ajoutons ensuite un carré sur le plus grand côté. (vous pouvez suivre la construction au verso de cette page). On obtient un nouveau rectangle. Mesurons-le.

Recommencer l'opération autant de fois qu'il sera possible dans la feuille de papier en tournant toujours dans le même sens...

Résumons ensuite les résultats dans un tableau en indiquant : le n° du rectangle, sa longueur L, sa largeur l et le quotient $\frac{L}{l}$

Trouvons la loi permettant de trouver les dimensions des rectangles successifs sans les dessiner.

Complétons le tableau le plus loin possible en utilisant une calculatrice.

Reprenons le même travail à partir de plusieurs rectangles différents.

Nous chercherons finalement le programme BASIC permettant de tester des rectangles variés.

Dessin : rectangle d'origine de 1 x 0,5

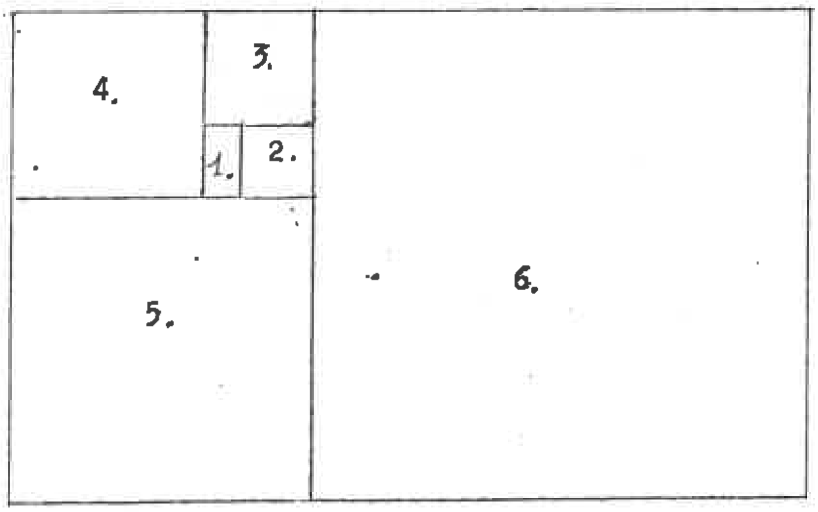


Tableau : Départ avec un rectangle de 0,5 x 1

L	l	L/l
1	0,5	2
1,5	1	1,5
2,5	1,5	1,666 666 ...
4	2,5	1,6
6,5	4	1,625
10,5	6,5	1,615 384 615
17	10,5	1,619 047 619
27,5	17	1,617 647 058
44,5	27,5	1,618 181 818
72	44,5	1,617 977 528
116,5	72	1,618 055 555
188,5	116,5	1,618 025 751
305	188,5	1,618 037 135
493,5	305	1,618 032 786
798,5	493,5	1,618 034 447
1792	798,5	1,618 033 813
2090,5	1292	1,618 034 055
3382,5	2090,5	1,618 033 963
5473	3382,5	1,618 033 998
8855,5	5473	1,618 033 985
14328,5	8855,5	1,618 033 990
23184	14328,5	1,618 033 988
37512,5	23184	1,618 033 988
60696,5	37512,5	1,618 033 988
98209	60696,5	1,618 033 988

Explication des chiffres qui apparaissent :

La longueur du premier rectangle devient la largeur du deuxième et le demi-périmètre du premier est égal à la longueur du deuxième rectangle.

Tableau : Départ avec un rectangle de 12 x 13

L	l	L/l
13	12	1,083 333 333
25	13	1,923 076 923
38	25	1,52
63	38	1,657 894 736
101	63	1,603 174 603
164	101	1,623 762 376
265	164	1,615 853 658
429	265	1,618 867 924
694	429	1,617 715 617
1 123	694	1,618 155 619
1 817	1 123	1,617 987 533
2 940	1 817	1,618 051 733
4 757	2 940	1,618 027 210
7 697	4 757	1,618 036 577
12 454	7 697	1,618 032 999
20 151	12 454	1,618 034 366
32 605	20 151	1,618 033 844
52 756	32 605	1,618 034 043
85 361	52 756	1,618 033 967
138 117	85 361	1,618 033 996
223 478	138 117	1,618 033 985
361 595	223 478	1,618 033 989
585 073	361 595	1,618 033 988
946 668	585 073	1,618 033 988
1 531 741	946 668	1,618 033 988

Tableau : Départ avec un rectangle de 3 x 100

L	l	L/l
100	3	33,333 333 ...
103	100	1,03
203	103	1,970 873 786
306	203	1,507 389 162
509	306	1,663 398 692
815	509	1,601 178 781
1 324	815	1,624 539 877
2 139	1 324	1,615 558 912
3 463	2 139	1,618 980 832
5 602	3 463	1,617 672 538
9 065	5 602	1,618 172 081
14 667	9 065	1,617 981 246
23 732	14 667	1,618 054 135
38 399	23 732	1,618 026 293
62 131	38 399	1,618 036 928
100 530	62 131	1,618 032 866
162 661	100 530	1,618 034 417
263 191	162 661	1,618 033 824
425 852	263 191	1,618 034 051
689 043	425 852	1,618 033 964
1 114 895	689 043	1,618 033 997
1 803 938	1 114 895	1,618 033 985
2 918 833	1 803 938	1,618 033 99
4 722 771	2 918 833	1,618 033 988
7 641 604	4 722 771	1,618 033 988
12 364 375	7 641 604	1,618 033 988

Conclusion :

Quel que soit le rectangle initial, on retrouve toujours la la convergence vers le Nombre d'Or.

Programme Basic permettant de tester des rectangles variés :

```
1Ø HOME : CLEAR
2Ø INPUT "LARGEUR DU RECTANGLE";A
3Ø INPUT "LONGUEUR DU RECTANGLE";B
4Ø C = A + B
5Ø D = A/B
6Ø PRINT A , : PRINT B , : PRINT D
7Ø A = B
8Ø B = C
9Ø GOTO 4Ø
```

C H A P I T R E 6

CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DU RECTANGLE D'OR

1 3 points ABC forment une section dorée si :

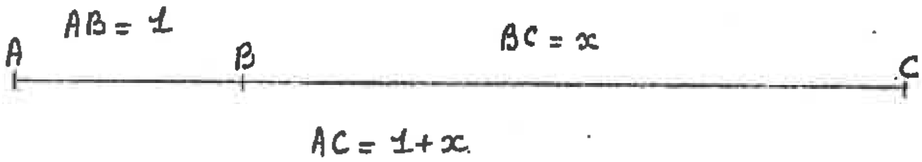
$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{BC}$$

Si l'on prend AB = 1 et BC = x on obtient alors :

$$\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x}$$

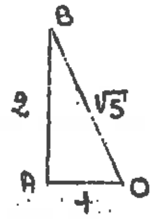
$$x^2 = 1 + x \quad \text{soit} \quad x^2 - 1 - x = 0$$

(voir au chapitre 3 la résolution de cette équation).

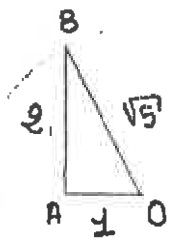


2 Soit ABO un triangle rectangle tel que AO = 1 et AB = 2.
Calculons OB à l'aide du théorème de Pythagore.

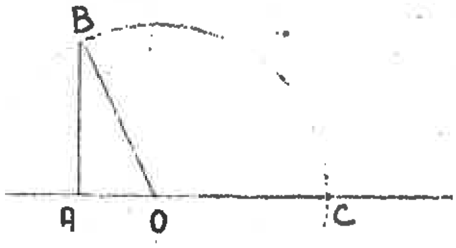
$$OB^2 = AB^2 + AO^2$$
$$OB = 4 + 1$$
$$OB = 5$$
$$OB = \sqrt{5}$$



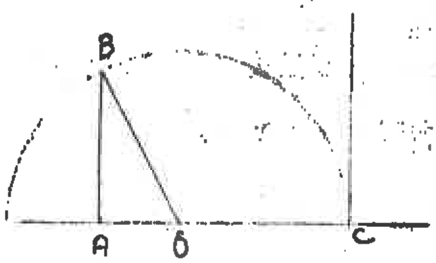
3 Reprenons le triangle rectangle AOB et traçons le demi-cercle de rayon OB de centre O.

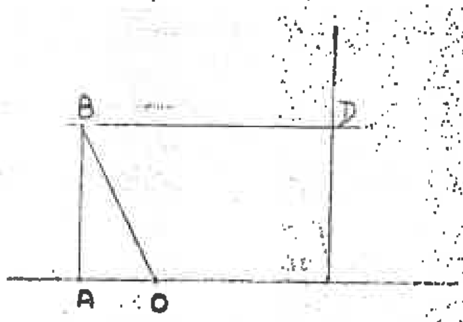


Traçons une droite passant par les points A et O et coupant le demi-cercle en un point C.



Traçons la perpendiculaire à AC passant par le point C puis la parallèle à AC passant par le point B et coupant la perpendiculaire en un point D.



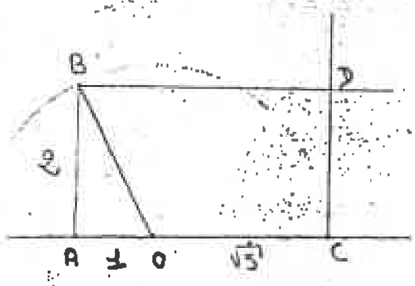


On obtient donc un rectangle.

Démontrons que le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle obtenu est le nombre d'or.

- $[OC]$ est un rayon du cercle (car le demi-cercle passe par C) comme $[OB]$: et $OB = \sqrt{5}$ donc $OC = \sqrt{5}$

$$AC = AO + OC$$
$$AC = 1 + \sqrt{5}$$
$$AB = 2$$
$$OC = \sqrt{5} \Rightarrow AC = 1 + \sqrt{5}$$



Par définition : Dans un rectangle d'or :
Nous savons qu'une longueur est égale au produit de "k" par la largeur :

$$L = k \times l$$

Prenons une longueur [AC] et une largeur [AB]. Le rapport entre cette longueur et cette largeur est :

$$AC = k \times AB$$
$$1 + \sqrt{5} = k \times 2$$

k est l'inconnue donc $k = \frac{L}{l}$:

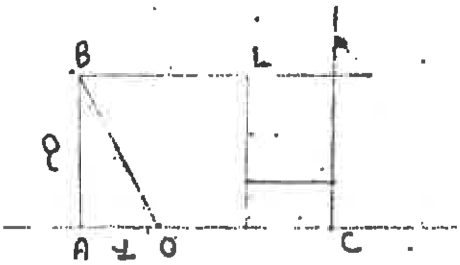
$$k = \frac{AC}{AB}$$

$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

C'est le nombre d'or.

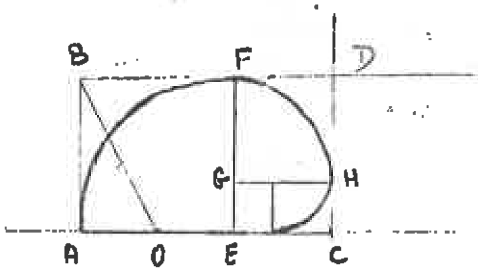
4 Construction de la spirale.

On procède tout d'abord à la construction de différents carrés à l'intérieur du rectangle obtenu ci-dessus : c'est-à-dire que l'on prend la largeur et on la reporte sur la longueur.

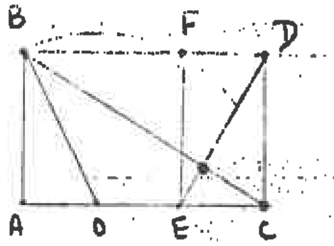


et ainsi de suite ...

Pour construire réellement la spirale, il suffit de placer la pointe du compas en un point E et de tracer l'arc de cercle allant du point A au point F.
Puis on recommence cette action en plaçant cette fois-ci la pointe du compas en un point G et l'on trace l'arc de cercle allant du point F au point H et ainsi de suite....



En finissant la construction de cette spirale, on remarque qu'elle s'enroule autour d'un point.
Traçons maintenant la diagonale BC et la diagonale DE. On a l'impression que ces deux diagonales se coupent en ce même point limite.



Dans le rectangle ABDC, on construit le carré ABFE puis le carré FDHG.
Nous voulons calculer la position du point G sur FE.

Démonstration

1° $BD = 1 + \sqrt{5}$

$BF = 2$ car $BA = 2$

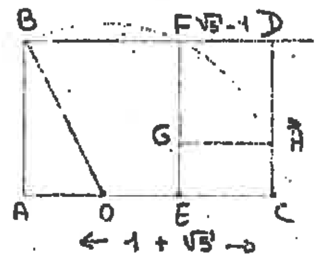
BFEA est un carré

$FD = 1 + \sqrt{5} - 2$

$FD = \sqrt{5} - 1$

Comme FDHG est un carré alors :

$$FG = FD = \sqrt{5} - 1$$



Le point G trouvé ici nous permet de tracer notre deuxième carré nécessaire pour construire la spirale.

2° **Démontrons que le point G' : point d'intersection de [BC] et [DE] et G sont confondus.**

$$tg\,\alpha = \frac{DC}{BD} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{FG'}{BF} = \frac{FG'}{2}$$

$$\frac{FG'}{2} = \frac{2}{1+5}$$

$$FG' = \frac{4}{1+\sqrt{5}} = \frac{4\,(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\,(1-\sqrt{5})}$$

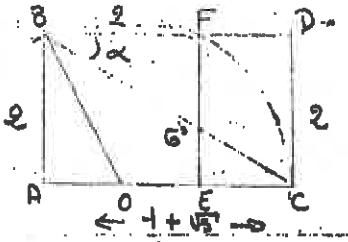
$$= \frac{4\,(1-\sqrt{5})}{1-5}$$

$$= \frac{4\,(1-\sqrt{5})}{-4}$$

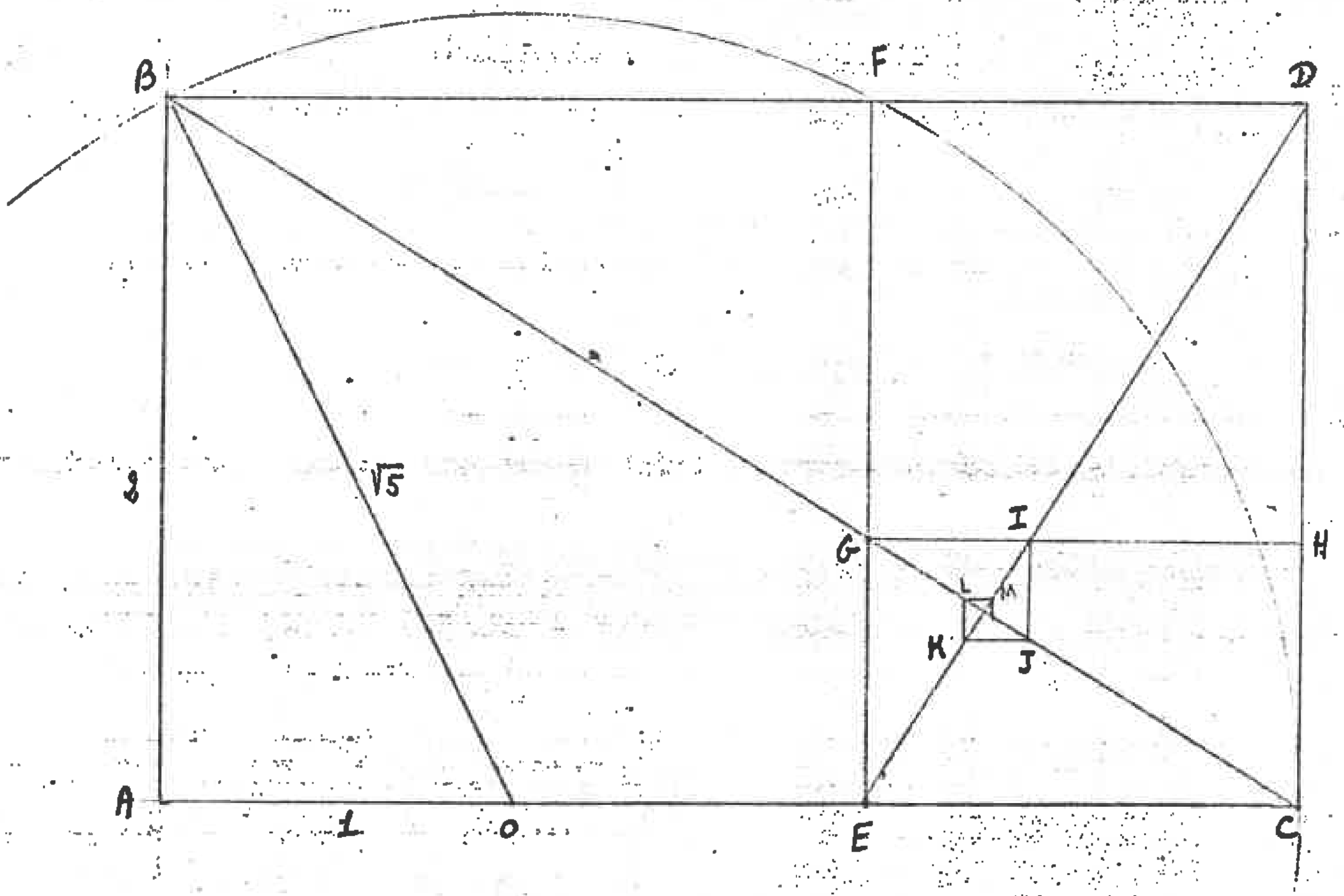
$$= -\,(1-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5} - 1$$

$FG = FG' \Longrightarrow$ G et G' sont confondus.



Le coin du carré FDHG est sur la diagonale [BC]. De même le coin du carré suivant se trouve sur la diagonale [BH]. Le suivant se trouve sur [FC] c'est-à-dire sur [AC], etc...
Nous pouvons donc tracer les carrés (par conséquent la spirale uniquement à l'aide des diagonales [BC] et [DE].



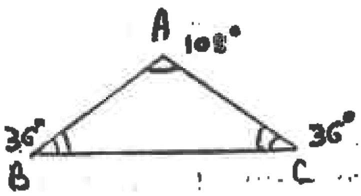
les points E, G, I, J, K, L, M, ... sont les centres successifs des quarts de cercles qui constituent la spirale

C H A P I T R E 7

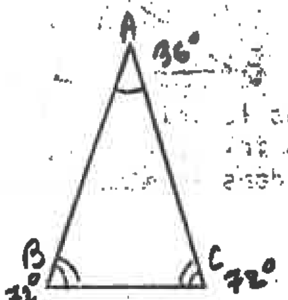
TRIANGLE D'OR

1° - Les 2 triangles d'or sont isocèles

Type 1 :



Type 2 :



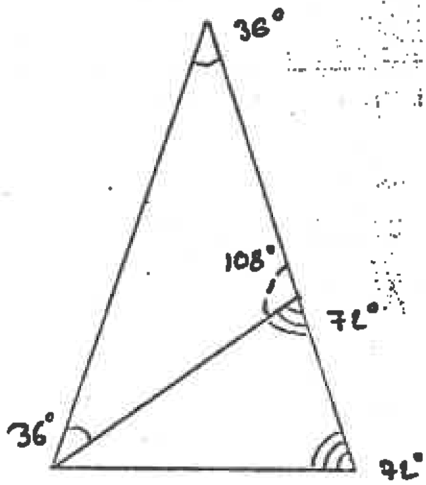
*Le 1 a 2 angles de 36° et le 2 a 2 angles de 72°.

*Rapport des côtés: $AB=AC$, $k=\frac{BC}{AB}$ pour le 1.

$AB=AC$, $k=\frac{AB}{BC}$ pour le 2.

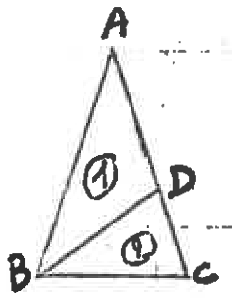
k étant le nombre d'or, c'est-à-dire $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

*Rôle des bissectrices : Si l'on prend le triangle 2 et que l'on coupe ce triangle par une de ses bissectrices, on obtient 2 nouveaux triangles ; ce sont aussi les 2 triangles d'or. (voir démonstration à la fin de ce chapitre).



2° "L'un est le gnomon de l'autre" :

Lorsque l'on coupe le triangle du type 2 avec une de ses bissectrices, on retrouve les triangles 1 et 2. Le triangle 1 est donc le gnomon de l'autre et vice-versa.



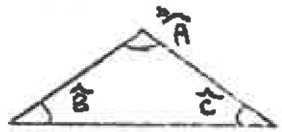
1 gnomon du 2
et
2 gnomon du 1

*Dans le triangle ABC , on construit la bissectrice BD. Le triangle BCD est donc un triangle d'or. On construit la bissectrice CE, le triangle CED EST encore un triangle d'or, etc... On peut continuer ainsi indéfiniment en tournant toujours dans le même sens. (voir grand dessin).

Etude des figures successives :

*Angles :

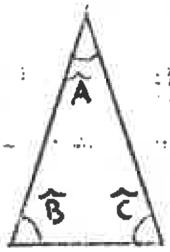
Type 1



$\hat{A}=108°=3\hat{B}=\frac{3}{5}\ 180°$

$\hat{B}=\hat{C}=36°=\frac{1}{5}\ 180°$

Type 2



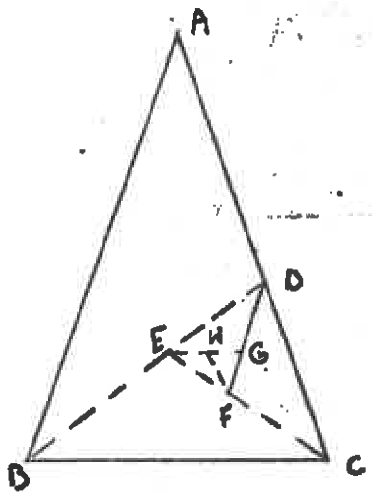
$\hat{A}=36°=\frac{1}{2}\ \hat{B}=\frac{1}{5}\ 180°$

$\hat{B}=\hat{A}=72°=\frac{2}{5}\ 180°$

*Mesures des côtés :

Type 1 : Si AB = 1 alors BC = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Type 2 : Si BC = 1 alors AB = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



BD bissectrice de ABC

-Etape 1: Triangle ABC

BC = 1 et AB = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

-Etape 2 : Triangle BCD

BC = 1 et $\frac{BC}{CD}$ = k => CD = $\frac{BC}{k}$ =

$= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$

-Etape 3 : Triangle CDE

.../.

$\frac{DC}{DE} = k \implies DE = \frac{DC}{k} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ (Donc $DE = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2$).

-Etape 4 : triangle DEF

$$DE = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\frac{DE}{EF} = k \implies EF = \frac{DE}{k} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^3$$

Et ainsi de suite.

-Etape n :

Grand côté : $\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-2}$

Petit côté : $\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}$

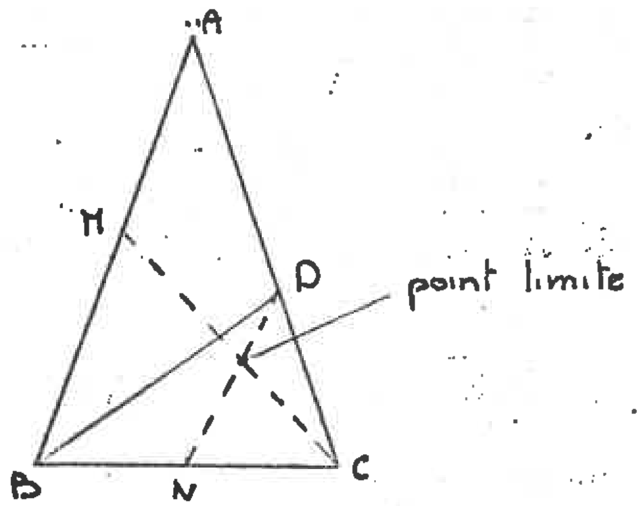
* Parallèlisme :

(DF)//(AB) ; (EG)//(BC) ; (FH)//(CA) ; (GI)//(AB) etc...

* Pour passer d'un triangle au suivant, on divise la longueur des côtés par 1,6 environ. Et on fait une rotation de 180°. Pour retrouver un triangle dans la même position que le premier, il faut attendre le 11e.

* Point limite :

Les triangles deviennent de plus en plus petits et semblent s'enrouler autour d'un point limite : ce point est déterminé par la construction suivante : Le point limite est le point d'intersection de la médiane [CM] du triangle ABC et de la médiane [DN] du triangle BCD ([BD] étant la bissectrice de B).



3° Retrouver la spirale logarythmique (voir dessin) :

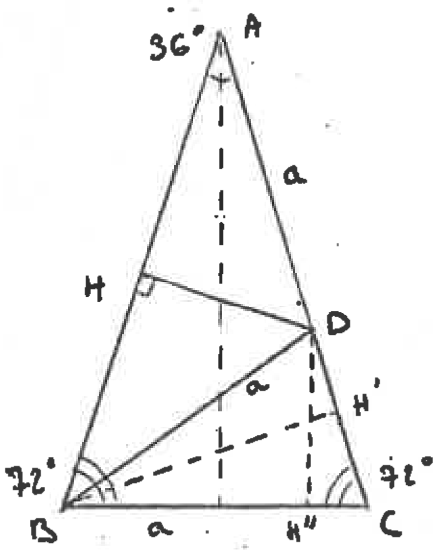
On peut la retrouver en prenant le compas : on prend comme axe l'angle A d'un triangle du type 2 et on trace alors l'arc de cercle qui se trouve entre B et C, on recommence pour chacun de ces triangles, on obtient alors à vue d'oeil une "SPIRALE LOGARYTHMIQUE".

*** Dans le livre, l'exercice n° 36 p 193 contient une démonstration de ce problème.

A partir d'un triangle isocèle de côtés AB = AC = 1 et BC = a tels que $\hat{B} = \hat{C} = \frac{2\pi}{5}$

On démontre la propriété de la bissectrice [BD] qui partage le triangle en deux triangles isocèles, le triangle BCD retrouvant les mêmes angles que le triangle ABC. En utilisant successivement les hauteurs [DH], [BH'], [DH''], on parvient à retrouver les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{5}$ et cos $\frac{2\pi}{5}$.

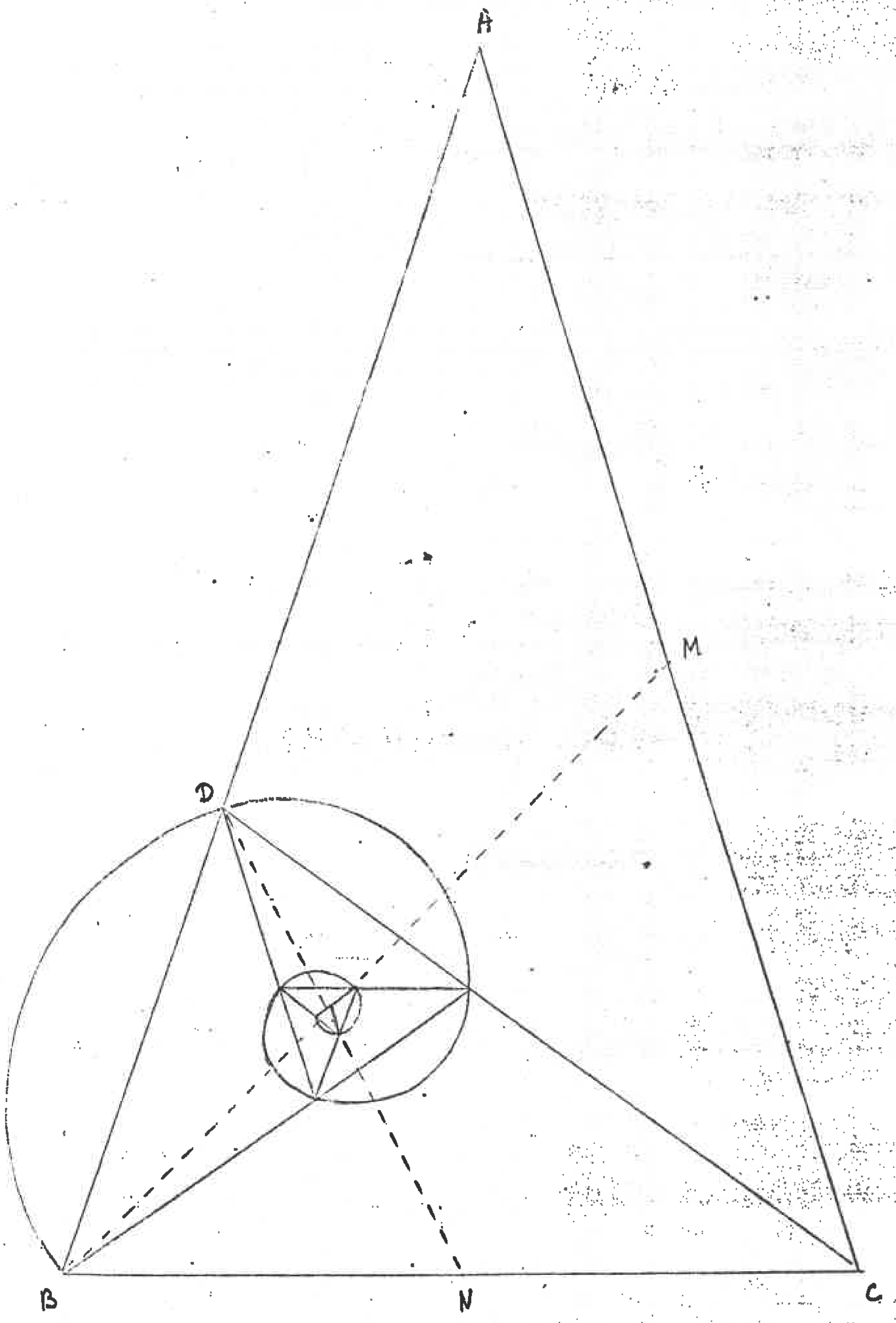
On obtient cos $\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et cos $\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$



cos $\frac{\pi}{5}$ vaut la moitié du nombre d'or

La spirale "s'enroule" autour d'un point limite obtenu par l'intersection de la médiane [BM] du triangle ABC et la médiane [DN] du triangle BCD.

[CD] est la bissectrice de $\hat{C}$


A
M
D
B
N
C

CHAPITRE 3

$\sqrt{5}$ ET LE NOMBRE D'OR PAR LES FRACTIONS CONTINUES

A – Etude de $\sqrt{5}$

1° – $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$
donc: $\sqrt{5} - 2 = \dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}$

Première étape: donc: $\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}$

On peut remplacer le $(\sqrt{5})$ qui se trouve au dénominateur par $\left(2 + \dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}\right)$

ce qui donne:

Deuxième étape:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{2 + \left(2 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}\right)}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}}$$

En remplaçant à nouveau, on obtient:

Troisième étape:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}}}$$

Quatrième étape:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}}}}$$

Cinquième étape:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}}}}}$$

Sixième étape:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}}}}}}$$

On peut continuer ce travail indéfiniment.
On appelle cette écriture "fraction continue".
Elle a été étudiée par BOMBELLI.

2° – Description de BOMBELLI

BOMBELLI (Raffele) est un mathématicien Italien né à Borgo Panigale près de Bologne en 1522 et mort en 1572. Il fut le premier, dans l'étude des équations, à calculer en utilisant les racines imaginaires. Il introduisit en algèbre les nombres complexes, et fait réaliser à

l'algèbre un pas en avant très important. Il opère avec les racines carrées de grandeurs négatives. Il considère la racine d'un nombre négatif comme le produit de la racine de sa valeur absolue par la racine de -1.
BOMBELLI utilise la règle de multiplication des puissances par addition, des exposants, par contre, il ignore la puissance 0 et les puissances négatives.

3° - Calculs approchés

La calculatrice donne $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}} \simeq 0{,}2360679$

On peut estimer que cette valeur est "petite" par rapport à 4 et la négliger à chaque étape, ce qui permet de donner des valeurs approchées de 5.

Première étape: $\sqrt{5} \simeq 2$

Deuxième étape: $\sqrt{5} \simeq 2 + \dfrac{1}{4} = 2{,}25$

Troisième étape: $\sqrt{5} \simeq 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = 2{,}235294118$

Quatrième étape: $\sqrt{5} \simeq 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}} = 2{,}236111111$

Cinquième étape: $\sqrt{5} \simeq 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}} = 2{,}236065574$

Sixième étape: $\sqrt{5} \simeq 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}} = 0{,}236068111$

. . . etc. . .

On a déjà obtenu une précision aussi grande que sur la calculatrice.

4° - Ecriture de $\sqrt{5}$

On écrira : $\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}$

Utilisons la calculatrice:

Pour effectuer un minimum de manipulations, il faut faire:

Manipulation pour l'étape 4°:

$4 \quad \dfrac{1}{x} + 4 = \dfrac{1}{x} + 4 = \dfrac{1}{x} + 2 =$

5° - Utilisation des résultats

On utilise ces résultats pour trouver une valeur approchée du nombre d'or.

Etape N°	Valeurs approchées de $\sqrt{5}$	Valeurs approchées de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	Nombre de décimales exactes par rapport au nombre d'or.
1°	2	1,5	aucune
2°	2,25	1,625	une

tableau (suite)

Etape N°	Valeurs approchées de 5	Valeurs approchées de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Nombre de décimales exactes par rapport au nombre d'or.
3°	2,2352941	1,6176471	deux
4°	2,2361111	1,6180555	quatre
5°	2,2360656	1,6180328	cinq
6°	2,236068	1,618034	six

B – Nombre D'or

Pour trouver le nombre d'or il y a une fraction continue qui est:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}$$

1° – Programme basic sur micro-ordinateur

```
1Ø  HOME
2Ø  N = 1
3Ø  X = 1
4Ø  A = N + 1
5Ø  PRINT A,X
6Ø  B = 1/A
7Ø  N = B
8Ø  X = X + 1
9Ø  GO TO 3Ø
```

2° – Résultats

1°/ 2
2°/ 1,5
3°/ 1,666
4°/ 1,6
5°/ 1,625
6°/ 1,61538461
7°/ 1,61904762
8°/ 1,61764706
9°/ 1,61818182
10°/ 1,61797753
11°/ 1,61805555
12°/ 1,61802575
13°/ 1,61803714
14°/ 1,61803279
15°/ 1,61803445
16°/ 1,61803381
17°/ 1,61803406
18°/ 1,61803396
19°/ 1,618034
20°/ 1,61803398
21°/ 1,61803399
22°/ 1,61803399
23°/ stabilisation
24°/ des nombres affichés sur l'écran.

Ces valeurs ne sont que des valeurs approchées du nombre d'or.

CHAPITRE 9

APPROXIMATION DE RACINES PAR LA METHODE DE HERON

Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron

Héron d'alexandrie : 1 er siècle après Jésus-Christ.
Encyclopédie des maths et de la physique, plus particulièrement de la géométrie et de la mécanique.

Méthode :

En partant d'un rectangle dont l'aire vaut 2, Héron cherchait à construire un carré de même aire. Voici sa méthode.

Prenons un rectangle dont l'aire vaut 2, en choisissant a=2 et b=1.

Remplaçons ce rectangle par un autre de même aire, telle que la nouvelle valeur du 1er côté soit donnée par la moyenne arithmétique des valeurs précédentes :

$$a_1 = \frac{a+b}{2}$$

Puisque l'aire vaut 2, on en déduit la mesure du 2ème côté b_1 par l'équation $a_1 \times B_1 = 2$

D'où $b_1 = \frac{2}{a_1}$

Le nouveau rectangle"ressemble" un peu plus à un carré que le précédent car les mesures de ses côtés sont plus proches l'une de l'autre.

Conclusion sur la méthode

Cette méthode d'approximation de racines était déjà connue des Babyloniens. (400 ans avant Jésus-Christ)

APPROXIMATION DE $\sqrt{5}$

$a_0 = 5$ cm $b_0 = 1$ cm

$a_0 \times b_0 = 5$ cm

En utâlisant la méthode de Héron, nous trouvons les valeurs approximatives de $\sqrt{5}$

1ère étape :

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$a_1 \times b_1 = 5 \Rightarrow b_1 = \frac{5}{3} = 1{,}6666667$$

2ème étape

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{5/3+3}{2} = \frac{7}{3} = 2{,}3333333$$

$$a_2 \times b_2 = 5 \Rightarrow b_2 = \frac{5}{7/3} = 5 \times \frac{7}{3} = \frac{15}{7} = 2{,}1428571$$

3ème étape :

$$a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{7}{3} + \frac{15}{7} = \frac{\frac{49+45}{21}}{2} = \frac{94}{21} \times \frac{1}{2} = 2{,}2380952$$

$$a_3 \times b_3 = 5 \Rightarrow b_3 = \frac{5}{a_3} = \frac{5}{\frac{94}{42}} = \frac{5}{1} \times \frac{42}{94} = \frac{210}{94} = 2{,}2340426$$

4ème étape

$$a_4 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{47}{21} = \frac{\frac{47}{21} + \frac{105}{47}}{2} = \frac{\frac{2209}{987} + \frac{2205}{987}}{2} = 2{,}2360689$$

$$a_4 \times b_4 = 5 \Rightarrow b_4 = \frac{5}{a_4}$$

$$\frac{5}{\frac{4414}{1974}} = \frac{5}{1} \times \frac{1974}{4414} = \frac{9870}{4414} = 2{,}2360671$$

5ème étape

$$a_5 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{\frac{4414}{1974} + \frac{9870}{4414}}{2} = \frac{\frac{2207}{987} \qquad \frac{4935}{2207}}{2}$$

$$= \frac{4870849 + 4870845}{2178309} = \frac{\frac{9741694}{2178309}}{2} = \underline{2{,}236068}$$

$$a_5 \times b_5 = 5 \Rightarrow b_5 = \frac{5}{\frac{9741694}{4356618}}$$

$$\frac{5}{1} \times \frac{4356618}{9741694} = \frac{21783070}{9741694} = 2{,}236068$$

à la $5^{\text{ème}}$ étape, on obtient la même précision que la calculatrice.

Conclusion : Tableau récapitulatif;

Un trouve deux suites qui encadrent la valeur de $\sqrt{5}$

etape	N°1	$1{,}666666 <$	$\sqrt{5}$	$<$	3
-"-	N°2	$2{,}1428571 <$	$\sqrt{5}$	$<$	$2{,}333\ldots$
-"	N°3	$2{,}2340426 <$	$\sqrt{5}$	$<$	$2{,}2380952$

b_n s'accroit ...... 2,236068 ..... a_n décroit

Cette méthode permet de trouver une bonne valeur approchée du nombre d'or qui vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Il y a près de 2000 ans, Héron obtênait d'excellents résultats et sans calculatrice!!

CHAPITRE 10

LE NOMBRE D'OR DANS L'ART

Que les mathématiques soient étroitement liées à l'art, et parfois même dans des domaines inattendus ne fait pas de doute. C'est même dès l'école qu'on le constate. Diverses expériences ont clairement montré que les enfants saisissent ces liens dans les leçons qu'ils reçoivent. Ainsi, beaucoup de notions acquises en classe de mathématiques transparaissent dans les travaux effectués en classe de dessin.

I - La musique :

Dans la musique, il n'y a rien de surprenant à ce que l'on trouve toujours des soubassements mathématiques.
La musique et les mathématiques s'unissent dans les oeuvres de Xenakis, créateur de la musique stochastique basée sur le calcul des probabilités. Si l'auditeur moyen se borne à apprécier le contenu émotionnel d'une oeuvre, l'auditeur plus averti trouve un plaisir supplémentaire à en déceler la structure mathématique. Les Pythagoriciens, non contents de découvrir les lois chiffrées de tension et d'attaque qui président au jeu des instruments à corde, ont posé les bases de la théorie mathématiques de l'harmonie musicale.
A priori, on pourrait penser que la symétrie n'a aucun rôle en musique. En fait, si l'on se représente une partée musicale se déroulant dans le temps, il est facile d'imaginer sa correspondance symétrique bilatérale, il est moins aisé d'imaginer une symétrie haut-bas, obtenue en renversant la portée de telle sorte que les notes hautes deviennent les notes basses et inversement.

II - La peinture :

Les artistes de toutes les époques y ont eu recours plus ou moins ins instinctivement, en particulier pour la représentation du corps humain. Quant aux peintres modernes, impressionnistes comme non figuratifs, ils se sont intensément servi du nombre d'or. De même, l'influence des mathématiques sur des peintres comme Mondrian est-elle des plus nette étant entendue que la théorie y est toujours transcendée par l'art.
Vers 1912, un groupe de peintres, Villon, Gleizes, Metzinger, Léger, La Fresnayes, Picabia, Duchamps, Kupka, et le sculpteur Duchamp-Villon se réunissent à Puteaux. La confrontation de leurs idées et de leurs oeuvres, introduit une critique du cubisme. Ils redécouvrent alors l'harmonie apportée par la "divine proportion".
Une trentaine de peintres ou sculpteurs ouvrent alors un nouveau salon, qu'ils nomment : "Section d'Or" . Ils cherchent à donner à leurs. tableaux une construction et une composition fondée sur les chiffres. La première guerre mondiale mettra un terme aux activités du groupe.

III - L'architecture :

Le modulor.
C'est à l'aube de la Renaissance que le mathématicien Léonard de Pise,

dit Fibonacci, établit la remarquable corrélation qui existe entre certaines séries de nombres et le rectangle parfaitement harmonieux que les Grecs avaient découvert, et dont les longueurs des côtés sont entre elles dans les mêmes proportions que la plus grande avec leur somme. Fibonacci montra que ce rapport est de 1,618/1, proportion que les artistes de la Renaissance appelèrent NOMBRE D'OR.
L'harmonie de cette proportion est manifeste dans beaucoup de monuments grecs, notamment le Parthénon.
Dans le domaine de l'architecture, le Suisse, Le Corbusier a élaboré une doctrine fondée sur le nombre d'or. Ses constructions sont dessinées selon un système de mesures qu'il appelle modulor, ne comprenant que des nombres entiers et constituant approximativement une "série de Fibonacci" dans laquelle chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par le nombre d'or. Le Corbusier s'est efforcé de prouver que les constructions ainsi obtenues sont exactement proportionnées aux dimensions de l'homme, tout comme Léonard de Vinci avait tenté de le faire avant lui. Bien que se reconnaissant passablement fermé aux mathématiques scolaires, Le Corbusier déclara un jour : "les mathématiques ont été inventées par l'homme pour se faciliter la compréhension de l'univers".
Dans l'architecture tout à fait contemporaine, l'utilisation de surfaces courbes aussi complexes que le paraboloïde hyperbolique est devenue courante. Ainsi, l'architecte américain Buckminster Fuller, représentant sans doute le plus caractéristique de l'architecture mathématique a bouleversé toutes les notions reçues avec sa fameuse coupole géodésique, entièrement construite sur la base des triangles équilatéraux.

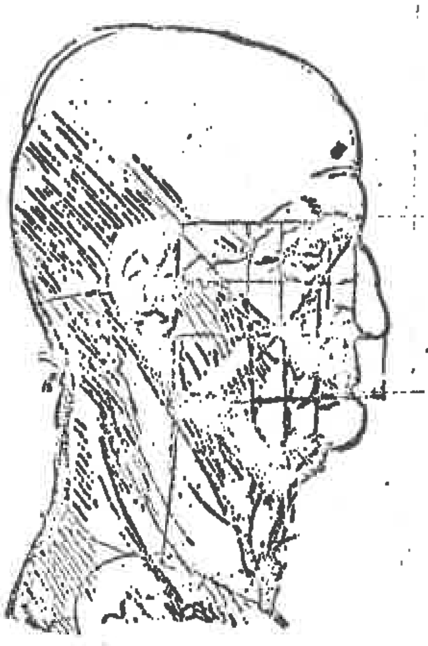
IV - Le nombre d'or dans quelques exemples :

Le rapport appelé "le nombre d'or" ou section dorée ou divine, permet des constructions harmonieuses. On le retrouve dans de nombreuses oeuvres d'art : dans "l'annonciation de Léonard de Vinci" vers 1475. (voir croquis de visage). En 1950, Le Corbusier a conçu "la cité radieuse" à Marseille en calculant systématiquement les proportions du bâtiment à partir du nombre d'or (voir dessin). De Pythagore à Le Corbusier s'est poursuivie la recherche de proportions qui permettraient des constructions esthétiques (voir le dessin du théâtre d'Epidaure).
La découverte fondamentale que les intervalles musicaux s'expriment à l'aide de rapports numériques simples fait penser aux Pythagoriciens que "tout est arrangé selon le nombre".
Comment par exemple partager un segment pour que le partage soit harmonieux ?

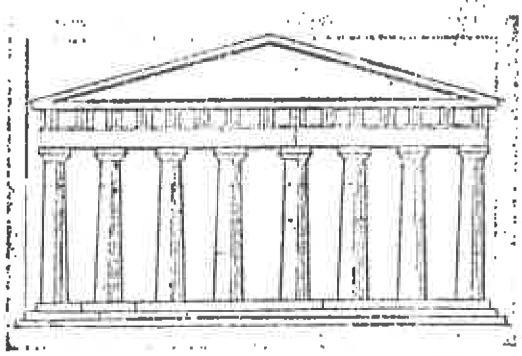
A ———— C ———— B Trop symétrique.

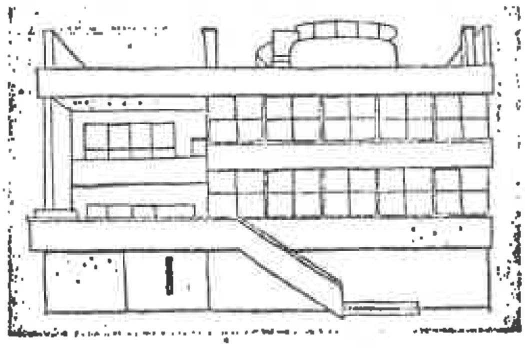
A —————— C — B Trop déséquilibré.

A ————— C ——— B Plus agréable, n'est ce pas ?



Dans cette esquisse de Léonard de Vinci (1452-1519), on peut reconnaître plusieurs Rectangles d'Or. Il est impossible de savoir si la grille a été établie avant ou après le dessin mais c'est là une nouvelle preuve que les proportions du Rectangle d'Or furent souvent utilisées en art, consciemment ou inconsciemment, car elles traduisent l'harmonie du Beau.





Nous ne savons pas si les Grecs du V^e siècle av. J.-C., connaissaient les règles du Nombre d'Or mais il semble bien que celles-ci devaient correspondre à leur intuition esthétique car le Parthénon (en haut), s'inscrit presque exactement dans un Rectangle d'Or.
Autre utilisation consciente du Nombre d'Or, cette villa due à Le Corbusier : un tel rectangle se retrouve non seulement dans le plan de base (ci-contre en bas), mais aussi dans les proportions de la section verticale de la partie située à gauche de l'escalier.

Un problème posé et résolu par Euclide (Alexandrie, III^e siècle av. J.-C.)

Se dégageant de toute préoccupation esthétique, Euclide pose ce problème purement mathématique dans la proposition 11 du livre 2 des «Éléments».

Énoncé :

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

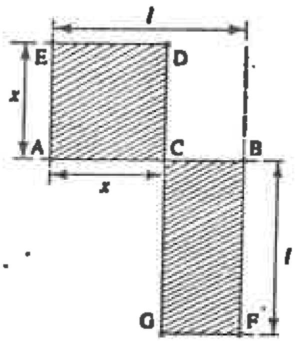


Fig. 3

Commentaires :

Euclide cherche le point C tel que l'aire du carré ACDE soit égale à l'aire du rectangle CBFG *(fig. 3)*.

Pour lui, «droite donnée» signifie «segment de longueur donnée».

Nous ne donnons pas ici la démonstration d'Euclide : elle est fondée sur des propriétés géométriques établies préalablement. Il en est des éléments d'Euclide comme d'un château de cartes : l'ensemble est assez solide mais aucune carte ne saurait tenir debout toute seule.

• Une réalisation grecque : le théâtre d'Épidaure (fin IV^e siècle av. J.-C.).

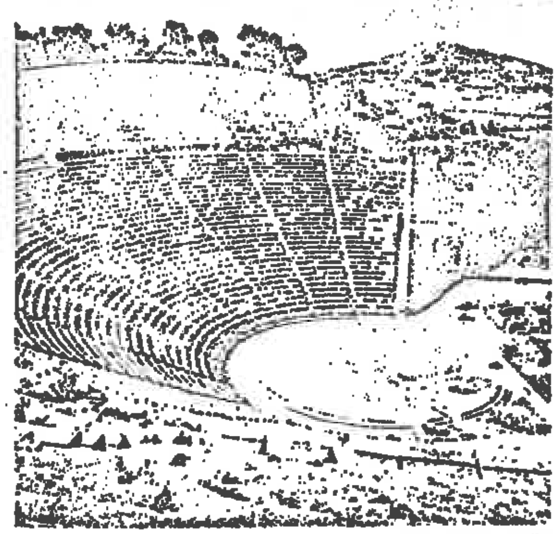


Photo Roger-Viollet

Pour éviter la monotonie, les gradins sont répartis en 2 blocs *(fig. 2)*.

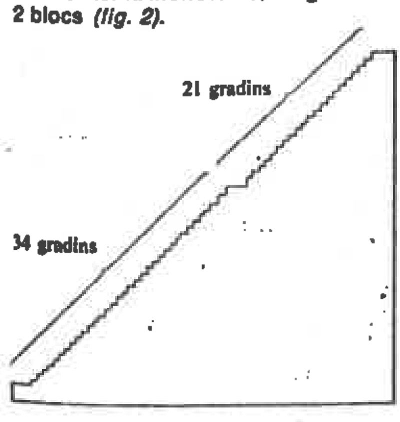


Fig. 2

Calculer les rapports $\frac{34}{21}$ *et* $\frac{34}{\text{nombre total de gradins}}$

Que peut-on dire de ces rapports?

CHAPITRE 11

UNE ENQUETE DANS LA CLASSE

Nous avons fait dessiner à chaque élève de la classe, un rectangle dont les dimensions leurs semblaient les plus harmonieuses.
Nous avons mesuré chaque rectangle ; la longueur et la largeur que nous avons ensuite reportés dans un tableau.
Nous avons calculé les rapports : $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$

Ensuite nous avons fait un graphique ayant pour abscisse l et pour ordonnée L.
Nous avons donc obtenu 35 points.
Nous avons calculé les moyennes, que nous avons fait apparaître sur le graphique par un petit point de couleur différente.
Nous avons fait ensuite le même travail en séparant les filles et les garçons, ainsi que les élèves du groupe 1 et les élèves du groupe 2.

ETUDE GENERALE DES RESULTATS

Longueur : L	Largeur : l	Rapport
11	5	2,2
6,5	4	1,62
6	2,5	2,4
7	3,5	2
6,5	3	2,16
8	4,5	1,77.
8	4	2
8	3	2,66
4	2	2
5,5	3	1,83
6,5	4,5	1,44
6,5	3,5	1,85
7	3,5	2
9,5	4,5	2,11
12,5	5,5	2,27
15,5	10,5	1,47
11	1,5	7,33
1	0,5	2
6,5	1,5	4,33
5	2,5	2
6	2,5	2,4
8,5	4	2,12
12,5	4	3,12
12,5	4,5	2,77
15	8	1,87
4,5	2	2,25
17	8	2,25
6,5	3	2,16
8	2,5	3,2
6,5	2,5	2,6
7,5	3	2,5
22,5	15,5	1,45
11	6	1,83
28,5	18	1,58
7,5	3,5	2,14

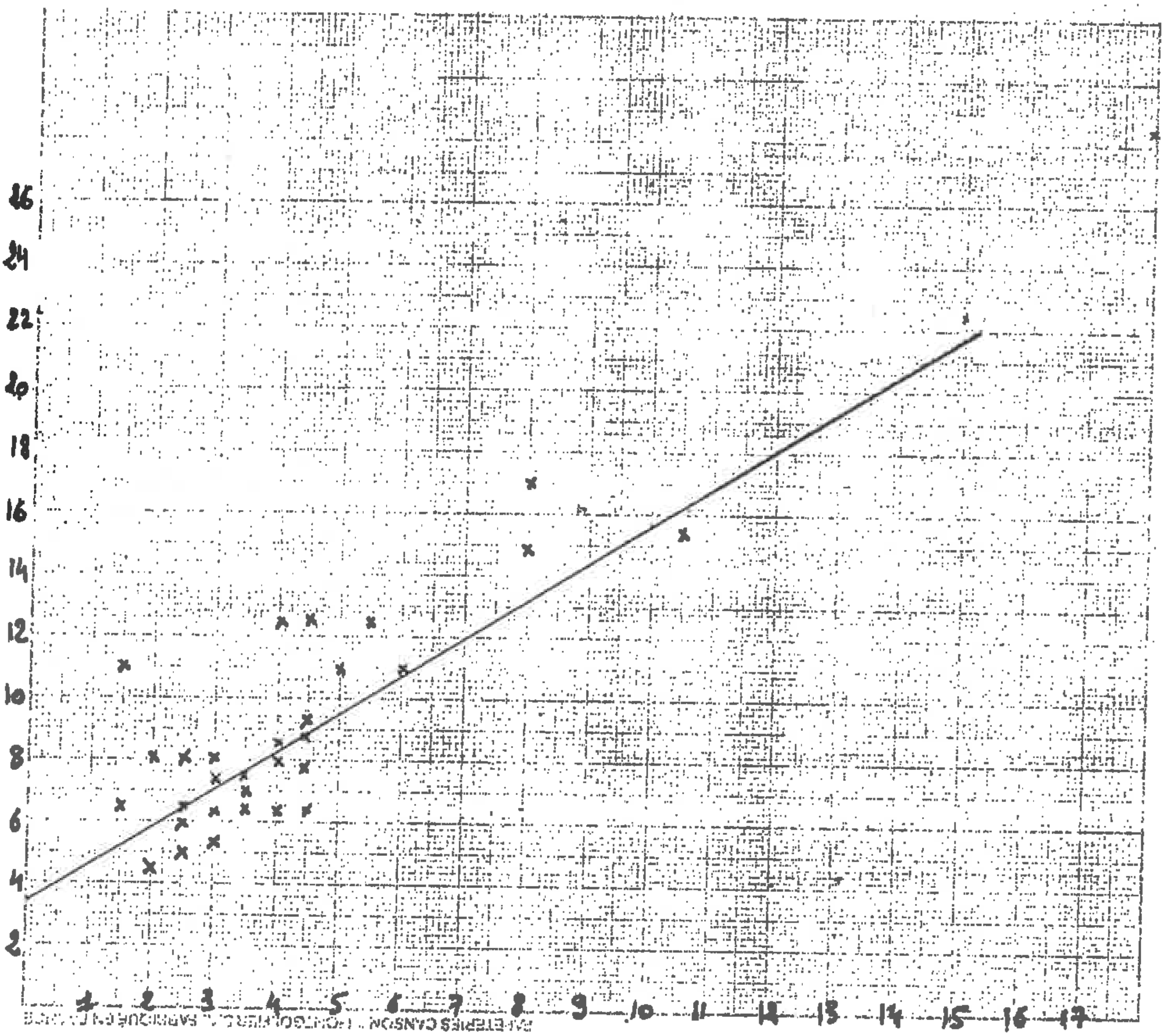
La longueur : L = 9,6 (moyennes)

La largeur : l = 4,97

Le quotient moyen est : 1,93

Coefficient de corrélation : 0,8 947

LES ELEVES DE TOUTE LA CLASSE

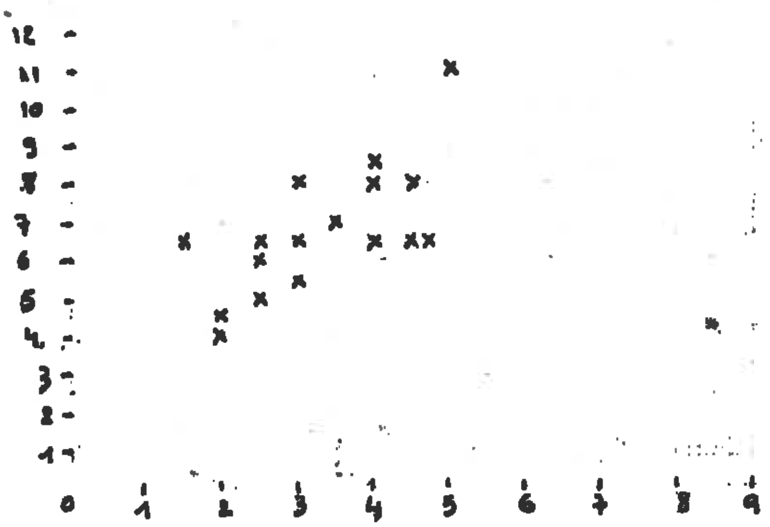


Le nuage a approximativement la direction d'une droite :

Equation de la droite d'ajustement : $L = 1,24\ l + 3,44$ (programme de terminale) . .

GROUPE 1

(composé de filles et d'un seul garçon)



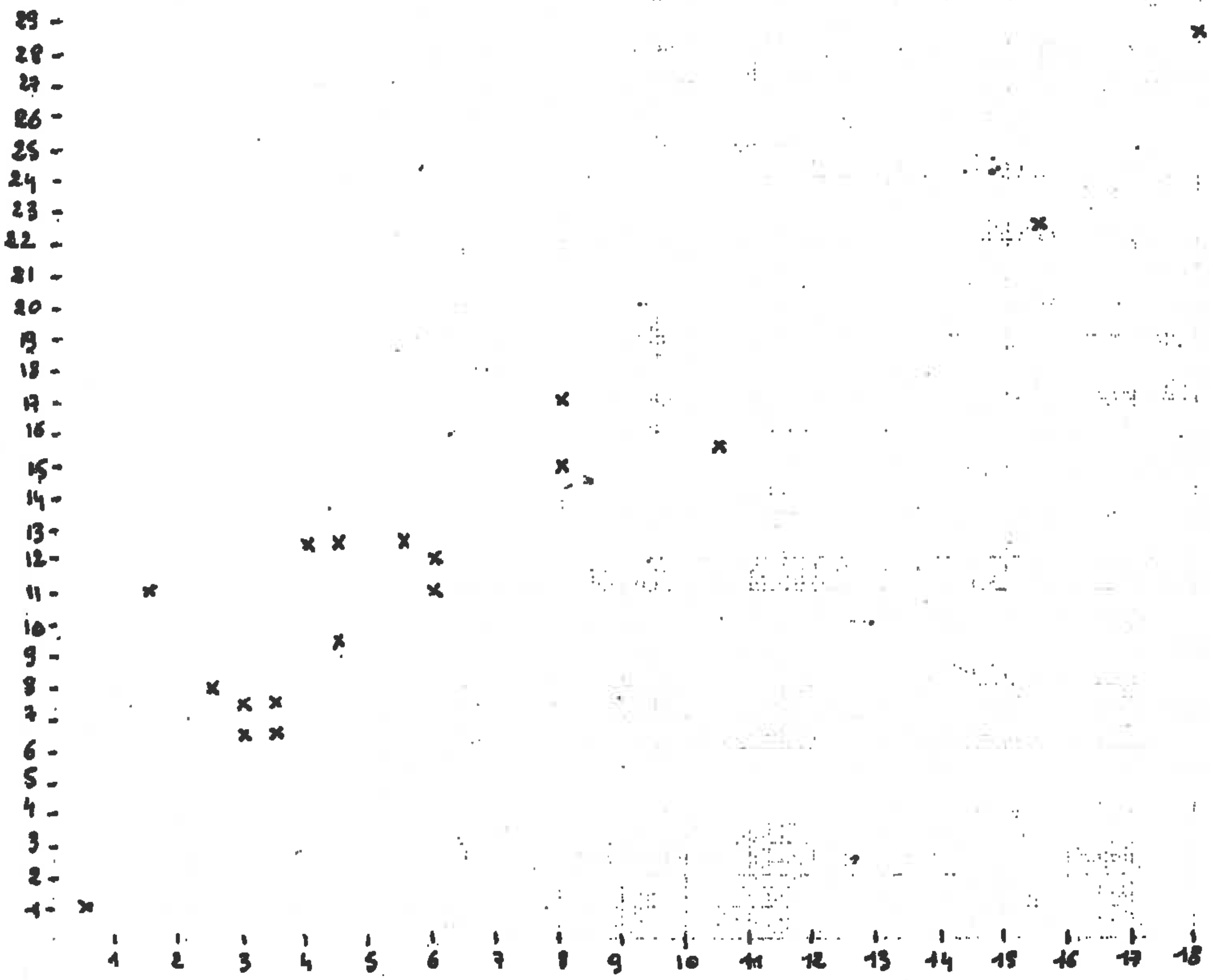
Le nuage a approximativement la direction d'une droite

Longueur : 6,72 } moyennes
Largeur : 4,66 } moyennes

Quotient moyen : 1,44

GROUPE 2

(moitié filles; moitié garçons)

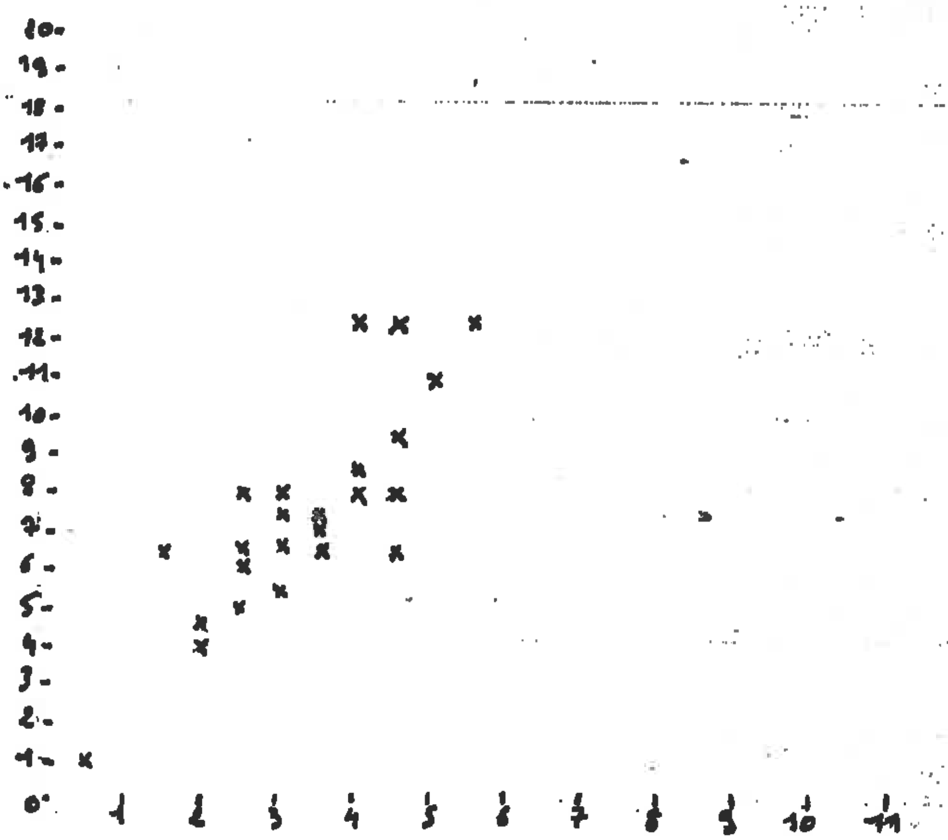


Le nuage a approximativement la direction d'une droite

Longueur : 12,02 } moyennes
Largeur : 6

Quotient moyen : 2,003

LES FILLES



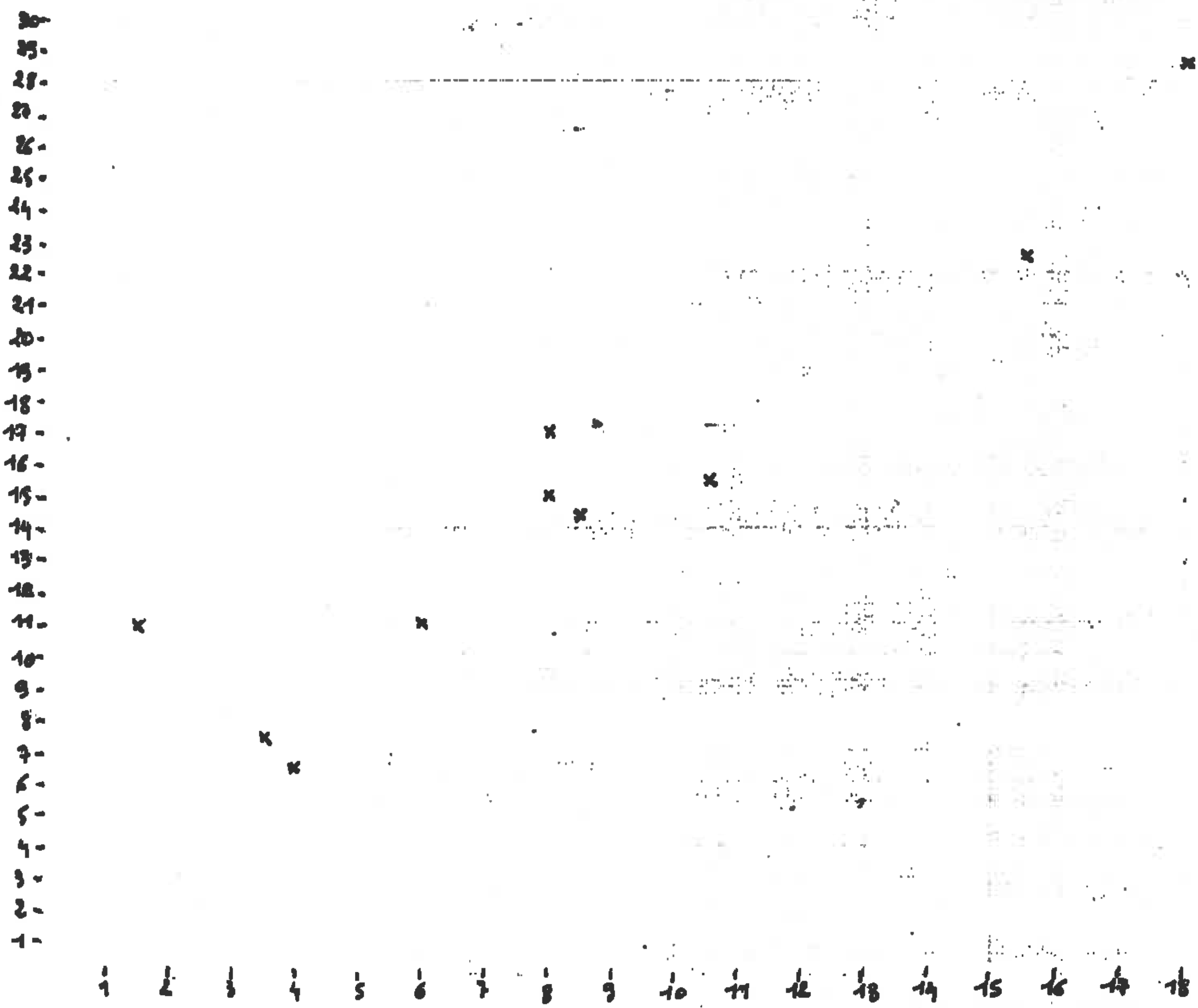
Moyenne de la longueur : L = 7,34

Moyenne de la largeur : l = 3,25

Quotient moyen : 2,25

Le nuage a approximativement la direction d'une droite.

EN GARCON :



Moyenne de la longueur : L = 14,9

Moyonne de la largeur : l = 8,33

Qkotient moyen : 1,78

Le nuage a approximativement la direction d'une droite.

CONCLUSION du CHAPITRE

On s'attend généralement à obtenir des quotients proches du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui vaut environ 1,618.

Dans la classe, c'est le groupe 1 qui donne les résultats les plus proches du nombre d'or, le groupe 1 étant composé d'élèves plus faibles en géométrie.

Par rapport au partage "filles-garçons", ce sont les garçons qui se rapprochent le plus du rectangle d'or.

ANNEXE 2 :

LA PRODUCTION DES ELEVES

Chapitre 1 : Thierry VAN DER HAEGEN - Graziella LAGUERRE - Valérie LAURIN

Chapitre 2 : Sylvie FILLION - Hélène DELENGOWSKI

Chapitre 3 : Florent OUDOT - Christophe THEVENIN - Clothilde GENTILS

Chapitre 4 : Martine LANGLOIS - Anita SANCHEZ - Céline GABRIEL

Chapitre 5 : Karine MATHELLIE - Christine CHATEL
Roseline LEBRUN - Sandrine SPREDER

Chapitre 6 : Sylvie HARSIGNY - Virginie HENRION
Sylvie DESCHAMPS - Isabelle DELAVAUD

Chapite 7 : Xavier DE CHADIRAC - Antony ISTE - Johann DURDON

Chapitre 8 : Olivier DOMANGE - Didier BAUCHET - Bruno BATTEUX

Chapitre 9 : Mireille BONG NWAL - Chantal BONG NWAL

Chapitre 10: Catherine TASSOTI - Lydie LENESLEY
Carole CARTIE - Sylvie BENOMART

Chapitre 11: Christine CORNIC - Valérie PRIEUR
Christiane DESBORDES - Magali MARTENS

Fiche dublirem

TITRE : AUTONOMIE ET MATHEMATIQUES EN SECONDE
TOME 2 : PROMENADE AUTOUR DU NOMBRE D'OR

AUTEUR : CLASSE DE SECONDE DE MADAME ARSENE

NIVEAU : SECONDE

DATE : DECEMBRE 1985

MOTS-CLÉ : spécialité MATHEMATIQUES
autres TRAVAUX DE GROUPES
AUTONOMIE
INTERDISCIPLINARITE (MATHEMATIQUES - DACTYLOGRAPHIE)
NOMBRE D'OR

RESUME : Onze chapitres très variés, autour du thème du Nombre d'Or, entièrement réalisés par les élèves (dactylographie comprise), et construits uniquement sur des notions du programme de Seconde.

Ce document montre comment des élèves de Seconde, travaillant en groupes, peuvent explorer de façon autonome un thème et construire une oeuvre collective riche et intéressante.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	IREM numéro
A4	55	20 F	Re 16